

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ALEXANDER GROTHENDIECK

**Techniques de construction en géométrie analytique. IV.
Formalisme général des foncteurs représentables**

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 11, p. 1-28.

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A7_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

IV. FORMALISME GÉNÉRAL DES FONCTEURS REPRÉSENTABLES

1. Introduction.

Le but de cet exposé et du suivant est de donner certains énoncés généraux sur les problèmes universels dans les catégories, plus ou moins triviaux mais d'un usage constant dans les techniques de construction, et de développer certains exemples particulièrement simples. Ces derniers sont destinés à familiariser le lecteur avec le yoga des foncteurs représentables, qui ici permet d'éviter, une fois obtenus certains théorèmes d'existence (fort élémentaires en l'occurrence), les habituelles vérifications fastidieuses pour l'analyticité de diverses applications naturelles. D'autre part, nous aurons besoin par la suite des fibrés en grassmanniennes pour la construction des "schémas de Hilbert".

2. La notion de foncteur représentable.

Nous allons rappeler ici le langage des foncteurs représentables esquissé dans [1], II, A, n° 1.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tout objet X dans $\mathcal{C}$, soit h_X le foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles :

$$h_X : \mathcal{C}^0 \rightarrow (\text{Ens})$$

défini par la formule

$$h_X(Y) = \text{Hom}(Y, X) \quad .$$

Un morphisme $X \rightarrow X'$ dans $\mathcal{C}$ définit de façon évidente un morphisme $h_X \rightarrow h_{X'}$, de foncteurs ; en d'autres termes, h_X est un foncteur en X , i. e. on a un foncteur canonique

$$h : \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}^0, (\text{Ens}))$$

de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^0 \rightarrow (\text{Ens})$.

Soit X un objet de $\mathcal{C}$, F un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans (Ens) .

Soit $u : h_X \rightarrow F$ un homomorphisme fonctoriel. Il définit en particulier une application

$$u(X) : h_X(X) = \text{Hom}(X, X) \rightarrow F(X)$$

d'où un élément

$$\alpha(u) = u(X)(\text{id}_X) \in F(X) \quad .$$

On obtient ainsi une application canonique

$$\alpha : \text{Hom}(h_X, F) \rightarrow F(X) \quad .$$

Inversement, soit ξ un élément de $F(X)$, on va lui associer un homomorphisme fonctoriel

$$\beta(\xi) : h_X \rightarrow F$$

en définissant, pour tout objet Y de $\underline{\underline{C}}$,

$$\beta(\xi)(Y) : h_X(Y) = \text{Hom}(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

par la formule

$$\beta(\xi)(Y)(f) = F(f)(\xi) \quad .$$

PROPOSITION 2.1. - L'application canonique

$$\alpha : \text{Hom}(h_X, F) \rightarrow F(X)$$

est bijective ; son inverse est l'application β définie ci-dessus.

Faisant $F = h_{X'}$, on en conclut :

THÉOREME 2.2. - Le foncteur canonique

$$h : \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{\text{Hom}}}(\underline{\underline{C}}^0, (\text{Ens}))$$

est pleinement fidèle, i. e. pour tout couple d'objets X, X' de $\underline{\underline{C}}$, l'application correspondante

$$\text{Hom}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_{X'})$$

est bijective.

En particulier, si un foncteur contravariant F de $\underline{\underline{C}}$ dans (Ens) est isomorphe à un foncteur de la forme h_X , alors le couple (X, u) formé d'un objet X

de $\underline{\underline{C}}$ et d'un isomorphisme $u : h_X \rightarrow F$, détermine X à un isomorphisme unique près. On dit alors que le foncteur F est représentable, et la proposition 2.2 signifie que le foncteur h induit une équivalence de la catégorie $\underline{\underline{C}}$ avec la catégorie des foncteurs contravariants représentables de $\underline{\underline{C}}$ dans (Ens) . Nous appellerons solution du problème universel déterminé par le foncteur F tout couple (X, u) formé d'un objet X de F et d'un isomorphisme $u : h_X \xrightarrow{\sim} F$. En vertu de (2.1), la donnée d'un homomorphisme $u : h_X \rightarrow F$ équivaut à la donnée d'un élément ξ de $F(X)$, et dire que (X, u) est une solution du problème universel déterminé par F signifie aussi que ξ satisfait à la condition suivante : Pour tout objet Y de $\underline{\underline{C}}$, l'application $\beta(\xi)(Y) :$

$$\text{Hom}(\underline{\underline{C}}, X) \rightarrow F(Y)$$

qui applique un morphisme $f : Y \rightarrow X$ en l'élément $F(f)(\xi)$, est bijective. Si cette condition est satisfaite, on dit aussi que le couple (X, ξ) représente le foncteur F . Par abus de langage, on dira également que l'objet X de $\underline{\underline{C}}$ représente le foncteur F , s'il existe un $\xi \in F(X)$ tel que (X, ξ) représente F , i. e. si h_X est isomorphe à F .

Rappelons aussi que le foncteur $X \rightsquigarrow h_X$ commute aux limites projectives. D'ailleurs les limites projectives "quelconques" (i. e. relatives aux types de diagrammes se trouvant dans l'Univers qui intervient implicitement dans la définition de la catégorie des ensembles (Ens)) existe dans $\underline{\underline{\text{Hom}}}(\underline{\underline{C}}^0, (\text{Ens}))$, et se calculent par la formule

$$(\varprojlim_i F_i)(X) = \varprojlim_i F_i(X)$$

(que nous utiliserons notamment pour les produits ordinaires et les produits fibrés). Ces remarques permettent de définir simplement la donnée d'une structure de groupe sur un objet X de $\underline{\underline{C}}$ (ou toute autre structure algébrique d'espèce déterminée), en termes du foncteur h_X , ou plus généralement en termes d'un foncteur F que représente X , comme la donnée d'une structure de groupe sur tout $F(Y)$, telle que pour tout morphisme $Y \rightarrow Y'$, l'application correspondante $F(Y') \rightarrow F(Y)$ soit un homomorphisme de groupes.

3. Changement de base dans un foncteur. Foncteurs relativement représentables.

Considérons un foncteur

$$i : \underline{\underline{C}}' \rightarrow \underline{\underline{C}} \quad ,$$

et soit F un foncteur $\underline{\mathcal{C}}^0 \rightarrow (\text{Ens})$, représenté par un couple (X, ξ) . Pour que $F \circ i^0$ soit représentable, il faut et il suffit que le foncteur isomorphe $h_X \circ i^0$

$$T' \rightsquigarrow \text{Hom}(i(T'), X)$$

le soit, condition qui ne fait intervenir que i et X , et qu'on exprime en disant que le foncteur adjoint de i est défini en X . Si on suppose choisie la valeur de ce foncteur adjoint pour X , i. e. un couple $(j(X), p)$, avec $j(X) \in \text{Ob } \underline{\mathcal{C}}'$, et $p \in \text{Hom}(i(j(X)), X)$, alors on voit aussitôt que le couple

$$(X' = j(X), \xi' = F(p)(\xi)) \text{ donc } \xi' \in F(i(X'))$$

représente le foncteur $F \circ i^0$.

Considérons par exemple un objet S de $\underline{\mathcal{C}}$, et prenons pour $\underline{\mathcal{C}}'$ la catégorie $\underline{\mathcal{C}}/S$ des objets de $\underline{\mathcal{C}}$ au-dessus de S , pour i le foncteur canonique

$$i/S : \underline{\mathcal{C}}/S \rightarrow \underline{\mathcal{C}}.$$

On posera alors, pour tout foncteur contravariant F sur $\underline{\mathcal{C}}$:

$$F/S = F \circ i^*/S,$$

et on dira par abus de langage que F/S est la restriction de F à $\underline{\mathcal{C}}/S$. Ici le foncteur adjoint de i/S est le foncteur $X \rightsquigarrow X \times S$, considéré comme un foncteur de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{C}}/S$ (qui s'interprète, lorsque $\underline{\mathcal{C}}$ admet un objet final e , comme un foncteur changement de base pour le morphisme $S \rightarrow e$). On obtient donc en particulier :

PROPOSITION 3.1. - Soit F un foncteur contravariant de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) , représenté par un couple (X, ξ) , et soit S un objet de $\underline{\mathcal{C}}$. Pour que le foncteur F/S , restriction de F à $\underline{\mathcal{C}}/S$, soit représentable, il faut et il suffit que le produit $X \times S$ existe, et alors (considérant $X \times S$ comme un objet au-dessus de S par la deuxième projection pr_2), F/S est représenté par $(X \times S, F(\text{pr}_1)(\xi))$.

Appliquant ceci au cas où $\underline{\mathcal{C}}$ est elle-même une catégorie de la forme $\underline{\mathcal{C}}/S$, ou directement en notant que par définition le foncteur ~~changement de base~~ défini par un morphisme

$$S' \rightarrow S$$

est le foncteur adjoint du foncteur canonique évident

$$i_{S'/S} : C/S' \rightarrow C/S \quad ,$$

on trouve :

COROLLAIRE 3.2. - Soit F un foncteur contravariant de $\underline{C}/S$ dans (Ens) , représenté par un couple (X, ξ) , et soit S' un objet au-dessus de S . Pour que le foncteur F/S' soit représentable, il faut et il suffit que le produit fibré $X \times_S S'$ existe, et alors F/S' est représenté par $(X \times_S S', F(\text{pr}_1)(\xi))$, où $X \times_S S'$ est regardé comme un objet au-dessus de S' par pr_2 .

Notons aussi la formule de transitivité de la restriction

$$(F/S')/S' = F/S' \quad ,$$

valable lorsqu'on a un morphisme $S' \rightarrow S$ dans $\underline{C}$, formule qui résulte de l'associativité de la composition de foncteurs et de

$$i_{S'/S} = i_S \circ i_{S'/S} \quad .$$

Supposons maintenant que $\underline{C}$ admette un objet final e , c'est-à-dire un objet tel que le foncteur h_e soit isomorphe au foncteur constant $c : T \rightsquigarrow a$, où a est un ensemble réduit à un seul point. En vertu de (2.1), la donnée d'un homomorphisme fonctoriel $c \rightarrow F$, i. e. d'un élément $u(T)$ dans chaque $F(T)$, variant fonctoriellement avec T , équivaut à la donnée d'un élément ξ de $F(e)$, grâce à la correspondance

$$u(T) = F(p_T)(\xi) \quad ,$$

où p_T est l'unique morphisme de T dans e . Il nous sera commode pour la suite d'introduire le foncteur F_ξ , isomorphe à h_e et à c , défini par la formule

$$F_\xi(T) = \{F(p_T)(\xi)\} \subset F(T)$$

qui est un "sous-foncteur" de F , i. e. pour tout T , $F_\xi(T)$ est une partie de $F(T)$ (d'ailleurs réduite à un seul élément en l'occurrence) [N. B. - Une autre façon de présenter les choses serait de définir F comme le foncteur ponctuel-type c , mais muni de son homomorphisme $c \rightarrow F$]. Lorsque $\underline{C}$ est de nouveau quelconque, il est vrai que pour tout objet S de $\underline{C}$, la catégorie $\underline{C}/S$ admet un objet final, savoir S (considéré comme objet au-dessus de S grâce à id_S). Si alors ξ est un objet de $F/S(S) = F(S)$, on écrira simplement F_ξ au lieu de $(F/S)_\xi$. On se rappellera que c'est un foncteur contravariant sur $\underline{C}/S$ (et non

sur $\underline{\mathcal{C}}$).

Soit alors

$$u : F \rightarrow G$$

un homomorphisme de foncteurs, et soit $\eta \in G(S)$; donc le sous-foncteur G_η de G/S est défini. On désignera par F_η le sous-foncteur de F/S , image inverse de G_η par l'homomorphisme $u/S : F/S \rightarrow G/S$. Donc, pour tout T au-dessus de S , $F_\eta(T)$ est l'ensemble des éléments x de $F(T)$ dont l'image dans $G(T)$ est égale à $G(p_T)(\eta)$:

$$u(x) = G(p_T)(\eta) \quad ,$$

où $p_T : T \rightarrow S$ est le morphisme structural. Donc le carré d'homomorphismes suivant, dans $\underline{\text{Hom}}(\underline{\mathcal{C}}^0, (\text{Ens}))$, est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} F_\eta & \hookrightarrow & F/S \\ \downarrow & & \downarrow u/S \\ G_\eta & \hookrightarrow & G/S \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes d'inclusion.

DÉFINITION 3.3. - Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) . On dit que u est représentable, ou que F est relativement représentable pour u , ou que F est représentable au-dessus de G , si pour tout objet S de $\underline{\mathcal{C}}$ et tout $\eta \in G(S)$, le foncteur contravariant F_η sur $\underline{\mathcal{C}}/S$ défini ci-dessus est représentable.

Cela signifie donc aussi que pour tout objet S de $\underline{\mathcal{C}}$ et tout homomorphisme fonctoriel $c/S \rightarrow G/S$, le foncteur contravariant sur $\underline{\mathcal{C}}/S$ produit fibré de c/S et F/S sur G/S , est représentable.

LEMME 3.4. - Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) , et supposons que F soit représenté par un couple (X, ξ_X) , G par un couple (Y, η_Y) ; donc u est obtenu par un morphisme $f : X \rightarrow Y$. Soit S un objet de $\underline{\mathcal{C}}$ et soit $\eta_S \in G(S)$, enfin soit $p : S \rightarrow Y$ le morphisme qui lui correspond. Pour que le foncteur F_{η_S} **soit représentable**, il faut et il suffit que le produit fibré $X \times_Y S$ existe, et alors F_{η_S} est représenté par le

couple $(X \times_Y S, F(\text{pr}_1)(\eta_X))$, où $X \times_Y S$ est regardé comme un objet sur S grâce à pr_2 .

En effet, l'application bijective en T/S :

$$\text{Hom}(T, X) \rightarrow F(T)$$

induit une application bijective

$$\text{Hom}_Y(T, X) \rightarrow F_{\eta_S}(T),$$

comme on le voit sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(T, X) & \rightarrow & \text{Hom}(T, Y) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ F(T) & \rightarrow & G(T) \end{array}.$$

Donc il suffit d'appliquer (3.2) au morphisme $p : S \rightarrow Y$, et au foncteur F_{η_S} . On en conclut :

COROLLAIRE 3.5. - F, G, u , et X, Y, f étant comme ci-dessus, pour que F soit relativement représentable pour u , il faut et il suffit que le morphisme f soit quarrable, i. e. que pour tout S sur Y , le produit fibré $X \times_Y S$ existe.

(Cette condition sera automatiquement vérifiée dans les cas que nous rencontrons). Réciproquement :

LEMME 3.6. - Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme fonctoriel ; supposons G représentable par (Y, η_Y) , et F relativement représentable pour u . Alors F est représentable par un couple (X, η_X) , et le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui correspond à u est quarrable.

En effet, considérons le foncteur F_{η_Y} sur $\mathcal{C}/Y$, l'hypothèse implique qu'il est représentable ; soit (X, ξ_X) un couple qui le représente. Donc on a $\xi_X \in F_{\eta_Y}(X) \subset F(X)$; c'est un élément de $F(X)$ dont l'image η_X dans $G(X)$ est égale à $G(f)(\eta_Y)$, où $f : X \rightarrow Y$ est le morphisme structural. Je dis que (X, ξ_X) représente F . En effet, la donnée d'un élément ξ_S de $F(S)$ (où S est un objet quelconque de $\mathcal{C}$) équivaut à la donnée d'un élément η_S de $G(S)$ (savoir $u(S)(\xi_S)$), plus un élément de $F(S)$ au-dessus de η_S , ou encore à la donnée d'un morphisme $p : S \rightarrow Y$, (permettant donc de considérer S comme un objet de $\mathcal{C}/Y$), plus un élément de $F_{\eta_Y}(S)$, ou, ce qui revient au même par hypothèse,

d'un Y -morphisme $S \rightarrow X$. Mais la donnée d'un tel couple équivaut à la donnée d'un morphisme quelconque $S \rightarrow X$. La dernière assertion de (3.6) est contenue dans (3.5). Conjuguant ces résultats, on trouve :

PROPOSITION 3.7. - Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) , et supposons G représentable. Pour que F soit relativement représentable pour u , il faut et il suffit que F soit représentable, et que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui correspond à u soit quarrable (cette dernière condition étant automatiquement vérifiée si, dans $\underline{\mathcal{C}}$, le produit fibré de deux objets sur un troisième existe toujours).

COROLLAIRE 3.8. - Supposons que $\underline{\mathcal{C}}$ admette un objet final e , et soit c le foncteur contravariant constant $S \rightsquigarrow a$ sur $\underline{\mathcal{C}}$ (objet final de $\underline{\text{Hom}}(\underline{\mathcal{C}}^0, (\text{Ens}))$). Soit F un foncteur contravariant de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) , et considérons l'unique morphisme $u : F \rightarrow c$. Pour que F soit relativement représentable pour u , il faut et il suffit que F soit représentable par un objet quarrable X de $\underline{\mathcal{C}}$.

Il suffit en effet, dans (3.7), de faire $G = c$, et de noter que c est représentable par e . [N. B. - Un objet de $\underline{\mathcal{C}}$ est dit quarrable si son produit par tout objet de $\underline{\mathcal{C}}$ existe ; si $\underline{\mathcal{C}}$ admet un objet final e , cela signifie aussi que l'unique morphisme $X \rightarrow e$ est quarrable. D'ailleurs, dire qu'un morphisme $X \rightarrow Y$ est quarrable signifie aussi qu'il définit un objet quarrable de $\underline{\mathcal{C}}/Y$].

COROLLAIRE 3.9. - Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme représentable de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) . Soient S un objet de $\underline{\mathcal{C}}$, $\eta \in G(S)$, et (X_η, ξ_η) un couple représentant le foncteur F_η . Alors, pour tout objet S' sur S , le produit fibré $X'_\eta = X_\eta \times_S S'$ existe, et le couple (X'_η, ξ'_η) , avec $\xi'_\eta = F(\text{pr}_1)(\xi_\eta)$, représente le foncteur $F_{\eta'}$, où η' est l'image de η par $F(S) \rightarrow F(S')$.

On note que le foncteur $F_{\eta'}$ n'est autre que $(F_\eta)_{/S'}$, et on applique (3.1). Il résulte en particulier de (3.9) que le morphisme structural $X \rightarrow S$ est quarrable.

PROPOSITION 3.10.

(i) Considérons un diagramme cartésien d'homomorphismes de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) :

$$\begin{array}{ccc} F & \leftarrow & F' \\ u \downarrow & & u' \downarrow \\ G & \leftarrow & G' \end{array} .$$

Si u est représentable, il en est de même de u' .

(ii) Un isomorphisme de foncteurs $u : F \rightarrow G$ est représentable. Un composé de deux homomorphismes $u : F \rightarrow G$ et $v : G \rightarrow H$ qui sont représentables, est un homomorphisme représentable.

(iii) Réciproquement, si vu et v sont représentables, u l'est.

DÉMONSTRATION.

(i) Le diagramme cartésien donné implique, pour tout objet S de $\underline{C}$, un diagramme cartésien pour les restrictions à $\underline{C}/S$. Pour un homomorphisme $c/S \rightarrow G'$, on en déduit un isomorphisme

$$F'/S \times_{G'/S} c/S \simeq F/S \times_{G/S} c/S \quad .$$

Il résulte de l'hypothèse que le deuxième membre est représentable, donc il en est de même du premier,

C. Q. F. D.

(ii) La première assertion est triviale. Considérons un morphisme $c/S \rightarrow H/S$, d'où des homomorphismes de foncteurs

$$F/S \times_{H/S} c/S \xrightarrow{u'} G/S \times_{H/S} c/S \xrightarrow{u'} c/S \quad .$$

D'après l'hypothèse, le deuxième terme est un foncteur représentable, et d'après (i) le premier homomorphisme est représentable, donc, par (3.7), le premier terme est représentable, ce qui prouve que $F \rightarrow H$ est représentable.

(iii) Réciproquement, si vu et v sont représentables, alors, dans le diagramme précédent, les foncteurs sont représentables ; de plus (si X et Y sont les objets qui représentent le premier et le deuxième) les morphismes structuraux $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ sont quarrables, en vertu de (3.9), d'où résulte aussitôt que le S -morphisme $X \rightarrow Y$ est quarrable. Donc, en vertu de (3.7), l'homomorphisme de foncteurs u' est représentable. Si alors on se donne un homomorphisme $c/S \rightarrow G/S$, on prendra ci-dessus pour $c/S \rightarrow H/S$ le composé du précédent avec $u/S : G/S \rightarrow H/S$, donc l'homomorphisme donné se factorise en

$$c/S \rightarrow G/S \times_{H/S} c/S \rightarrow G/S \quad .$$

Donc on lit sur le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 F/S \leftarrow F/S \times_{H/S} C/S & \leftarrow & F/S \times_{G/S} C/S \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G/S \leftarrow G/S \times_{H/S} C/S & \leftarrow & C/S
 \end{array}$$

que $F/S \times_{G/S} C/S \rightarrow C/S$ se déduit de u' par le changement de base $C/S \rightarrow G/S \times_{H/S} C/S$. En vertu de (i), il est donc représentable, ce qui, en vertu de (3.7), implique que $F/S \times_{G/S} C/S$ est lui-même un foncteur représentable.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3.11. - Considérons deux homomorphismes de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) :

$$u : F \rightarrow G, \quad v : H \rightarrow G.$$

Si F et H sont représentables sur G , il en est de même de $F \times_G H$.

On conjugue (i) et (ii). La vérification directe est d'ailleurs triviale : si $\eta \in G(S)$, et si F_η est représenté par (X, ξ) , H par (Y, ζ) , alors $(F \times_G H)_\eta = F_\eta \times H_\eta$ est représenté par $(X \times_S Y, (\xi, \zeta))$. La construction analogue est valable pour un nombre fini quelconque de facteurs.

COROLLAIRE 3.12. - Avec les notations précédentes, supposons le foncteur F représentable, et H représentable au-dessus de G . Alors $F \times_H G$ est représentable.

En effet, il est représentable au-dessus de F en vertu de (i), et on conclut par (3.7).

REMARQUE 3.13. - Soit $\underline{\mathcal{S}}$ un ensemble de morphismes dans $\underline{\mathcal{C}}$, satisfaisant à la condition suivante : Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\underline{\mathcal{S}}$, et tout morphisme $Y' \rightarrow Y$ dans $\underline{\mathcal{C}}$, le produit fibré $X' = X \times_Y Y'$ existe, et pour tout choix de ce produit fibré, le morphisme $\text{pr}_1 = f' : X' \rightarrow Y'$ est également élément de $\underline{\mathcal{S}}$. Nous dirons alors, pour abréger, que $\underline{\mathcal{S}}$ est stable par extension de la base. (Cela implique en particulier que les $f \in \underline{\mathcal{S}}$ sont quarrables). De la démonstration de (3.7) résulte alors ceci : Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$, dans (Ens), et supposons G représentable. Pour que F soit représentable, et que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui représente u soit dans $\underline{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit que pour tout objet S de $\underline{\mathcal{C}}$ et tout $\eta \in G(S)$, le

foncteur contravariant F sur $\underline{\mathcal{C}}/S$ soit représentable par un objet Z de $\underline{\mathcal{C}}/S$,
le morphisme structural $Z \rightarrow S$ étant $\in \underline{S}$.

Nous utiliserons cet énoncé surtout dans le cas où $\underline{\mathcal{C}} = (An)/S$ est la catégorie des espaces analytiques au-dessus d'un espace analytique donné S , l'ensemble $\underline{S}$ consistant en les immersions (resp. immersions fermées, resp. immersions ouvertes) d'espaces analytiques au-dessus de S .

4. Foncteurs représentables et objets quotients.

Soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) . On a vu dans (3.7) un critère qui permet, lorsque G est représentable, de reconnaître si F l'est. Nous allons maintenant examiner le problème inverse, en supposant F représentable, et cherchant les conditions dont on peut déduire la représentabilité de G . Le critère obtenu (théorème 4.7) ne nous servira dans le présent exposé que pour obtenir le critère de "recollement" énoncé au n° 5 (auquel nous nous étions d'ailleurs borné dans l'exposé oral). Il est cependant d'usage constant dans la plupart des questions de représentabilité de foncteurs en géométrie algébrique, et nous en aurons besoin ultérieurement sous sa forme générale, pour la construction de l'espace de Teichmüller.

DÉFINITION 4.1. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. On dit que f est un épimorphisme effectif si $X \times_Y X$ existe, et si le diagramme de morphismes

$$X \times_Y X \xrightarrow{\text{pr}_1, \text{pr}_2} X \xrightarrow{f} Y$$

est exact, i. e. s'il fait de Y le quotient de X par le graphe d'équivalence défini par f . On dit que f est un épimorphisme effectif universel si, pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$, le produit fibré $X' = X \times_Y Y'$ existe, et le morphisme $f' : X' \rightarrow Y'$ est un épimorphisme effectif.

Rappelons aussi ([1], III, n° 1) qu'un graphe d'équivalence R dans un objet X de $\underline{\mathcal{C}}$ est dit effectif si le quotient X/R existe, et si les deux morphismes de projection $p_1, p_2 : R \rightrightarrows X$ font de R un carré fibré de X au-dessus de $Y = X/R$. Cela implique donc que $f : X \rightarrow Y$ est un épimorphisme effectif ; si c'est même un épimorphisme effectif universel, on dira que R est un graphe d'équivalence effectif universel.

PROPOSITION 4.2. - Soient $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ deux morphismes tels que $X \times_Y X$ et $X' \times_{Y'} X'$ existent ; soient p_1, p_2 (resp. p'_1, p'_2) les morphismes de projection des carrés fibrés. Soient $u : Y' \rightarrow Y$ et $v : X' \rightarrow X$ des morphismes tels que $fv = uf'$, d'où un morphisme $w : X' \times_{Y'} X' \rightarrow X \times_Y X$ tel que $p_i w = wp'_i$ pour $i = 1, 2$. (Cf. diagramme ci-dessous).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & w & & \\
 X \times_Y X & \longleftarrow & X' \times_{Y'} X' & & \\
 p_1 \downarrow & & p'_1 \downarrow & & \\
 X & \xleftarrow{v} & X' & & \\
 f \downarrow & & f' \downarrow & & \\
 Y & \xleftarrow{u} & Y' & &
 \end{array}$$

Pour que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 & v & \\
 X & \longleftarrow & X' \\
 f \downarrow & & f' \downarrow \\
 Y & \xleftarrow{u} & Y'
 \end{array}
 \quad (D)$$

soit cartésien, il faut que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Y X & \xleftarrow{w} & X' \times_{Y'} X' \\
 p_1 \downarrow & & p'_1 \downarrow \\
 X & \xleftarrow{v} & X'
 \end{array}
 \quad (D_1)$$

soit cartésien, et la réciproque est vraie si f' est un épimorphisme effectif universel (Cf. 4.1).

DÉMONSTRATION. - Le "il faut" est trivial par réduction au cas ensembliste ; prouvons la réciproque. Pour tout objet P de $\underline{\mathcal{C}}$ et tout objet Z de $\underline{\mathcal{C}}$, posons $P(Z) = \text{Hom}(Z, P)$. Nous devons prouver que pour tout Z , l'application

$$(*) \quad X'(Z) \rightarrow X(Z) \times_{Y(Z)} Y'(Z)$$

est bijective. Nous procéderons en trois pas, le premier étant valable sans aucune hypothèse sur f' .

(i) L'application (i) est toujours injective. Remplaçant le diagramme donné par le diagramme transformé par le foncteur $P \rightsquigarrow P(Z)$, on est ramené au cas où $\mathcal{C} = (\text{Ens})$. Se restreignant au-dessus d'un point y de Y , puis au-dessus d'un point y' de Y' , on est ramené à ceci : soit $v : X' \rightarrow X$ une application d'ensembles telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xleftarrow{v \times v} & X' \times X' \\ p_1 \downarrow & & p'_1 \downarrow \\ X & \xleftarrow{v} & X' \end{array}$$

soit cartésien, prouver que v est injective. Or c'est trivial si $X' = \emptyset$; dans le cas contraire, soit $x'_0 \in X'$, $x_0 = v(x'_0)$, alors l'hypothèse implique que $(x'_0, x') \rightsquigarrow (x_0, v(x'))$ est une bijection de $x'_0 \times X'$ sur $x_0 \times X$, ce qui implique que v est une bijection, a fortiori v est injective.

Appliquant ce résultat à $Z = Y'$, on voit en particulier que l'application naturelle $\rho \rightsquigarrow v\rho$:

$$(**) \quad \Gamma(X'/Y') \rightarrow \text{Hom}_Y(Y', X)$$

est injective.

(ii) Si f' est un épimorphisme effectif, (**) est bijective. Posant pour tout objet Q de $\mathcal{C}$: $\text{Hom}'(X', Q) =$ ensemble des $g \in \text{Hom}(X', Q)$ tels que $gp'_1 = gp'_2$, et définissant de même $\text{Hom}'_{Y'}(X', Q)$ et $\text{Hom}'_Y(X', Q)$ lorsque Q est au-dessus de Y' , (resp. au-dessus de Y) ; l'assertion à démontrer signifie que l'application $\rho \rightsquigarrow v\rho$:

$$\text{Hom}'_{Y'}(X', X') \rightarrow \text{Hom}'_Y(X', X)$$

est bijective, et grâce à (i) il reste seulement à prouver qu'elle est surjective. Soit donc

$$r : X' \rightarrow X, \quad rp'_1 = rp'_2$$

un Y -morphisme, et soit

$$s : X' \rightarrow X \times_Y X$$

le Y -morphisme défini par

$$p_1 s = v, \quad p_2 s = r \quad .$$

Comme le carré (D_1) est cartésien et $p_1 s = v$, on aura

$$s = wt \quad ,$$

avec

$$t : X' \rightarrow X' \times_{Y'} X' , \quad p_1' t = \text{id}_{X'} .$$

Considérons alors

$$\rho = p_2' t : X' \rightarrow X' ;$$

c'est un Y' -morphisme ; je dis qu'on a bien

$$vp = r \quad \text{et} \quad \rho p_1' = \rho p_2' .$$

En effet, on a d'abord

$$vp = (vp_2') t = (p_2 w) t = p_2(wt) = p_2 s = r ;$$

d'autre part la deuxième identité à prouver équivaut, en vertu de (i), au système des deux égalités

$$vpp_1' = vpp_2' \quad \text{et} \quad f' \rho p_1' = f' \rho p_2' .$$

La deuxième relation résulte aussitôt de $f' \rho = f'$ et $f' p_1' = f' p_2'$, et la première résulte de $vp = r$ déjà prouvé, puis de $rp_1' = rp_2'$.

(iii) Si f' est un épimorphisme effectif universel, alors (D) est cartésien.
Cela signifie aussi que, pour tout Y'' sur Y' , l'application $r \rightsquigarrow vr :$

$$\text{Hom}_{Y'}(Y'' , X') \rightarrow \text{Hom}_{Y'}(Y'' , X)$$

est bijective. Introduisant $X'' = X' \times_{Y'} Y''$, cela signifie aussi que l'application naturelle

$$\Gamma(X''/Y'') \rightarrow \text{Hom}_{Y'}(Y'' , X)$$

est bijective. Or il résulte de l'hypothèse suivant laquelle le carré (D_1) est cartésien, que le carré analogue, formé avec $f'' : X'' \rightarrow Y''$ au lieu de $f' : X' \rightarrow Y'$, est cartésien, comme composé de deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{x_Y} & X' & \xleftarrow{x_{Y'}} & X'' \\ p_1 \downarrow & & p_1' \downarrow & & p_1'' \downarrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & X' & \xleftarrow{\quad} & X'' \end{array} .$$

D'autre part, comme f' est un épimorphisme effectif universel, f'' est un épimorphisme effectif. On conclut alors grâce à (ii).

COROLLAIRE 4.3. - Soit $\underline{\underline{S}}$ un ensemble d'épimorphismes effectifs dans $\underline{\underline{C}}$, stable par extension de la base (Cf. 3.13). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme élément de $\underline{\underline{S}}$, permettant donc d'identifier Y à un quotient X/R , où $R = X \times_Y X$ est le graphe d'équivalence défini par f . Pour un objet Y' variable de $\underline{\underline{C}}$, on a une bijection canonique, fonctorielle en Y' , entre l'ensemble $\text{Hom}(Y', Y)$ et l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, d'objets X' au-dessus de Y' , munis d'un morphisme $v : X' \rightarrow X$ ayant les propriétés suivantes :

- a. Le morphisme structural $f' : X' \rightarrow Y'$ est élément de $\underline{\underline{S}}$;
- b. Le morphisme v est compatible avec les graphes d'équivalence R et $R' = X' \times_{Y'} X'$, i. e. il existe un $w : R' \rightarrow R$ (nécessairement unique) tel que $p_i w = v p_i'$ pour $i = 1, 2$;
- c. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ R & \longleftarrow & R' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1' \\ X & \xleftarrow{v} & X' \end{array}$$

est cartésien.

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ R & \longleftarrow & R' \\ \parallel \downarrow & & \downarrow \parallel \\ X & \xleftarrow{v} & X' \\ & & \downarrow f' \\ & & Y' \end{array}$$

DÉMONSTRATION. - Soient $A(Y')$, $B(Y')$ les deux ensembles envisagés. Soit $u : Y' \rightarrow Y$ un élément de $A(Y')$, soit $X' = X \times_Y Y'$ et $v : X' \rightarrow X$ le morphisme de projection ; on obtient de cette façon un objet dans $B(Y')$, ne dépendant d'ailleurs pas du choix du produit fibré qui a servi à le définir. Inversement, partons d'un élément de $B(Y')$, représenté par (X', f', v) ; alors, d'après l'hypothèse sur $\underline{\underline{S}}$, f' est un épimorphisme effectif, donc Y' s'identifie à

X'/R' , et par passage aux quotients v définit un morphisme $u : Y' \rightarrow Y$, ne dépendant d'ailleurs que de l'élément qu'on avait dans $B(Y')$. On a ainsi défini des applications

$$\alpha : A(Y') \rightarrow B(Y') \quad \text{et} \quad \beta : B(Y') \rightarrow A(Y') \quad .$$

Il est trivial que l'on a $\beta\alpha = \text{id}_{A(Y')}$, et on aura de même $\alpha\beta = \text{id}_{B(Y')}$ grâce à (4.2).

REMARQUE 4.4. - Un objet quotient $Y = X/R$ étant défini uniquement en termes du foncteur covariant $Z \rightsquigarrow \text{Hom}(Y, Z)$ qu'il représente, on n'a pas de prise en général sur le foncteur contravariant $Z \rightsquigarrow \text{Hom}(Z, Y)$ qu'il définit, en termes de X muni du graphe d'équivalence R . L'intérêt de (4.3) est de permettre de déterminer ce foncteur en termes de (X, R) lorsque R est un graphe d'équivalence effectif universel (On peut prendre alors pour $\underline{S}$ l'ensemble des épimorphismes effectifs universels).

Considérons un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{C}$ dans (Ens)

$$u : F \rightarrow G \quad ,$$

et supposons F représentable, et relativement représentable pour u (3.3). Alors $F \times_G F$ est également représentable (3.12). Soient

$$(X, \xi) \quad \text{et} \quad (R, (\xi_1, \xi_2))$$

les couples représentant les foncteurs F et $F \times_G F$. Les deux homomorphismes fonctoriels

$$\text{pr}_i : F \times_G F \rightrightarrows F \quad (i = 1, 2)$$

définissent deux morphismes

$$p_i : R \rightrightarrows X \quad (i = 1, 2)$$

définis aussi par la condition

$$F(p_i)(\xi) = \xi_i \quad (i = 1, 2) \quad .$$

PROPOSITION 4.5. - Le couple (p_1, p_2) des morphismes $R \rightarrow X$ est un couple d'équivalence ([1], III, n° 1).

En vertu des définitions, cela revient à dire que l'homomorphisme fonctoriel

$$F \times_G F \rightarrow F \times F$$

déduit des deux homomorphismes $\text{pr}_i : F \times_G F \rightarrow F \times F$, identifie, pour toute valeur Z de l'argument, $P(Z)$ au graphe d'une relation d'équivalence dans l'ensemble $F(Z)$. Or $P(Z) = F(Z) \times_{G(Z)} F(Z)$ est le graphe de la relation d'équivalence définie par l'application $u(Z) : F(Z) \rightarrow G(Z)$

C. Q. F. D.

Nous aurons encore besoin d'une définition :

DÉFINITION 4.6. - Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans $\underline{\mathcal{C}}$ est appelé un morphisme de G-descente effective (G étant un foncteur contravariant de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens)) si $X \times_Y X$ existe, et si le diagramme d'applications

$$G(Y) \xrightarrow{G(f)} G(X) \xrightleftharpoons[G(\text{pr}_2)]{G(\text{pr}_1)} G(X \times_Y X)$$



est exact, i. e. définit une bijection de $G(Y)$ sur l'ensemble des éléments de $G(X)$ dont l'image dans $G(X \times_Y X)$ par l'une et l'autre application est la même.

Par exemple, pour que f soit un épimorphisme effectif, il faut et il suffit que ce soit un morphisme de G-descente effective pour tout foncteur G représentable.

Nous en arrivons au résultat principal de ce numéro :

THÉOREME 4.7. - Soit $u : F \rightarrow G$ un morphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\mathcal{C}}$ dans (Ens) . On suppose F représentable par (X, ξ_X) , $\xi_X \in F(X)$. Soit $\underline{S}$ un ensemble de morphismes dans $\underline{\mathcal{C}}$, stable par extension de la base (Cf. 3.13). On suppose que tout $h \in \underline{S}$ est un épimorphisme effectif dans $\underline{\mathcal{C}}$ (donc même un épimorphisme effectif universel). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est représentable, et le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui représente u est élément de $\underline{S}$.

(ii) Les conditions suivantes sont vérifiées :

a. Pour tout objet S de $\underline{\mathcal{C}}$ et tout $\eta \in G(S)$, le foncteur $F_\eta = F \times_G G$ sur $\underline{\mathcal{C}}/S$ est représentable par un objet T , et le morphisme structural $T \rightarrow S$ est élément de $\underline{S}$.

b. Les morphismes éléments de $\underline{S}$ sont des morphismes de G -descente effective.

c. Soit R le graphe d'équivalence dans X qui représente $F \times_G F$ (Cf. 4.5). Alors R est effectif, et le morphisme $X \rightarrow X/R$ est élément de $\underline{S}$.

DÉMONSTRATION. - (i) $\Rightarrow$ (ii). En effet, (a) a été signalé dans 3.13 ; (b) résulte de ce que les morphismes éléments de $\underline{S}$ sont des épimorphismes effectifs, et (c) du fait que R n'est autre que $X \times_Y X$, donc X/R n'est autre que Y puisque les morphismes éléments de $\underline{S}$ sont des épimorphismes effectifs.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Nous allons d'abord n'utiliser que les hypothèses (a) et (b). D'après 3.12, $F \times_G F$ est représentable ; soit

$$(R, (\xi_R^1, \xi_R^2))$$

le couple qui le représente. Alors R , muni de ses deux projections

$$p_1, p_2 : R \rightarrow X \quad F(p_1)(\xi_X) = \xi_X^1,$$

est une relation d'équivalence dans X , mais nous ne supposons pas pour l'instant qu'il existe un quotient X/R . Soit, pour tout objet Y' de $\underline{C}$, $G'(Y')$ l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, d'objets X' sur Y' , à morphisme structural $X' \rightarrow Y'$ élément de $\underline{S}$, munis d'un morphisme $v : X' \rightarrow X$ compatible avec $R' = X' \times_{Y'} X'$ et avec R , et telle que le carré

$$(D_1) \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & R' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p'_1 \\ X & \xleftarrow{\quad v \quad} & X' \end{array}$$

soit cartésien (comparer 4.3). On va définir une application canonique, fonctorielle en Y' :

$$\alpha = \alpha(Y') : G(Y') \rightarrow G'(Y')$$

de la façon suivante. Soit $\eta \in G(Y')$, soit $(X', \xi_{X'})$ un couple représentant le foncteur F_η ; en vertu de (a), il existe, et le morphisme structural $f' : X' \rightarrow Y'$ est élément de $\underline{S}$. Par définition de (X, ξ_X) , il existe un unique morphisme

$$v : X' \rightarrow X$$

tel que

$$F(v)(\xi_X) = \xi_{X'}, \quad .$$

Évidemment, comme

$$F_{\eta} \times_{G_{\eta}} F_{\eta} = (F \times_G F) \times_G G_{\eta} = (F \times_G F)_{\eta} ,$$

on voit que $R' = X' \times_Y X'$, muni du couple $(\xi_{R'}^1, \xi_{R'}^2)$, avec

$$\xi_{R'}^1 = F(p_1')(\xi_X)$$
 ,

représente $(F \times_G F)_{\eta}$. Il existe alors, par définition de R , un unique morphisme

$$w : R' \rightarrow R$$

tel que

$$f(w)(\xi_{R'}^1) = \xi_R^1$$

et on aura alors

$$p_i w = v p_i' \quad i = 1, 2 ,$$

car les images inverses de ξ_X par les deux membres sont les mêmes (savoir $\xi_{R'}^1$). On constate même que le carré

$$(D_1) \quad \begin{array}{ccc} & & w \\ R & \xleftarrow{\quad} & R' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1' \\ X & \xleftarrow{\quad} & X' \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ v \\ \end{array}$$

est cartésien. En effet, R étant considéré comme un objet de C/X par p_1 , (R, ξ_X^2) représente le foncteur F_{η_X} , et de même, R' étant considéré comme un objet au-dessus de X' par p_1' , $(R', \xi_{R'}^2)$ représente le foncteur $F_{\eta_{X'}}$, où

$$\eta_X = u(X)(\xi_X) , \quad \eta_{X'} = u(X')(\xi_{X'}) = G(v)(\eta_X) .$$

Enfin, on a $\xi_{R'}^1 = F(w)(\xi_R^2)$, ce qui implique bien, en vertu de (3.9), que le carré (D_1) est cartésien. On a bien défini de cette façon un élément de $G'(Y')$, évidemment indépendant du choix du couple résolvant choisi pour le foncteur F_{η} . Cela achève la définition de l'application $\alpha(Y') : G(Y') \rightarrow G'(Y')$. On vérifie facilement qu'elle est fonctorielle (Cf. 3.9).

L'application α est injective, car connaissant $\alpha(\eta)$, classe à un isomorphisme près d'un système (X', f', v) , on en déduit la connaissance de $G(f')(\eta) = G(v)(\eta_X)$ (où $\eta_X = u(X)(\xi_X)$), donc celle de η puisque $G(f')$ est injectif (f' étant un morphisme de G -descente effective d'après l'hypothèse (b)). L'application α est surjective; car soit (X', f', v) représentant un élément η' de $G'(Y')$; posons

$$\eta_{X'} = G(v)(\eta_X) \quad .$$

On aura alors

$$G(p_1')(\eta_{X'}) = G(p_2')(\eta_{X'}) \quad ,$$

car les deux membres sont égaux respectivement à

$$G(p_1' w)(\eta_X) = G(w)(G(p_1)(\eta_X))$$

et on a

$$G(p_1)(\eta_X) = G(p_2)(\eta_X) \quad ,$$

car les deux membres sont respectivement $u(R)(\xi_R^1)$, $i = 1, 2$, qui sont égaux par définition de $(R, (\xi_R^1, \xi_R^2))$. Comme f' est un morphisme de G -descente effectif par (b), on conclut de l'égalité qu'on vient d'établir qu'il **existe** un unique $\eta \in G(Y')$ tel que

$$G(f')(\eta) = \eta_{X'} \quad .$$

Je dis qu'on a $\alpha(\eta) = \eta'$. En effet, soit $(\overline{X}', \overline{f}', \overline{v})$ définissant $\alpha(\eta)$; on a donc un $\xi_{\overline{X}'} \in F(\overline{X}')$ dont l'image dans $G(\overline{X}')$ est $\eta_{\overline{X}'} = G(\overline{f}')(\eta)$, et qui a une propriété universelle, ce qui implique qu'on peut trouver un Y' -morphisme unique

$$r : X' \rightarrow \overline{X}'$$

tel que

$$F(r)(\xi_{\overline{X}'}) = \xi_{X'} \quad ,$$

où on pose

$$\xi_{X'} = F(v)(\xi_X) \quad , \text{ d'où } u(X')(\xi_{X'}) = \eta_{X'} \quad .$$

On aura par la suite

$$v = \overline{v}r \quad .$$

Dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{\quad} & \overline{R}' & \xleftarrow{\quad} & R' \\ p_1 \downarrow & & \overline{p}_1' \downarrow & & p_1' \downarrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & \overline{X}' & \xleftarrow{\quad} & X' \end{array}$$

le carré de gauche et le rectangle composé sont des carrés cartésiens, il en est donc de même du carré de droite. Comme r est un Y' -morphisme, on conclut de (4.2) appliqué au carré

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{r} & \\ \overline{X}' & & X' \\ \overline{f}' \downarrow & & \downarrow f' \\ Y' & \xleftarrow{\quad} & Y' \end{array} ,$$

et se rappelant que f' est un élément de $\underline{\underline{S}}$, donc un épimorphisme effectif universel, que le dit carré est également cartésien, i. e. que $r : X' \rightarrow \overline{X}'$ est un isomorphisme. Cela prouve bien que $\eta' = \alpha(\eta)$. En résumé :

COROLLAIRE 4.8. - Sous les conditions de (4.7), supposons vérifiées les conditions (ii), (a) et (b). Alors le foncteur G est isomorphe au foncteur G' défini plus haut en termes de X et du graphe d'équivalence R dans X .

Or on a vu (4.3) que si R est un graphe d'équivalence effectif, tel que le morphisme canonique $f : X \rightarrow Y = X/R$ soit élément de $\underline{\underline{S}}$, alors G' est représentable à l'aide de $Y = X/R$. Cela achève la démonstration de (4.7).

REMARQUES 4.9. - On obtient dans (4.7), les hypothèses les plus larges possibles pour la représentabilité de G , en prenant pour $\underline{\underline{S}}$ l'ensemble des morphismes qui sont des épimorphismes effectifs universels et des morphismes de G descente "universels" ; le critère obtenu est applicable théoriquement chaque fois que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui représente u est un épimorphisme effectif universel.

4.10. - En pratique cependant, on ne sait pas caractériser les morphismes qui sont des épimorphismes effectifs universels, et on préfère travailler avec un ensemble $\underline{\underline{S}}$ de morphismes qu'on sache bien manier, par exemple les morphismes

"fidèlement plats", i. e. surjectifs et plats, (qui seront étudiés dans un exposé ultérieur). Dans certains cas on disposera d'un théorème du type : Pour tout graphe d'équivalence R dans un objet X de $\underline{C}$, tel que $p_1 \in \underline{S}$, le graphe R est effectif et le morphisme canonique $f : X \rightarrow X/R$ est élément de $\underline{S}$. (Pour des exemples importants en géométrie algébrique, d'ailleurs transposables à la géométrie analytique, cf. [1], III). Lorsque l'ensemble $\underline{S}$ possède cette propriété supplémentaire, la condition (ii), (c), dans (4.7) est conséquence des deux autres. (Dans le cas général au contraire, c'est la condition (c) qui s'avère la plus délicate à vérifier).

5. Application au recollement de solutions de problèmes universels.

Soit $\underline{C}$ la catégorie (An) des espaces analytiques,

DÉFINITION 5.1. - Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'espaces analytiques est appelé un morphisme de localisation s'il est surjectif et si X est réunion disjointe d'ouverts X_i tels que les morphismes induits $f_i : X_i \rightarrow Y$ soient des immersions ouvertes.

PROPOSITION 5.2.

- (i) Tout isomorphisme d'espaces analytiques est un morphisme de localisation.
- (ii) L'ensemble des morphismes de localisation est stable par extension de la base (Cf. 3.13).
- (iii) Le composé de deux morphismes de localisation est un morphisme de localisation.
- (iv) Un morphisme de localisation est un épimorphisme effectif universel.

DÉMONSTRATION. - Les assertions (i), (ii), (iii) sont immédiates à partir des définitions. Pour (iv), on note que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de localisation, tel que X soit Y -isomorphe à la somme $\coprod_i Y_i$, où les Y_i sont des ouverts de Y (munis de la structure induite) qui recouvrent Y , alors R s'identifie à $\coprod_{i,j} Y_i \cap Y_j$, et p_1 (resp. p_2) est défini par les composés des immersions canoniques (où on pose $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$) :

$$\begin{array}{ccc} Y_{ij} & \rightarrow & Y_i \rightarrow X \\ \text{resp.} & & \\ Y_{ij} & \rightarrow & Y_j \rightarrow X \end{array}$$

L'assertion (iv) signifie alors ceci : pour tout espace analytique Z , le diagramme d'applications ensemblistes

$$\text{Hom}(Y, Z) \longrightarrow \prod_i \text{Hom}(Y_i, Z) \rightrightarrows \prod_{i,j} \text{Hom}(Y_{ij}, Z)$$

est exact, i. e. la donnée d'un morphisme g de Y dans Z équivaut à la donnée d'une famille de morphismes $g_i : Y_i \rightarrow Z$ tels que $g_i|_{Y_{ij}} = g_j|_{Y_{ij}}$ pour tout couple (i, j) . Or cela résulte trivialement de la définition des morphismes d'espaces analytiques.

PROPOSITION 5.3. - Soient X un espace analytique, R un graphe d'équivalence dans X , de projections p_1, p_2 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est un graphe d'équivalence effectif, et le morphisme canonique $f : X \rightarrow X/R$ est un morphisme de localisation.

(ii) Il existe une famille d'ouverts disjoints X_i recouvrant X , tels que pour tout couple d'indices i, j , posant $R_{ij} = p_1^{-1}(X_i) p_2^{-1}(X_j)$, le morphisme induit par p_1 de R_{ij} dans X_i soit une immersion ouverte.

DÉMONSTRATION. - On a (i) $\Rightarrow$ (ii) trivialement; prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i).
Posons

$$X_{ij} = p_1(R_{ij}) \quad ,$$

et notons qu'en vertu des relations $p_1 s = p_2$, $p_2 s = p_1$, où s désigne la symétrie dans R , p_2 induit une immersion ouverte de R_{ij} dans X_j , dont l'image est $p_1(s(R_{ij})) = p_1(R_{ji}) = X_{ji}$. On en déduit un isomorphisme $p_2 p_1^{-1}$

$$\varphi_{ji} : X_{ij} \rightarrow X_{ji} \quad .$$

On en conclut, du fait que R est un graphe d'équivalence dans X , qu'on a les relations

$$X_{ii} = X_i$$

$$(\varphi_{kj}|_{X_{jki}})(\varphi_{ji}|_{X_{ijk}}) = (\varphi_{ki}|_{X_{ikj}}) \quad .$$

Il est alors bien connu qu'on obtient, par "recollement des X_i à l'aide des φ_{ji} ", un espace topologique quotient Y . D'autre part par recollement des faisceaux d'anneaux sur les X_i , on trouve un faisceau d'anneaux (et même de k -algèbres)

sur Y , faisant de Y un espace annelé en k -algèbres, et même un espace analytique puisque Y est recouvert par des ouverts Y_i isomorphes aux espaces analytiques X_i . Alors le morphisme canonique $f : X \rightarrow Y$ est par construction un morphisme de localisation, et R s'identifie à $X \times_Y X$, ce qui achève la démonstration.

On notera que si X et R sont des espaces analytiques au-dessus d'un autre S , et si p_1, p_2 sont des S -morphisms, alors le quotient Y qu'on vient de construire est de façon naturelle un espace analytique au-dessus de S , et c'est un quotient de X par R dans la catégorie $(An)_S$ (vérification purement formelle); en d'autres termes, l'analogue de (5.3) est vrai aussi quand on se place dans une catégorie $(An)_S$ au lieu de (An) .

DÉFINITION 5.4. - Soient S un espace analytique, G un foncteur contravariant de $(An)_S$ dans la catégorie des ensembles. On dit que G est de nature locale, si pour tout objet T de $(An)_S$, le préfaisceau

$$U \rightsquigarrow G(U)$$

sur T (où U parcourt les ouverts de T) est un faisceau.

Cela signifie donc que, pour tout recouvrement (T_i) d'un espace analytique T sur S par des ouverts T_i , le diagramme d'applications naturelles

$$G(T) \longrightarrow \prod_i G(T_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} G(T_i \cap T_j)$$

est exact, condition qui est trivialement vérifiée si G est représentable. La condition écrite se décompose à son tour en deux :

LEMME 5.5. - Pour qu'un foncteur contravariant G de $(An)_S$ dans (Ens) soit de nature locale, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes :

- a. G transforme les sommes en produits ;
- b. Tout T -morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui est un morphisme de localisation (5.1) est un morphisme de G -descente effective (4.6).

Nous en arrivons au résultat principal du présent numéro :

PROPOSITION 5.6. - Soient S un espace analytique, G un foncteur contravariant

de $(An)_S$ dans la catégorie des ensembles, $u_i : F_i \rightarrow G$ des homomorphismes de foncteurs. On suppose les F_i représentables par des objets X_i de $(An)_S$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est représentable par un objet Y de $(An)_S$, les morphismes $f_i : X_i \rightarrow Y$ qui représentent les u_i sont des immersions ouvertes, et les $f_i(X_i)$ recouvrent Y .

(ii) Les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a. Pour tout objet T de $(An)_S$ et tout $\eta \in G(T)$, le foncteur $F_{i\eta}$ sur $(An)_T$ (Cf. n° 3) est représentable par un ouvert T_i de T , et $T = \bigcup_i T_{i\eta}$;

b. Le foncteur G est de nature locale.

DÉMONSTRATION. - Évidemment (i) $\Rightarrow$ (ii) en vertu de (3.4). Pour prouver l'implication inverse, posons

$$X = \bigsqcup_i X_i$$

et désignons par F le foncteur sur $(An)_S$ représenté par X . Pour tout objet T sur S , la donnée d'un objet de $F(T)$ équivaut donc à la donnée d'une famille d'ouverts disjoints T_i recouvrant T , et de S -morphisms $T_i \rightarrow X_i$, i. e. d'éléments $\xi_i \in F_i(T_i)$. Soit

$$v_i : F_i \rightarrow F$$

l'homomorphisme de foncteurs déduit de l'immersion canonique $X_i \rightarrow X$; on va montrer qu'il existe un morphisme unique

$$u : F \rightarrow G$$

tel que

$$uv_i = u_i \text{ pour tout } i.$$

En effet, à un élément $\xi = (\xi_i)$ comme ci-dessus, on fera correspondre l'élément η de $G(T)$ dont les images dans les $G(T_i)$ sont les $u_i(\xi_i)$ (l'existence et l'unicité sont garanties par l'hypothèse (b)). On a ainsi défini une application canonique

$$u(T) : F(T) \rightarrow G(T)$$

dont on vérifie trivialement qu'elle est fonctorielle en T , d'où l'homomorphisme

cherché. On désignera par $\underline{S}$ l'ensemble des morphismes dans $\underline{C} = (An)/S$ qui sont des morphismes de localisation. Les hypothèses préliminaires de (4.7) sont vérifiées pour $\underline{S}$, en vertu de (5.2), (ii) et (iv). Nous allons vérifier les conditions (ii) de (4.7) pour $u : F \rightarrow G$. La condition (4.7), (ii) (b), est contenue dans l'hypothèse que G est de nature locale. On voit de plus que, pour tout objet T de $\underline{C}$, et tout $\eta \in G(T)$, le foncteur contravariant F est représenté par le T -espace analytique T' somme des $T_{i\eta}$ qui représentent les $F_{i\eta}$. Comme par l'hypothèse (5.6), (ii) (a), les $T_{i\eta}$ sont des ouverts de T , on voit bien que le morphisme structural $T' \rightarrow T$ est un morphisme de localisation, i. e. on a (4.7), (ii) (a). Enfin, nous avons remarqué déjà au numéro précédent que R , considéré comme un objet au-dessus de X grâce à p_1 , représente le foncteur F_{η_X} , donc, en vertu de l'hypothèse (5.6), (ii) (a), le morphisme p_1 est élément de $\underline{S}$. Appliquant (5.3), on en conclut que (4.7), (ii) (c), est également vérifié. Par suite, en vertu de (4.7), G est représentable par un couple (Y, η) . Appliquant encore la condition (a) au couple (Y, η) , on trouve (i). Cela achève la démonstration de (5.6).

COROLLAIRE 5.7. - Soient (S_i) un recouvrement d'un espace analytique S par des ouverts S_i , G un foncteur contravariant de $(An)/S$ dans (Ens) . Pour que G soit représentable, il faut et il suffit que G soit de nature locale, et que pour tout i , le foncteur $G_i = G/S_i$ soit un foncteur contravariant représentable sur $(An)/S_i$.

Soit F_i le foncteur contravariant sur $(An)/S$ à valeurs dans (Ens) obtenu en prenant $F_i(T) = \emptyset$ si le morphisme structural $g : Y \rightarrow S$ n'est pas majoré par l'injection canonique $S_i \rightarrow S$, et $F_i(T) = G(T)$ dans le cas contraire. On voit aussitôt que F_i est représentable si et seulement si G_i l'est. D'autre part, pour tout objet T de $(An)/S$, de morphisme structural $g : T \rightarrow S$, et tout $\eta \in G(T)$, le foncteur F_i est évidemment représentable par l'ouvert $g^{-1}(S_i)$ de T , et ces ouverts recouvrent T , donc la condition (5.6), (ii) (a), est en tous cas satisfaite. Alors (5.7) résulte de (5.6).

REMARQUE 5.8. - On remarquera que dans la démonstration, donnée dans l'exposé précédent, de l'existence du produit $X \times Y$ de deux espaces analytiques, nous avons reproduit essentiellement une démonstration directe de (5.6). En fait, (5.6) est évidemment indépendant de l'existence du produit dans (An) , et aurait pu être utilisée dans la démonstration de cette existence.

Il reste, pour finir, à donner une caractérisation commode des immersions ouvertes en termes de morphismes de foncteurs correspondants. Pour énoncer ce critère, nous introduisons, pour tout espace analytique T , et tout point t de T , le sous-espace analytique réduit e_t de T réduit au point t . Donc l'anneau local de t dans e_t est le corps de base k . Nous désignons par $i_t : e_t \rightarrow T$ l'injection canonique. Lorsqu'on a un morphisme

$$g : T' \rightarrow T$$

d'espaces analytiques, et un point t' de T' , posant $t = g(t')$, on en déduit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{g} & T' \\ i_t \uparrow & & \uparrow i_{t'} \\ e_t & \xleftarrow{\sim} & e_{t'} \end{array} \quad \begin{array}{c} g_{t'} \\ \sim \end{array}$$

où $g_{t'}$ est évidemment un isomorphisme. Lorsque T est un espace analytique sur un autre S , on considérera e_t comme un espace analytique sur S . Bien entendu, les espaces analytiques e_t sur S , pour t variable, ne sont pas isomorphes, i. e. S -isomorphes, en général ($e_{t'}$ et $e_{t''}$ ne le sont que si t' et t'' ont même image s dans S). Cependant, si, ci-dessus, $g : T' \rightarrow T$ est un S -morphisme, alors le carré correspondant est un carré de S -morphisms.

PROPOSITION 5.9. - Soient S un espace analytique, $\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{In}})/_S$, et soit $u : F \rightarrow G$ un homomorphisme de foncteurs contravariants de $\underline{\underline{C}}$ dans (Ens) . Supposons G représentable par un objet Y de $\underline{\underline{C}}$. Pour que F soit représentable par un objet X de $\underline{\underline{C}}$, et que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui représente u soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

a. u est un monomorphisme, i. e. pour tout objet T de $\underline{\underline{C}}$, $u(T) : F(T) \rightarrow G(T)$ est une application injective.

b. Pour tout objet T de $\underline{\underline{C}}$, et tout $\eta \in G(T)$, l'ensemble T_η des points $t \in T$ tels que $\eta_t = G(i_t)(\eta) \in G(e_t)$ soit dans l'image de $u(e_t)_\eta : F(e_t) \rightarrow G(e_t)$, est ouvert.

c. Avec les notations précédentes, si $T_\eta = T$, alors η est dans l'image de $u(T) : F(T) \rightarrow G(T)$.

En vertu de (3.3.13), il faut exprimer que pour tout objet T de $\mathcal{C}$, et $\eta \in G(T)$, le foncteur F_η sur $\mathcal{C}/T = (\mathbf{An})/T$ est représentable par un ouvert T_η de T . Pour ceci, les conditions (a), (b), (c) sont manifestement nécessaires, si on note que le T_η introduit dans (b) n'est autre alors que l'ouvert qui représente F_η . Pour la suffisance, notons que si T' est un objet de $\mathcal{C}/T$, de morphisme structural $g : T' \rightarrow T$, et si on pose $\eta' = G(g)(\eta)$, alors on a (avec les notations de (b))

$$T'_{\eta'} = g^{-1}(T_\eta) \quad ,$$

comme on voit aussitôt sur le diagramme de S -morphisms écrit avant (5.9). D'autre part, en vertu de (a), $F_\eta(T')$ est vide ou réduit à un élément, et en vertu de la formule précédente, et de (c) appliqué à T' , η' au lieu de T , η , l'existence $F(T')$ est non vide si et seulement si $g^{-1}(T) = T'$, i. e. si et seulement si g se factorise à travers l'ouvert induit T_η . Cela prouve que ce dernier représente F_η , et achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II et III, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 195, 22 p. ; et t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p.