

## Math 480a -- April 23, 2008 -- Matrix Algebra

# Matrix Algebra

1. Exact matrix algebra is about doing operations and solving problems involving matrices with entries that are all integers, or rationals, or numbers mod  $p$ , or polynomials, etc. Each entry is *not* specified numerically. Thus numerical analysis (appears) to not be relevant. Issues of numerical stability disappear, and are replaced with issues of *intermediate coefficient overflow*.
2. Behind the scenes much of the code I'll demo below uses a huge range of fascinating nontrivial ideas... Next quarter there will very likely be a grad course by Clement Pernet on exactly these ideas.
3. Of the general purpose mathematical software systems, Sage and Magma are by far the best in the world at exact linear algebra when the sizes of the problems get large. For *small problems only*, PARI and GAP are pretty good. In some cases Mathematica is OK. Maple and Matlab are terrible.

## Creating matrices

```
# The matrix command
matrix(2,3, [1,2, 3/4,5, 2/3,-7])
```

```
[ 1  2 3/4]
[ 5 2/3 -7]
```

```
# Or make a space of matrices
M = MatrixSpace(QQ, 2, 3)
M
```

```
Full MatrixSpace of 2 by 3 dense matrices over Rational Field
```

```
# And coerce into it
M([1,2, 3/4,5, 2/3,-7])
```

```
[ 1  2 3/4]
[ 5 2/3 -7]
```

```
M(0)
```

```
[0 0 0]
[0 0 0]
```

```
# Make a random matrix
a = random_matrix(QQ, 10,20)
show(a)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
# Sparse and dense matrices
a = matrix(QQ, 10^6, 10^6, sparse=True)
a[3,1039] = -4/5
```

```
a
```

```
1000000 x 1000000 sparse matrix over Rational Field
```

```
a[3,1039]
```

```
-4/5
```

## Matrix arithmetic: addition, multiplication

```
a = random_matrix(ZZ, 3); b = random_matrix(ZZ, 3)
show((a,b))
```

$$\left( \left( \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 14 & 0 \\ 4 & -6 & 13 \end{pmatrix} \right) \right)$$

```
a*b
```

```
[-23 -44 -46]
[ -4  -9 -16]
[ -1   1   3]
```

```
a+b
```

```

[-1 -6 -7]
[ 2 13 -1]
[ 3 -6 13]

```

```

c = a \ b
c

```

```

[ -4  6 -13]
[ 27 21  81]
[-32 -29 -94]

```

```

a * c == b

```

```

True

```

## Reduced row echelon form

```

a = random_matrix(QQ, 10,20); show(a)

```

$$\begin{pmatrix}
 -1 & -2 & -2 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 -2 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 & -1 \\
 -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & -2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -1 & -2 & \frac{1}{2} & 0
 \end{pmatrix}$$

```

show(a.echelon_form())

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42053 & -175805 & 65661 & 99137 & 67531 & -18977 & 18256 \\ & & & & & & & & & & & 21316 & -42632 & 5329 & 21316 & 21316 & -5329 & 42632 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4885}{10658} & -\frac{35993}{21316} & \frac{26870}{5329} & \frac{23809}{10658} & \frac{15863}{10658} & -\frac{1438}{5329} & 2720 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{56025}{21316} & \frac{90765}{42632} & -\frac{68530}{5329} & -\frac{68071}{21316} & -\frac{81611}{21316} & \frac{22084}{5329} & -\frac{25696}{42632} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3693}{10658} & \frac{15821}{21316} & -\frac{4788}{5329} & -\frac{17027}{10658} & -\frac{11643}{10658} & -\frac{2226}{5329} & -\frac{748}{21316} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6765}{10658} & -\frac{122291}{21316} & \frac{50978}{5329} & \frac{66255}{10658} & \frac{42793}{10658} & -\frac{10424}{5329} & \frac{3356}{21316} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11768}{5329} & \frac{13933}{10658} & -\frac{46836}{5329} & -\frac{12419}{5329} & -\frac{16297}{5329} & \frac{14126}{5329} & -\frac{4122}{10658} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9261 & -127927 & 37819 & 87959 & 59045 & -882 & 6958 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21316 & -42632 & 5329 & 21316 & 21316 & -5329 & 42632 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5794 & -38891 & 49002 & 23566 & 16837 & -7790 & 2915 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5329 & -10658 & 5329 & 5329 & 5329 & -5329 & 10658 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9043}{10658} & \frac{47517}{21316} & \frac{19938}{5329} & -\frac{6955}{10658} & -\frac{259}{10658} & -\frac{2230}{5329} & \frac{7019}{21316} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8487}{5329} & \frac{38507}{10658} & -\frac{59019}{5329} & -\frac{23532}{5329} & -\frac{22390}{5329} & \frac{16175}{5329} & -\frac{4017}{10658} \end{pmatrix}$$

```
a = random_matrix(ZZ, 10, 20); show(a)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & -12 & 2 & -5 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -27 & 3 \\ -15 & 0 & 14 & -1 & 1 & 4 & -7 & 1 & -2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -33 & -18 & -8 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 & 2 & 0 & 38 & 7 & -1 \\ 14 & 0 & 0 & 1 & -1 & 20 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 19 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -29 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 & -18 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -12 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 9 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -11 & 53 & 1 & 0 & -7 & 24 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
show(a.hermite_form())
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 64154432 & -3250224309 & -978734028 & 509730946 & 260012 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 75488086 & -3824415637 & -1151639227 & 599781065 & 305946 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2724114 & -138010384 & -41558803 & 21644097 & 11040 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5509393 & -279119646 & -84050778 & 43774186 & 22329 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44383627 & -2248585802 & -677112483 & 352644511 & 179882 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 65530359 & -3319932221 & -999725040 & 520663199 & 265588 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 49331536 & -2499259232 & -752597293 & 391957491 & 199936 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21250411 & -1076599062 & -324194282 & 168842456 & 86126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 25490514 & -1291413264 & -388880876 & 202531656 & 103310 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81479321 & -4127946659 & -1243040939 & 647383671 & 330228 \end{pmatrix}$$

```
a = random_matrix(ZZ, 200, x=-2^32, y=2^32)
a[0]
```

```
(-1848104841, -3387722453, 1920756168, -3249745750, -2523414042,
978170011, -1963683579, -589272360, 712322838, 981543707,
```

```

-3927606404, -4173569474, 2781796906, -2999679505, -1697322451,
672299505, -49984760, 3068067244, -3387589469, -947824778,
1699221246, -3971784364, -342496312, 1745106148, 2301568427,
577339616, -572355624, 1156687697, -3764107334, -1462069474,
-3801597066, -403831079, 3391149002, 3755091367, -2036719318,
3739974368, 827593844, -2997451646, 3524894023, 3127180376,
-1998477835, 3646771945, 2169381225, 434922784, 727676976,
640507714, 1454157525, 436941904, -2036670867, 4209577258,
-3585923459, -3401032374, 3280829478, -871527730, 370480941,
-2821802511, 3214307301, -217324770, -3263256753, -845474223,
1992293250, -2067100975, -1146876334, 1550957948, 668357327,
-3963481376, -82781548, 3446422011, 3345508889, -237976554,
-2848927972, 3695972099, -1847958014, -2575197412, 710754053,
-1470833420, -1345432759, -3213406919, 1253885360, 1565269605,
-1907136775, -383804733, 4002194704, -3172764970, 846206212,
-3259854850, -3978379977, 106089565, 319403090, -3606835987,
3173584647, 891627020, -1136656241, 1482942051, 786060648,
-2435155130, 2468956190, 3981969286, -2364423248, 2047392202,
-2391019869, 1189663424, -3628728733, 432760861, 2757593725,
-176338334, -2168585575, 890226428, -1992128762, -2439615997,
4086491431, 3626110233, -1113828592, -1816667795, -2940157279,
-2745876181, 81607928, 1697019178, -3190105744, -24150257,
975903181, 2209629602, 3281728292, -2807272880, 2625522280,
4098960729, -2439235406, -2011363079, -204240167, 586154689,
1928318968, 236830952, 2982229860, 56916480, -2465315120, -31667909,
-3283587368, 2632538253, 860644310, 755773189, -28117377,
1036343506, -1108437896, -2847405353, 2685824819, -3683868010,
2293008382, 4142795007, -3792028060, 3829264587, 3980505966,
967903067, -2852343910, -2886538969, -1022683995, -1184231197,
-291095683, -616494810, 1972907438, -1688171657, -856038235,
-2703441357, -2709084139, -1016693016, 1084297564, 1194685822,
1893109802, -705983025, -4241900928, -696543530, -2554835327,
-4087588508, 2431309339, -3154835356, 474682244, -3661291861,
94046415, 1841548919, -272495549, 1523422768, -2124135517,
-2446139546, 2090397191, 646686612, 3269874698, -2908445814,
-4251002726, 423822859, -880600623, 3433705865, 100555650,
3072720717, 3579565423, -2693551475, -1049638068, 2025580915,
2558099500, 4080281320, -1673085674, 972230655)

```

```
time b = a.hermite_form()
```

```
CPU time: 3.24 s, Wall time: 3.30 s
```

```
b[0]
```

```

(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
11140666771088350281633506346904821501908402195738774298552840057609\
32419278927863156000257063706061132104397847640623964113640377223342\
23102144939091169959259017467610678429956666311541854686075246727493\

```

```

97897708044995253021430388457736393920880980207590955349115871935055\
21186332154466061162003151164732716411068382853331142804016623945896\
12682705551561240243445668326184268352755234057947829415283815686901\
79661074165813102164751142898480155083329678858660929493373184087014\
42248582315674596472005811933849869343946091453453169005391452082304\
51653989367234045842845154951042644913520027022546173279573745267047\
32929189058981568839140372332918203951259160292597216664090313500139\
32162749477118425619137204471930232188449013039770633556080155903028\
68438026425477542205603549586444601677947904493211724412525422829852\
80875647253096396514344956609362389889062485401658952020632947529897\
85251581077330404030992916580612684243184638415736815808267295249617\
12518646872688043470795539624462001307145990419560979016385995358191\
10910716172638349364663998087882019828544779033407234584254824530915\
52504878276050515462360404012306421051539809022978141962731806764787\
05369990950356132831061262398544983222780506704440393292148123366194\
94697575812732907428296301424895392123940050031809172851639054374136\
38091018273363039920575063022144129948793777196961375571146634178299\
15581979262708095527309790261564806860170606642829182264347714106970\
51132873472290898114328723117122437920801301660001064365114404486713\
45256024990190794887001882890251339710059310540500760874836912884677\
28709370563834678221594874671851821896878336376160546633050602120759\
87853341224661154005250697358053297110551801766946765430561927289878\
08873632857487595917832602782914770809866181738511526065928283799511\
82333941103793704792654249036788267751840760559560645457750260777952\
93032728738742020078289627683756158029618442898007436322647314439260\
07756733137071140706175851636285145729168166947392146373111523745096\
48925796521020016223038855894523764907567672135534693184857833303667\
7687655840501914874038428)

```




```
a = random_matrix(QQ, 5); a
```

```

[  0  0  0 -1/2  -1]
[ 1/2  0  1  1  1]
[  0 -1 -1  0 -1]
[  0  1 -1/2  2  0]
[  0 -2 -2  0 -2]

```

```
a.det()
```

```
0
```

## Solving Systems

```

a = random_matrix(QQ, 4)
v = random_matrix(QQ, 4, 1)

```

```
show((a,v))
```

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

```
b = a.solve_right(v)
show(b)
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```
a*b ==v
```

```
True
```

```
a = random_matrix(QQ, 4)
b = random_matrix(QQ, 4, 2)
show((a,b))
```

$$\left( \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

```
a.solve_right(b)
```

```
[-6/7  0]
[ 6/7 -2]
[2/21 -1/3]
[-4/3  2/3]
```

```
a \ b
```

```
[-6/7  0]
[ 6/7 -2]
[2/21 -1/3]
[-4/3  2/3]
```

```
a = random_matrix(QQ, 100)
b = random_matrix(QQ, 100, 4)
time X = a \ b
```

```
Time: CPU 0.09 s, Wall: 0.08 s
```

```
a * X == b
```

```
True
```

```
print X.str()
```

WARNING: Output truncated!  
[full output.txt](#)

WARNING: Output truncated!  
[full output.txt](#)

WARNING: Output truncated!  
[full output.txt](#)

WARNING: Output truncated!  
[full output.txt](#)

```
[ -373046531582140083801058345109583931652049358819452485735532087003\
328133741682161462371862221825739094520853801191/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
14760711162776684251364592019225677223669661517154000193971670948407\
1651809422947616603987856717882053490609743032/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
45091409858969050244666851167289748431938742697097005544741055215939\
47364488589759281747852355831267997758938337/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
49411234376488381500693864292921496272743349330607766320599752149392\
8191879738003808830968027597495207271006914613/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
31390301479704351592710243429711010780614053295371807562974037788636\
708905410359034376076231337730751918966561288/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-6180699852082645972151779806661650397106157514465147323372059638913\
5018228306720537845071488100260595416407573396/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1951409517989494240946650830324753576702701736848839079926958971170\
961780180179310438899575425333375361550662012/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-1069007762047755974834309803660394839169719526298072217102702685283\
4735376775475810910630018597821326562973731671/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
24831996063640601022917592504915809639325912061719833610560069171407\
1440191622061064215078368078424908266695970537/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
```



```

880102915928188986852151
-6140398243322385892024072240339158249407832121655448103523077863737\
4371547313422410811619061789280942424663214795/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1165628564025337371178025458093276192447124828010977033623284674551\
0462198481691668954382707492757612262503489957/626790306637009591291\
34150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
54300416561169855264593
-4242997195605096459858275592361668808177277789900383710260108703734\
74158174067023902665498037607637470581545889228/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
10498802869765792567006863586253734879180260115217410605195652138456\
3431557316870973090195059267376552945914183658/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-5812299904530535967368683227111438025848020033297983872285408615684\
3361948542032501092039357770488364917723357101/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1009483780476498937331079755126140059526984185187760216451892257846\
670973042613955257100021681676774829472307684/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-1552104380667448321506556011018735921233053572097559101528529860885\
21738679815361237080368484559113786267226617387/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
-2935290528813672110010016234237554276605073271277091586907814587458\
2079909945994207585854367442343409287904281734/626790306637009591291\
34150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
54300416561169855264593
14273134878823998032779205022924253114176387530776355772701453187873\
973293925024938275195520247718063816188477839/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
12417225551193773042255085587626079494361291242533004241410726580705\
05417181980254524484196495204954894820610502/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
32000122695746287960777226433372784216790665733053712027877443964202\
321730547511526449113633613861597318590805017/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593]
[-147427539005975731448162250624463961380110918115572758876080762015\
574550464067013462832890091513625426840992379325/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
42238759967490515051252427196816094223089776817339517843748251980041\
793368730829049870406403454147047149765659566/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\

```

```

80102915928188986852151
52736515698669141452218925464438494909024526051321326048031925689809\
60981390229862249251355378545049351568368670/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
25790493913534034594163501113934682623682498792251161996174915881955\
6328743297087405404222025055802823994442955728/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
70852262391259215427783353379457175331140663479917575083835724660430\
330930519449764218551632159296101731810067018/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-2232101401245980671858625189589965525995055931735578752532489115990\
6402244964095598239969242743252541468268154099/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-4873147488834387082577017484954651631129208697650744516662230959350\
959860396520598604121525857333025897220299033/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-1391642666862641422966569934498670332199129844567338567229235111749\
86313073691779811207529815878817566365680361542/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
28870242216559729505417825403221122377496167554155864978867544059548\
3583733014613940683623871975887385096981807230/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-9508640219661452701567160006668535575254454944462725086232978008243\
7675144720409344884748563865697663575778761598/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1041301556749259955924144115521391624836875015005673623554723894946\
5439493327327138811735714988706855905247108362/626790306637009591291\
34150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
54300416561169855264593
-4546725430409015512053070271763676532632174574219280595772269655946\
64437557880314146767572913085395766819518629717/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
-8351781361397009677236692115068694989214682354567793389287762529703\
1961062039298296007507175339706808858490924220/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
87984468403353514626894534108728305106107458153420171131738575981006\
809759831014687707938481195246861315381557035/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-9842932704740803208870392101484269122994219022326204429939777858018\
68632999278199481807766775237781022761872594/62679030663700959129134\

```

```

15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
10616090169841010211941822260952707500729746908300402173465155314186\
1091215767697907220607331351889391539231575052/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
20978471330404613518274614039512385236332253718151620487250507997371\
7850225302411897107507340257960915272146616874/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-7621133040032474383306246479234098138636809209641918087696714554185\
6312133640793609530833430279933818911870484935/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-4472776104723534409000059338558311382474447472284351227543089104103\
093240280405681361221301334561969104747851268/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-3139804495935539756212671227848982244052252919333396442670035449772\
41221470036128705425979777899213352135698281019/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
20989824485321389940965656952967516378387129058079609752873604336167\
1345100153614562875412286307022819086023345361/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1099010128637027964900785127691603738448474790459719331491404744498\
91179675266598036562123594016902805942286400182/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151
56862145607024583469872897969094439273217299920818504267253712696976\
6618193342048750636917995051087593419996126/626790306637009591291341\
50901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615543\
00416561169855264593
-2114728798791959764438472310983582218365468709486940882320846347481\
9877204689888886900040880451684330368729798777/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
11775741705290689216487446952789590400235645075875173066244054834678\
233540560326625103730326171027025429081499367/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-2578470721196787484632013831941278720891572123549140918268599719340\
3529275691700975653428920230639071620845655506/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-2343856676625299438730133296382988533029607810601954911368292473845\
087614754391145220622556308543292694443587683/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-3983881981630692331926107720873741173474355629308863678119660884948\

```

```
2874436675625222105441818733790760315633408439/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151 ]  
[-414000457634374390411369007076489361706064616158544243415800846188\  
132917137200358122409408212968461021045903752082/4387532146459067139\  
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\  
30880102915928188986852151  
20348619154959826628238037201735774509872510315907458813902399416658\  
9367053534899975853442657094299574751238626316/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151  
75186285775323430297287037784751505327966334516012684826966928996027\  
46734666127171469840640683788227851883417582/62679030663700959129134\  
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\  
300416561169855264593  
56511075515782225204724687048747841017397474275755083722966147478157\  
1271737580868049635679517655625666792413796033/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151 ]  
[-283341456653594617368141047560103479942592416069560170322097849092\  
949609396172607651209096912427677535064056813465/4387532146459067139\  
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\  
30880102915928188986852151  
20656691933147197916709976457969196785772303103676918762346720593755\  
446150141078308511807909795069209663292760523/4387532146459067139039\  
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\  
80102915928188986852151  
15473151025918491817906183866962726002852357261127958396876988251909\  
941321820357513786480774854095658168439861711/6267903066370095912913\  
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\  
4300416561169855264593  
54295369493444410144614807467374136558442174744973689251529075232148\  
3504914090359585221110820622700008229599880445/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151 ]  
[-436646512316871260608063528048538082377878026987462187641576052568\  
888218013323199112741027924466932927855833907927/4387532146459067139\  
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\  
30880102915928188986852151  
17233720533684471481573199833808079690044242847819978409200489915257\  
0121942772750024149490671916470868760878134201/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151  
11715075184506785361584064337464905831267381701419019577783548482672\  
182742121940290774883735823752995423655349210/6267903066370095912913\  
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\  
4300416561169855264593  
64942625318682022758638247064327035867967338936905276414360929078121\  
7293330053848176328680758376098349248429786659/438753214645906713903\  
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\  
880102915928188986852151 ]  
[  
-6384164445082586021944542054937612044154588147020730560764125791330\  
0859124124804396101014099029673417903470776235/438753214645906713903\  

```

```

93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
33957874612798461126361105588134687468171193867874783251013721787883\
128025730344596619000344318565831973923469114/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
23632450331413765726400318675703312568951199099691555906673826791518\
24331021448649845642180813326728786568965123/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
14727096540887332881321782064233735197869437377934355175157776820518\
9954854643267751849972140246126448000843697058/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
35127862229732175219656410046902674812380351941972652106254873228268\
7848824990308411495398728482902681985166803968/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-143324231125339555087437634785661937015008771759206134726736153916\
56325232765917199879790273839919147555060103099/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151
-6064353470951939645939585464507441404301544654687423114567860695118\
997824404445111792774496836135517351747850547/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-5062327510160397500926211916734390023706981363932943424102349904734\
43801330298735245843886579359459952534078842

...

12913415090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252\
161554300416561169855264593
30653880917203691005149340588484401894923153311645020767692558672554\
469287633261537545934394333200385398153418560/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151]
[-154205062149214034920843250708561867629135850619923516313035433808\
397283676103843698006939600135940433615012310188/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
54366837881834346746937790622263913874458990829320043107493797260655\
636545814527227088892470143397123013405026581/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
56899744132868506924798119705529680204585655423756188614784338742159\
45317661000417107882951305585570206152561240/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
21400711904504669370235688407406762533780553755043996434791459242419\
0211449317417713016824303624279116554816396039/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]

```



```

[
58892986389712953154910468167495757188309289015103701956283219347296\
10157552663723646824346510061537339044304528/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
-4318019882799843966427310208474297722954726570663130987229265468168\
894556148257596874408186630662749527115586246/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
34753606555828300889311877228230861145122822429097941598718097046207\
54474158248999274693735836583309504847193893/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
-8241334639396908911172620228487019082557859873777760314400512414023\
193424889423349750772940899367144444322979350/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593]
[-361272333583925129583355243337364491831595450309430001222619314611\
703566604885275528729033176524283103065427505404/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
11112114997281469665394916203153801627524296420494619862940637685825\
3770751222877371772833335754416396535429574112/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
81319967681579221575760538197062662496181333486888183858120946021461\
12313862140532927275166819061012442614113805/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
49983764930818722724495271726749076444595757558461013839825485099708\
7064927918681782993363142853136597380705317568/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
-5460840935742460284952897518443040697870429542393969545871751689071\
270277423590178388530512205824461538722387249/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-6148168576777760643575661372662145984842907678773393768262170440175\
0366435886190816586696887763589086494827959833/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
32494982240801490397010981136159326307481059834947157382694730698193\
5673373852287693958769842417265802589453521/626790306637009591291341\
50901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615543\
00416561169855264593
63849859685461065159779169109824876798275721200422938104514675912534\
54051988358692840458133838738019047086494605/43875321464590671390393\
90563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513088\
0102915928188986852151]
[-127487117731260299088536429087208403844802052804183414029559372281\
763956695907616073217643981910223185068504529175/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151]

```

```

14626406026513809808298322829733597295908079060904055659075403671717\
8096252457972701996047565654799958902707741304/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-2839085472287424220711648452209186496188130406825497896301284265703\
419244977035498229849115563862059821096780709/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
10054209835175651343309783121082255933489370539248939525412705286660\
9541208101730865606913250340149762653840008157/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151 ]
[
31357951253684447391682112143731071774583034165802508915385662751596\
8875588681810769450172606104431464962900972240/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1122701540419753866938580804793003448638044888747745075457534788844\
36437589382103209365430484849448970439414338064/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151
-4239896295475565842563271226386803024075319291287872314811175378176\
948372314123334687002279200006618395356593096/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-4476161016828372550337123930159360345518148036159858561332040858974\
00864016221730209438189285540356699431779000920/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151 ]
[
-4084811470642231105161103506417405066865654325484058604109095789055\
0171938323975387234535913981199651115227701721/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
15049354797865067685682081396564006382737291793425096867799758874765\
138845669367227628717801468739102641237112011/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
28052995880631703384571396506039956563131073447508619716972027705120\
02088527423084864609799944584604254983391583/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
95027573559678831093118656297817223743584489439806522065603497267007\
392972184844454446274514959911637758516088306/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151 ]
[
25987339650377539592731567260331370396509722803299011618941983440363\
7659616574794351938337757015179383007151328807/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1262947461161457948674061261941446238924053265029783771035705413727\
70202003856575642253581545722827466592831519665/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\

```

```

0880102915928188986852151
-3824310214855013871618750506911470883007768409061730495014804931674\
504498801712339531905275571453760418203092716/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-3614032422034927834829492791920431724729987460746378590105371721463\
71363602904729080564455032791160591603283958275/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
-1342290733845768434965515526897402207880500886255307170804141268067\
1858182285384028586449170299656809401877177478/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-9337261692334051543334677805626564007591345961188482706420807767302\
4177109624193165663685511780722063064322619629/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
10240073021391053069576649598338514269356739708745693117206522881775\
484551188094263677118885834531660920585042806/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
97927838308848411527983303197131230534847956633418606419491260515964\
136844939285481633800095911014748754115008922/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151]
[-289486148626465559396137079460506358317388694331073251866682239791\
036974575189797644448306343909672632626047561265/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
12156375251902879185247458840951518070653615876292747235956206697716\
8720026486710971617790289279056444967628269823/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
88616164819071154101553182283044636917510808401995243884253244301790\
88218247514563940396280499313835833193680104/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
37823227645271747865793981606754454486391852353164434316992172592407\
5049583082335580902891356793312745074757960093/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
73227702873562887773704140640824120806634277534632142194421858119051\
081962240817344618093301556801567340392062319/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-7200537652216848178452442014615968519676304177947207868741264887213\
477699841946363612586552431750678641845026894/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-6657693781697517440743513434919583365410328391082084620059390731796\
311705506449818752473365664341383480645048783/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\

```



```

4300416561169855264593
-1894092383587501808338283797894240026150927928825510461706624651737\
20648555734337584337531352307638369199247113297/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151]
[
41412682444822130818431522040549590466655546510323995436462352541833\
53307118360137699305277672809896879342533619/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
-1021572057150798841047978897777798593005866206079958150455116498687\
7769209538148369757025322487635932566958772011/626790306637009591291\
34150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
54300416561169855264593
-1644414689471203710464993006549514877859504681034452312331612469478\
271033643600715032239154947314328164603854855/6267903066370095912913\
4150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
4300416561169855264593
-1027187928044296987985778453948727777944252724185219608265473193799\
1564062872907731267477793760881320471965597142/626790306637009591291\
34150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
54300416561169855264593]
[-105280936577868471886374028085696342172582975284061327395823860208\
396380248844735855431596785364405125529219704513/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
90183875260075595841808265375366408684281275747825618219710696167212\
636273393853949471333830995121907140718259222/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-1177009219069053742331600960119698838690090459368991561453542747678\
564166659279410538542074508393660326537492785/6267903066370095912913\
4150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
4300416561169855264593
15333437180209946116305966450136520197608255351857675190406946082041\
0419448783135889143674829258874234957039710473/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151]
[
61082181486220370030236941908294781285805119996256915155140651925242\
102364370031614336248662734933380809629262713/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151
-5164107019932456702655329713787823808022882757952511417662820200484\
9235570184612133351026305898912459008319549054/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-6711976964543266635310688812909866611736590592624610904483675263755\
970835854844653521107442873391745214115834518/6267903066370095912913\
4150901129961597644215990625126875739263210499627319398753952521615\
4300416561169855264593
-1096096989815758143835836938976114085791840026522835195834910651181\
69225095095635778272028011734592185527681346317/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\

```

```

0880102915928188986852151 ]
[
10159831651050635039273693960354425651660893508652479619404740046729\
6587078554013733031839176445508030003352556210/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-2322766149255626255305311180717715906486808389235108270471612640953\
1193347002938463757962607237708829691507032472/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-1477719259379974731113204077601012422105633391211858406553332716159\
266903743112401446811607590534366519334104075/6267903066370095912913\
41509011299615976442159906251268757392632104996273193987539525216155\
4300416561169855264593
-1776436905557462110549590958224469101595395808485159704405584706777\
87854720694992733860599946015964182585074591511/43875321464590671390\
39390563079097311835095119343758881301748424734973912357912776676513\
0880102915928188986852151 ]
[-273645255115641059575736095686870613180197475477451287599941511934\
208663821419953239454728160228629652973740741828/4387532146459067139\
03939056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651\
30880102915928188986852151
13132691338692264760879832733395861039734677505356252059846647250150\
2780254754536310408274665062460273776987849107/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
47437761185053063007519096746262818590117818163384099765384883854890\
43664580299650938498100626790880701787010716/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
39564054722540853483457643697170716811332727761924975334177437671594\
6161545469637968855906850378650107599985516451/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151 ]
[
-1160512814110406562629394416032471781717792829175716159710520498398\
8557973850350212918194404543804690853157345959/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
-4196022278313775089955722378226945709144202942887280409302462982182\
4016146084976739200859352504006576859404548498/438753214645906713903\
93905630790973118350951193437588813017484247349739123579127766765130\
880102915928188986852151
38078649831301930977701486424701841519805347338081919733881239697613\
25436504560992308569959480639691278071684450/62679030663700959129134\
15090112996159764421599062512687573926321049962731939875395252161554\
300416561169855264593
65857961282199388685804534204565521951864387327823686815458722517404\
612117260120174602506367012120108481167792917/4387532146459067139039\
39056307909731183509511934375888130174842473497391235791277667651308\
80102915928188986852151 ]
full output.txt

```

## Determinants

```
a = random_matrix(ZZ, 100, x=-10000, y=10000)
```

```
time a.det()
```

```
11842833453559374987196590347454592506050290202934980426666257534176\  
76849107616987662602424746039564457546457780328114224920812345832836\  
08147649685237  
CPU time: 0.03 s, Wall time: 0.03 s
```

```
a = random_matrix(ZZ, 500, x=-9, y=9)
```

```
time a.determinant()
```

```
-1931541564476581922510954545845024433309859622296504287512004415031\  
92447046920271659044723216974083565302559014185818457744174201041579\  
68622777482869752784433917430632340751619345859474253131667003899086\  
16969257073750049297634180446152171545430910708522697173724038418635\  
08675544269032072469609011833735309344439034553183496779847393179545\  
64948776734398739838046136523810134921729189602307361578850200427972\  
81557846193816423510203876568641830422110770310066593845261400764309\  
89865352815149076264013247992134067584530338995906303538663017005157\  
98828884200407453590178911752109132983957997734631241967923425671305\  
65253603647446652426963725102369543581883620679405917379502753446176\  
80537168776196240768590388211810860672022205705911599118087945028642\  
97077950271337631119221349807440228803173161471907920631996055811255\  
61331057189090978243343630276270847589060217600042781825499798309074\  
2189689243585346088151138496560942743023  
CPU time: 2.20 s, Wall time: 2.11 s
```

## Characteristic Polynomial

```
a = random_matrix(ZZ, 5)  
show(a)
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

```
show(charpoly(a))
```

$$x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 54x^2 - 125x + 159$$

```
a = random_matrix(ZZ, 100)
```

```
time f = a.charpoly()
f
```

```
x^100 + 5*x^99 - 1266079*x^98 - 5348908*x^97 + 23998780820*x^96 -
3479189229395*x^95 + 2038675889513123*x^94 - 351918884521568542*x^93
- 15810941927057591276*x^92 + 3515479736778805199552*x^91 -
1697992092873395765448511*x^90 + 630577817100801762507303815*x^89 -
101616520279505408483570501958*x^88 +
15710941151418776240499552770918*x^87 +
6994385108128579792517556028342830*x^86 -
828697521403405856638329520871613759*x^85 +
9449543512463031196138755183431599576*x^84 -
2749094450874538651993923998786570833269*x^83 -
1900277680381502592106865714621956013917105*x^82 -
748975930549393096298057237236456666286346079*x^81 -
249596236937843313862089464158475944949981802380*x^80 +
39691880252309856196569205051244935198456773264430*x^79 +
4226824288291949680950117429917186896366891415991635*x^78 -
1192593014179751087051162617695210588403182443686785114*x^77 +
14158313606270062367157844940176961000272174239199064427*x^76 +
15932298086946565321996186826062352026127404497264779312886*x^75 +
3897414700442049156550909687868829481851791946487102637795754*x^74 -
593974314069556646689083633198645378648761127283300238396202132*x^73
-
46947577704060381652046920257797320134819453063919517066771294969*x^
72 +
28296822720977899710027542154136434891998977108605096316836165787638\
*x^71 +
19700907248199669595250574950622761483103189388575683294573653670440\
44*x^70 -
74517482888731587727903012002772329381143275499295132589341015236708\
1130*x^69 -
12079384183634115192126310839029574661457772965151030050287553107891\
5280459*x^68 +
23884700119338544060209307807501145915167419707351296351884154790640\
172772589*x^67 +
42877201052736675214186370027072329792749232472831482524034508255641\
52538460318*x^66 -
18409283371106222631717300914560780531824587881729662843501020556576\
```

```

9669497716003*x^65 -
12617708798678084153497068081853495024437492404440844465528899957790\
8302134659929648*x^64 +
64173201637354293618321476117213440132622729741587387461802366200329\
3971483034704282*x^63 +
19719989019041307032606300013932728173070988397311725453445487717392\
42613655492522189800*x^62 +
23273676583260303538749194482380682200282697182732977412503934160071\
0960929210795266786195*x^61 -
41226083994325238779974224918631380528316170662231961384218174381042\
965859525583408514366719*x^60 -
34954713291923434927375470732768468135984055636843031450741779298787\
73753139552576001757198084*x^59 +
34755546515418566695402617596020974334248637009163342993945008202899\
3692081384625977796790390872*x^58 +
99732495629484648931219937043538056793844843992135803362498300843485\
419864783528459293517651797965*x^57 -
13966176821025469547856914361554510194781874013839818643024862934901\
78548878630297314464264782721992*x^56 -
96043689519864987693608750555893291670269585702651430630416420313071\
1275803616424036918351995644140410*x^55 +
10663402540291624221873771781300997035457474011727422837209079368568\
619922339829071711478821500380371855*x^54 +
24480730335914856726804442929566083261140539093955233983527975339975\
96021446261950113097976263729062926692*x^53 -
17494118877145326550784379543793245969740004685450632653905691064780\
34577113731718289898005045280098427835828*x^52 -
11903704367273331004253362200368835887770659745597470993176564419851\
3392148214463584227014717544437657505422165*x^51 +
25536148799730102096581147245327652778222168304684182824337036865999\
367813659849889831701334178132231913061525805*x^50 +
29393710546170768177482111482658062732504924123394707038465122181931\
43007268043293923774649575431348574531161415936*x^49 -
24546590555786188187439720686640293589716015574807993154934430474184\
2128159069356727388718287120079825524265742359518*x^48 -
26785467792585043884633325550141345211616357701038199895167801463823\
678606107577478030069593973538675375860360832495941*x^47 +
46957414988994945066052395071961511186980248737563661210632875794910\
89747080003046200150105620211688738567320204614537471*x^46 +
25757855012771582077808824111219602897897104863391273145232082908601\
6414649076688897883022709609679286879997077103164940118*x^45 -
43200431602445036999645268466612813929903095530525335992945491862344\
781411020043995315139472259075964432900063245950061472132*x^44 +
41678628605997937872066809821505928265532622504435164913322460871633\
9112932225189176796442746803723086208400707277164391854068*x^43 +
38314138695410477608502040586299534398780591052304779535997934251497\
4272829795810776603233598263140296596609882376377903218611529*x^42 -
19687570343733891761822516829132030795135751466989200913970327505893\
963090422477656442796331288170408571917568477940677317250413022*x^41
-
27020117188923373241144532102106556492764098405743347218923006404483\
92685017603109051885513839112365506542676305320763383099458627406*x^
40 +
22547307762449264877202341171790153277388433504452741544569647882517\

```

```

2465371378201185126656646328679113172505598822059468833738069378164*\
x^39 +
26973069278633802957424661326798774398185881229495756509591095212232\
55733111125959960476309753919103589767460847424658536376411633371132\
1*x^38 -
49217315467665655278692745672521496970397570784831606883202990537026\
64264096212405507089603314777049063559466453592414303628188984469652\
09*x^37 -
87744264306701215466279853766647141540668921251431993589823472104028\
14970722190880123876805337332648987624825569074469008334109636161306\
0987*x^36 +
36422556385266749560113511795729685644477110078373029688988281446083\
99679261947403620247107042796950836918720757500177016204509112359003\
719852*x^35 +
13862945982301589935614227625962789765893520027948999910564516037658\
22136698900140546932234826946903651877614442460534374544571572593825\
66073735*x^34 -
22477116114465687853729379775169201460043691521404225484480358927653\
69233688236196251679255984827318166670499419261887161060097053449347\
9199825752*x^33 -
18630049416172525204980613905211387339012325195125194806758404098171\
89389284077354469532484895455872376647745998870572671487640341799289\
341567949233*x^32 -
36200288856274740114395023664506525379305227840499258699342568439095\
43822849568068844983998711461432028405134580841216263977882968048665\
8406776230607*x^31 +
28539754219434564790927881303875811015866238246416963352747853309973\
36778754208046224327938417589713282563637851730238632785333806459821\
8150425651067011*x^30 +
31043772702593718997861250539313118259238428630799044200507099394664\
49339893569845244502606774861759354679476920128097969265708895880230\
268811655762000641*x^29 +
16425437175718977660940318890627299004347852145643131260672976404462\
91370189518565837741091290263434178444655475822001235193718283004425\
16777805961706460243*x^28 +
56366113553727198094999948155407023002775590680032476697716766375080\
45706611141138347988350944210258770776617621976106391063302532548256\
958833200462967311202*x^27 +
39372354877164043455661625802347055315967086830905935823734052190098\
12974846268845057653275381425177224755436529555031280064843585859643\
5180137557212026827250*x^26 -
56461450419124094382184687803976653814141668850020400975059971373736\
76058879685598921431339431848390312605141927132514565486058555408306\
887231559929622726759518*x^25 -
10296265326491890517877613255450027365432313679745980494243720623484\
76151673057165789541662740152499220593896557634706710557810770063771\
229300011176585897574002614*x^24 -
99824236623711247030503016897495243157676423271392867577267405094808\
53658776907835001956419608323005042548301781566557647112626125329859\
7889399218465089710103744179*x^23 -
40740657505612465127527680397851422355711984756101349350179815500269\
51332954450194566090305987651748042270150873857227792415129869425077\
213966734218170901435229678226*x^22 -
61011962944979144125137589978040895780672410998092483709750165071775\

```



```
80938545755049120193288796720778679150654705961571705775903270264405\  
7247195214970667039170909937816*x^21 -  
24189351745590398449719142921161469664543848804127755714370570631121\  
01349072666532580393466163189649902561780725379638437986981346520068\  
157611613086264723803121010680660*x^20 -  
47660093264984595549276352097484333762729838027206200039983075853043\  
27800027911964391622223493627343787645096041956185750170926554233140\  
9147317022674910385985532761384893*x^19 +  
10389119108408699028063368274978460292268016595822654428959408647663\  
07348398473575440654895843414118451734166902877519734872718103677040\  
4582670725874479680676692293407455964*x^18 +  
73062459348669914290789556018058161395233456242043221680928036537697\  
60944918532310708373341672696293763199601071674932876936887005859722\  
19815755045551939088334805782807951469*x^17 +  
18978744684270806269776294575194034816499907338272959097876683985763\  
88903594069166754081119785729116767803891142409458868196255682089658\  
0102484607897298033447115110080974620591*x^16 +  
21803032474386477524152530186941645646859357988943257805603401061990\  
68148271347959608569510983229445091991769330964677429615267889581837\  
68493462520434821814877455714075921720922*x^15 +  
86956588135321209556836716191446551495567967595491106875816434531022\  
29418515353313602397304288839548489366742714056690556712933551856014\  
015552000041820575639372962390849010040998*x^14 -  
34043040053743360710118693551231033996879306371491610737775480752196\  
01487788977191996248623692819944195689290490076760299817518107149481\  
1024754167139598797144080311107498724386772*x^13 -  
35775123168345345336021332011872528225896812852173766712010895510787\  
00216592953378124603014158185833746031882642168310769142187344886333\  
7744006313388677973877702376520614712210706822*x^12 -  
16652427709815666456447519929030428842068058758456710623866816481548\  
29921514654599254363587240653434297845942587177991715895005454698287\  
664086420876873284004772478231133987173009675212*x^11 -  
27808869473331706224180957786614103321788981542250165207129056538876\  
90291522595417895692138875820349435777026227956537981870192273402593\  
8475491647954056188307426312277413175740054288524*x^10 +  
17728263372904324146878644419123075979351795076610442783172599283164\  
82586942613826858774613955571629689072765882194802421803717099667776\  
00522107848456578867224709586002215938037088392885*x^9 +  
18126830959980776798076350799210088546915448008252983177893027661948\  
73023442150096089388734205981651143092982805298922202464758989156404\  
6703072484325818280153049335708195099616722910728839*x^8 +  
55852921066201521422645025328146267921531123918749246665647891008333\  
00922361594878121873563502419449464141575157078593573677526653842744\  
92877326733660177751636719250068439153414205723877505*x^7 +  
13026880882011644634091996779377724656128746399620927251741980218913\  
72517352772592536036102336551230400345973050061522052319533717002691\  
6996309571690273187088138747216850152518645514620678063*x^6 +  
21199697971244131110174038192752822200131606409235735987179099992259\  
42129448560619684695072932816944841670433804110059338143303464809123\  
75138518931475724844433864500739429788387894985865390285*x^5 +  
99659613604360521653361096772302947699970146208178171062058316942735\  
29857433351585446458272532085942123624774217280961148185010549451465\  
62412749792300232933163701436999793854105477195854171619*x^4 -  
19283675929375363397404588579732561324688585449119819750313005787100\  

```

```
98760916036430060122236326592227986858869829229979193883279123344738\  
548398537777624948402470048782602484867870597492714901924*x^3 +  
16089918332565552922465186549269300158178575225115402870480400691197\  
63346273322950980369803745338999643209833428675733033533607599902206\  
99029546519103451451719789559554865795254015728990473517186*x^2 -  
22790611504122213450336803722101329709108749341111618862631662688413\  
33570651814061933737616742771861807246278036680834575172310730384310\  
67362996662886970447371638895541570174654625846492029750945*x -  
12803750374083477720846993930220961878629989995527377101294534706406\  
03132576440174780920705256986844345279825993788058008924245044914744\  
6992829403424790301474202338661734746295687927721749956073412  
CPU time: 0.00 s, Wall time: 0.44 s
```