Catégorie tannakienne (sur un corps k) de ~~gxxx~~ lien un groupe diagonalisable $G = D(\Gamma) \Leftrightarrow \mathcal{M}$ semi-simple, et pour tout objet simple (ou isotypique) S de $\mathcal{M}$, de rang $d(S)$, $\mathrm{End}(S)$ est de rang $d(S)^2$).

Soit $\mathcal{M}$ cette catégorie. Elle est définie à équivalence près (respectant structures et contraintes) par un élément ξ de $H^2(k,G)$. On a d'autre part

$$H^2(k,G) \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Br}(k)) \,,$$

donc $\mathcal{M}$ est définie essentiellement par l'homomorphisme ~~xxxx~~

$$\xi\ u : \ \Gamma \longrightarrow \mathrm{Br}(k) \,.$$

~~Pourxtout~~ La catégorie $\mathcal{M}$ est graduée de type Γ, les objets homogènes de type Γ sont les objets isotypiques, donc pour tout $i \in \Gamma$, il y a exactement un objet simple, à isomorphisme près, E_i, ~~dx~~ homogène de degré i. (Il semble que ce soit une deuxième caractérisation des catégories $\Leftrightarrow$ le produit de deux isotypiques est isotypique tannakiennes de lien $D(\Gamma)$, !) Le degré de cet élément est égal à l'ordre $d(i)$ de $u(i)$ dans $\mathrm{Br}(k)$. Donc l'anneau $K(\mathcal{M})$ est donné par

$$K(\mathcal{M}) \subset \underline{Z}[\Gamma] \,,$$

$$\sum n_i e^i \in K(\mathcal{M}) \iff n_i \equiv 0 \quad (d(i)) \quad \text{pour tout } i \in \Gamma$$

La base canonique de $K(\mathcal{M})$ formée par les objets simples étant formée des $d(i)e^i$. Si M_i est l'objet simple de ~~poids~~ degré i, alors $\mathrm{End}(M_i)$ est le corps gauche ~~xxxxxx~~ de centre k dont l'invariant dans $\mathrm{Br}(k)$ est $u(i)$.

~~En termes d'un système de générateurs $(\ _i)_{i\ I}$ de I, et (d'un système d'objets~~ isotypiques ~~simples de type degré i) et des~~

Si $\Gamma = Z^{(I)}$, i.e. $G = G_m^I$, la donnée de u i.e. de ξ revient à la donnée d'éléments $\xi_i \in \mathrm{Br}(k)$. Choisissant pour tout i un objet isotypique non nul de degré i, soit E_i, et désignant par $A_i = \mathrm{End}(M_i)$ l'algèbre d'Azumaya de classe ξ_i, associée, on réconstitue (à équivalence unique près respectant tout)

$\mathcal{M}$ en termes de la famille des A_i ~~stxdesxentiersxd~~$_i$~~xxrangxE~~$_i$ comme suit~~x~~ . On considère d'abord la catégories sous-additive ~~engendrée~~ ayant comme objets les éléments $\underline{\gamma}$ de $\underline{N}^{(I)}$, ($\underline{\gamma} = (\gamma_i)_{i \in I}$ étant intèrprété comme $\otimes E_i^{\gamma_i}$), ~~ex~~ avec Hom($\underline{\gamma}$, $\underline{\gamma}'$) = 0 si $\underline{\gamma} \neq \underline{\gamma}'$ et $= \bigotimes_i A_i^{\otimes \gamma_i}$ si $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}'$, la composition des morphismes évidentes. On définit de façon évidente le foncteur $\otimes$ (addition de $\underline{N}^{(I)}$ sur les objets, produit tensoriel sur les homomorphismes) et ses contraintes de façon que l'on trouve une sous-$\otimes$-catégorie. Son enveloppe Karoubienne est une $\otimes$-catégorie abélienne, qui s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des éléments dont les composantes homogènes non nulles sont à degrés $\in \underline{N}^{(I)}$ et à un foncteur fibre sur $\bar{k}$, D'autre part, pour tout i, si A_i est de rang ~~degré~~ d_i^2 (donc E_i de rang d_i), soit L_i = det $E_i = \bigwedge^{d_i} E_i$ (où E_i désigne l'objet de la catégorie construite correspondant ~~aux~~ i.ème élément la base canonique de $\underline{Z}^{(I)}$, soit 1_i ...), c'est un objet préinversible ($X \mapsto X \otimes L_i$ est pleinement fidèle) et en inversant les L_i , on trouve (à équivalence près respectant tout) la catégorie $\mathcal{M}$.

attention : contrainte de commutativité

$\bar{k}$.

Quand Γ n'est pas libre, on trouve une construction analogue en termes d'un sysème de générateurs convenable $(\gamma_i)_{i \in I}$, mais en "rendant ~~expl~~ égaux à 1 " de plus certains éléments. Ces constructions sont bien adaptées pour décrire las $\otimes$-foncteurs de $\mathcal{M}$ dans une $\otimes$-catégorie tannakienne, et pour décrire le changement de base.(Pour cette dernière raison notamment, il aurait été maladroit dans le cas général de prendre les M_i simples ....). Attention, dans la description des $\otimes$-foncteurs en question, de tenir compte des contraintes, notamment de celle de commutativité; il semble qu'il doive revenir au même d'exiger que le rang est conservé ...

A expliciter !

et la classe de End($\mathfrak{A}$) dans Br(Z_σ) (le couple (Z_σ, ξ_σ) étant défini à isomorphisme près). Sans supposer $\mathcal{M}$ semi-simple, on peut dire q[illegible] la plus grande sous-catégorie semi-simple (engendrée par les objets semi-simples) est connue à équivalence près par la connaissance précédente, qui implique donc la connaissance de $K(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}^{(\Sigma)}$, [illegible] et de sa variance pour les changements de base par k' variable sur k. De façon précise, $\Sigma' = \Sigma(\mathcal{M}_{k'})$ en tant qu'ensemble sur Σ correspond à l'ensemble ~~des corps~~ dont la fibre ~~est~~ en σ est l'ensemble des corps composants de $Z_\sigma \otimes_k k'$, soient $Z'^{\,i}_\sigma$, l'application $K(\mathcal{M}) = \underline{Z}^{(\Sigma)} \to K(\mathcal{M}_{k'}) = \underline{Z}^{(\Sigma')}$ est donné par

$$\sigma \longmapsto n_i\,(\sigma, i) \quad ,$$

où n_i est donné par la règle suivante: si d est ~~le degré de~~ l'ordre $\xi_\sigma \in \mathrm{Br}(Z_\sigma)$, celui de son image dans $\mathrm{Br}(Z'^{\,i}_\sigma)$ est un ~~divis~~ diviseur d_i de d, et on a $n_i = d/d_i$. (A généraliser au cas où les Z_σ ne so[nt] pas nécessairement séparables). Si k' est une ~~sép~~ extension alg. c[lo]se de k, l'ensemble Σ' s'identifie à l'ensemble somme des fibres en [...] des Spec(Z_σ) ....

b) Supposons maintenant $\mathcal{M}$ ~~semi-simple~~ munie d'un produit tensoriel à contraintes d'associativité et commutativité, avec 1. On désigne sous le nom de "caractères numériques" de Σ " les données suivantes:

[illegible]

1) l'ensemble (à bijection près) Σ des ~~des~~ classes d'isomorphie d'objets simples de $\mathcal{M}$.

2) La donnée de la multiplication de $K(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}^{(\Sigma)}$; ce qui revient à la donnée pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma$ du produit

$$\sigma\tau = \sum_\rho c_{\sigma,\tau}^{\rho}\, \rho \qquad (c_{\sigma,\tau}^{\rho} \in \mathbb{N}),$$

i.e. du système d'entiers naturels $c_{\sigma,\tau}^{\rho}$.

Etude numérique des catégories tannakiennes.

a) Soit $\mathcal{M}$ une catégorie abélienne k-linéaire avec Hom de dimens: finie (k un corps). Si M est un objet simple de $\mathcal{M}$, la sous-catégo abélienne de $\mathcal{M}$ qu'il engendre est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps K = End(M). On voit ainsi que l'objet M reste semi-simple par une extension k'/k sss $K\otimes_k k'$ est un composé ~~de corps~~ d'algèbres de matrices (i.e. est une algèbre semi-simple). Ceci est vrai pour tout k' sss c'est vrai pour ~~k-clos~~ une e. parfaite de k, ~~ou~~ sss le centre ~~de~~ Z de K est séparable sur k. On dit alors que M est absolument semi-simple (à généraliser au cas n'e pas supposé simple).

Le groupe $K(\mathcal{M})$ est le groupe libre engendré par l'ensemble $\Sigma(\mathcal{M})$ des classes d'objets simples de $\mathcal{M}$. Si k' est une extension de k, la façon dont un objet simple M de $\mathcal{M}$ tel que $M_{k'}$ soit semi-simple se décompose en objets simples se voit sur la structure de $K\otimes_k k' = K'$: si K' est le produit d'algèbres $M_{n_i}(K'_i)$ $(1 \leq i \leq r)$, où les K'_i sont des corps gauches, alors $M_{k'}$ se décompose en r composants isotypiques M'_i (correspondants aux K'_i) chacun ayant n_i composants simples. Si k' est une extension quasi-galoisienne de k, les classes des M'_i sont conjuguées entre elles par l'action de Gal(k'/k) = π. On trouve alors une bijection canonique (si l'hypothèse faite est vérifiée pour tout objet simple ~~de~~ M de $\mathcal{M}$, p.ex. si k'/k est même galoisienne)

$$\Sigma(\mathcal{M}) \simeq \Sigma(\mathcal{M}')/\pi .$$

Il y aurait lieu de généraliser au cas où on ne suppose pas nécessairement que les $K\otimes_k k'$ sont semi-simples ....

Si $\mathcal{M}$ est semi-simple, la catégorie $\mathcal{M}$ est connue à équivalence près quand on connait l'ensemble $\Sigma = \Sigma(\mathcal{M})$, et l'application

$$\sigma \longmapsto (Z_\sigma, \xi_\sigma \in Br(Z_\sigma))$$

associant à toute classe σ d'objet simple M de S la ~~classe de~~ cent. Z_σ End(M)

3) La donnée de l'application

$$\sigma \longmapsto (Z_\sigma, \xi_\sigma) \quad , \ \xi_\sigma \in \mathrm{Br}(Z_\sigma)$$

envisagée dans a).

4) La donnée de la fonction

$$\mathrm{rang} \ : \ \mathcal{M} \longrightarrow \underline{Z}$$

lorsque $\mathcal{M}$ est supposée ~~xxxx~~ tannakienne. ~~(xxxx~~

On notera que la donnée de 1),2) équivaut à la donnée de l'anneau commutatif $K = K(\mathcal{M})$, avec sa "partie effective

$$K^{\mathrm{eff}} = \text{sous-groupe de } K(\mathcal{M}) \text{ engendré par les } \mathrm{c}\ell(M),\ M \in \mathrm{Ob} \ ,$$
$$= \underline{N}^{(\Sigma)}$$

(NB Σ se récupère à partir de ~~ces~~ cette donnée $K^{\mathrm{eff}} \subset K$ comme l'ensemble des éléments non nuls minimaux de K^{eff}). La donnée de 3) permet alors de trouver comme explicité dans a), la variance fonctorielle de l'anneau $K(\mathcal{M}_{k'})$ par rapport à k'. Enfin la donnée de 4) permet en principe de retrouver les polynômes caractéristiques (en particulier, la trace et le déterminant) d'un endomorphisme d'un objet ~~xx~~(semi-simple ?) M de E , en termes de polynômes caractéristiques réduits (resp. trace réduite, norme réduite) dans les algèbres d'Azumaya $\mathrm{End}(M_i)$, correspondant aux composantes isotypiques M_i de M. Pour M isotypique de rang n, on aura en effet, si $K = \mathrm{End}(M)$ a comme centre Z de rang r sur k, donc $n = n'r$, et K de rang d^2 sur Z, avec $d \mid n'$ (NB M de rang n' sur Z):

$$\det_M f = ~~\det~~ N_{Z/k}(\mathrm{Nr}_{K/Z}(f))^{n'/d} \qquad (n'/d = n/dr)$$

$$\mathrm{Tr}_M f = \mathrm{Tr}_{Z/k}(\mathrm{Trr}_{K/Z}(f)) \ \frac{n'}{d}$$

$$\mathrm{Pol}_M(f,t) = N_{Z/k}(\mathrm{Polr}_{K/Z}(f,t))^{n'/d}$$

Signifie que la connaissance des car. num. de $\mathcal{M}$ n'implique celle des car. numériques de $\mathcal{M}_{k'}$ (pour une extension k' de k, ("fonctorielle en k'")

On fera attention que la connaissance des caractères numériques de la catégorie tannakienne $\mathcal{M}$ ne permet pas en général de reconstituer celle-ci à équivalence près, même si k est un corps alg. clos de car. 0 (de sorte que la donnée de 3) devient vide) et $\mathcal{M}$ semi-simp

(sauf si plus)
et même dans le cas particulier ou $\mathcal{M}$ est la catégorie des représentations d'un groupe fini (? ? à vérifier dans littérature qu'un groupe fini n'est pas déterminé par la connaissance de la table de multiplication de ~~xxxxit~~ son ensemble de caractères, et les rangs de ceux-ci .. Comme exception à cette remarque, signalons cependant le cas où $\mathcal{M}$ est tannakienne à lien diagonalisable (alors Σ devient un sous-groupe K^* , qui ~~donne~~ détermine le lien, et la donnée de 3) donne l'homomorphisme $\Sigma \longrightarrow Br(k)$ qui suffit à tout déterminer). Regarder le cas où le lien est un groupe de t.m.

c) Cas d'un lien qui est de t.m. On suppose connu le caractère numérique ~~xfxxxx~~ de $\mathcal{M}$. Prenant le changement de base par une clôture séparable k' de k, on trouve que $\Sigma' = \Sigma(\mathcal{M}_{k'}^*)$ (canoniquement déduit de la donnée numérique, avec l'opération de π =Gal(k'/k) dessus) est muni d'une structure de groupe induite par la multiplication de $K(\mathcal{M}_{k'}) = \underline{Z}^{(\Sigma')}$, ~~xxxxx~~ respectée par l'action de π . Ceci nous donne le lien $G = D(\Gamma)$ (où Γ est le groupe Σ' avec l'action de π). L'ensemble Σ s'identifie à l'ensemble des orbites σ de π opérant sur Γ . Si σ est une telle orbite, le corps Z_σ n'est autre que le corps des invariants $Z_\sigma \subset k'$ du stablisateur d'un point de l'orbite σ. Si M_σ est un objet de type σ, on a un homomorphisme

$$G \longrightarrow \underline{Aut}(M_\sigma) = \underline{K}^*_\sigma$$ (les soulignés indiquent qu'on prend des schémas sur k ...)

qui se factorise par le centre Z_σ de K_σ en

$$u_\sigma : G \longrightarrow \underline{Z}^*_\sigma = \prod_{Z/k} \underline{G}_m \quad ,$$

et on vérifie aussitôt qu'on a

$$u_\sigma(\xi) = \xi_\sigma \quad ,$$

où

$$\xi \in H^2(k_{pl}, G)$$

est la classe de la gerbe tannakienne qui définit $\mathcal{M}$. Donc la conna sance du caractère numérique de $\mathcal{M}$ équivaut à la donnée, en plus du ~~xquixixmpxixquexdéjàxlaxdonnéex~~ groupe de t.m. G sur k, des classes $u_*(\xi)$ pour tous les homomor phismes u de G dans des tores de la forme $\prod_{Z/k} \underline{G}_m$, où Z est une extension finie de k. ~~(~~On vient de voir en effet que la donnée du caractère numérique permet de réconstituer ce qui précède. Pour vo l'inverse, notons que ~~xx~~ le rang $n(\sigma)$ de M_σ est déterminé par la formule

$$n(\sigma) = \mathrm{card}(\sigma)\ \mathrm{ord}(\xi_\sigma)$$

(où card σ est le cardinal de l'orbite σ, ord (ξ_σ) est l'ordre de ξ_σ dans $\mathrm{Br}(Z_\sigma)$).

La question de savoir si le caractère numérique détermine à équivalence de catégories tannakiennes près revient donc, pour G fixé, à la question de savoir si un élément ~~de~~ $\xi \in H^2(k_{pl}, \underline{G})$ est cc nu quand on connait les $u_*(\xi)$ pour $u: G \to \underline{Z}^*$ comme dessus. ~~Onxvaxex~~ C'est le cas pour G diagonalisable ~~proxdénombrable~~ (pro-dénombrable On va examiner deux autres cas.

<u>Exemple</u> ~~1~~ . G est un tore de dimension 1, donc (s'il n'est trivial) tordu par une extension quadratique Z de k. On a donc une suite exac

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} \underline{Z}^* \xrightarrow{N_{Z/k}} \underline{G}_m \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où on conclut, par la suite exacte de cohomologie et le th. 90 que Ker $(u: H^2(k,G) \longrightarrow H^2(k,\underline{Z}^*))$ est nul. Donc dans le cas envisagé, le caractère numérique détermine $\mathcal{M}$ à équivalence près.

<u>Exemple</u> 2. Gardons ~~les~~ G comme dessus, soit n un entier 2, et so $G' = \mathrm{Ker}\ n.\mathrm{id}_G$. La suite exacte

$$0 \quad G' \quad G \quad \overset{n}{} \quad G \quad 0$$

et le résultat précédent montre que l'ensemble des classes de

Catégories tannakiennes définies par des cristaux.

1. Soit k un corps de car. $p > 0$, qu'on regarde comme algèbre sur $\underline{Z}_p$, dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donn[e] un sens au site cristallin de k (sur $\underline{Z}_p$, qualifié aussi de "absolu") et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie) ~~sur ledit~~, qu'on appelera a[us]si cristaux en modules (localement libres resp. de prés. finie) sur k. Ces cristaux form[ent] une $\otimes$-catégorie $\underline{Z}_p$-linéaire, On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un p-ann[eau] W de corps résiduel k, comme la catégorie des modules libres de type fini (resp. de type fini) M sur W, avec pour tout entier n une connexion absolue sur $M_n = M/p^nM$ (relativement à W_n sur $\underline{Z}/p^n\underline{Z}$), à courbure nulle et nilpotente, ces connexions se recollant pour n variable. Lorsque k est parfait, W est l'anneau des vecteurs de Witt construit sur k, e[t] dans la description précédente, on peut oublier les connexions: les ca[té]gories envisagées sont simplement la catégorie des modules libres de t.f (resp. des modules de t.f.) sur W. Si K est le corps des fraction[s] de W, la catégorie des <u>isocristaux</u> (=cristaux à isogénie près) su[r] k est équivalente à Modf(K).

2. La catégorie des cristaux sur k dépend fonctoriellement de k, d'où pour tout cristal la possibilité de définir son transformé p[ar] le changement de base $\sigma_k : x \mapsto x^p : k \to k$, soit M^σ. La donnée d'u[n] M avec un homomorphisme

$$F_M : M^\sigma \longrightarrow M$$

s'appelle un F-<u>cristal sur</u> k. On notera que les F-cristaux forment une $\otimes$-catégorie $\underline{Z}_p$-linéaire, dont les Hom sont des modules de type fini sur $\underline{Z}_p$ (atte[n]-tion, pas des modules sur W, même si k est parfait !). Ce n'est pas une catégorie tannakienne, même une fois tensorisée par $\underline{Q}_p$, car il manqu[e] un Hom interne. On dit qu'un F-cristal M est non dégénéré s'il existe un entier $i \geq 0$ et un homomorphisme $V: M \to M^{\sigma}$ tel que $VF = p^i$. Soit $FCriso^+(k)$ la catégorie ~~des isocristaux~~ déduite de la catégorie des ~~ex~~ F-cristaux non dégénérés en localisant par rapport à p ; c'est donc une sous-$\mathbb{Q}$-catégorie de celle des F-cristaux à isogénie près. On l'appellera la catégorie des F-isocristaux effectifs, et on laissera tomber le qualificatif "iso" s'il n'y a pas de risque de confusion. Le F-isocristal de Tate inverse $K(-1)$ est déduit du F-cristal $W(-1)$ défini par le cristal unité, avec $F_{K(-1)} = p.\mathrm{id}$ (cet F-cristal est évidemment non dégénéré !). On voit alors que $K(-1)$ est faiblement inversible et on constate que lorsqu'on ajoute formellement à $FCriso^+(k)$ ~~des~~ un inverse $K(1)$ de $K(-1)$, alors on trouve une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ ayant un foncteur fibre évident sur K; cette catégorie est notée $FCriso(k)$, et appelée catégorie des F-isocristaux (ou simplement, s'il n'y ~~px~~ a pas risque de confusion, des F-cristaux) sur k. $K(1)$ est le F-cristal de Tate, et on désigne par $M \mapsto M(n)$ le foncteur de tensorisation par sa puissance tensorielle n.ème. Si $n=-m$, $m \geq 0$, ce foncteur est induit par le foncteur sur les F-cristaux effectifs (sans ...) consistant à multiplier F par p^m.

3. Lorsque k est parfait, désignant par σ l'automorphisme de Frobenius de $W=W(k)$, la donnée d'un F-cristal revient à la donnée d'un module de type fini M sur W muni d'un homomorphisme

$$F_M : M^{\sigma} = M \otimes_W (W,\sigma) \longrightarrow M ,$$

et le F-cristal est non dégénéré sss l'homomorphisme précédent est une isogénie ~~i.e.~~ est de rang égal à rang M , ou encore sss il induit un isomorphisme après tensorisation par K. La catégorie ~~Fiso~~ $FCris(k)$ s'identifie alors à la catégorie des vectoriels de dimension finie

E sur K, munis d'un ~~endomor~~ automorphisme σ-linéaire F_E; ~~ExxxxExx~~ qu'on a intérêt à interpréter comme un isomorphisme K-linéaire

$$F_E : E^{\sigma} = E\otimes_K(K,\sigma) \longrightarrow E .$$

Les opérations tensorielles sont définies par transport de structu[re] (cf. cas d'un groupe, ici $\underline{Z}$, opérant sur un corps ....). Les F-iso cristaux effectifs s'interprètent alors comme les (E,F_E) tèls que F_E laisse invariant un réseau, ce qui signifie aussi que l'ensemble des itérés $F_E^{\,n}$, $n \geq 0$, est borné dans ~~lex~~ vectoriel End(E). Tout(E, devient ~~effectif~~ évidemment effectif après multiplication de F_E par une puissance conve[nab]le de p, ce qui est une autre façon de dire que la catégorie des F-isocristaux se déduit de celle des F-isocristaux effectifs ~~parx~~ e[n] rendant inversible K(-1) .

4. La catégorie tannakienne Fcriso(k) est un invariant arithmétique intéressant attaché à k (fonctoriellement); sa ~~donnéex~~ connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur $\underline{Q}_p$), soit $\underline{G}(k)$? Parmi les structures supplémentaires qu'il convient d'étudier en même tem[ps] que cette gerbe, il faut inclure la structure d'effectivité de la catégorie Fcriso(k) ~~dex~~ ses représentations linéaires, celle de l'objet de Tate inverse (définissant un homomorphisme canonique de $\underline{G}(k)$ vers la gerbe triviale de groupe $\underline{G}_m$), enfin pour k parfait tout au moins, la donnée du foncteur fibre naturel sur K(k) (qui est donc une section de la gerbe $\underline{G}(k)$ sur K(k)); pour k non parfait, il con[]viendrait ~~dx~~ d'étudier de même la section de $\underline{E}(k)$ sur le corps des fractions K de n'importe quel p-anneau W de corps résiduel k.

L'intérêt de la notion de F-cristal ~~nonxdégénéré~~ provient d[u] fait que l'on ~~ma~~ a un foncteur "cohomologie cristalline"

$$X \longmapsto H^*_{cris}(X)$$

allant de la catégorie des schémas propres et lisses sur k vers le F-cristaux gardués, ~~compatibles~~ qui est additif (pour la somme des X) et compatible avec $\otimes$ une fois tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ (le $\otimes$ des schémas étant le produit cartés de façon compatible avec les associativités et commutativités (tan pour la somme que pour le produit), en faisant attention d'utilise la règle de Koko pour la contrainte de commutativité. De plus, mod des vérifications qui n'ont pas encore été faites par Berthelot, m qui ne peuvent manquer de sortir prochainement, le foncteur précéd est même défini en prenant comme morphismes des correspondances al briques à équivalence algébrique près, et s'en va vers les F-crist non dégénérés; de façon précise, il doit être vrai que pour tout i il existe un $V_i : H^i \to (H^i)^{\sigma}$ tel que $F V_i = p^i \,\mathrm{id}$, $V_i F = p^i$ (C'est en tous cas vrai si X se remonte en car. 0) Modulo cette véri cation, on trouve donc un foncteur

$$H^{*}_{\mathrm{cris}}\otimes\mathbb{Q}_p : \text{schémas propres lisses sur } k \longrightarrow \mathrm{Grad}(\mathrm{FCriso}^{+}(k)) ,$$

compatible à tout (un "foncteur cohomologique" dans la terminologie de l'exposé de Kleiman [ ]). Bien entendu, on a $H^2_{\mathrm{cris}}(P^1) = M(-1)$ plus généralement on devra avoir (quand Berthelot aura bien travai

$$H^{2d}_{\mathrm{cris}}(X) \simeq M(-d)$$

si X est géométriquement connexe et de dimension d, (isomorphisme canonique, compatible à la multiplication ...). En admettant le y des motifs (on a besoin ici de la structure graduée de la catégorie des motifs sur k, pour pouvoir canuler par la règle de Koko la contrainte de commutativité naturelle sur les motifs, provenant de l'i morphisme de commutativité $X \times Y \simeq Y \times X$ sur les schémas ...) on aura u homomorphisme de gerbes canonique $\otimes$-foncteur,

$$\Pi(k)_{\mathbb{Q}_p} \longleftarrow \underline{G}(k) ,$$ associé au (Mot(k) ⟶ FCriso(k))

où $\Pi(k)$ est la gerbe associée à la catégorie tannakienne (sur $\underline{\mathbb{Q}}$

(iso) (semi-simples)
des motifs sur k, et l'indice $\mathbb{Q}_p$ désigne l~~effet~~du changement de ba

par $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$. Cet homomorphisme est compatible à l'augmentation "de Tate" et aux structures d'effectivité. Modulo du travail à faire dc Berthelot, pour $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, la connaissanc de l'image ~~dxxXxdxxx~~ $H^*(X)$ dans Fcriso(k) permet de calculer la fon tion ζ_X de X, par la formule qu'on devine et que je me dispose décrir (D'ailleurs, modulo les conjectures de Weil, la connaissance de la fonction ζ_X permet, grâce à cette formule, de réconstituer $H^*_{cris}(X)$ à isomorphisme près dans Fcriso(k), du moins virtuellement (i.e. l'image de chaque $H^i_{cris}(X)$ dans l'anneau K(Fcriso(k))) si on ne dés pas admettre que ~~xxxx~~ les H^i sont nécessairement des éléments semi-s ples de Fcriso(k)....)

5. F-cristaux de ~~xxxxxx~~ pente nulle. On définira plus loin la pente d' F-cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les F-cristaux de pente nulle. Pour ceci, pour tout faisceau p-adique V constructible sur k (correspondant donc à une ~~xxxxxxxxxxxx~~ opération continue de $\pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans un module de type fini sur $\mathbb{Z}_p$) on lui associe d façon évidente un F-cristal M , noté parfois (par abus de notations)

$$M = V \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \quad ,$$

(même s'il n'y a pas de W choisi, dans le cas k imparfait), on aura :

Proposition 5.1. Le foncteur $M \mapsto V \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ est une équivalence de la cat gorie des faisceaux p-adiques constructibles sur k vers la sous-catég rie pleine de la catégorie des F-cristaux sur k, formée des F-crista M tels que $F_M : \tilde{M} \longrightarrow M$ soit un isomorphisme .

Corollaire 5.2. Le foncteur précédent induit un foncteur pleinement fidèle (compatible avec les $\otimes$-structures), de la catégorie des

$$\underline{G}(k') \longrightarrow \underline{G}(k) \quad .$$

(mod isomorphisme canonique))

Ce dernier rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{G}(k') \arrow[r] \arrow[d] & \underline{G}(k) \arrow[d] \\
\underline{\Pi}_p(k') \times [\underline{G}_m]_{\underline{Q}_p} \arrow[r] & \underline{\Pi}_p(k) \times [\underline{G}_m]_{\underline{Q}_p}
\end{tikzcd}$$

(i.e. on a, sur les catégories tannakiennes correspondantes, un diaggamme commutatif à isomorphisme can. près).

Oubliant dans ce dernier les facteurs $[\underline{G}_m]$, on voit donc que $\underline{G}(k') \to \underline{G}(k)$ se factorise par la sous-gerbe de $\underline{G}(k)$ correspondant au sous-groupe fermé de $\pi_1(k)$ image de $\pi_1(k')$ ... A prouver

Proposition 6.1. Si k' est une extension ~~finie~~ étale de k, alors l'homomorphisme de gerbes $\underline{G}(k') \to \underline{G}(k)$ est un monomorphisme dont l'image est exactement la sous-gerbe "ouverte" définie ci-dessus. En particulier, si k' est une extension finie galoisienne de k, de groupe de Galois g, ~~et~~ on a une suite exacte canonique de gerbes

$$0 \longrightarrow \underline{G}(k') \longrightarrow \underline{G}(k) \longrightarrow [g]_{\underline{Q}_p} \longrightarrow 0 \quad .$$

Cet énoncé devrait être formellement équivalent au suivant: $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des Fcriso(L) sur des composés finis L, de corps de car. p. La démonstration de ce dernier fait est ± triviale.

Question 6.1. A-t-on encore un énoncé analogue lorsqu'on suppose que k' est une extension galoisienne de k qui peut-être infinie ? Le cas le plus intéressant serait celui où k'est la clôture séparable de k, de sorte qu'on aurait un dévissage de $\underline{G}(k)$ en

$$(6.1) \qquad 0 \longrightarrow \underline{G}(\bar{k}) \longrightarrow \underline{G}(k) \longrightarrow \underline{\Pi}_p(k) \longrightarrow 0 \quad ? ;$$

lorsque k est parfait i.e. $\bar{k}$ alg. clos, nous verrons que $\underline{G}(\bar{k})$ ne dépend pas essentiellement de k. À

$\underline{Q}_p$ faisceaux constructibles sur k vers la catégorie Fcriso(k). Pour objet $\Omega(E,F_E)$ de cette dernière, les conditions suivantes sont équivalentes (si k parfait) : a) (E,F_E) appartient à l'image essentielle du foncteur précédent; b) il existe un réseau $M \subset E$ stable par F_E ~~xxx~~ et par F_E^{-} (i.e. tel que F_E induise un <u>automorphisme</u> de M); c) la famille des itérés F^n , n $\underline{Z}$, est bornée ; d) E et $\check{E}$ sont effectifs.

Les F-isocristaux en question sont appelés "trivaux" ou "<u>de pente nulle</u>". On trouve ainsi un <u>épimorphisme de gerbes</u>

$$\underline{G}(k) \to \Pi_p(k) \ ,$$

Π majuscule?

où $\Pi_p(k)$ est la gerbe sur $\underline{Q}_p$ ~~desxreprésentationsxcontinues~~ associée la catégorie tannakienne des $\underline{Q}_p$-faisceaux constructibles, équivalent ~~àxlaxcatexlappxalgx~~ (une fois choisie une clôture algébrique $\bar{k}$ de k) à la gerbe triviale définie par l'enveloppe algébrique ~~du~~ p-adique du groupe pro-fini $\Pi = Gal(\bar{k}/k)$. Tenant compte de l'homomorphisme d'augmentation de Gate, on trouve même un homomorphisme

$$\underline{G}(k) \to \Pi_p(k) \times [\underline{G}_m]_{\underline{Q}_p}$$

où $[\underline{G}_m]$ est la gerbe triviale définie par $\underline{G}_m$. On vérifie facilement que c'est encore un épimorphisme (i.e. que le foncteur

$$(V_i)_i \longmapsto \sum V_i \otimes_{\underline{Q}_p} \underline{Q}_p(i)$$

allant de la catégorie des ~~ss~~ $\underline{Q}_p$-faisceaux constructibles gradués sur k vers Fcriso(k) est pleinement fidèle). Les F-isocristaux de la forme précédente pourraient être appelés les F-isocristaux <u>de niveau zéro</u>

6. Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \to k' \ ,$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur $\underline{Q}_p$

$$Fcriso(k) \to Fcriso(k') \ ,$$

et un homomorphisme de gerbes tannakiennes sur $\underline{Q}_p$ en sens inverse

7. Nous verrons ci-dessus que la réponse à la question précéde[nte] est affirmative lorsque k est un corps fini, en particulier si c'[est] le corps premier $\underline{F}_p$. On trouve alors, grâce à cette structure d'extension sur $\underline{G}(\underline{F}_p)$, un homomorphisme canonique de Gerbes (pour tout k)

$$\underline{G}(k) \simeq \underline{G}(\underline{F}_p) \times_{\underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)} \underline{\Pi}_p(k) \quad ,$$

et pour k parfait, une réponse affirmative à la question précéden[te] revient à l'assertion que l'homomorphisme précédent est une équiva[-] lence de Gerbes. Comme on connait parfaitement bien la Gerbe $\underline{G}(\underline{F}_p)$ et son homomorphisme dans $\underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)$ (cf plus bas) cela donner[ait] donc la structure de $\underline{G}(k)$ en termes de la connaiasance de ~~$\underline{\pi}_p(\underline{F}_p)$~~ $\underline{\Pi}_p(k)$ (connu quand on connait $\pi_1(k) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/k)$) et ~~de~~ l'homomorph[is-] me $\underline{\Pi}_p(k) \to \underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)$ (connu quand on connait $\pi_1(k) \to \pi_1(\underline{F}_p) \to \hat{\underline{Z}}$). Ce[la] résoudrait donc la question de la structure de $\underline{G}(k)$ pour k parfai[t]. On notera que l'objet de Tate de Fcriso(k) provient de celui de Fcriso($\underline{F}_p$) et sera donc également déterminé. Le foncteur fibre ca[no-] nique sur K $= K(k)$ correspond alors à un foncteur fibre de Fcriso($\underline{F}_p$) su[r] K, un foncteur fibre de ~~$\underline{\Pi}_p(k)$~~ la catégorie des $\underline{Q}_p$-faisceaux constr. sur k sur K, et un isomorphisme entre [le]s "restrictions" de ces foncteurs à la catégorie des $\underline{Q}_p$-faisceaux constructibles sur $\underline{F}_p$; or le premier foncteur fibre n'est autre que celui déduit par l'extension des scalaires $\underline{Q}_p = K(\underline{F}_p) \longrightarrow K = K(k)$ du foncteur fibr[e] analogue sur Fcriso($\underline{F}_p$), le deuxième est le foncteur ($\underline{t}$:) $V \mapsto V \otimes_{\underline{Q}_p} K$, l'isomorphisme ~~canonique~~ entre les restrictions est l'isomorphisme canonique évident (compatibilité de $\underline{t}$ avec changement de corps de base). Donc la structure supplémentaire de $\underline{G}(k)$ (savoir sa section ~~sur~~ canonique sur K) est déterminée par la connaissance [de] la section de $\underline{\Pi}_p(k)$ sur K (i.e. le foncteur précédent $V \mapsto V \otimes_{\underline{Q}_p} K$) [et] l'isomorphisme de l'image de ladite section dans $\underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)$ avec la sec- tion provenant de la section canonique de $\underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)$ sur $\underline{Q}_p$; ce sont des données qui ne sont évidemment pas contenues dans celle du grou[pe]

NB On a aussi, en composant le foncteur fibre "canonique" sur $\underline{Q}_p$, et le foncteur précédent, un foncteur canonique sur K de la gerbe [illegible] $\underline{\Pi}_p(k)_K$ [illegible] pro-fini "abstrait" $\pi_1(k)$, mais on se convainc facilement qu'elle sont contenues dans la donnée de ce groupe, + son opération sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K (ou simplement, sur sa clôture non r[amifiée] sur W ...). – Il resterait enfin à déterminer la structure d'effectivité dans la catégorie Fcriso(k) déterminée par la récet[te] précédente ~~xxixxsuggestionxnaturellexestxquexFcrisox(k)xestxengend~~ ~~parxlesximagesxdexFcrisox~~ Or il est immédiat que l'effectivité d'[un] F-isocristal est invariante par changement de base, en particulie[r] par le changement de base $k \rightarrow \overline{k}$, ce qui ramène au cas d'un k alg[ébri]quement clos, ou encore au cas de $\underline{F}_p$. ~~En termes de~~ la terminolog[ie] introduite plus bas, on trouvera donc que les F-isocristaux effec[tifs] sont ceux qui sont à pente $\geqslant 0$ (i.e. dont toutes les composantes isopentiques ~~xxxx~~ non nulles sont de pente $\geqslant 0$).

8. Il reste donc à étudier la gerbe $\underline{G}(\underline{F}_p)$, avec ~~sa foncteur fibre~~ section canonique sur $\underline{Q}_p$, sa structure d'extension, et sa structure d'effectivité. Tout d'abord, la donnée du foncteur fib[re] canonique permet d'identifier $\underline{G}(\underline{F}_p)$ à la gerbe triviale définie par le lien G de cette gerbe. Comme Fcriso(F_p) avec son foncteur fibre s'identifie à la catégorie des automorphismes F_E de E vectoriels de dimension finie sur $\underline{Q}_p$, avec le foncteur "oubli de F_E", on voit que [le] lien de la gerbe est l'enveloppe $\underline{Q}_p$ pro-algébrique du groupe discret $\underline{Z}$. Soit G ce groupe affine sur $\underline{Q}_p$. Il est évidemment commutatif, donc produit d'un groupe vectoriel G_u par un groupe de t.m. G_{tm}. Ce dernier est l'enveloppe de type multiplicatif du groupe $\underline{Z}$, et il s'ensuit aussitôt que c'est le groupe de t.m. dont le groupe des caractères sur $\overline{Q}_p$ est donné par

$$\Gamma = \overline{Q}_p^* ,$$

isomorphisme compatible avec l'action de $Gal(\overline{Q}_p/\underline{Q}_p)$). D'autre

Il a un homomorphisme $\pi_1(k) \rightarrow G'(K)$ ... d'où un foncteur ... groupes sous $\pi_1(k)$ ... → faisceaux sur l'image ... et on prend ... pour définir $\pi_1(k)$ ... un interprétation ... $\pi_1(k)$ ... de l'extension non ramifiée de K.

une fois choisi une clôture $\overline{\mathbb{F}}_p$).

part, la gerbe $\mathcal{K}_p(\mathbb{F}_p)$, grâce au foncteur fibre évident "fibre en $\overline{\mathbb{F}}_p$ " sur la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-faisceaux constructibles sur $\mathbb{F}_p$, s'identifie à la gerbe triviale définie par l'enveloppe $\mathbb{Q}_p$-algébrique du groupe profini $\pi_1(\mathbb{F}_p) = \hat{\mathbb{Z}}$, Un $\mathbb{Q}_p$-faisceau constructible sur $\mathbb{F}_p$ s'identifie à un vectoriel de dimension finie E sur $\mathbb{Q}_p$, muni d'un automorphisme F_E tel que l'opération $n \mapsto F_E{}^n$ de $\mathbb{Z}$ sur E se prolonge par continuité en une opération de $\hat{\mathbb{Z}}$. Identifiant (par un foncteur, distinct de celui de 5.2) la catégorie de ces (E,F_E) à une sous-catégorie pleine de la catégorie Fcriso($\mathbb{Q}_p$) des couples (E,F_E), où F_E e[st] un automorphisme quelconque , on voit que le lien G' de $\Pi_p(\mathbb{F}_p)$ de cette catégorie s'identifie à un quotient du lien G de Fcriso($\mathbb{F}$[$_p$]) déterminé plus haut, et on voit aussitôt que ce quotient est de la forme $G_u \times G_r'$, où G_r' est un quotient de G_r (ceci revient à dire q[ue] si on décompose F_E en produit de sa composante unipotante par sa composante semi-simple, alors la condition que F_E définisse une opération de $\hat{\mathbb{Z}}$ ne dépend que de la composante semi-simple); de façon précise, G_r' est le groupe quotient de G_r défini par le sous-groupe du groupe des caractères $\overline{\mathbb{Q}}_p^*$ de G_r formé des unités p-adiques : cela signifie en effet que F_E définit une opération de $\hat{\mathbb{Z}}$ (i.e. définit un F-isocristal de pente nulle) sss les valeurs propres de F_E sont des unités, ce qui résulte en effet aussitôt du critère donné plus haut des F-isocristaux de pente nulle (ou se vérifie directement de façon immédiate; la référence au résultat sur les fourbis de pente nulle devrait se justifier par un grain de sel, car l'inclusion utilisée ici des $\mathbb{Q}_p$-faisceaux constructibles sur $\mathbb{F}_p$ dans les F-isocristaux n'est pas celle utilisée dans 5.2, cf. plus bas). On trouve ainsi une structure d'extension sur $G \simeq \mathrm{Lien}(\underline{G}(\mathbb{F}_p))$:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow 0 ,$$

où H est le groupe de t.m. dont le groupe des caractères est le quotient de $\underline{\overline{Q}}^{*}$ par le sous-groupe des unités, donc canoniquement isomorphe à $\underline{Q}$, par l'isomorphisme

$$\underline{\overline{Q}}^{*}/\text{unités} \longrightarrow \underline{Q}$$

donnés par la valuation p-adique v_p, normalisée par la condition

$$v_p(p) = 1 \quad .$$

L'opération de ~~xxx~~ $\mathrm{Gal}(\underline{\overline{Q}}_p/\underline{Q}_p)$ sur ce groupe quotient Q est tri lé, de sorte que H est <u>diagonalisable</u> de groupe des caractères $\underline{Q}$:

$$H = D(\underline{Q}) \quad .$$

L'augmentation de Tate de G correspond à l'homomorphisme

$$\underline{Z} \longrightarrow \underline{\overline{Q}}^{*} \quad , \qquad 1 \longmapsto p \ ,$$

et l'augmentation induite sur H correspond à l'<u>inclusion</u> canonique

$$\underline{Z} \hookrightarrow \underline{Q}$$

(grâce à notre choix de la valuation <u>normalisée</u> comme indiquée).

B.2. Il faut maintenant expliciter l'homomorphisme de gerbes

(8.1.1) $$i : \underline{G}(\underline{F}_p) \longrightarrow \underline{\Pi}_p(\underline{F}_p)$$

correspondant à l'inclusion

$$i : \quad \underline{Q}_p\text{-faisceaux constructibles} \hookrightarrow \mathrm{Fcriso}(\underline{F}_p)$$

de 5.2. On a vu que l'image essentielle est exactement égale à la sous-catégorie pleine $\mathcal{J}$($\underline{Q}_p$-faisceaux constructibles), ~~quixxxx~~ de sorte que i s'identifie à une ~~foncteur~~ $\otimes$-équivalence de la catégorie des $\underline{Q}_p$-faisceaux constructibles avec elle-même. On constate alors que l'homomorphisme correspondant sur les liens ~~HxxH~~ $G' \to G'$ est l'identité, ~~xxxqux~~ de sorte que i est défini par un torseur sous G' , et que ce torseur sous G' peut se décrire ainsi (aurait pu passer à la fin de 7, dans le cas d'un k quelconque ...). On a un homomorphisme canonique

(8.1.2) $$\pi_1(\underline{F}_p^{*}) = \hat{\underline{Z}} \longrightarrow G'(\underline{Q}_p) \ , \qquad \text{i.e.} \quad (\pi_1(\underline{F}_p))_{\underline{Q}_p} \longrightarrow G'$$

d'où un ~~homomorphix~~ foncteur

$$\text{torseurs sous } (\hat{\underline{Z}})_{\underline{Q}_p} \longrightarrow \text{torseurs sous } G' \ .$$

D'autre part, on a un torseur évidnnt $\underline{P}_o$ sur $\underline{Q}_p$ de groupe $(\hat{\underline{Z}})_{\underline{Q}_p}$, c
respondant à l'ext ension non ramifiée maximale de $\underline{Q}_p$; ~~donx~~ prend
l'image P/ de ce torseur: c'est lui.

$\underline{H}$ est aussi la gerbe des relèvements, pour l'hom. $j : \underline{\mathcal{G}}(F_p) \to \underline{E}_p(F_p)$ [G] [G'] déduit de l'hom $G \to G'$, du torseur P ci-dessus.

8.3. Soit $\underline{H}$ la gerbe noyau de (8.2.1), qui a donc comme lien le groupe diagonalisable H de 8.1. D'après le sortie général (ref) la classe

$$\xi \in H^2(\underline{Q}_p, H) = \mathrm{Hom}(\underline{Q}, \mathrm{Br}(\underline{Q}_p)) = \mathrm{Hom}(\underline{Q}, \underline{Q}/$$

de cette gerbe est donnée par

$$\xi = \partial(\eta)$$

où

$$\eta \in H^1(\underline{Q}_p, G')$$

est la classe du torseur P. Pour faire le calcul, notons qu'on a un ~~xxxxxxx~~ quotient H' de G_r , correspondant au sous-groupe de $\overline{\underline{Q}}_p^*$ ~~fxxmxxx~~ engendré par les racinns de l'unité(= élément s de torsion) et tout es les racinns de p , $p^{1/n}$ (ce groupe~~x~~ est bien invari par $\mathrm{Gal}(\overline{\underline{Q}}_p/\underline{Q}_p)$). On a alors un homomorphisme d'extensions

NB Ce diagramme est induit par un diagramme de gerbes (valable sur un corps k parfait quelconque) avec $\underline{H}'$ = gerbe ... (Fais(F_p)) ...

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H & \to & G & \to & G' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H & \to & H' & \to & (\hat{\underline{Z}})_{\underline{Q}_p} & \to & 0 \end{array},$$

qui montre qu'on ~~xxxxxxxxxxxxxxxxx~~ a

$$\xi = \partial(\eta_o),$$

où

$$\eta_o \in H^1(\underline{Q}_p, \hat{\underline{Z}})$$

est l'image de η par $G' \to \hat{\underline{Z}}$. On constate que le composé de (8.2.
avec l'homomorphisme précédent est l'identité de $\hat{\underline{Z}}$, donc η_o est la classe du torseur canonique P_o de la fin de 8.2. A l'aide~~x~~ de ceci, il faut vérifier que la classe ξ correspond (par l'isomorphisme

$$\mathrm{Br}(\underline{Q}_p) \simeq \underline{Q}/\underline{Z}$$

du corps de classe local, à l'homomorphisme canonique $Q \to Q/Z$

de passgge au quotient (sauf erreur de signe, car je n'ai nulle p fait attention aux signes).

8.4. Considérons maintenant l'homomorphisme

(8.4.1) $\underline{G}(\overline{\underline{F}}_p) \longrightarrow \underline{G}(\underline{F}_p)$.

Il est clair qu'il se factorise par $\underline{H}$ (i.e. que le composé $\mathbb{Q}_p$-faisceaux constructibles sur $\underline{F}_p \xrightarrow{i}$ Fcriso$(\underline{F}_p) \longrightarrow$ Fcriso$(\overline{\underline{F}}_p$ s'envoie dans les objets "constants" ...) , d'où un homomorphisme

(8.4.2) $\underline{G}(\underline{F}_p) \longrightarrow \underline{H}$.

Par Dieudonné-Manin, on connait la structure des objets de Fcriso$(\overline{k})$ pour $\overline{k}$ algébriquement clos~~x~~, on sait que ces objets sont semi-simples et proviennent (mod isomorphisme) d'objets de Fcriso$(\underline{F}_p)$. Cela implique que (8.4.1), donc aussi (8.4.2), est un monomorphisme de gerbes. Pour montrer que c'est une équivalence, il suffit de montrer qu'un objet simple non constant de ~~Hxxxxdxxxx~~ Rep$(\underline{H})$ donne un objet non constant de Rep$(\underline{G}(\overline{k})) \xrightarrow{\approx}$ Fcriso$(\overline{k})$). Or les classes d'objetssimples de Rep$(\underline{H})$ sont indexés par les élément de $\underline{Q}$, et si on considère l'objet simple de Fcriso$(\underline{F}_p) \simeq$ Rep$(\underline{G}(\underline{F}$ défini par $(E, \underline{F}_E)$, avec $\underline{F}_E$ ayant comme polynôme minimal $T^r - p^s$ avec $r,s \in \underline{Z}$, $r \geq 1$, $(r,s) = 1$, alors sa restriction à $\underline{H}$ donne un objet simple ~~dxxx~~ (car il reste simple dans Fcriso$(\overline{k})$) de classe $s/r \in \underline{Q}$, et celui-ci, d'après la classification de Dieudonné-Manin, ~~xxxxxxxxx~~ a une image dans Fc iso$(\overline{k})$ qui n'est pas consta si $r \neq 0$ ...

8.5. On a donc ~~dxxxxxxxxx~~ résolu par l'affirmative, pour $k = \underline{F}_p$, la question 6.2 , en déterminant en même temps (à équivalence définie à isomorphisme unique près) la gerbe $\underline{H}(\overline{k})$ associée à une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k = \underline{F}_p$; ~~xxxxxxxxx~~ elle ne dépend pas (à ~~isomorphix~~ équivalence déterminée à isomorphisme unique près) du choix de la clôture algébrique envisagée $\overline{k}$, et par Dieudonné-Manin est can. équ valente à $\underline{G}(\not Y)$ pour tout corps alg. clos $\not Y$ de car. p >0 (de façon précise, si $\underline{\bar{F}}_p$ est ~~x~~ la clôture algébrique de $\underline{F}_p$ dans $\not Y$, l'inclus. de celle-ci dans $\not Y$ induit une équivalence de gerbes

$$\underline{G}(\not Y) \approx \underline{G}(\underline{\bar{F}}_p) \approx \underline{H}\ ).$$

8.6. Etude de Rep($\underline{H}$) . Nous avons dit que les classes d'objets simples sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $\underline{Q}$: l'élément de $\underline{Q}$ correspondant à un objet isotypique est dit la pente de cet élément. Nous avons vu que l'objet de Rep($\underline{H}$) défini par l'objet $\underline{Q}_p[T]/(T^r-p^s)$ de Fcriso($\underline{F}_p$) , muni de la multiplication par T, est simple de pente s/r $(s,r \in \underline{Z},\ r \geq 1,\ (s,r) = 1\ )$, de sorte que nous obtenons ainsi un catalogue complet des objets simples $E_{r,s}$. Bien entendu, $E_{r,s}$ est de rang r, d'autre part son corps des endomorphismes est ~~xxx~~ un corps gauche $K_{r,s}$ ~~dont~~ la classe dans $Br(\underline{Q}_p) = \underline{Q}/\underline{Z}$ est s/r mod 1 , d'après ce qu'on a vu dans 8.3.

Notation $E_{s/r}$ pour $E_{r,s}$ indiquée, dans $E_\lambda \otimes E_{\lambda'} \simeq E_{\lambda\lambda'}^{n(\lambda,\lambda')}$ pour $\lambda, \lambda' \in Q$

Rep($\underline{H}$) est limite inductive des sous-catégories pleines Rep($\underline{H}$,r), $r \geq 1$, où $(\underline{H},r)$ est le quotient de la gerbe $\underline{H}$ correspond au quotient $(H,r) \simeq \underline{G}_m$ de son lien, tel que l'homomorphisme de Tate ~~xxxxxxx~~ induise un homomorphisme $(H,r) \longrightarrow \underline{G}_m$ s'identifiant à $x \mapsto x^r$: F-cristaux (sur $\bar{K}$) de pente multiple de 1/r .
Donc $(\underline{H},r)$ ~~xxxdexxxxx~~ est une gerbe de lien $\underline{G}_m$, ayant comme classe dans $Br(\underline{Q}_p)$ le générateur canonique 1/r mod $\underline{Z}$ de ${}_rBr(\underline{Q}_p) \simeq \underline{Z}/r\underline{Z}$. C'est aussi, plus canoniquement, "la" gerbe définie par le corps gauche $K_{r,s}$ plus haut, ~~qui~~

[Exercice amusant, que je n'ai pas fait: la structure additive de Rep($\underline{H}$) étant entièrement décrite par la collection des $K_{r,s}$, expliciter sa ⊗-structure ... i.e. écrire les "relations canoniques" en termes de produits tensoriels entre les $E_{r,s}$. Autre exercice suggéré: trouver "canoniquement" une description des modules de Dieudonné des réduits des groupes de Lubin-Tate en termes des $E_{r,s}$ (en particulier, les Lubin-Tate associés aux extensions non ramifiées "géométriquement" i.e. dans Rep($\underline{H}$)

de $\underline{Q}_p$) qui sont donc isomorphes (mais sans doute non canoniquem aux $E_{r,1}$ pour $r \geq 1$: ils donnent des modules libres de rang 1 canon quês sous les $K_{r,1}$ ...)

9. Pour k quelconque, on trouve un ~~kx~~ $\underline{Q}$-homomorphisme canonique ~~taxtaidex~~ défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, mais ce choix est inessentiel ..)

$$\text{Fcriso}(k) \longrightarrow \text{Rep}(\underline{H})$$

ou encore un homomorphisme de gerbes

$$\underline{H} \longrightarrow \underline{G}(k)$$

(rappelons que cet homomorphisme se factorise par le noyau, ~~ax~~ soit ~~ax~~ $\underline{H}(k)$, de $\underline{G}(k) \to \underline{\Pi}_p(k)$, et que pour k parfait on devine que l'homomorphisme obtenu $\underline{H} \to \underline{H}(k)$ est une équivalence ...). Si $\lambda \in \underline{Q}$, un F-isocristal sur k est dit ~~homogène~~ de pente λ si son image dans Rep($\underline{H}$) est de pente λ . On voit alors aussitôt qu'un F-isocristal est de pente zéro sss il est "trivial" i.e. satisfait aux conditio de 5.2 (ce qui justifie la terminologie qui est introduite, un peu prématurément, à cet endroit), il est effectif sss son image dans Rep(H) l'est, i.e. est à pente ≥ 0.

Considérons l'homomorphisme de liens associé

$$H \longrightarrow G(k) \quad ,$$

on trouve alors que si k est parfait, l'homomorphisme précédent es central , en d'autres termes H opère sur le foncteur identique d Fcriso(k) $\to$ Rep($\underline{G}$(k)) , de sorte que tout F-isocristal (E, F_E) , se décompose en ses "composantes isopentiques" E_λ , $\lambda \in \underline{Q}$. E est "trivial" resp. effectif sss $E_\lambda = 0$ pour $\lambda \neq 0$ (resp. $\lambda < 0$).

Notons que le F-isocristal de Tate K(1) est de pente-1. Donc (pour k parfait) tout F-isocristal se met de façon unique sous la forme

$$E = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_i(-i) \quad ,$$

où E_i est à composantes isopentiques de pente $0 \leq i \leq 1$. D'ailleurs les E_i qui sont à composantes isopentiques λ tels que $0<\lambda\leq 1$ sont exactement les modules de Dieudonné des groupes formels p-di sibles sur k (la catégorie de ces modules de Dieudonné ~~correspond~~ est opposée à la catégorie de ces groupes, mod isogénie). D'autre part, un F-is cristal est d'amplitude isopentique contenue dans $[0,1]$ (interv fermé) sss c'est le module de Dieudonné d'un groupe de Barsotti-T. sur k (la catégorie des F-isocristaux envisagée étant anti-équivalente à la catégorie des groupes de B.T. sur k mod. isogénie ..): le F-isocristal unité correspond au groupe de B.T. ind-étale $\underline{Q}_p/\underline{Z}_p$ s k .

Supposant toujours k parfait, la condition ~~deslexiste~~ que (E,F_E) soit effectif ät qu'il existe un V_i effectif ~~tel que~~ $FV_i=V_iF=p^i\,\mathrm{id}$ (cf n°2) signifie que E est d'amplitude isopentique contenue dans $[0,i]$.

10. <u>Cas</u> k <u>fini</u>. Supposons $k=\underline{F}_q$, où $q=p^{\nu}$. En vertu de 6.1, ~~xxx~~ la gerbe $\underline{G}(\underline{F}_q)$ est connue, c'est la sous-gerbe évidente de $\underline{G}(\underline{F}_p)$, s'insérant dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{G}(\underline{F}_q) \longrightarrow \underline{G}(\underline{F}_p) \longrightarrow \mathrm{Rep}(\underline{Z}/\nu\underline{Z}) \longrightarrow 0 .$$

Il est clair alors que pour $\underline{F}_q$ comme pour $\underline{F}_p$, la réponse à 6.2 est affirmative, donc les considérations du n°7 s'appliquent: on trouve la structure de $\underline{G}(F_q)$ comme gerbe + ses structures supplémentaires examinées jusqu'à présent.

Le foncteur fibre canonique ~~sur~~ Fcriso($\underline{F}_q$) $(E,F_E)\longmapsto E$ ~~exvakxux~~ sur le corps $K_{\nu}=K(\underline{F}_{q=p^{\nu}})$ (i.e. section canonique de $\underline{G}(\underline{F}_q)$ sur K_{ν}) est muni d'une structure supplémentaire, savoir un automorphisme linéaire $F_E{}^a$, de sorte que le groupe ~~algébrique~~ sur ~~xxxx~~ K_a correspondant à cette section de $\underline{G}(\underline{F}_q)$ sur K_a, savoir le sous-groupe G_{K_ν} de G_{K_ν} ouvert d'indice ν (correspondant au sous-groupe des racines ν.èmes de 1 dans le groupe des caractères $\underline{Q}^{*}$ de G_{K_ν})

est muni d'un élément f_q de $G_\nu(K_a)$ ("Frobenius relatif à $\underline{F}_q$"). Ce dernier n'est autre d'ailleurs que $\underline{f}^\nu$, où $\underline{f}$ est le générateur canonique de G (le Frobenius absolu). ~~[illegible]~~ Notons que $\nu\,\mathrm{Id}_G$ est un monomorphisme (car $x \mapsto x^\nu$ est un épimorphisme dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^*$), donc induit un isomorphisme entre G_{K_ν} et $G_\nu \simeq G(\underline{F}_q)$, transformant le frobenius ~~xxxxx~~ absolu en le frobenius relatif à $\underline{F}_q$. Grâce à ceci, on voit :

<u>Proposition</u> 10.1. La catégorie tann. $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a$ est équivalente à la catégorie tann. $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_p)\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a$, avec $\underline{f}_q$ correspondant à $\underline{f}^\nu$ (où on peut, si on veut, considérer $\underline{f}_q$ et $\underline{f}$ comme des endomorphismes des foncteurs identiques de $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)$ resp. $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_p)$), et correspondance des foncteurs fibres canoniques. Le foncteur déduit du changement de base $\underline{F}_p \to \underline{F}_q$

i.e. la catégorie des couples (E, F_E) d'un vectoriel sur K_a et d'un automorphisme de ce vectoriel...)

$$\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_p)\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a \longrightarrow \mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a$$

s'identifie, par l'équivalence précédente, au foncteur qui à tout couple (E, F_E) d'un vectoriel sur K_a et d'un automorphisme dudit, associe le couple $(E, F_E{}^\nu)$, analogue pour $\mathrm{Fcriso}(F_q) \longrightarrow \mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)\otimes_{\mathbb{Q}_q} K_a$ qui s'identifie : $(E, F_E) \longmapsto (E, F_E{}^\nu)$.

10.2. Comme on connait $\underline{G}(\underline{F}_q)$ comme une sous-gerbe $\underline{G}_\nu$ de $\underline{G} = \underline{G}(\underline{F}_p)$, et que celle-ci contient $\underline{H}$, on connait donc en principe l'inclusion

$$\underline{H} \longrightarrow \underline{G}_\nu = \underline{G}(F_q) ,$$

donc aussi le foncteur

$$\mathrm{Rep}(\underline{G}_\nu) \simeq \mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Rep}(\underline{H}) ;$$

~~Considérons le foncteur correspondant~~

$$\cancel{\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a \longrightarrow \mathrm{Rep}(\underline{H})\otimes_{\underline{\mathbb{Q}}_p} K_a}$$

L'effet de ~~ces~~ ce foncteur~~s~~ sur les classes d'isomorphie d'éléments est connu (comme chaque fois qu'il s'agit d'un morphisme d'une ~~xxxxxx~~ catégorie tannakienne à lien commutatif dans une autre à lien de type multiplicatif) par la connaissance de l'homomorphisme de liens correspondant

$$H \xrightarrow{u_\nu} G_\nu \longrightarrow G \quad ,$$

lui-même déterminé par la connaissance de l'homomorphisme en sens inverse sur les groupes de caractères

$$\begin{tikzcd} Q & \overline{Q}^* \arrow[l, "u_\nu^*"'] & \overline{Q}^* \arrow[l, "\lambda^\nu"'] \arrow[ll, bend left, "|\lambda|"] \end{tikzcd} .$$

On lit sur ce diagramme que, pour l'isomorphisme naturel du grou des caractères de G_ν avec $\overline{Q}^*$, provenant de l'élément $\underline{f}_q \in G_\nu(\underline{Q})$, on ~~qui donne~~ a

$$u_\nu^*(\lambda) = v_p(\lambda)/\nu .$$

On trouve donc le résultat suivant de Manin, énoncé sous une for plus jolie et débarássé d'hypothèses restrictives parasites:

<u>Proposition</u> 10.3. Soit (E,F_E) un F-isocristal sur $\underline{F}_q$, $q=p^\nu$, considérons le polynôme caractéristique $f(T)$ de F_E^ν, soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ (N=rang E) ses racines, et $c_1, \ldots, c_N$ leurs valeurs ab lues normalisées ($c_i = v_p(\lambda_i)$, $v_p(p)=1$). Alors dans $\mathrm{Rep}(\underline{H})\otimes_{Q_p}$ $\simeq$ $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_q)\otimes_{\underline{Q}_p}\underline{Q}_p$, l'image de (E,E_E) a comme pentes les nombres $c_1/\nu, \ldots c_N/\nu$, de sorte que, si les différentes ~~pentes~~ possibles sont ~~p avec multiplicité~~ $p_i = s_i/r_i$ ($s_i, r_i \in \underline{Z}$, $r_i \geq 1$, $(s_i,r_i)=1$) avec multiplicité d_i, on a $r_i | d_i$ i.e. $d_i = d_i' r_i$, et l'image de (E,F_E) dans $\mathrm{Fcriso}(\underline{F}_p)$ est isomorphe à $\sum_i E_{p_i}^{d_i'}$.

<u>Cor.</u>