

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt ^{de} début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

Chapitre 1 La notion de cristal.

Commentaire terminologique: Un cristal possède deux propriétés caractéristiques: la rigidité, et la faculté de croître, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de soufre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0.) Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R ; dans le cas qui nous intéresse le plus, on aura $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Soit C la catégorie des R -préschémas au-dessus S , (i.e. munis d'un R -isomorphisme $S \rightarrow T$), tels que $S \rightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans $(\text{Sch})/R$, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C , associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T .

Définition 1.1. On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S , relativement à R , une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C . Plus généralement, pour toute catégorie fibrée \mathcal{F} sur $(\text{Sch})/R$, on définit la notion de " \mathcal{F} -cristal" sur S , ou "cristal en objets de \mathcal{F} ", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R . Quand $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, on parlera de "cristal absolu" sur S , de l'espèce considérée.

1.2.) Les \mathcal{F} -cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de \mathcal{F} . Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

Tout d'abord, si $S \rightarrow R' \rightarrow R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un cristal relativement à R' , par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S .

Fixons maintenant R, S et soit $S' \rightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type \underline{F} sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définir un foncteur $C' \rightarrow C$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \rightarrow T'$ est un objet de C' , il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \rightarrow T$, qui fait de T un objet de C , ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R , les cristaux de type \underline{F} sur S forment une catégorie fibrée sur $(\text{Sch})/R$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variances (en R , et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être regardées comme provenant d'une variance en (R, S) directement.

1.4.) On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S : c'est le foncteur "valeur en S ". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple 1.6. plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-cohérent M sur S , muni d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant, ^(cf 1.8.) le foncteur cristaux de modules \rightsquigarrow Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable,

1.5.) Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k , et $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k : si $\text{car } k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k , si $\text{car } k = 0$, c'est k lui-même. ^{Alors il est bien connu que la catégorie C de 1.0.}

à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalente à celle des modules de type fini sur W . Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des ~~xxx~~ vectoriels sur $k \otimes W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée \underline{F} .

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S " sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k , s'identifie au foncteur $\mathcal{O}_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W , foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2: ^{S étale sur R.} Si $S=R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R " est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R , de type \underline{F} donné, avec la catégorie \underline{F}_R . En particulier, un cristal de modules sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un \mathbb{Z} -module.

De façon un peu plus générale, si S est étale sur R , alors S est un objet final de C , et les cristaux de modules (disons) sur S , relativement à R , s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S .

1.7. ~~Relation entre la notion d'objet stratifié et la notion de cristal~~ Exemple 3 : S un sous-préschéma de R . Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S , on peut supposer S fermé dans R , défini par un idéal quasi-cohérent J . Soit $\mathcal{S}_n^R = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de S dans R . Alors la famille des objets \mathcal{S}_n de C est finale dans C , d'où on conclut facilement qu'un cristal de type \underline{F} sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets des $\underline{F}_{\mathcal{S}_n}$ qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R , de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S .

priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k , c'est pareil qu'un cristal ^{same} relativement à W .

On peut aussi donner un énoncé commun aux ~~deux~~ exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \rightarrow R$ non ramifié, ce qui permet en effet de construire encore des "voisinages infinitésimaux" S_n .

1.5. Relation avec la notion de stratification. Les données R, S, F étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geq 0$ le voisinage infinitésimal

Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2 . Si E est un objet de F_S , une n -connexion sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞ -connexion ou pseudo-stratification de E , est la donnée pour tout n d'une n -connexion, de telle façon que ces n -connexions se recollent.

Enfin, une stratification sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de $\sqrt{S \times_R S \times_R S}$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de 1.2. et 1.3. Notons que lorsque S est "formellement non ramifié sur R " i.e. $\Omega^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S munis d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur "valeur en S ", à la catégorie F_S elle-même. (Dans tous les cas, le foncteur "valeur en S " est ~~en tous cas~~ fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal M sur S de type F (relativement à R), sa ~~valeur~~ valeur $M(S) = M$ est un objet de F_S muni d'une stratification canonique relativement à R , d'où un foncteur: cristaux relatifs de type F \rightarrow objets de F munis d'une stratification. La remarque de 1.4. montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants

si $S \rightarrow R$ est "formellement lisse", par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k , avec k une extension séparable de k_0 .
~~Demandez-vous~~ (Quand d'ailleurs $S \rightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent ~~d'ailleurs~~ équivalentes, par le foncteur "valeur en S ", à \underline{F}_S lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de 1.5 ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \rightarrow R$ est plat et localement de présentation finie, (au moins si R est noeth. et si bornés ces Modules cohérents), mais je n'ai pas écrit la démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle.

Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R , i.e. le morphisme diagonal $S \rightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\Omega_{S/R}^2 \otimes \text{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $\text{Dér}_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R , sur M , de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée \underline{F} sur $(\text{Sch})/R$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à Frobenius $S \rightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une ~~stratification~~ stratification !

Compatible avec puissances p-èmes

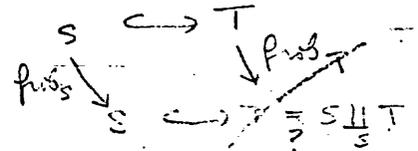
1.10. La notion de p-cristal et ses variantes.

Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p > 0$.

et $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ (ou $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$), spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait de présentation finie au même). Si \underline{M} est un cristal de modules sur S , (alors en vertu de 1.5., pour tout $s \in S$, si $s' \in \bar{k}(s)$ est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $\underline{M}(s')$ de \underline{M} en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$). Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de "famille ^{algébrique} de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S . Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui ~~permet~~ devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S ,

Considérons le morphisme "puissance p.ème"

$$S \xrightarrow{\text{frob}_S} S,$$



il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur S , d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\underline{M}^{(p)} = \text{frob}_S^* (\underline{M}).$$

On appelle p-cristal sur S un cristal \underline{M} sur S , muni d'un morphisme de cristaux

$$F: \underline{M}^{(p)} \longrightarrow \underline{M}.$$

Evidemment, les p-cristaux ^{sur S} d'espèce \underline{F} donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de \underline{F} (pour les foncteurs covariants cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S , d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc).

Pour ~~formuler~~ définir le dual d'un p-cristal de modules, il y a lieu d'introduire

une notions duale de celle de p-cristal d'espèce \underline{F} , c'est celle de

p^{-1} -cristal d'espèce \underline{F} : c'est un cristal d'espèce \underline{F} , avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

Ainsi un foncteur cartésien entre catégories fibrées sur (Sch) transforme

p -cristaux en p^{-1} -cristaux, et inversement. Les p -cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p -cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "auto-duale", il y a lieu d'introduire la notion de de poids 1,

bi-cristal sur S , qu'on pourrait aussi appeler un cristal de Dieudonné sur S ,

lorsque F est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une p -structure et d'une p^{-1} -structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p \cdot \text{id}_M, \quad VF = \text{id}_M(p)$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure, il y a lieu d'introduire la notion

de bi-cristal de poids 1, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \text{id}_M, \quad VF = p^i \text{id}_M(p)$$

dénoté π^i

(i) Par exemple, on définit le bicristal de Tate de poids 1, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le Module \mathcal{O}_T lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \text{id}_{\mathcal{O}_T}, \quad V = p^i \text{id}_{\mathcal{O}_T}$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i ème du bicristal de Tate de poids 1 . (NB les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de sorte que les poids s'ajoutent).

(ii) Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1 , on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S , [qui entre parenthèses est une catégorie \mathbb{Z}_p -linéaire, (i.e. les Hom sont des \mathbb{Z}_p -modules ...), tout comme les catégories de p -cristaux etc qu'on en déduit]. Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre \mathbb{Q}_p -linéaire: il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p -torsion. On trouve la catégorie des "cristaux de modules"

à isogénie près, bi-isocristal, sur S . Unissant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p -isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal \underline{M} muni d'un homomorphisme $F: \underline{M}^{(p)} \rightarrow \underline{M}$. La notion de bi-isocristal de poids i , qui serait calquée de celle de bicristal de poids i , n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme $p^{i-1}F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler bi-isocristal (sans précision de poids) un p -isocristal pour lequel F est un isomorphisme, et de ne pas choisir entre les différents $p^{i-1}F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1} -isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement auto- quand on se restreint aux objets de type fini:

duale ~~(\underline{M}, F)~~ ~~est~~ ~~(\underline{M}^*, F^{-1})~~, où \underline{M}^* est le isocristal dual de \underline{M} .

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-cristaux de poids i , on trouve les bicristaux de poids i à isogénie près, qui forment une catégorie abélienne $\text{IsBic}(S, i)$, et un foncteur exact "oubli de V "

$$\text{IsBic}(S, i) \rightarrow \text{IsBic}(S),$$

à valeurs dans la catégorie $\text{Isbic}(S)$ des isobicristaux sur S . Ce foncteur est pleinement fidèle, de sorte que les isobicristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près. Pour préciser ce point, désignant par $\text{Bic}(S, i)$ la catégorie des bicristaux de poids i sur S , on y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$\text{Bic}(S, i) \rightarrow \text{Bic}(S, i+1) \rightarrow \dots,$$

donnés par $(\underline{M}, F, V) \mapsto (\underline{M}, F, pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p , on trouve des foncteurs

$$\text{IsBic}(S, i) \rightarrow \text{IsBic}(S, i+1) \rightarrow \dots$$

qui se trouvent être pleinement fidèles: on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i , à isogénie près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La noti-

précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, ^{et j'espère au détail.} Cela semble donc une catégorie toute indiquée ~~pour~~ comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1: Cas où (S) est le spectre d'un corps parfait k . Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W , la formation du motif $M^{(p)}$ correspond à la formation de

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de Frobenius de W , ~~et~~ (W, f_W) est la W -algèbre définie par f_W . Par suite une structure de p -cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W -modules $M^{(p)} \rightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W -semi-linéaire

$$F_M : M \rightarrow M.$$

Comme l'application $x \mapsto x \circ f_W$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W , on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1} -semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1} -structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1} -linéaire:

$$V_M : M \rightarrow M.$$

La donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i \text{id}_M.$$

En particulier, pour $i=1$, on retrouve la notion de module de Dieudonné: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné ~~relativement~~ à k .

La catégorie des isocristaux de ~~modules~~ type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K ^{iso} de W . Donc un bi-cristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K -endomorphisme bijectif.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont dans l'image essentielle de $\text{Isbicr}(S, i) \rightarrow \text{Iscric}(S)$. On trouve que ce sont les couples (\mathcal{E}, F) , \mathcal{E} un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie bornée de \mathcal{E} : c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'ensemble des $F^n x$ soit borné. Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisation par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en effet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de F . De façon précise, appelant effectifs les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un $\text{Iscric}(S, i)$, on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-1} \otimes_{\mathbb{N}}$, avec \mathbb{N} effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire :

1.13.) Exemple 2: S lisse sur un corps parfait k . Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S , sans plus. Tout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ par $R = \text{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S , relativement à R , revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S , relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (NB On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7. !) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n , la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n , et les foncteurs restriction entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S , ~~car~~ par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S , on peut donc supposer que pour tout n , S se remonte en

S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S=S_0 \rightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un idéal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra \mathbb{F}_n) vers les cristaux sur S_0 , est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à \mathbb{F}_n s'identifie à un cristal ^{sur S_n} relativement à \mathbb{F}_n . Comme S_n est lisse sur W_n , il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace \mathbb{F} considérée) sur S_n , munis d'une stratification relativement à $\mathbb{F}_n = \text{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: un cristal ^M sur S s'identifie à un système cohérent (M_n) d'objets à stratification sur les différents S_n sur $R_n = \text{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever S en un schéma X propre sur $R = \text{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4,5 que dans le cas de cristaux de modules cohérents sur S , la catégorie desdits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents M sur \mathbb{F} , munis d'une stratification relativement à $R = \text{Spec}(W)$. (NB Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi X de S). Considérant la fibre générique X_K de X sur R , qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S , dans la catégorie des Modules cohérents ~~stratifiés~~ sur X_K , stratifiés relativement à X_K . Or (oublie de 1.8.) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus et X_K lisse dessus comme ici K est de caractéristique nulle, on a signalé dans 1.8. que la notion de stratification s'explique très simplement comme celle de "connexion inté-

se plonger dans le corps des complexes \mathbb{C} , alors la notion de module cohérent à ^{ex)} ~~complexe~~ ^(complexes) intégrable sur X_K s'interprète en termes de représentations linéaires \checkmark du groupe fondamental ~~de~~ transcendant de $X_{\mathbb{C}}^{\text{an}}$, de façon bien connue. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclut par descente que tout Module cohérent stratifié sur X_K est trivial, ce qui en termes de S s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur S est isogène à un cristal "constant", i.e. ^{à un cristal} ~~image~~ qui est l'image inverse d'un cristal sur k , (lui-même défini par un module de type fini sur W). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit, par exemple, facilement que tout p -cristal cohérent sur S ou tout bi-cristal de poids i donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) ~~est~~ est isogène à un fourbi de même espèce trivial. On voit donc là un principe d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique p ...]

Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur S , on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X_K . Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner ~~quelques-uns~~ si ^{effectivement} par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. ~~Ça~~ Cela me ^{paraît} semble un peu trop optimiste, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé.

Tout ce qu'on peut dire à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être ~~de~~ de nature locale en les points de X qui sont maximaux dans S .

Quand on ne suppose pas S ~~monté~~ proprement et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté S formellement, en un schéma formel X sur \mathbb{A} , alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que la catégorie des cristaux ~~est~~ de modules cohérents sur S est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel X , munis d'une stratification relativement à $\text{Spec}(W) = \mathbb{A}$ (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore,

il faut définir X_K comme l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel X , et considérer sur X_K des Modules cohérents munis de ~~maximales~~ stratifications au sens rigide-analytique, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables ^{en ce sens}. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur S dans les Modules cohérents stratifiés sur X_K , induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur S , dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur X_K . Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps des complexes.

~~xxx~~ La description donnée, des cristaux sur S , toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux cohérents sur S : ~~maximales~~ cette catégorie est noethérienne (si S est noethérien i.e. de type fini sur k), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus ~~des~~ objets sans torsion correspondent ^{ent} dans la description ci-dessus ~~aux~~ Modules stratifiés sans torsion sur X , lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur S .

1.14. Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, ~~le~~ foncteur $M \rightarrow M^{(p)}$, pour pouvoir décrire de façon analogue les bicristaux et bi-isocristaux. De façon générale, si en plus de la donnée de S sur k , on a un S' lisse sur k' parfait, et des ~~homomorphismes~~ $S' \rightarrow S$ et $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$ donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever S' formellement en X' , et $S' \rightarrow S$ en $X' \rightarrow X$, donnant un carré commutatif avec $\text{Spec } W' \rightarrow \text{Spec } W$, alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de S à S' , s'explique en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de X

p.èmes, on est donc conduit à chercher à ~~relever~~ relever ce morphisme à X de façon compatible avec le morphisme $\text{Spec}(W) \rightarrow \text{Spec}(W)$ déduit de f_W , ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \rightarrow S^{(p/k)}$ en un morphisme de \mathbb{R} -schémas formels $X \rightarrow X_{\mathbb{R}}(R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si S est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \rightarrow X,$$

compatible avec f_R sur $R = \text{Spec}(W)$, et induisant f_S sur S , le foncteur $\underline{M} \rightarrow \underline{M}^{(p)}$ s'explique comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur X relativement à R , resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique X_K , pour le "morphisme" $X_K \rightarrow X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à f_K sur le corps de base !) induit par f_X . Bien que f_X et par suite f_{X_K} ~~est~~ loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

1.15. Bicristaux et bisocristaux sur une base quelconque. Ne supposons plus nécessairement S de caractéristique déterminée p . ~~Mais~~ Pour chaque nombre premier p , soit S_p la fibre $V(p, 1_{O_S})$ de S sur le point $p\mathbb{Z}$ de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Un bicristal de poids i sur S est par définition la donnée d'un cristal de modules M sur S , et pour chaque p d'une structure de bi-cristal de poids i sur la restriction \underline{M}_p de M à S_p , définie par la donnée de (F_p, V_p) . On définit de même la notion de bi-isocristal sur S , étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur S (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur \mathbb{Z} par \mathbb{Q} . - Lorsque S est de caractéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si S est de caractéristique p , on retrouve les notions de 1.10. Lorsque enfin S est de type fini sur \mathbb{Z} et domine $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, alors la notion envisagée est d'une nature essentiellement arithmétique, les différents F_p jouant le rôle d'homomorphismes de Frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en

re permet de relier entre eux les groupes formés en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance ...

1.16. Un retour en arrière. La définition 1.1. et le corollaire 1.3. sont un peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour C la catégorie des R -flèches $S \rightarrow T$ qui ... , il faut prendre la catégorie des R -flèches $U \rightarrow T$ qui ... , où U est un ouvert induit non précisé de S . De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée \underline{F} est un "champ" pour la topologie de Zariski sur $(\text{Sch})/R$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si S, S' sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur S et S' pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restriction sur $S' \rightarrow S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas ... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le "site cristallogène de S sur R ", qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacente est celle des R -morphisms $U \rightarrow T$ (U ouvert de S , $U \rightarrow T$ immersion fermée surjective définie par idéal nilpotent sur T), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \rightarrow T)$ les familles définies par des recouvrements ouverts (T_i) de T , chaque T_i muni de la structure induite, et définissant $(U_i \rightarrow T_i)$ par $U_i = U \times T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U \rightarrow T}$ sur les objets des objets de C , avec, pour toute flèche $(U \rightarrow T) \rightarrow (U' \rightarrow T')$ de C , un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U' \rightarrow T'}$ dans $F_{U \rightarrow T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !). En particulier, associ-

d'anneaux \underline{O}_C sur C . Ceci pose, les cristaux (quasi-cohérents) sur S s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur \underline{O}_C ; les cristaux "de ^{prés} finis" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondent exactement aux Modules de présentation finie sur \underline{O}_C .

Quand on a un R -morphisme $S' \rightarrow S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les sites cristallogènes correspondants à S, S' . Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les topos cristallogènes $\text{Topcr}_{S/R}$ et $\text{Topcr}_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un ~~homomorphisme~~

$$\text{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \text{Topcr}_{S/R}$$

correspondant à la notion naturelle de "image inverse de faisceaux" (qui, j'avoue, devrait être définie avec le plus grand soin).

1.17. On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Etant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogène, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: si R est le spectre d'un corps, et si S est lisse sur R , et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coefficients dans \underline{O}_C lui-même, la cohomologie de

De Rham de S relativement à R . Plus généralement, sans condition sur R , si $f: S' \rightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme "valeur en S' " de $R^*f_{\text{cris}} \otimes (\underline{O}_C)$ (cf 1.4) faisceau de cohomologie de De Rham $R^1 f_* (\underline{\Omega}_{S'/S}^n)$, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ et au ~~valeur~~ que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée

à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.). L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De-Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doit exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument \underline{O}_C . Au cas où la cohomologie du site cris-

tallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut. On pourrait essayer
de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de tous les Modules sur le
site annelé cristallo(~~gène~~) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégo-
rie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallo(~~gène~~), i.e. dans la
catégorie des cristaux de modules. ☞

Chapitre 2 La cohomologie de De Rham est un cristal.

2.1. L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un vœux
pieux, mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je
l'ai dit dans 1.17. , il y a pour le moment deux indications dans cette direction:

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur
tapis: 1^o ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques locaux sur leur
variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un in-
variant global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela
tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2^o leurs
invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de W ,
et non sur W , i.e. ils n'obtiennent que des invariants "modulo isogénie". Il
semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de
façon ~~essentielle~~ essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indi-
cation, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer "cristal" par "isocris-
(et "cristal" par "cristal")
tal". Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour déjà l'existence
d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme
propre et lisse et le "cristal unité" coïnciderait modulo isogénie avec ce que
donne De Rham. Le test décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donne-
t-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caracté-
ristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. ~~Comme~~ j'ai vérifié pour
tout morphisme lisse $f: X \rightarrow S$ l'existence d'une connexion canonique (sur les
 $R^i f_*$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe

je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de "nullité de la cour-
~~ture~~"; c'est ~~maint~~ vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si S est
 lisse, sur R réduit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y
 a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une
 stratification: c'est faux en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la
 cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple
 affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir
 espérer une stratification sur $R^1_{\text{an}}(\Omega^i_X/S)$, sans restriction de caractéristique,
 il faut donc supposer f propre.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie
 de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon
 papier bleu sur De Rham: si \mathbb{H} est le spectre du corps des complexes, S lisse
 sur R et X lisse et propre sur S , alors la théorie transcendante de la cohomolo-
 gie nous fournit une suite spectrale $H^j(S^{\text{an}}, R^q_{\text{an}}(C_{X^{\text{an}}})) \Rightarrow H^*(X^{\text{an}}, \mathbb{G})$, dont
 le terme initial et l'aboutissement d'autre part ont une description purement
algébrique, comme cohomologie de De Rham de X , et de S à coefficients dans les
 $R^q_{\text{an}}(\Omega^i_X/S)$ munis de leur connexion canonique (ce qui permet de les prendre
comme coefficients dans la cohomologie de De Rham). On aimerait trouver une
 interprétation purement algébrique de cette suite spectrale toute entière.

2.2.) Je vais préciser ~~l'expression~~ l'affirmation du titre, en re-
 plaçant dans l'éventualité optimiste (bien sûr) où on n'aurait pas besoin de s'iso-
 géniser. ~~On veut désigner, pour abrégé, par le mot "complexe" un objet~~

~~qui est un complexe de Modules à cohomologie quasi-cohérente, considéré comme objet~~
~~de la catégorie dérivée qu'on sait. Les catégories de ces complexes, pour une~~
~~base-variable.~~ Comme les cristaux de modules sur un préschéma S for-

ment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront
 appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur S , et
 plus généralement sur tout objet-but T d'un objet $(U \rightarrow T)$ du site cristal-

catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur S , resp. T). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \rightarrow T)$ de \mathcal{C} , le complexe induit sur T est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f: X \rightarrow S$, serait associé un complexe de cristaux $DR(f)$, appelé cohomologie de De Rham (de f). Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur S (l'image inverse des complexes de cristaux étant entendue, bien entendu, au sens de catégories dérivées ...), et bien sûr $DR(f)$ dépend fonctoriellement (de façon cotrariante) de X sur S . Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $DR(f \times_S g) \simeq DR(f) \otimes DR(g)$, et une formule de dualité, qui pour f partout de dimension relative d s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité $DR(f) \times DR(f) \rightarrow T^d[2d]$, où T^d est le cristal de Tate de poids d , et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2!). Enfin, on voit comme de juste un isomorphisme $DR(f)(S) \simeq Rf_* (\mathcal{O}_{X/S})$, fonctoriel en X , compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas f non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

2.3. La cohomologie de De Rham comme bi-cristal. A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier p un homomorphisme de Frobenius

$$F_p : DR(f)_p^{(p)} \rightarrow DR(f)_p$$

où l'indice p au complexe de cristaux $DR(f)$ désigne la restriction à $S_p = V(p, 1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que $DR(f_p)$, $f_p: X_p \rightarrow S_p$ étant induit par f . Utilisant toujours la même condi-

n'est autre que $DR(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)}: X_p^{(p/S)} \rightarrow S_p$ est le morphisme structural du Frobenius relatif de X_p sur S_p . Or on a le morphisme de Frobenius $X_p^{(p/S)} \rightarrow X$, qui est un S -morphisme, et par fonctorialité de DR nous donne $DR(f_p^{(p)}) \rightarrow DR(f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocrystal défini par $DR(f)$ devient, à l'aide de F_p , un bi-isocrystal. Mais utilisant la relation de duffinité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture T^d pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer F en un V , tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham $DR(f)$ à l'isocrystal correspondant, ~~est~~ donc des objets de cohomologie $DR^1(f)$ aux isocristaux correspondants, ~~caractéristiques~~ ^{sera} il ~~est~~ vrai (tout comme pour les $R^1 f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement de base, de sorte que chacun des isocristaux $DR^1(f)$ devient à son propre titre un bi-isocrystal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé, ^{que?} sans mettre du iso dans le coup, ~~car~~ $DR^1(f)$ devrait être bi-cristal de poids 1, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de X sur S qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de $DR^1(f)$ avec $DR^{2d-1} T^{-(d-1)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit V dans DR^1 en transposant F dans DR^{2d-1} .

2.4. Cas d'un schéma abélien. Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de ^{bi} cristaux et non seulement de bi-isocristaux. De façon précise, $DR^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des $[V_p]$ qui se définissent encore, par fonctorialité de DR, à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \rightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme

2.2. , et que l'on a $FV = VF = p \cdot \text{id}$ sur les schémas abéliens en car. p , on en conclut les mêmes relations dans DR^1 . Cela montre donc que $DR^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un cristal de Dieudonné. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p > 0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W=W(k)$. Bien sûr, on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel défini (ou plutôt, du groupe p -divisible) défini par la variété abélienne A . Débarassé de l'hyperstructure axiomatique-conjecturale de 2.2. , on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1°) Soit A un schéma abélien sur un schéma affine S . On sait que pour tout morphisme $S \rightarrow T$ d'immersion fermée surjective, défini par idéal nilpotent sur T , A se prolonge en un schéma abélien B sur T . On peut regarder la cohomologie de De-Rham ordinaire $R^1 g_* (\Omega_{B/T}^1)$, où $g: B \rightarrow T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$, où g est la dimension relative de A sur S donc de B sur T . Première affirmation: ce Module, à isomorphisme canonique près, ne dépend que (de $S \rightarrow T$, et pas du choix du prolongement B de A). En d'autres termes, la donnée de A sur S définit un cristal localement libre de rang $2g$ sur S , soit $DR^1(A/S)$. C'est évidemment un foncteur additif en A , compatible avec le changement de base, et définissable sans condition sur S (en caractéristique $p > 0$).

2°) Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W=W(k)$. On y introduit les structures F et V , en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F: A \rightarrow A^{(p)}$ et $V: A^{(p)} \rightarrow A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné M , et: Deuxième affirmation: C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si A est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel k , et B un prolongement de A en un schéma abélien sur Λ , alors la cohomologie de De Rham et fonctoriellement $H_{DR}^1(B) = H^1(B, \Omega_{B/\Lambda}^1)$ est canoniquement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où M est le module de Dieudonné classique de A , et où on tient compte du th. de Cohen qui munit Λ d'une structure canonique de W -algèbre. (NB la ~~unicité~~ fonctorialité de

(2.5.) Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'explicitier de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne A donnée, en caractéristique $\neq p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongements de A en un schéma abélien B sur Λ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang g de $H_{DR}^1(A)$ qui redonnent, modulo p , le module quotient de rang g canonique de $H_{DR}^1(A) = H_{DR}^1(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément:

(3°) Considérons, pour tout schéma abélien A sur une base S , sur la cohomologie de De Rham $R^1 f_* (\Omega_{A/S}^1) = H^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow R^1 f_* (\Omega_A) \leftarrow H^1(f) \leftarrow R^0 f_* (\Omega_{A/S}^1) \leftarrow 0$$

Donc pour tout B sur T comme dans 1°, on a sur $\sqrt{DR^1(A/S)(T)} = H^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près du relèvement choisi B de A à T , et prolongeant la filtration déjà connue de $M(S) = H^1(f)$

provenant de A . Ceci dit, troisième affirmation: on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de A à T , et prolongements de la filtration donnée de $M(S) = M(T) \otimes_{O_T} O_S$ en une filtration de $M(T)$. Plus

précisément encore, le foncteur $B \rightsquigarrow (A, \phi)$, de la catégorie des schémas abéliens B sur T , dans la catégorie des schémas abéliens A sur S , munis d'une filtration ϕ de $DR^1(A/S)(T)$ prolongeant celle de $DR^1(A/A)(S)$ (NB il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ces énoncés est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est pas de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "conti-

du motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Une autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3^e avec Serre-Tate, disant que si S est de caractéristique p , ^{>0} alors étendre A à T , c'est pareil qu'étendre le groupe p -divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal $DR^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe dudit.

2.6.) De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien A sur une base S , il y a une extension naturelle de A par le fibré vectoriel $V(R^1 f_* (\mathcal{O}_A)) = V(\underline{t}_A)$, (où A^+ est le schéma abélien dual de A). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(\underline{E})$ est contravariant en \underline{E} , ces sections sont les homomorphismes $\underline{E} \rightarrow \mathcal{O}_S$! L'extension en question est universelle parmi les extensions de A par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en A , et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

$$0 \rightarrow R^1 f_* (\mathcal{O}_A)^\vee \rightarrow \mathfrak{g}(A) \rightarrow R^0 f_* (\underline{\Omega}_{A/S}^1)^\vee \rightarrow 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \underline{t}_{A^+}^\vee & & \underline{t}_A \end{array} \right]$$

qui est duale de la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de A par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser encore les assertions 1^e et 3^e de 2.4. et 2.5. L'assertion (1^e) se précise en affirmant que, pour un prolongement B de A , de S à T , le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (cf. cf. \underline{t}_{A^+} \underline{t}_A) près, par la seule donnée de A et de l'extension $S \rightarrow T$, indépendamment du choix particulier du prolongement B . En d'autres termes, on trouve un cristal

en schémas de groupes $\underline{G}(A/S)$, et pour chaque prolongement $(S$ de A à un T , ∞ infinitésimal)

un isomorphisme canonique $\underline{G}(A/S)(T) \simeq \underline{G}(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en A et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors

(3^o) en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de $\underline{DR}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie $\underline{DR}^1(A/S)(T)^\vee$ de $\underline{G}(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $\underline{G}(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $\underline{G}(A/S)(T)$, et l'on trouve B en passant simplement au quotient.

NB Je suis tombé sur la connexion canonique de $\underline{G}(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \rightarrow \Gamma(S, \underline{O}_S)$ associée à une équation de Picart-Fuchs sur S , relativement à A . Pour ceci, il suffit de noter que localement sur S toute section de A sur S se remonte en une section de $G = \underline{G}(A/S)$ sur S ? La donnée de la connexion de G permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, \underline{t}_G \otimes \underline{\Omega}_S^1)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau \underline{t}_A^\vee , correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de A en une section de G . Les équations de Picart-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de $\underline{t}_G \otimes \underline{\Omega}_S^1$ (qui en fait est un cycle, compte tenu de la connexion canonique de \underline{t}_G provenant de G), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de \underline{O}_S ... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

(a) Si S est de caractéristique nulle, les assertions 1^o et 3^o (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

(b) Sans restrictions sur S , il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes donnés infinitésimaux, donc (si) pour deux relèvements infinitésimaux B, B' de A , $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est ^{si elle} vraie, quels que soient les relèvements infinitésimaux de A au dessus d'un ouvert U de la base S , alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal ^{en groupes} sur S , à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $H_{DR}^1(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielles d'ailleurs en A satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur A .

(c) Les assertions 1^o à 3^o (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies pour les relèvements infinitésimaux d'ordre 1, ou tout au moins lorsque T est de la forme $D(J)$, schémas des nombres duaux défini par un J quasi-cohérent.

2.7. Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militent en leur faveur. De façon précise, soit k un corps de caractéristique ~~nulle~~ $p > 0$. Je dis qu'il n'est pas possible, pour tout k -schéma S de type fini, de dimension ≤ 1 , avec $S_{\text{rég}}$ régulier, et tout schéma elliptique A sur S , de mettre sur $H_{DR}^1(A/S)$ une stratification relativement à k , qui soit fonctorielle en A et compatible avec les changements de base. L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans M ($M = H_{DR}^1(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $s \in S$ est un point correspondant à un A_s de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $H_{DR}^1(A_s)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimant sur les voisinages infinitésimaux de s , que la même propriété serait vraie aux points voisins de s , ce qui est évidemment faux p.ex. pour la famille modulaire.

Chapitre et les considérations de 2.2., c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'une théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de 1.13. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur W = vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clé de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1^o et 3^o de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: S de caractéristique nulle. J'aurais assez tendance à croire que si A est une VA définie sur un corps k de $\text{car. } p > 0$, alors ce qu'on veut (savoir l'indépendance de $G(B)$ d'un relèvement infinitésimal choisi B de A) est pour tout anneau artinien de corps résiduel k , si et seulement si A est "ordinaire" i.e. a sur la clôture algébrique de k le nombre maximum de points d'ordre p . Notez qu'il n'est pas nécessaire de supposer k parfait (la question est manifestement géométrique), donc le groupe p -divisible de A sur k ne se décompose pas nécessairement en produit d'un étale par un infinitésimal. On aurait alors, pour de telles VA au moins, la description très explicite des relèvements infinitésimaux en termes du relèvement d'une filtration d'un module à la Dieudonné. Cette conjecture semble raisonnable car on a fait ce qu'il fallait pour éliminer des ennuis comme dans l'exemple de 2.7., d'autre part cela s'harmonise fort bien avec le tapis Serre des relèvements canoniques de variétés abéliennes du type "ordinaire".

Il serait évidemment tentant d'espérer qu'un énoncé du même type serait vrai pour une base quelconque, pourvu que toutes les fibres de A/S soient des VA ordinaires. Mais cela est certainement faux avec cette généralité, même pour des schémas elliptiques, essentiellement toujours pour les même rai-

elliptiques, et localisons en \mathbb{Z}_p , soit encore S le schéma lisse sur \mathbb{Z}_p obtenu. On a sur S le Module loc libre de rang 2 $H_{DR}^1(A/S)$, et quand on enlève de S le nombre fini de points fermés correspondants à Hasse nul, on aurait une stratification ~~canonique~~ nat. à \mathbb{Z}_p sur ce Module. Pour des raisons de pureté évidentes, celle-ci se prolongerait au dessus de S tout entier, d'où une stratification sur le H_{DR}^1 de la famille modulaire de courbes elliptiques, en caractéristique p . Celle-ci serait alors compatible avec Frobenius (car elle l'est dans le complémentaire de l'ensemble fini des points de Hasse nul), ce qui contredit nos réflexions de 2.7.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation ~~de~~ infinitésimale de $G(A)$ avec A , A partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le H_{DR}^3 a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. p et une autre en car. 0 , sans qu'elles vouillent se recoller, semble assez caractéristique.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinie" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le H_{DR}^1 de la famille modulaire sur \mathbb{Z} ~~de~~ schémas elliptiques, il y a ~~une~~ ^{en car. $p > 0$} la fibre générique $S_{\mathbb{Q}}$ de S une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque ...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur $S_{\mathbb{Z}}$, \mathbb{Z} un ouvert non vide de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. (Le "presque" provient du fait qu'il n'est pas absolument clair si la stratification qu'on obtiendrait ainsi en car. p serait respectée par Frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier ?). C'est en un sens assez moral, puisque pour nous le ^{module à} stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d'un faisceau λ -adique, dont il partage

Pour en revenir à l'alinéa précédent, concernant un schéma abélien "ordinaire" en car. $p > 0$, s'il n'est pas exclu que le H_{DR}^1 admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d'un cristal ~~modulaire~~ de modules sur S , i.e. que ceci reste vrai en remplaçant S par toute extension infinitésimale, pas néc de car. p , (en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire S sur \mathbb{Z}_p précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d'abord, ^{d'où S'} on conclurait sauf erreur que ~~la~~ stratification qu'on a en caractéristique nulle sur H_{DR}^1 se prolongerait à S tout entier, car elle se recollerait en un sens évident avec la ~~stratification~~ stratification qu'on aurait ^{au dessus de} complété p -adique de S' (ce qui doit impliquer le prolongement sur S de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car. p une stratification du H_{DR}^1 au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l'a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d'être des outils convenables pour l'étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de VA "ordinaires" en car. $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d'un schéma de base réduit à un point, spectre d'un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux VA ordinaires? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu'il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de VA (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant a priori l'espace tangent (et l'action de la MC dessus) ...

3.1. Bien sûr, en même temps que pour les VI, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(\mathcal{G})$ dans 2.6. doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible \mathcal{G} sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p . En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à \mathcal{G} sont triviales (en particulier, \mathcal{G} n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de \mathcal{G} à valeurs dans le groupe formel associé à \mathcal{G} (au sens du complexe du groupe \mathcal{G} , variante formelle), est un module localement libre de rang g^* , où g^* est la dimension du groupe dual de \mathcal{G} , soit \mathcal{G}^* ; plus précisément, ce module doit être canoniquement isomorphe à $\text{Lie}(\mathcal{G}^*)$ ^{$= \mathcal{G}^*$} . Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à \mathcal{G} ", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal.) Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension ~~universelle~~ universelle de \mathcal{G} par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de \mathcal{G} . Désignant par $G(\mathcal{G})$ cette extension, son algèbre de Lie $H(\mathcal{G})$ sera une extension

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G}^* \rightarrow H(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\mathcal{G})$ et par suite $H(\mathcal{G})$ seront fonctoriels en \mathcal{G} , et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\mathcal{G})$ varie "moins que \mathcal{G} ", quand on fait varier \mathcal{G} infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\mathcal{G})$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes ^{formels} ~~formels~~. Cela sera le cas, seulement, sans doute, quand \mathcal{G} sera extension d'un groupe ~~formel~~ ind-étale par un groupe p-divisible torique, (dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations

infinitésimales de \mathcal{J} , quand on se fixe celles de $G(\mathcal{O})$ à l'aide d'un cristal en groupes \mathcal{G} .

3.2. En tous cas, l'extension (\mathbb{N}) semble un invariant intéressant du groupe p -divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant \mathbb{N} au cas où S est ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j -adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p . O_n trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p . Dans le cas où le groupe formel, réduit à la structure triviale ~~xxx~~ mentionnée plus haut dans 3.1., et que le corps résiduel k est parfait, d'où un module de Dieudonné M sur W (de rang $g+g'$), il semble donc, d'après la remarque faite dans 3.1., que la donnée d'un relèvement du groupe p -divisible qu'on a sur k en un groupe p -divisible sur A , soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M_{W,k}$ donnée par (\mathbb{N}) , en une filtration de type (g, g') de $M_{W,A}$, ~~xxxx~~ Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de \mathcal{P} ! O_n aimerait préciser également, pour des groupes p -divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension (\mathbb{N}) , qui remplace ici le H^1 de De Rham.

Coates and Jussila are very busy writing down the notes of my talks on De Rham cohomology, which should be ready within a few weeks. I will send you however in this letter a copy of the two pages containing a direct construction of the Gauss-Manin connections. By the way, I had some extra thought about the definition of p-adic cohomology in char p, and believe I have the right definition at last, using still another site, the so-called "De Rham site" of a relative scheme X/S , whose objects are (Zariski) open subsets U of X , together with a "thickening" U' of U i.e. a nilpotent immersion $U \rightarrow U'$ over S , and moreover a "divided powers structure" on the augmentation ideal $\overline{\mathcal{O}_{U'}} \rightarrow \mathcal{O}_U$ ^{for}. When working in char. 0, this extra structure is uniquely determined, and we get the usual "site cristallin", whose cohomology with coefficients in the structure sheaf of local rings is just (the relative De Rham cohomology

$H^*(X_{zar}, \Omega_{X/S}^*)$ (when X smooth over S). It now seems to me that essentially the same proof will show the same result in arbitrary characteristics, when working with the De Rham site, involving divided powers. These divided powers seem in a most subtle way to rule out the trouble I had come upon in my Italian letter to Tate on crystals (in connection with elliptic curves of Hasse invariant zero). It seems to me that, at least for those smooth proper schemes in char $p > 0$ which lift to char 0, all usual properties for the p-adic cohomology will then follow readily from the known results in char 0, the ground ring for the cohomology theory being actually the ring of Witt vectors $W(k)$ (not its field of fractions, as in Washnitzer-Monsky's theory). This should then rule out the possible presence of denominators p^v ^{in Witt's argument,} which I alluded to in my letter to Serre on the standard conjectures for algebraic cycles.