I. Sections hyperplanes et projections coniques.

1 Notations.

2. Section hyperplane générique: propriétés locales.

3 Section hyperplane générique: irréductibilité et connexité gé[illegible]

4 Section hyperplane variable: sections "assez générales".

5. Théorèmes du type Seidenberg.

6 Connexion Connexion d'une section hyperplane quelconque.

7 Application à des constructions de sections hyperplanes et multisect multisections spéciales.

8 Dimension Dimension de l'ensemble des hyperplans exceptionnels.

9 Changement d'immersion projective.

10. Pinceaux de sections hyperplanes, et fibrations de variétés [illegible]

11 Grassma... Grassmaniennes.

12 Generalisation Généralisation de résultats antérieurs à des sections linéaires.

13 Morphismes Morphismes élémentaires et théorème de M. Artin.

14. Projections coniques. A.

15. Axiomatisation de certains des résultats précédents.

16. Traductions en langage de systèmes linéaires. stop

Commentaires. Cette rédaction donne pêle mêle une esquisse détaillée de l'ensemble des résultats qui devraient figurer dans une rédaction finale. Pour parvenir à cette dernière, il faudra une réorganisation de fond en comble du présent Etat 0, la première tâche étant probablement l'établissement d'un nouveau plan (dans lequel sans doute les actuels nos 11,12,14,15 viendront beaucoup plus tôt). Je n'ai pas encore ré[digé] le no 16, qui en principe ne doit offrir aucune difficulté ni influer en aucune manière sur les nºs précédents, puisqu'il s'agit d' simple question de traduction.

Tu noteras la présence d'une proposition 10.3. qui devrait figurer dans un paragraphe antérieur. Je te signale à ce propos que j'ai plusieurs autres résultats, assez disparates mais ayant tous traits à des applications birationelles, que j'aimerais insérer quelque part. Il me semble qu'il y en aura trop peu pour en faire un paragraphe, aur tu une suggestion à faire où le fourrer ? Je pense te l'envoyer prochainement, ainsi que le nº16 des présentes notes.

D'ailleurs, le présent par.20 éclatera très probablement en deux, l'un étant constitué par des développements genre "géométrie élémentaire" sur les grassmanniennes. A la rigueur, on pourrait y fourr aussi (à défaut de meilleur endroit) les compléments dont je parle sur les applications birationelles ?

A.

IV 20 Sections hyperplanes et projections ~~linéaires~~ coniques.

20.1. Préliminaires ~~de~~ et notations.

Soient S un préschéma, $\underline{E}$ un Module loc libre de type fini sur S, $\check{\underline{E}}$ son dual. Nous noterons par $P=\underline{P}(\underline{E})$ le fibré projectif défini par $\underline{E}$, par $\check{P}$ celui défini par $\check{\underline{E}}$. Nous appellerons $\check{P}$ le schéma des hyperplans de P, cette terminologie se justifiant de la façon suivante. Soit ζ une section de $\check{P}$ sur S, qui est donc déterminée par un module quotient inversible L de $\check{\underline{E}}$. On en conclut un module quotient inversible L_P de $(\check{\underline{E}})_P = (\underline{E}_P)^\vee$, d'autre part on dispose d'un module quotient inversible $\underline{O}_P(1)$ de $\underline{E}_P$. Passant aux duals, on peut envisager $\underline{L}_P^{-1}$ resp. $\underline{O}_P(-1)$ comme des sous-modules inversibles (loc facteurs directs) de $\underline{E}_P$ resp. de $(\underline{E}_P)^\vee$, et l'accouplement $\underline{E}_P \otimes \check{\underline{E}}_P \longrightarrow \underline{O}_P$ définit donc un accouplement naturel

(x) $$\underline{O}_P(-1)\otimes\underline{L}_P^{-1} \to \underline{O}_P$$

ou encore un homomorphisme transposé

(xx) $$\underline{O}_P \longrightarrow \underline{O}_P(1)\otimes\underline{L}_P = \underline{L}_P(1) ,$$

i.e. une section de $\underline{L}_P(1)$, canoniquement déterminée par ζ. Le "diviseur" de cette section, i.e. le sous-schéma fermé H_ζ de P défini par l'Idéal image de (x), est appelé l'hyperplan dans P défini par l'élément $\zeta \in \check{P}(S)$. Il peut encore se décrire en notant que localement sur S ζ est donné par une section ϕ de $\underline{E}$, telle que $\phi(s) \neq 0$ pour tout s (ϕ étant déterminé par ζ modulo multiplication par une section inversible de $\underline{O}_S$); comme $\underline{E} = p_*(\underline{O}_P(1))$ (p: P→S étant la projection), ϕ peut être considéré comme une section de $\underline{O}_P(1)$, dont le diviseur n'est autre que H_ζ. Bien entendu, si on considère $\underline{L}^{-1}$ comme un sous-module inversible de $\underline{E}$ localement facteur direct dans $\underline{E}$, alors la correspondance entre ζ (i.e. $\underline{L}$

ou encore $\underline{L}^{-1} \subset \underline{E}$) et ϕ s'obtient en prenant (pour ϕ) une section de $\underline{L}^{-1}$ qui ne s'annule en aucun point, i.e. une trivialisation de $\underline{L}^{-1}$ (qui existe en tous cas localement). Notons d'ailleurs que H_ξ n'est autre que $P(\underline{E}/\underline{L}^{-1})$ (isomorphisme canonique), ce qui est une troisième façon de décrire H_ξ (NB $P(\underline{E}/\underline{L}^{-1})$ est bien plongé canoniquement dans $P = P(\underline{E})$), qui a l'avantage de montrer de plus que H est un fibré projectif sur S, et à fortiori est lisse sur S (encore aurait-il fallu dire au par. 17 qu'un fibré projectif est lisse ...). Il serait sans doute préférable de commencer par celle-là.

<u>Remarques</u>. La formation de H_ξ en termes de ξ est compatible avec le changement de base, comme on constate aussitôt., en d'autres termes, on trouve un homomorphisme de foncteurs $(Sch)^{\circ}_{/S} \rightarrow (Ens)$

$$\check{P} \longrightarrow \underline{Div}\,(P/S) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne le foncteur des "diviseurs relatifs" de P/S dont la valeur en S' (S-préschéma arbitraire) est l'ensemble des sous-schémas fermés de $P_{S'}$ qui sont intersection complète transversale de codimension 1 relativement à S' (cf par.19). Il est facile de montre que cet homomorphisme de foncteurs est un monomorphisme, en d'autres termes que ξ est déterminé par H_ξ. (Ce dernier fait justifie la terminologie "schéma des hyperplans" utilisée plus haut). Nous verrons ~~Chapxix~~ que le foncteur $\underline{Div}$ (P/S) est représentable par le préschéma somme des $P(Sym^k(\check{E}))$, de sorte que $\check{P}$ s'identifie à un sous-préschéma ouvert et fermé de $\underline{Div}$ (P/S) ... (NB A vrai dire, la détermination des diviseurs relatifs de P/S pourrait se faire avec les moyens du bord dès maintenant, en utilisant les résultats du Chap III, et pourrait être ajoutée à titre d'exemple au par.19 ...).

Faisons maintenant le changement de base $S'=\check{P} \longrightarrow S$, et considérons la section diagonale (ou "section générique") de $\check{P}_{S'} = P(\underline{E}_{S'})$ sur S' : on trouve un sous-schéma fermé $\underline{H}$ de $P_{S'} = P\times_S \check{P}$, appelé parfois <u>schéma d'incidence</u> entre P et $\check{P}$, défini par l'Idéal image de l'homomorphisme canonique

$$\underline{O}_P(-1)\otimes_S \underline{O}_{\check{P}}(-1) \longrightarrow \underline{O}_{P\times_S\check{P}} \qquad ;$$

d'après ce qu'on a vu, c'est un fibré projectif sur $\check{P}$, et par raison de symétrie, c'est également un fibré projectif sur P. Bien entendu, on retrouve les ~~définitions des~~ hyperplans "spéciaux" H_ξ (pour ξ section de $\check{P}$ sur S), à partir du "hyperplan universel" $\underline{H}$, en prenant son image inverse par le changement de base $S \xrightarrow{\xi} \check{P}$. La même remarque s'applique pour tout point ξ de $\check{P}$ à valeurs dans un S-préschéma quelconque S', qui (considéré com[me] section de $\check{P}_{S'}$ sur S') permet de définir un $H_\xi \subset P_{S'}$: ce dernier n'est autre que l'image inverse de $\underline{H}$ par le changement de base $S' \xrightarrow{\xi} \check{P}$.

Nous supposons par la suite donné un préschéma de type fini X sur [S] et un S-morphisme

$$f: X \longrightarrow P \quad .$$

Un des principaux objets du présent paragraphe est d'étudier, pour tou[t] hyperplan H_ξ de P, ($\xi \in \check{P}(S)$) son image inverse

$$Y_\xi = f^{-1}(H_\xi) = X\times_P H_\xi \quad ,$$

et notamment de mettre en relations le propriétés de X et des Y_ξ . Co[m]me d'habitude, on aura également à considérer des $\check{P}(S')$, S' ~~...~~ un S-préschéma quelconque, dans ce cas H_ξ est un hyperplan de $P_{S'}$, et on posera encore

$$Y_\xi = f_{S'}^{-1}(H_\xi) = X_{S'} \times_{P_{S'}} H_\xi = X\times_P H_\xi \quad ,$$

où l'indice S' désigne comme d'habitude ~~..~~ l'effet du changement de b[ase] $S' \longrightarrow S$, et où dans le dernier terme on considère H_ξ comme P-préschéma par le morphisme composé $H_\xi \longrightarrow P_{S'} \longrightarrow P$. Il est alors commode encore de considérer le cas où ξ est "universel" i.e. où $S' = \check{P}$, et ξ est la section diagonale, donc $H = \underline{H}$; dans ce cas on notera (sauf meilleures notations suggérées par Dieudonné) $\underline{Y} = Y_\xi$. Dans le cas général d'un $\xi : S' \to \check{P}$, on aura donc aussi

$$Y_\xi = \underline{Y} \times_{\check{P}} S' .$$

Enfin, si F est Module sur X, nous désignerons par G_ξ son image inverse sur Y_ξ, par $\underline{G}$ son image inverse sur $\underline{H}$, de sorte qu'on aura aussi

$$G_\xi = \underline{G} \otimes_{\underline{O}_{\check{P}}} \underline{O}_{S'} .$$

Résumons dans un petit diagramme l'essentiel des constructions et notations envisagées:

$$\begin{tikzcd}
F & & \underline{G} & & G_\xi \\
X \arrow[d] & X\times_S\check{P} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{Y} \arrow[l] \arrow[d] & & Y_\xi \arrow[ll] \arrow[d] \\
P \arrow[d, dashed] & P\times_S\check{P} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{H} \arrow[l] \arrow[dl] & & H_\xi \arrow[ll] \arrow[dl] \\
S & \check{P} \arrow[l, dash] & & S' \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

(Les carrés et losanges figurant dans ce diagramme sont cartésiens).

Dans le numéro suivant, nous étudions systématiquement le cas suivant: S' est le spectre d'un corps K, et son image dans P est générique dans la fibre correspondante $\check{P}_s$. Quitte à faire le changement de base Spec k(s) $\longrightarrow$ S, on est ramené pour ceci au cas où S est le spectre d'un corps k, ce que nous supposerons au Nº suivant. D'ailleurs, la plupart des propriétés examinées pour X et Y_ξ sont de "nature géométrique" donc invariantes par changement de corps de base; cela permet alors indifféremment de se ramener au cas où K est algébriquement clos, ou au cas où $K = k(\eta)$, η étant le point générique de $\check{P}$, et $\xi : \mathrm{Spec}(K) \to \check{P}$ étant bien entendu le morphisme canonique. On notera de même que pour les questions de nature géométrique concernant X, Y_ξ, on peut (quitte à faire un changement de base sur k) se borner au cas k alg clos.

Un oubli terminologique: lorsque f est une immersion, on appelle habituellement Y_ζ une <u>section hyperplane</u> de X (relative à l'immersion projective f et à l'hyperplan H); il n'y a pas de raison de ne pas étendre cette terminologie au cas f quelconque.

20.2. <u>Etude de la section hyperplane générique: propriétés locales</u>.

Rappelons que maintenant S=Spec(k), k un corps. Si η est un point de $\check{P}$, et si ζ= Spec(η)$\to \check{P}$ est le morphisme canonique, nous poserons aussi H_η , Y_η , G_η au lieu de H_ζ , Y_ζ , G_ζ . Dans le présent nº, η désignera toujours le point générique de $\check{P}$.

<u>Proposition</u> 2.1. Supposons X irréductible. Alors Y_η est irr. ou vide. , et dans le premier cas il domine X. En outre $\overline{Y}$ est η irréductible.

En effet, comme $\underline{H} \to$ P est un fibré projectif, il en est de même de $\underline{Y} \to$ X, ce qui implique que $\underline{Y}$ est irréductible X l'étant. Danc la fibre générique Y de $\underline{Y}$ sur $\check{P}$ est irréductible ou vide, et dans le premier cas, son point générique est point générique de $\underline{Y}$, donc au dessus de celui de X, cqfd.

<u>Proposition</u> 2.2. Soit Z une partie de P. Alors son image inverse Z_η dans H_η est vide si et seulement si tout point de Z est fermé. En particulier, si Z est constructible, alors Z_η = ∅ sss Z est fini.

On peut supposer Z réduit à un seul point z , et on est ramené à prouver que l'image de H dans P est formé exactement des points non fermés de P. Désignant par X l'adhérence de z, et utilisant 2.1. , on est ramené à prouver que Y_η = ∅ sss X est fini (X étant un sous-schéma fermé de P). Remplaçant X par $X_{k(\eta)} \hookrightarrow P_{k(\eta)}$, le "il faut" résulte du fait suivant, pour lequel nous devons avoir une référence, et qui mérite d'être réexplicité ici en lemme: si Y est une section hyperplane <u>quelconque</u> de X et si Y_ζ=∅ , alors X est fini (en effet, X ⊂ P − H est affine, et projectif ...). Le "il suffit" est immédiat, par exemple en notant que $\underline{Y}$ est un fibré projectif de dimension relative n-1 sur X (n étant la dim relative de P et $\check{P}$ sur S), donc X étant fini sur k, $\underline{Y}$ est de dimension absolue $n-1$ ($< n = \dim P$), donc le morphisme $\underline{Y} \to \check{P}$ ne peut être dominant, donc sa fibre générique Y_η est vide.

Corollaire 2.3. Soit $f:X \to P$ un morphisme de type fini, et soit Z une partie constructible de X. Pour que son image inverse dans Y_η soit vide, il f et s que l'image $f(Z)$ soit finie. En particulier, pour que ~~X~~ Y_η soit vide, il f et s que $f(X)$ soit fini.

Corollaire 2.4. Soient Z,Z' deux parties fermées ~~irréductibles~~ de X, (avec Z irréductible) et soient Z_η et Z'_η leurs images inverses dans Y_η. Pour qu'on ait $Z_\eta \subset Z'_\eta$, il faut et il suffit que $f(Z)$ soit fini ou que l'on ait $Z \subset Z'$. Pour que $Z_\eta = Z'_\eta$, il f et s que ~~ZxxxxZ~~ $f(Z)$ et $f(Z')$ soient finis, ou que $Z=Z'$. ~~Enxeffetxxxilxfautxexprimerxxx~~ C'est une conséquence ~~xxxxxxxxxx~~ immédiate de 2.3. , car on voit que $f(Z - Z\cap Z')$ ne peut être fini que si $Z \subset Z'$, ou si $f(Z)$ est fini (car si on n'a pas $Z \subset Z'$, alors $Z-Z\cap Z'$ est dense dans Z, donc $f(Z-Z\cap Z')$ est dense dans $f(Z)$, et si le premier est fini donc fermé - étant constructible - il en est de même du second.

Corollaire 2.5. A toute composante irréductible X_i de X telle que $\dim \overline{f(X_i)} > 0$, faisons correspondre ~~xxxxxxx~~ son image inverse $Y_{i\eta}$ dans Y_η. Alors $Y_{i\eta}$ est une composante irréductible de Y_η, et on obtient de cette façon une correspondance biunivoque entre l'ensemble des comp. irr. X_i de X telles que $\dim \overline{f(X_i)} > 0$, et l'ens des comp ~~irr~~ de Y_η.

En effet, il résulte de 2.3. que ~~X~~ Y_η est réunion des $Y_{i\eta}$ envisagés et que ces derniers sont des parties fermées non vides de Y; elles sont d'ailleurs irréductibles en vertu de 2.1. Enfin, elles sont mutuellement sans relation d'inclusion en vertu de 2.4. , d'où la conclusion.

Notons que si ~~dxxx~~ $\dim X_i = d_i$, ~~xxxxx~~ on a $\dim Y_i = d_i - 1$, ~~ce qui résulte de la proposition~~ plus généralement : (pour toute comp. irréd. X_i de X on a)

Proposition 2.6. Supposons que $\dim \overline{f(X)} > 0$ i.e. $Y_{i\eta} \neq \emptyset$ (on que f soit une imm. et $\dim f(X) > 0$). Alors on a

$$\dim Y_\eta = \dim X - 1$$

On est ramené au cas où X est irréductible, grâce à 2.5. Par construction même, Y_η est défini à partir de $X_{k(\eta)}$ comme le diviseur d'une section d'un module inversible sur $X_{k(\eta)}$ (savoir de l'image inverse de $\underline{O}_P(1)$). D'autre part, $X_{k(\eta)}$ est irréductible (car X l'est, et $k(\eta)$ est une extension transcendante pure de k, ce qu'on aurait dû signaler au début du N° ...), et $Y_\eta \neq X_{k(\eta)}$, puisque l'image de Y_η dans X (contrairement à celle de $X_{k(\eta)}$, qui est fid. plat sur X) n'est pas égale à X, ne contenant pas en effet les points fermés de X en vertu de 2.3. Il s'ensuit que $\dim Y_\eta = \dim X_{k(\eta)} - 1 = \dim X - 1$, cqfd.

<u>Proposition</u> 2.7. Soit F un Module quasi-cohérent sur X, d'où G_η sur Y_η. Soient Z_i les cycles premiers associés à F tels que $\dim \overline{f(Z_i)} > 0$. Soit $Z_{i\eta}$ l'image inverse de Z_i dans Y_η, alors les $Z_{i\eta}$ sont exactement tous les cycles premiers associés à G_η, de plus leurs relations d'inclusion sont celles entre les Z_i.

La dernière assertion est contenue dans 2.4. D'autre part, comme $\underline{Y} \to X$ est un fibré projectif, donc plat à fibres (S_1) et irr., il résulte du par.3 que les cycles premiers associés à l'image inverse G de F sur $\underline{Y}$ sont les images inverses ~~xxxxxxxx~~ des cycles premiers associés à F, d'où en ~~prenant~~ s'induisant sur la fibre générique Y_η de $\underline{Y}$ sur $\check{P}$, le fait que les cycles premiers associés à G_η sont les images inverses <u>non vides</u> des Z_i ce qui établit 2.7, moyennant 2.3. A vrai dire, le passage par $\underline{Y}$ est inutile, on peut utiliser directement le fait que $Y_\eta \to X$ est plat à fibres (S_1) (et même géom. régulières, i.e. le morphisme est régulier) et à fibres irréductibles (et même géométriquement irréductibles : c'est des localisés de schémas projectifs), [illegible] 2.1.

Proposition 2.8. Soit F cohérent sur X, et soit $y \in Y$, x son image dans X. ~~Pxxxxqxxxx&xxxxxxit~~ . Soit P(M) une des propriétés suivantes pour un module de type fini M sur un anneau local noethérien A:

(i) coprof $M \leqslant n$ (réf).

(ii) M satisfait(S_k) (réf).

(iii) M est Cohen-Macaulay.

(iv) M est réduit (vi).

(v) M est intègre (vi).

Alors, pour que $H_{y,y}$ satisfasse la propriété P, il f et s que F_x la satisfasse.

Cela résulte aussitôt des résultats du par.6 , compte tenu que $Y_y \longrightarrow X$ est un morphisme régulier, donc $\underline{O}_{X,x} \longrightarrow \underline{O}_{Y_y,y}$ est régulier. Compte tenu de 2.3. on obtient donc:

Corollaire 2.9. Avec les notations de 2.8. , soit ~~$Z_P(X)$~~ Z l'ensemble des $x \in X$ tels que $P(F_x)$ ne soit pas satisfaite. Alors pour que G_y satisfasse à P en tous les points, il f et s que f(Z) soit une partie finie de P, ou encore que ~~f(Z)~~ dim $\overline{f(Z)} = 0$.

En effet, 2.8. nous dit que $h^{-1}(Z)$ est l'ensemble P-singulier de G_y , et il est vide sss f(Z) est fini en vertu de 2.3. (NB h désine le morphisme $Y_y \longrightarrow X$; je m'aperçois à l'instant que la lettre P dans 2.8. fait double emploi).

Corollaire 2.10. Condition pour que Y_y soit réduit resp. loc intègre

~~On fera attention que 2.10. et 2.11. ci-dessous ne dit rien sur les propriétés "géométriquement réduit" et "géométriquement intègre", les propriétés envisagées dans 2.8. étant en effet "absolues" . Nous allons~~

soit régulier (resp.

Corollaire 2.11. Soit $y \in Y_y$, pour que Y_y satisfasse la propriété R_k (réf) en y (resp. soit normal en y) il f et s que X satisfasse la même propriété en x. ~~Remarque~~ Soit Z l'ensemble des points de X en lesquels X n'est pas régulier (resp. ~~R_k~~ ~~(resp.~~ ~~n'est pas~~ normal); pour que Y_y soi régulier (resp. (R_k) (resp. normal) il f et s que f(Z) soit fini i.e. $\dim \overline{f(Z)} = 0$.

Même démonstration que 2.8. et 2.9. Il faut donner les diverse références assurant que Z est fermé (car il faut savoir qu'il est constructible pour appliquer 2.3.).

~~Remarque 2.12~~ On notera que dans 2.10. et 2.11. nous ne disons rien sur les propriétés "géométriques" correspondantes, les résultats envisagés étant de nature "absolue". Nous Examinons maintenant les propriétés de nature géométrique. (On pourrait si on le désire en profiter pour changer de nº).

Supposons que $f: X \to P$ soit une ~~immersion~~ non ramifiée.

Théorème 2.12. Soient $y \in Y_y$, x son image dans X. Pour que X soit lisse sur k en x, il f et s que Y_y soit lisse sur $k(y)$ en y.

On peut supposer k algébriquement clos. Si Y_y est lisse sur $k(y)$ en y, il est régulier, donc comme Y_y estb plat sur X, X est régulier en x (réf), donc il est lisse sur k en x puisque k est alg clos donc parfait (réf). Pour la réciproque, on peut (quitte à remplacer X pa un voisinage ouvert de x) supposer X lisse, et (grâce au critère jacobien de lissité) défini dans un ouvert U de P par p équations comme $X = V(f_1, \dots, f_p)$, où les différentielles $df_1, \dots, df_p$ sont partout linéairement indépendantes. Introduisant des coordonnées affin $S_1, \dots, S_n$ dans $\check{P}$ et des coordonnées affines $T_1, \dots, T_n$ dans un voisinag de x (par choix d'un hyperplan H_∞ ne contenant pas x), $Y \hookrightarrow U_{k(y)}$ es alors égal à $V(f_1, \dots, f_p, \sum_i S_i T_i - 1)$, et il suffit de vérifier que les différentielles (relativement à $k(y)$) de $f_1, \dots, f_p$, $(\sum S_i T_i) - 1$

sont linéairement indépendantes. Or ces différentielles ne sont autres que les sections de $(\underline{\Omega}^1_{U/k}) \otimes_k k(\ )$ suivantes:

$$df_1, \ldots, df_p, \sum_i S_i dT_i \quad .$$

Comme les df_i sont linéairement indépendants en tout points de U, et que les dT_i forment une base de $\underline{\Omega}^1_{U/S}$ point de U, ~~xxxxxxxxx~~ et à fortiori un système de générateurs, on en conclut immédiatement l'indépendance linéaire des quantités écrites en tout point de $U_{k(y)}$, du moins lorsque $p \leq n$, i.e. si $\underline{E} = \underline{\Omega}^1_{U/k} / \sum \underline{O}_U df_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$: c'est un petit lemme sur une famille de générateurs d'un Module loc libre $\underline{E}$ non nul, alors $\sum S_i a_i$ considéré comme section de $\underline{E} \otimes_k k(y)$ ne s'annule en aucun point. D'autre part, le cas où p=n est trivial, car alors $Y_y = \emptyset$.

<u>Corollaire</u> 2.13. Soit Z l'ensemble des points de X en lesquels X n'est pas lisse sur k. Pour que Y soit lisse sur $k(y)$, il f et s que Z soit fini. En particulier, si X est lisse, il en est de même de Y.

Résulte de 2.12. et 2.3. Plus généralement, on obtient:

<u>Théorème</u> 2.14. Soient y un point de X_y, x son image dans X. Soit P(Z,K) l'une quelconque des propriétés suivantes pour une ~~xxxxxxx~~ algèbre locale noethérienne sur un corps K:

(i) A est géométriquement régulier sur K.

(ii) A est géométriquement (R_k) sur K.

(iii) A est séparable sur K.

(iv) A est géométriquement normal sur K.

Alors $P(\underline{O}_{X,x}, k) \Longleftrightarrow P(\underline{O}_{Y_y,y}, k(y))$

~~(xxxxxxxxxxxt~~ En effet, compte tenu du par.6., (iii) et (iv) résultent de (ii) conjugué avec 2.8. (ii). D'autre part, (i) a déjà été prouvé dans 2.12. , et il reste à ramener (ii) à (i). Pour ceci, soit Z l'ensemble des points en lesquels X n'est pas lisse sur k; son image inverse Z_y dans Y_y est donc (en vertu de 2.12.) l'ensemble des points de Y_y en lesquels Y_y n'estb pas lisse sur $k(y)$. Or la codimension de Z dans X en x est égale à celle de Z_y dans Y_y en y par raison de platitude (réf par.6). Donc l'une est $> k$ sss l'autre l'es ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.15. Soit Z l'ensemble des points de X en lesquels X n'est pas lisse sur k (resp. n'est pas géom R_k sur k, resp. n'est pas séparable sur k, resp. n'est pas géom ~~normal~~ sur k). Pour que Y_y soit lisse (resp. géom R_k, resp séparable, resp géom normal) sur $k(y)$, il f et s que Z soit fini.

Du point da vue rédaction, 2.14. et 2.15. contiennent 2.13. et 2.13. (qu'on pourrait donc se dispenser d'énoncer séparément), d'autre part le corollaire est plus important pratiquement que le théorème, qu'on pourrait donner en proposition ou lemme préliminaire, pour glorifier plutôt le corollaire.

Nous pouvons moduler ~~xxxxpxxxx~~ le cas de la propriété (iii):

Corollaire 2.16. (Supposant toutjours f une immersion et de plus F cohérent), sous les conditions de 2.7. , pour que Z_i soit non immergé, il f et s que Z_i le soi Lorsqu'il en est ainsi, la multiplicité radicielle de F en Z_i ~~xxxxrel~~ rel à k (réf) est égale à celle de G_y en Z_i rel à $k(y)$.

La première assertion est contenu dans la dernière assertion de 2.7. Pour la seconde, comme $Y_y \longrightarrow X$ est plat donc le foncteur $F \rightsquigarrow G_y$ exact, on est ramené, par restriction à un voisinage du pt gén de Z_i et dévissage, au cas où $F = \underline{O}_{Z_i}$ et on peut supposer $Z_i = X$. D'ailleurs on peut commencer par se réduire au cas k alg clos, alors X est séparable sur k. Alors ~~xxxxxxxxxxx~~ l'assertion est contenue dans 2.15. (iii). On en conclut comme d'habitude:

Corollaire 2.17. Soit Z l'ensemble des points de X en lesquels F n'est pas séparable sur k (réf). Alors G_η est séparable sur $k(\eta)$ ss Z est fini. En particulier, si F est séparable sur k, G_η est séparabl sur $k(\eta)$.

Remarques 2.18. Le résultat clef 2.12. (et ses conséquences 2.11. : 2.17.) devient faux si on abandonne l'hypothèse que f est une immersion, comme on voit par exemple en prenant pour X un revêtement purement inséparable de P. Cependant si k est de caractéristique nulle, 2.12. à 2.17. sont valables sans supposer f une immersion. En effet, il suff: de le vérifier pour 2.12. , et cela résulte alors de 2.11. et du fai que pour un préschéma algébrique en car 0, lisse = régulier.

~~Les propriétés envisagées jusqu'à maintenant étaient de nature essentiellement locale. Nous allons terminer ce n° en étudiant les propriétés globales.~~

2.3. Section hyperplane générique: irréductibilité et connexité géomé

Théorème 3.1. (Bertini-Zariski). Supposons dim $f(X) \geq 2$; et que X soit géométriquement irréductible). Alo la section hyperplane générique Y_η a la même propriété.

~~(Compte tenu que X séparable Y séparable, les deux énoncés de 3.1. sont en fait équivalents: le deuxième implique le premier, et inversement comme on voit en se ramenant au cas k alg. clos. Compte tenu de 2.1. et exmplicitant la construction du corps des fonctions de Y comme extension de k( ) en termes de l'extension K de k et des éléments $t_1, \dots, t_n$ de K images d'un système de coordonnées affines convenable de~~

Corollaire 2.8. Sous les conditions de 2.7. , pour que Z_i soit non immergé, il f et s que Z_i soit non immergé. S'il en est ainsi, la multiplicité radicielle de F en Z_i est égale à la multiplicité radicielle de G sur k( ) en Z_i .

sur

La première assertion résulte aussitôt de la dernière assertion de 2.7. Quant à la première, on peut supposer ~~xxxxxxxxxxxxxxxx~~ par restriction à un ouvert de X et ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ par dévissage sur F (comme Y est plat sur X donc F $\mapsto$ G est une foncteur exact) que l'on a $F=\underline{O}_{Z_i}$, et on peut évidemment remplacer X par Z_i . ~~On est donc ramené au cas où X est intègre et $F=\underline{O}_X$.~~ Soit K/k le corps des fonctions de X, et soit n=dim P; introduisant des coordonnées ~~proj~~ affines $T_1,\dots,T_n$ dans P (en choisissant un hyperplan à l'infini H_∞ tel que f(X) ne soit pas contenu dans celui-ci) et $S_1,\dots S_n$ dans $\check{P}$, on voit que le corps des fonctions L de Y s'identifie au corps des fractions de l'anneau intègre $K[S_1,\dots,S_n]/(\sum t_iS_i - 1)$, où les $t_i \in K$ sont les images des T_i à l'aide de $f:X\to P$. Comme dim $\overline{f(X)}>0$, les t_i ne sont pas tous algébriques sur k, à fortiori ils ne sont pas tous nuls, supposons p. ex. $t_n \neq 0$. On constate alors aussitôt qu'on a $L = K(S_1,\dots,S_{n-1})$ (extension transcendante pure), $S_n\in L$ étant donné par l'équation

$$\sum t_iS_i - 1 = 0$$

en fonction des S_i $(1\leq i\leq n-1)$ et des t_i $(1\leq i\leq n)$. D'autre part, $k' = k(y)$ s'identifie à $k(S_1,\dots,S_n)$, et l'inclusion canonique $k'\to L$ s'obtient en envoyant S_i sur S_i , i.e. k' en tant que sous-extension de L est la sous-extension engendrée par les S_i $(1\leq i\leq n)$, ou ce qui revient évidemment au même, par les S_i $(1\leq i\leq n-1)$ et par $S_n = a_0 + a_1S_1 + \dots + a_{n-1}S_{n-1}$, où $a_0 = t_n^{-1}$, $a_i = -t_it_n^{-1}$ pour $1\leq i\leq n-1$. ~~Comme~~ Notons que le corps engendré par les a_i ou par les t_i est évidemment le même, ~~les a_i sont également pas tous algébriques sur k.~~ dont le degré de transcendance commun n'est autre que dim f(X) .

(NB il y aurait lieu d'inclure cette description birationnelle au moi[ns] en corollaire à 2.1.). La démonstration de 3.1. est donc ramenée à celle du

(Zariski)

<u>Lemme</u> 3.1.1. Soient k un corps, K une extension de type fini de k, (m un entier ≥ 0) a_i $(0 \leq i \leq m)$ des éléments de K ~~qui ne sont pas tous algébriques sur k~~ tels que le degré de transcendance de $k(a_0, \ldots, a_m)$ sur k soit ≥ 2, soit $L = K(S_1, \ldots, S_m)$ et k' le sous-corps $k' = k(S_1, \ldots, S_m, a_0 + \sum^m a_i S_i)$ de L (les S_i étant des indéterminées). ~~Alors la multiplicité radicielle de K sur k est égale à celle de L sur k'~~. Si K est une extension primaire de k, alors L est une extension primaire de k'.

Ce lemme, ou des lemmes qui lui ressemblent comme un frère, traînent un peu partout dans la littérature, c'est pourquoi je te laisse [le] choix de l'endroit où tu copieras une démonstration (i.e. je ne me sen[s] pas inspiré pour en trouver une par mes propres moyens).

<u>Corollaire</u> 3.2. Supposons que f soit ~~une immersion~~ non ramifié ou k de car 0, et que dim $f(X) \geq 2$. Alors si X est géom intègre, il en est à de même de Y_y.

En effet, géom intègre = géom irréd. + séparable.

<u>Corollaire</u> 3.3. Supposons k alg. clos, et ~~que pour toute~~ composante irréductible X_i de X, on ait dim $f(X_i) \geq 2$, et supposons de plus que X soit $\mathcal{C}$-connexe où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des parties fermées Z de X telles que dim $\overline{f(Z)} = 0$ (i.e. pour tout tel Z, X-Z est connexe). Sous ces conditions, Y_y est géom connexe sur $k(y)$.

En effet, par un lemme qui doit figurer au par.6 avec le th. de Hartshorme, l'hypothèse signifie que l'on peut joindre deux comp. irr quelconques X' et X'' de X par une chaine de comp irr. $X_0 = X'$, ... $X_n = X''$, telles que deux consécutives aient une intersection $\notin \mathcal{C}$; alor[s] les images inverses X'_y et X''_y sont joints par la chaine des $X_{i,y}$

qui sont géom connexes sur $k(\eta)$. en vertu de 3.1. , et ~~dont~~ l'intersection de deux consécutifs étant $\neq \emptyset$ en vertu de 2.3. Il s'ensuit (comme $Y_\eta = X_\eta$ est la réunion des $X_{i\eta}$, X_i parcourant l'ensemble des comp irr de X) que ~~Xest~~ Y_η est géom connexe sur $k(\eta)$, cqfd.

20.4. <u>Etude d'une section hyperplane variable</u>: sections "assez générales"
4.1.

Nous revenons à la situation générale du n° 1, S étant un préschém quelconque. De plus, nous supposons X de présentation finie sur S. De façon générale, notons que si $P(Z,k)$ est une propriété "constructi le" ~~d'un préschéma~~ d'un préschéma algébrique Z sur le corps k, alors l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels qu'on ait $P(Y_\zeta, k(\zeta))$ est <u>construc-ble</u>, comme on voit en notant que Y_ζ est la fibre en ζ de $\underline{Y} \to \check{P}$, qui est un morphisme de prés finie, et en appliquant le par.9 . On a une remarque analogue pour une propriété $P(Z,M,k)$, où Z,k sont comme dessu et M est un Module cohérent sur Z: si F est ~~cohérent~~ de prés finie sur X, l'ensembl des $\zeta \in \check{P}$ tels qu'on ait $P(Y_\zeta, G_\zeta, k(\zeta))$ est constructible. D'autre part, dans les deux numéros suivants, on a développé ~~xxxxx~~ dans dive cas un critère pour que l'ensemble précédent E contienne le point générique de $\check{P}$, S étant le spectre d'un corps k ; étant constructible il en résulte que E contient un ouvert non vide: c'est le passage d'u conclusion pour la section hyperplane générique à la conclusion analo gue pour les sections hyperplanes "assez générales". ~~Enfin~~ ~~Nous donnerons également dans ce n° des critères permettant d'affirmer que E es ouvert, en appliquant les résultats du par.12~~. Noter d'ailleurs qu dans le cas S=Spec(k), on a également une réciproque: pour que la Sec on hyperplane <u>générique</u> satisfasse la propriété P, il f. et s. que les Y_ζ pour ζ dans un voisinage convenable de η y satisfassent, et il suffit de l'exiger pour ζ <u>fermé</u> dans $\check{P}$ (ce qui, pour k algébriquement clos, revient à envisager des points rationnels sur k, i.e. des sections hyperplanes de X lui-même (sans extension préalable du corps de base). Cela résulte en effet de la constructibilité de E et du fai que $\check{P}$ est un schéma de Jacobson.

Donnons à titre d'exemples quelques cas particuliers où les considérations précédentes s'appliquent:

<u>Proposition</u> 4.2. Soit G un Module de présentation finie sur X. Soit P une des propriétés suivantes pour un Module M sur un préschéma algébrique Z sur un corps K ;

~~xxthérixxxxx(i)xxxxxx(v)xxxxxxxx&x8xxxAlxxxx~~

~~a) L'ensemble xxx E des $\check{P}$ tels que G satisfasse P est constructible~~

(i) coprof (M) $\leqslant$ n.

(ii) M satisfait (S_k).

(iii) M est Cohen-Macaulay

(iv) M est sans ~~xxxxx~~ cycles premiers associés immergés.

(v) M est séparable sur K.

~~(vi) M est géométriquement intègre sur K.~~

~~(vii)xxMxxxxgéomxxxxintègrexxxxxK~~ Avec ces notations, si E désigne l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que G_ξ satisfasse à P, on a :

a) E est une partie constructible de $\check{P}$.

b) Supposons S=Spec(k), k un corps, et que F satisfasse à P. Supposons de plus (dans le cas (v)) que k soit de car 0, ou que f:X→P soit une ~~immer~~sion un ramifi. Alors E contient un ouvert dense de $\check{P}$.

Démonstration. a) résulte du fait que P est une propriété constructible, ce qui a été vu au par.9. Quant à b), cela résulte des résultats correspondants des ~~deux~~ deux nºs précédents. Remords: supposer plus généralement à b) que si Z est l'ensemble des points de X enlesqu F ne satisfait pas à P, on ait f(Z) fini i.e. dim $\overline{f(Z)} \leqslant 0$.

Proposition 4.3. Soit P l'une des propriétés suivantes (pour un préschéma algébrique sur un corps K):

(i) Z est lisse sur K.

(ii) Z satisfait la propriété (R_k) géométrique sur K.

(iii) Z est séparable sur K.

(iv) Z est géom normal sur K.

(v) Z est géom. irr. sur K.

(vi) Z est géom. intègre sur K.

Soit E l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que Y_ξ satisfasse à P. Alors

a) E est une partie constructible de $\check{P}$.

b) Supposons S=Spec(k), k un corps, et supposons (dans les cas (i) à (v)) que k soit de car zéro ou que f:X→P soit ~~une immersion~~ non ramifié. Supposons enfin dans les cas (v) et (vi) que dim $\overline{f(X)} \geq 2$. Supposons que X satisfasse à P, alors E contient un ouvert dense de $\check{P}$.

Démonstration identique à celle de 4.2. Remarquons que dans les cas (i) à (iv), il suffit de supposer même (dans b) que f(Z) est fini, où Z est l'ensemble des points de X où P est en défaut.

Corollaire 4.4. Considérons aussi la propriété:

(C^S_m) " $\bar{Z}$ ne peut être disco[n]necté par une partie fermée de dimension $\leq m$" (où $\bar{Z}$ est $Z\otimes_K \bar{K}$, $\bar{K}$ la clôture algébrique de K).

Soit E l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que Y_ξ sur $k(\xi)$ satisfasse à C

Alors:

a) E est constructible.

b) Supposons S=Spec(k), k un corps, et que pour toute composante irréductible X_i de X, on ait dim $\overline{f(X_i)} \geq 2$, Alors, si X sur k satisfait C_{m+1} alors E contient un ouvert dense U de P .

La constructibilité se fait par AQT (c'est en fait un oubli au par.9 , qu'il serait peut-être encore temps de réparer); la partie b) résulte en principe de 3.3. , sauf que 3.3. a été énoncé de façon trop particulière, et doit être généralisé en conséquence (la démonstration donnée étant d'ailleurs essentiellement inchangée). D'ailleurs, il y a un lapsus dans l'énoncé 4.4. , qui n'est valable tel quel que si f est quasi-fini; dans le cas général, au lieu de considérer ~~la~~ dimension des parties fermées de X resp. des Y_ζ , il faut regarder la dimension de leurs images dans P resp. H_ζ : Redactor demerdetur.

4.5. ~~Dans l'esquisse du présent n°, nous donnons des~~ conditions moyennant quelles l'ensemble E envisagé dans 4.1. est ouvert. Il s'agira ici de propriétés P de nature locale sur X resp. Y_ζ , de sorte qu'on peut définir l'ensemble U des $y \in \underline{Y}$ tels que (si ζ désigne l'image de y dans $\check{P}$) Y_ζ satisfasse à P en le point y (resp. G_ζ satisfasse à P en y). Nous donnerons d'abord des critères pour que U soit ouvert en utilisant le par.12. Comme en tous cas on a

$$E = P - h(\underline{Y} - U) ,$$

il s'ensuit que si U est ouvert et X propre sur S (donc h propre et à fortiori fermé), alors E est également ouvert.

Proposition 4.6. Soit F Module de présentation finie sur X, et supposons F Cohen-Macaulay relativement à S, i.e. plat relativement à S, et pour tout $s \in S$, F_s sur X_s est Cohen-Macaulay. Supposons de plus que pour tout $s \in S$, toute composante connexe Z de ~~Supp~~ supp F_s de dim d, et pour tout $\zeta \in \check{P}_s$, l'image inverse Z_ζ de H_ζ dans $Z_{k(\zeta)}$ soit de dimension d-1, (i.e. aucune composante irréductible de Z n'est contenue dans un hyperplan de $\overline{P_s}$). Alors

a) Le Module $\underline{G}$ sur $\underline{Y}$ est plat relativement à $\check{P}$.

~~b) Soit P l'une des propriétés suivantes pour un module~~

5. Théorèmes du type Seidenberg?

5.1.

Dans le présent n°, nous donnons des conditions .... (cf page précéd te, le texte barré par erreur).

5.2. Comme nous avons vu au n°1, $\underline{Y}$ est défini dans $X x_S \check{P} = X_{\check{P}}$ comme le "diviseur" d'une section ϕ de $\underline{O}_X(1) \otimes_S \underline{O}_{\check{P}}(1)$, qui induit pour tout $\zeta \in \check{P}$ une section ϕ_ζ de $\underline{O}_X(1) \otimes_{k(s)} \underline{O}_{\check{P}}(1)(\zeta)$ (faisceau d'ailleurs isomorphe non canoniquement à $\underline{O}_X(1) \otimes_{k(s)} k(\zeta) = \underline{O}_{X_{k(\zeta)}}(1)$), de sorte que Y_ζ n'est autre que le "diviseur" de c te section (NB le diviseur d'une section ϕ d'un module inversible $\underline{L}$ est défini comme le sous-préschéma fermé défini par l'Idéal image de $\phi^{-1} : \underline{L}^{-1} \longrightarrow \underline{O}$). Si $\underline{F}$ est un Module sur X, alors son image inverse sur $\underline{Y}$, i.e. l'image inverse de $\underline{F} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{\check{P}} = \underline{F}_{\check{P}}$ sur le sous-préschéma $\underline{Y}$ de $X_{\check{P}}$, n'est autre que le conoyau du homomorphisme

$$\phi^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\underline{F}_{\check{P}}} : \underline{F}_{\check{P}}(-1,-1) \longrightarrow F_{\check{P}} ,$$

où la notation (-1,-1) s'explique d'elle-même, comme dirait Mike. De même, G_ζ est le conoyau de l'homomorphisme analogue

$$F_{k(\zeta)}(-1,-1) \longrightarrow F_{k(\zeta)}$$

où ζ est un point de $\check{P}$ (et bien entendu on a une interprétation corre pondante lorsque ζ, au lieu d'être un point de $\check{P}$, désigne un point de $\check{P}$ à valeurs dans un S' sur S ??.). (De façon générale, si L est un Module inversible quelque part, ϕ une section, définissant le sous-prés ma $V(\phi)$, alors pour tout Module F, l'image inverse de F sur $V(\phi)$ s'identifie, moyennant l'abus de langage habituel, au conoyau de $\mathrm{id}_F \otimes$ $F \otimes L^{-1} \longrightarrow F$; On dit que ϕ est F-<u>régulier</u> si l'homomorphisme précédent est injectif. Si on choisit un isomorphisme de F et $\underline{O}_X$, - ce qui est possible localement - de sorte que ϕ s'identifie à une section de $\underline{O}_X$, cette terminologie est compatible avec celle déjà introduite par aille

Proposition 5.3. Avec les notations précédentes, soit U l'ensemble de $x \in X_{\check{P}}$, d'image ζ dans $\check{P}$, tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulière en x. ~~Supposons de plus~~ Si F de présentation finie et plat relativement à S, Alors:

a) U est ouvert, et $\underline{G}|U$ est plat relativement à $\check{P}$.

b) Pour tout $s \in \check{P}$, si η désigne le point générique de $\check{P}_s$, U contient $X_{k(\eta)}$.

Démonstration. a) Comme $F_{\check{P}}$ est de présentation finie, et plat par rapport à $\check{P}$, la conclusion résulte de 11.3. (et même de $\underline{E}_{III}$ ... dans le cas S loc noeth).

b) On peut supposer S=Spec(k). Les cycles associés à $F_{k(\eta)}$ sont (en vertu du par.3) les images inverses des cycles Z_i associés à F. Si $f(Z_i)$ est fini, alors en vertu de 2.3. $Z_{i\,k(\eta)} \cap Y = \emptyset$, dans le cas contraire, on vertu de 2.6. par exemple on a également $Z_{i\,k(\eta)} \cap Y \neq Z_{i\,k(\eta)}$ (raisons de dimensions; 2.3. déjà invoqué dans 2.6. est sans doute une meulleure raison), ce qui prouve que ϕ ne s'annule sur aucun des $Z_{i\,k(\eta)}$, et prouve donc b).

Corollaire 5.4. Soit V l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulier. Si F est de présentation finie ~~Alors~~ V est constructible et contient les points génériques des fibres de $\check{P}$ sur S, d'autre part si de plus X est propre sur S et F plat sur S, l'ensemble V est ouvert.

Remarque 5.5. Soit $\zeta \in \check{P}$ au dessus de $s \in S$, et supposons que F_s soit sans cycles associés immergés, alors on voit aussitôt que $\zeta \in V$ (notation de 5.4.) signifie aussi que aucune composante irréductible de supp $F_{k(\zeta)}$ ne se trouve au dessus de H_ζ (et on peut évidemment dans ce critère remplacer $k(\zeta)$ par une extension arbitraire de $k(\zeta)$). Notons que l'hypothèse (S_1) sur F_s qu'on vient de faire satisfaite notamment si on supposer F_s Cohen-Macaulay (à fortiori, si F est CM sur S); de plus, dans ce cas, G_s est CM (car localement il se déduit de $F_{k(s)}$ qui l'est en divisant par un $\phi.F_{k(s)}$, ~~avec~~ où ϕ est $F_{k(s)}$-régulier). Ces mêmes remarques pouvaient (et devaient) d'ailleurs se faire localemen en haut, pour caractériser les points de U (au lieu de ceux de V).

Utilisant maintenant 12.1.1. et 12.1.4. , on obtient:

Théorème 5.6. Supposons F de présentation finie, plat rel. à S. Soit P l'une des propriétés ~~[illegible]~~ (i) à (viii) de 12.1.1. ou ~~[illegible]~~ (dans le cas où on suppose $F=\underline{O}_X$) l'une des ~~[illegible]~~ propriétés (i) à (iv) de 12.1.4. Soit U_P ~~[illegible]~~ l'ensemble des $x \in X_{\check{P}}$ tels que , si ζ ~~[illegible]~~ désigne l'image de x dans $\check{P}$, la propriété P soit satisfaite par G_ζ (resp. ~~à~~ Y_ζ) en le point x, et que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulière en x. Alors U_P est ouvert, et $\underline{G} | U_P$ est plat relativement à S.

En effet, par définition même, on a $U_P \subset U$ (notation de 5.3. a)), et on applique par.12 à $U \to \check{P}$ et $F_{\check{P}}|U$.

Corollaire 5.7. Supposososons F de présentation finie, plat rel à S, et supp F propre sur S (p.ex. X propre sur S). Soit V_P l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que G_ζ (resp. Y_ζ) satisfasse à la propriété P, et que ϕ_ζ soi $F_{k(\zeta)}$-régulière. Sous ces conditions, V_P est ouvert, (et il est d'aill rs constructible en tous cas, i.e. sans hypothèse de platitude ni de prppreté).

Il me semble que du point de vue présentation, on ne peut laisser 5.6. tel quel, avec une simple référence à des conditions énumérées dan un autre fascicule; mais il faudra refaire une liste explicite (i) (ii ..... des propriétés qu'on a en vue. De plus, signaler (dans 5.1. peut-être) que le cas P= géo normal (avec S =Spec(k) pour sur) est dû à Seidenberg.

ce à peu près immédiate de 15.2.2. appliqué à $\underline{Y} \to \check{P}$.

Il faut voir si le fait de mélanger dans un même énoncé des propriétés modulées et non modulables ne les rend pas impigeables pratiquement. Noter aussi que 4.6. et 4.7. est entièrement indépendant des autres développements des nºs 2,3,4 ; à ce titre, ils méritent sans doute d'être mis dans un nº à part, où il n'est pas question des propriét de la section hyperplane générique, mais uniquement de déterminer si l'ensemble E est ouvert. On pourrait donner comme titre ~~de~~ ce nº : "<u>Théorèmes du type ~~xxx~~ Seidenberg pour une section hyperplane variable</u>

Il faut signaler que le cas "géométriquement normal" (~~et~~ bien entendu dans le cas où S=Spec(k)) est en effet dû à Seidenberg. N'ayant pas lu son papier, je ne sais s'il part d'une variété X déjà supposée normale, ou même lisse. Ce dernier cas semble techniquement nettement moins vache, puisqu'il suffit de 4.6. qui ne s'appuie pas sur le délicat 15.2.2. (Si Seidenberg ne se borne pas à ce cas, je me deman comment il a pu faire pour se débrouiller). Si on fait le scindage deux envisagé pour le présent numéro, la première partie devrait pre re le titre: <u>Etude d'une section hyperplane variable</u>: <u>cas des sections hyperplanes</u> "<u>assez générales</u>".

6. Connexion d'une section hyperplane quelconque.

Nous allons ici combiner le critère déjà connu de connexion géométrique de ~~xx~~ la section hyperplane générique (3.3.), avec le th de connexion de Zariski, pour obtenir un résultat de connexion po une section hyperplane quelconque:

X propre

<u>Proposition</u> 6.1. On suppose S=Spec(k), k un corps ~~xxx~~ alg clos, ~~et~~ que pour toute composante irréductible X_i de X, ~~xxxxit~~ $\overline{f(X_i)}$ soit de dimension ≥ 2. ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxhyper Alors p~~

enfin que X ne peut être disconnecté par une partie fermée Z de X tel que dim $\overline{f(Z)} \leq 0$. Sous ces conditions, pour tout $\xi \in \check{P}$, Y_ξ est géométriquement connexe.

Démonstration. Comme ~~xxxf(X~~ aucun des $f(X_i)$ n'est fini, on voi que chacune des composantes irréductibles $\underline{Y}_i$ de $\underline{Y}$ domine $\check{P}$; d'autre part $\underline{Y} \longrightarrow \check{P}$ est propre (car $\underline{Y}$ est propre sur k, l'étant sur X qui l'est sur k). D'autre part, en vertu de (3.3.) la fibre génériqu Y_η de $\underline{Y} \longrightarrow \check{P}$ est géométriquement connexe. Enfin, $\check{P}$ est régulier et à fortiori géom unibranche. Il suffit maintenant d'appliquer 15.6.3. (qui n'est qu'une variante du ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ th. de connexité de Zariski) pour corre que toutes les fibres de $\underline{Y} \longrightarrow \check{P}$ sont géom connexes, cqfd.

En fait, il n'est pas difficile, par une démsnstration de type logue, de généraliser 5.1. dans le même sens que dans 4.4. Si tu ne veux pas te taper l'exercice toi-même, signale au, moins la chose en marque. Y dire aussi que l'on ne fait aucune discrimination dans 5.1. à l'égard des sections hyperplanes qui auraient une dimension excédentaire. Du point de vue plan, il sera peut-être plus clair de bloquer toutes les questions de connexité (incluant 3.3. et 4.4.) dans un même nº .

6. Application à la construction de sections hyperplanes ou de multisections de type précisé, ~~xxxdexmultisectionsx~~

Remords au N°4. Les résultats 4.6. b) et c) sont entièrement contenus dans 4.7. b) et c) ; j'avais cru une telle redite justifiable du point de vue démonstration, celle de 4.7. me semblant mettre en oeuvre des résultats nettement plus délicats (sous forme de 15.2.2.). Or, tant qu'on ne tient qu'à prouver dans 4.7. b) de c) que U est ouvert, (à l'exclusion du fait $\underline{G}$ U plat ~~xxx~~ rel à $\check{P}$), on n'a nul besoin de 15.2.2. , mais la méthode habituelle (utilisée au par.12) par le critère valuatif donne le résultat voulu de façon bien simple. Je suggère donc: a) de vider les parties b) et c) de 4.6. ; b) d'énoncer 4.7. b) et c) avec la seule conclusion U resp. E ouvert, en utilisant le critère valuatif (bien entendu 4.7. a) est vidé de l'énoncé), c) d'ajouter une autre proposition, 4.8., ou un corollaire, disant que sous les conditions de 4.7. $\underline{G}$ U est plat rel. à $\check{P}$ ce qui se démontre à l'aide de 15.2.2.

7. Application à la construction de sections hyperplanes ou de multisections de type précisé.

7.1. Notons que si S=Spec(k), où k est un corps *infini*, alors tout ouvert non vide de $\check{P}$ contient un point rationnel sur k; donc avec les notations de ~~2~~4.1. , si E (défini en termes d'une propriété constructible P) contient le point générique η, il contient ~~xxxxxx~~ un point rationnel sur k, donc il existe une section hyperplane de X (définie sur k) ayant la propriété P. D'autre part, S étant de nouveau quelconque, il est immédiat que pour tout $s \in S$ et tout point ζ_0 de la fibre $\check{P}_s$ rationnel sur k(s), il existe une section ζ de $\check{P}$ sur un voisinage ouvert U de s qui passe par ζ_0. Si alors E est encore ~~xxx~~ défini comme dans 4.1. en termes d'une propriété constructible P, et si on dispose (p ex grâce ~~à 5.3.~~ au N°5) du fait que E est ouvert, alors si $\zeta_0 \in E$, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ la section ζ est une section de E sur ~~S~~ U, du moins si on rapetisse suffisamment U. Donc, on aura construit une section hyperplane Y_ζ de X , au dessus d'un voisinage ouvert U de s, telle que

$Y_\xi(1)$

pour tout $t \in U$, sa fibre en t satisfasse la propriété P. Lorsqu'on ne
dispose pas à priori de ξ_0, ~~xxx~~ mais que k(s) est infini, on pourra comb
ner les deux remarques précédentes pour obtenir une section hyperplane
sur un voisinage ouvert de s, ayant la propriété précédente. ~~Dxxxxx~~ Enf
utilisant ~~4.8.~~ , on a un critère permettant d'affirmer que (X resp. F éta
supposé plat sur S, ce qui permet d'appliquer loc. cit. ~~4.7.~~) Y_ξ (resp. G_ξ) est également
plat sur S. On peut alors, remplaçant X par Y_ξ, itèrer la construction
précédente, ce qui permet ~~taxxxx~~ (par exemple, sous certaines conditions) de construire de proche en proche une
"multisection" S' de X au dessus d'un voisinage ouvert U d'un point donné s,
telle~~x~~ que $S' \to U$ soit fini, plat et à fibres satisfaisant la propriété P.
Lorsque k(s) est fini, on peut être contraint de faire un changement de ba
étale surjectif $S' \to U$ (U voisinage ouvert de s) avant de pouvoir appliqu
les constructions précédentes; en effet, sous les conditions du début de
6.1. , si k est fini, il n'existe pas nécessairement de point rationnel su
k dans l'ouvert non vide U, mais ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~
il existe certainement un point fermé de U, donc un point à valeurs dans
une extension finie k' (nécessairement séparable) de k; lorsque k = k(s),
on peut donc, quitte à faire une extension finie étale convenable S' sur un voisin
ouvert U de s, correspondant à l'extension résiduelle k'/~~kxxxxxx~~
i.e. telle que $S'_s \simeq \mathrm{Spec}(k')$, se ramener à la situation favorable ~~par~~
en l'unique point $s' \in S'$ au dessus de s, par le changement de base $S' \to S$.

Donnons quelques exemples d'énoncés obtenus par ces méthodes. ~~Il y
lieu cependant de faire une remarque préliminaire, pour l'élimination~~ d
ces constructions de l'hypothèse faite dans 4.6. et 4.7. et 4.8. que aucune com
sante irréductible géométrique d'un supp F_s n'est contenue dans une sect
hyperplane (definie sur $\overline{k(s)}$): on peut (et doit) en effet énoncer 4.6.
et 4.7. sous forme légèrement plus générale, en se donnant une partie ouv
te W de $\check{P}$, en remplaçant dans la condition envisagée "hyperplan" pa

Je dois cependant d'abord signaler un remords à 4.2. et 4.3., qui dev~~aient~~ être énoncés sous ~~une~~ forme légèrement plus générale (tout au moins en remarque): on se donne un entier m, et on désigne par E l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que G_ξ resp. Y_ξ satisfasse P sauf ~~au plus~~ sur une partie fermée de dimension $\leqslant m$ (i.e. l'ensemble P-singulier Z est de dimension $\leqslant m$). Alors a) E est une partie constructible de $\check{P}$ et b) dans le cas S=Spec(k), si F (resp. X) satisfait à P sauf ~~au plus~~ sur un ensemble de ~~xx~~dimension $\leqslant$ m+1, alors E contient un ouvert non vide.

<u>Proposition</u> 7.2. Supposons que X soit propre sur S, et F de présentation finie et plat sur S. Soit P l'une des propriétés (i) à (v) de 4.2. et soit m un entier. Soit $s \in S$, et supposons que ~~k(s)xxFxxsatisfassexàlaxpropriétéxP~~ l'ensemble Z_s des points de X_s en lesquels F_s ne satisfasse pas à P soit de dimension $\leqslant$ m+1. Alors, si de plus k(s) est infini, il existe un voisinage U de s dans E, et une section ξ de $\check{P}$ sur U, ayant les propriétés suivantes: pour tout $s \in U$, l'ensemble ~~Z~~ des points de ~~X~~ $Y_{\xi(s)}$ en lesquels $G_{\xi(s)}$ ne satisfait pas à P est de dimension $\leqslant m$, et $\phi_{\xi(s)}$ est $F_{\xi(s)}$-régulière. ~~xlexModulexGxxsur~~ Sous ces conditions, le Module G_ξ sur Y_ξ est plat relativement à U. Enfin, si k(s) n'est pas supposé infini, on peut encore faire la construction précédente, après extension étale du type envisagé dans 7.1.

<u>Proposition</u> 7.3. Essentiellement la même, il n'y a plus de F, on suppose X plat rel à S, on réfère aux propriétés (i) à ~~(xx)~~ (v) de 4.3. au lieu de celles de 4.2. (mais en ayant soin de faire ~~les réserves~~ la réserve "k(s) ~~de~~ car. 0 ou $f : X \to P$ une immersion", et dans le cas (v), que pour tout $s \in S$, et toute comp. irréductible Z de X_s, on ait $\dim(Z) \geq 2$).

~~On notera que nous avons exclus les propriétés (v) et (vi) de 4.3., qui ne sont pas de nature purement locale. Cependant, on récupère le cas (v) en notant qu'on peut s'arranger en vertu de la démonstration de 7.3. que Y_ξ soit plat sur U à fibres séparables, mais alors en~~

(v) ... 12.2.1. ... (vi) et (vi) ... on peut ... 4.3. ... 12.2.1. (v)

~~tu de III 7 la factorisation de Stein de X Y → S se fait par un morphisme fini étale S' → S, ce qui prouve que le nombre de composantes connexes géom de la fibre de $Y_{\bar{s}}$ en (égale au nombre analogue pour S' sur S) est constant au voisinage de s, donc en l'occurence égal à 1. Ce fait mérite d'être signalé au moins en remarque.~~

Proposition 7.4. Soit f: X → S un morphisme propre et plat, soit s ∈ S, posons $n = \dim X_s$ et supposons que la dimension de l'ensemble des points de X_s en lesquels X_s n'est pas séparable sur k(s) soit $< n$ (p.ex. X_s séparable). Alors il existe un voisinage ouvert U de s, et un morphisme étale fini et surjectif S' → U, tel que $X \times_S S'$ admette une section sur S'. Lorsque k(s) est infini, on peut prendre pour S' un sous-préschéma fermé de X|U.

Supposons d'abord k(s) infini. Nous procédons par récurrence sur n, le cas n=0 étant trivial: en effet, dans ce cas il existe un voisinage ouvert U de s tel que X|U lui-même soit étale, fini, et surjectif au dessus de U, comme on voit par des cross-références immédiates. Lorsque n > 0, on applique 7.3. pour la propriété "séparable", ce qui nous permet de remplacer X par une "section hyperplane" Y, ayant les mêmes propriétés, à cela près que n est remplacé par n-1. Lorsque k(s) n'est pas supposé infini, on commence par faire une extension étale de la base, ça marche.

Remarque 7.5. En particulier, si X est projectif et séparable sur S, il admet localement sur S des multisections étales. Mais on notera qu'on peut donner des exemples, avec X propre et lisse (mais non projectif) sur S, où la même conclusion est en défaut. Bien entendu, l'hypothèse de projectivité ne peut -être affaiblie en général en une hypothèse quasi-projective, comme on voit par exemple en prenant X étale non fini sur S ....

Possibilité d'éviter un ensemble [illegible] ...

8. Dimension de l'ensemble des hyperplans exceptionnels.

8.1. Dans les n°s précédents, et notamment 2 et 3, nous avons donné des énoncés affirmant que l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que Y_ξ ait une certaine propriété P est constructible, et contient le point générique η, ~~xxxx~~ ou encore que l'ensemble Z_P des $\xi \in \check{P}$ "exceptionnels pour P" est construc tible, et est rare, i.e. son adhérence est de codimension ≥ 1 ~~n (où r=dim~~ (NB on suppose S=Spec(k)). Dans certains cas on peut préciser cet énonc en donnant une meilleure majoration de cette codimension, ce qui est impor tant ~~pour~~ dans diverses questions. Par exemple, lorsqu'on sait que cette codimen sion est $\geq$ 2, il s'ensuit qu'une droite "assez générale" D de $\check{P}$ ne rencontre pas Z_P, d'où l'existence (si k est infini) de "pinceaux linéaires" de sections hyperplanes ~~(Yx)xxxxx~~ Y_ξ (ξ un point géométr que de D) qui sont toutes la propriété P (cf n° ~~suivant~~ pour des exe ples. – Du point de vue rédaction, comme les résultats du présent n° précisent certains résultats des n°s antérieurs, la question se pose s' y a bien lieu de faire ce ratrappage dans un n° à part, ou de donner la version précisée à mesure. Redactor decidetur.

8.2. Soit Z une partie ~~constructible~~ telle que de X, et considérons l'ensemb des $\xi \in \check{P}$ tels que son image inverse Z dans Y soit de dimension strictement dans Y str. plus grande (i.e. son adhérence de dimension plus grande) que celle de la fibre générique (i.e. soit égale à dim Z si dim $\overline{f(Z)}$ 0, resp. soit non vide si dim $\overline{f(Z)}$ 0). Alors Z est de codimension $\geq$ 2 i.e de dimension r-2. (Cela résulte aussitôt de la théorie de la dimensi d'un morphisme appliqué à $\underline{Y} \to \check{P}$). Bien entendu, cet énoncé peut se en termes de supp F moduler (et est équivalent à l'énoncé modulé), et l'appliquant aux co posantes irréductibles géométriques de T, on trouve aussi que l'ensem Z des ξ tels ~~que~~ qu'il existe une composante irr de

8.2. Soit Z l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que $\dim Y_\xi > \dim X - 1,$ et supposons que pour toute composante irr X_i de X, on ait $\dim f(X_i) >$ alors Z est de codimension 2 dans $\check{P}$. Cela résulte de 2.1. et 2.2. (qui implique que toute comp irr de $\underline{Y}$ domine $\check{P}$) et de la théorie de la dimension pour le morphisme $\underline{Y} \to \check{P}$. A partir de ce résultat on peut donner comme corollaire le cas où on part d'une partie fermée T de X et qu'on regarde la dimension des images inverses T_ξ dans les Y_ξ ($\xi \in \check{P}$), et on peut même prendre pour Z l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que il existe une composante irr. de $T_{k(\xi)}$ dont la trace sur Y_ξ soit de dimension trop grande (NB on suppose touj que pour toute comp irréd T_i de T, on ait $\dim f(T_i) > 0$). Enfin, l'énonc le plus précis dans cette direction, et qui résulte aisément du premier énoncé (pour X irréductible) et de 2.7. , est l'énoncé modulé suivant: F étant cohérent sur X, supposons que pour tout cycle premier assoc T pour F, on ait $\dim f(T) > 0$; alors l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels que ϕ_ξ ne soit pas $F_{k(\xi)}$-régulier est (constructible et) de codimension ≥ 2 (La notation pour ϕ_ξ est celle du nº5). On peut donner ceci comme proposition principale, et énoncer les assertions qui précédaient comme corollaires, la démonstration procédant via l'un des corollaires.

Autre corollaire: Soient T,T' des parties fermées de X, et supposons qu'on ait $T_\zeta \not\subset T'_\zeta$ (ζ étant le point générique de $\check{P}$), i.e. il existe une comp irr T_1 de T telle que $f(T_1)$ est infini et $T_1 \not\subset T'$ (cf 2.4.); alors l'ensemble Z des $\check{P}$ tels que T T' est de codimension 2. Pour le voir, on se ramène au cas T' T (remplaçant T' par T T'), et où T est irréductible (le remplaçant par une composante irréductible convenable). Alors, d'après ce qu'on a vu, si $\check{P}$ n'appartient pas à une certaine partie fermée Z_0 de codimension 2, chacun des fermés T', T

Noter qu'avec les notations précédentes, si $\zeta \in \check{P} - Z$, alors pour tout $y \in Y_\zeta$, on a $\mathrm{coprof}_y F_{k(\zeta)} = \mathrm{coprof}_y G_\zeta$, et par suite: si coprof $F \leq n$, alors pour $\zeta \in \check{P} - Z$, on a coprof $G_\zeta \leq n$; en particulier si F est CM, alors pour $\zeta \in \check{P} - Z$, G_ζ est CM. En fait, si F est (S_k), on sait que G_ζ est (S_{k-1}) pour $\zeta \in \check{P} - Z$ (cf $\mathcal{E}_{IV}$).

8.3. On notera que ~~on n'a pas de résultat analogue pour la propriété (S_k)~~ [illegible] k=2, même si $F = \underline{O}_X$, k=1, X étant géom intègre de dim.2 (ou X étant géométriquement intègre et géométriquement normal de dim.3). Il suffit de partir d'une surface projective ~~normale~~ intègre $X \subset P^r$ sur k algébriquement clos, ayant un point x où X n'est pas Cohen-Macaulay; alors pour tout hyperplan passant par x, la section hyperplane Y_ζ correspondante admet x pour cycle associé immergé (resp. on part d'une variété normale (donc (S_2)), intègre $X \subset P^r$ de dimension 3, ayant un point $x \in X$ en lequel X n'est pas Cohen-Macaulay, alors les Y passant par x ne sont pas CM i.e. ne sont pas (S_2) en x). Dans ces exemples, l'ensemble des ζ "exceptionnels" pour la propriété (S_k) contient l'hyperplan de $\check{P}$ défini par $x \in P$, et est de codimension 1 (et non de codimension ≥ 2). Cf ~~[illegible]~~ 8.5. plus bas pour un résultat général précis dans cette voie.

~~Cependant, si F satisfait à la propriété (S_k), on peut montrer à l'aide de ce qui précède que l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulier, et G_ζ satisfait (S_{k-1}), a un complémentaire qui est de codimension ≥ 2. Cela résulte du critère 5.7.4. via la coprofondeur, du fait que l'ensemble Z_n des points de X où F est de coprofondeur $>n$ est fermé, et que la codimension de $Z_{n\zeta}$ dans $X_\zeta = Y_\zeta$, même si elle peut faire (pour des ζ exceptionnels) des sauts vers le bas, ledit saut ne peut jamais être que d'une unité au plus, pour des raisons de dimension évidentes.~~

Si F est (S_k), est-ce que l'ens. des $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulier et G_ζ soit (S_k) ait un complémentaire de codim ≥ 2,

/irr X_j de X telle que $\operatorname{codim}(T_i,X_j)=k$, et ~~$\dim f(X_j)$~~ $= 0$, (i.e. $\dim f(X_j)$ est quasi-fini et $k>0$, que T n'ait pas de pt isolé x tel que $\dim_x X = k$)

Signalons le résultat dimensionnel suivant:

<u>Proposition</u> 8.4. Soit T une partie fermée de X, et supposons $\operatorname{codim}(T,X) \geq k$. Alors pour tout $\zeta \in \check{P}$, on a $\operatorname{codim}(T_\zeta, Y_\zeta) \geq k-1$. Soit Z l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que $\operatorname{codim}(T_\zeta, Y_\zeta) = k-1$, (i.e. $\operatorname{codim}(T_\zeta, Y_\zeta) < k$) alors Z est une partie constructible rare de $\check{P}$, i.e. $\overline{Z}$ est de codimension ≥ 1 dans $\check{P}$. Pour qu'il soit de ~~k.. (ca. mais que k~~ codimension ≥ 2, il f et s que pour toute composante irréductible T_i de X de codimension égale à k, ~~telle que il existe~~ et telle que $\dim f(T_i) = 0$, il existe une composante (8.4.1.a)

La première assertion résulte aussitôt du lemme suivant, qui est un remords au par.5 :

<u>Lemme</u> 8.4.1. Soient X préschéma loc noeth, <u>L</u> un Module inversible sur X , ϕ une section de <u>L</u>, $Y = V(\phi)$, T une partie fermée de X. (Supposons $\operatorname{codim}(Y,X) \geq k$.) Alors :

a) $\operatorname{Codim}(T \cap Y, Y) \geq k-1$.

b) Pour qu'on ait $\operatorname{codim}(T\ Y,Y) = k-1$ i.e. $\operatorname{codim}(T \cap Y, Y) < k$, il f et s qu'il existe une composante irréductible T_i de T, contenue dans Y, telle que $\operatorname{codim}(T_i,X) = k$, et telle que pour toute composante irréductible X_j de X contenant T_i et telle que $\dim \underline{O}_{X_j,T_i} = \dim \underline{O}_{X,T_i}$ (=k), on ait $X_j \not\subset Y$.

La vérification de ce lemme est immédiate grâce aux généralités de O_{IV} sur la dimension. Sous les conditions de 8.4., on voit (par 8.4.1. b)) quels sont les hyperplans exceptionnels H_ζ Si on excepte l'ensemble Z_0 des $\zeta \in \check{P}$ tels qu'il existe une composante irr R de T ou de X telle (dim f(R) > 0 et) que R_ζ soit de "dimension trop grande" (ensemble qui est de codimension ≥ 2 et par suite ne compte pas les H_ζ exceptionnels sont ceux pour lesquels il existe un T_i avec $\operatorname{codim}(T_i,X) = k$, et dim f(T) = 0,

~~xxxxx~~ $f(T) \subset H$, et tels que pour toute composante irr $X_j \supset T_i$ de X avec codim $(T_i,X_j)=k$, on ait $f(X_j) \not\subset H_\zeta$. Pour un T_i donné, ~~xxxxxxxxxxx~~ avec codim$(T_i,X)=k$, s'il existe un X_j avec codim(T_i,X_j)= et tel que dim $f(X_j)$ =0, alors ~~d'après xxxxxxxxxxx hypothèse xxxx Z_0 xxxxxxxx~~ on aura $f(X_j) = f(T_i) \subset H_\zeta$, et par suite ζ n[e] sera pas exceptionnel relativement à T_i . Si par contre pour tout $X_j \supset T_i$ tel que codim $(T_i,X_j) = k$, on a dim $f(X_j) > 0$, alors pour $\zeta \in \check{P} - Z_0$, ζ sera exceptionnel relativement à T_i si et seulement $f(T_i) \subset H_\zeta$; l'ensemble de ces ζ est (la trace sur $P - Z_0$ d')un hyper plan de $\check{P}$. Cela prouve 8.4. , et établit même le résultat plus préci[s] que l'ensemble exceptionnel est la réunion d'un ensemble de codimensi[on] $\geqslant 2$ et d'une réunion d'hyperplans, déterminés de façon évidente par [la] démonstration précédente. (J'avoue que la rédaction est assez floppy, en ce que j'ai raisonné géométriquement tout le temps sans le dire, en prenant des points dans des corps alg clos. Bien entendu, la condi[ti]on énoncée dans 8.4. est bien géométrique, de sorte qu'on pouvait A_0 supposer k alg clos et raisonner uniquement avec des points rationnels sur k).

~~Corollaire 8.5. Soit F cohérent sur X et satisfaisant la condition (S_k).~~ Supposons que pour tout cycle premier associé R_i de F, on ait dim $f(R_i) >$ ~~Alors l'ensemble des points $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régul[ier] et que G_ζ satisfasse la condition (S_{k-1}) est constructible, et son complémentaire est de codimension $\geqslant 2$.~~ (et la fin de 8.2.

~~Cela résulte aisément de 8.4. et 5.7.4.~~ En fait, on a le ~~Complément~~ / Corollaire 8.6. Supposons que pour tout cycle premier ass. R_i on ait d ~~résultat plus précis:~~ pour que l'ensemble (constructible) des poin[ts] de $\check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $F_{k(\zeta)}$-régulier et G_ζ soit (S_k) ait un comp[lé]mentaire de codimension $\geqslant 2$, il f et s qu'on ait ceci: pour tout entier $n \geqslant 0$, désignant par Z_n l'ensemble des $x \in T$ (T = supp F) tels que coprof$_x$(F ~~et par T le support de X, F,~~ on veut que pour toute composante irr

et si Y_n ... F satisfait (S_k).

Utilisant 8.4. 5.7.4. et la fin de 8.2. on obtient de Z_n, avec codim $(Z_{ni},T) = n+k+1$ et dim $f(Z_{ni}) = 0$, il existe une composante irréductible T_j de T contenant Z_{ni} telle que codim $(Z_{ni},T_j) = n+k+1$ et dim $f(T_j) = 0$.

Lorsque f est quasi-fini donc pour toute partie fermée R de on a dim $f(R)$ = dim R, alors ce critère prend la forme: il n'existe pas de point isolé z d'un des Z_n tel que $\dim_z T$ (= dim F_z) soit égal à $n+k+1$ Lorsque F est équidimensionnel, de dimension d, cette condition est vide si $d \leqslant k$ (et en effet, nous le savions, car dans ce cas l'h (S_k) sur F n'est autre que l'hyp CM), et si $d \geqslant k+1$, elle signifie que l'ensemble $Z_{d-(k+1)}$ des points de T où la coprofondeur de F est $> d-(k+1)$ (lequel ensemble est de codimension $\geqslant d$ en vertu de l'hypothèse (S_k) sur F) i.e. fini est vide, i.e. que l'on a

$$\text{coprof } F \leqslant d-(k+1)$$

i.e. $$\text{vraie prof } F \geqslant k+1$$

(alors qu'à priori on a seulement vraie prof $F \geqslant k$ comme conséquence de la propriété (S_k) et $k \leqslant d$). Lorsqu'on ne suppose plus F ~~Ce cas particulier mérite d'être également explicité en corollaire.~~ équidimensionnel, il reste qu'on peut exprimer ~~la condition voulue de la façon simple suivante:~~

8.6. Pour tout point fermé $x \in \operatorname{supp} F$ tel que dim $F_x \geqslant k+1$, on a prof $F_x \geqslant k+1$

La suffisance se voit aussitôt en faisant $z=x$. La nécessité se voit ~~aussi~~, en notant que pour tout ζ tel que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier et $x \in Y_\zeta$, on aura dim $G_{\zeta x}$ = dim $F_x - 1$, prof $G_{\zeta x}$ = prof $F_x - 1$, donc si x met en défaut la condition plus haut, on aura prof $G_{\zeta x} < k$, mais dim $G_{\zeta x} \geqslant k$, ce qui montre que G_ζ ne satisfait pas à (S_k) en x; or l'ensemble des ζ tels que $x \in Y_\zeta$ est de codimension 1 (NB j'ai implicitement supposé dans le raisonnement que k est alg clos, cas auquel se ramène aussitôt). Le critère général précédent doit être ~~joint à~~ du reste au cas

8.6. Nous étudions maintenant les points y de $\underline{Y}$ qui sont non lisses sur Y_ζ rel à $k(\zeta)$. Nous nous bornons au cas où $f: X \to P$ est <u>non ramifi</u> (pratiquement, ce sera une immersion), et où $X \to S$ est lisse. Nous ne supposons pas nécessairement S le spectre d'un corps. ~~[illegible]~~ Comme f est non ramifié, l'homomorphisme canonique $f^*(\underline{\Omega}^1_{P/S}) \to \underline{\Omega}^1_{X/S}$ est surjectif, et son noyau est un Module loc libre sur X, que nous noterons $\check{\mathcal{V}}_{X/P}$; lorsque f est une immersion, ce n'est autre que le Module <u>conormal</u> $\underline{J}/\underline{J}^2$ défini par l'Idéal $\underline{J}$ de X dans P, et nous l'appelerons en tous cas Module conormal:

$$\text{(a)} \qquad 0 \to \check{\underline{\mathcal{V}}}_{X/P} \to f^*(\underline{\Omega}^1_{P/S}) \to \underline{\Omega}^1_{X/S} \to 0 .$$

Notons que nous avons aussi sur P une suite exacte canonique (qui pouvait figurer à titre d'exemple au par.16 p.ex.)

$$\text{(b)} \qquad 0 \to \underline{\Omega}^1_{P/S}(1) \to \underline{E}_P \to \underline{O}_P(1) \to 0$$

(i.e. $\underline{\Omega}^1_{P/S}$ est can isomorphe au noyau de l'homomorphisme canonique $\underline{E}_P(-1) \to \underline{O}_P$ déduit de $\underline{E}_P \to \underline{O}_P(1)$), d'où en appliquant f^* :

$$\text{(b')} \qquad 0 \to f^*(\underline{\Omega}^1_{P/S})(1) \to \underline{E}_X \to \underline{O}_X(1) \to 0 ,$$

qui donne une description explicite de $f^*(\underline{\Omega}^1_{P/S})$ ~~[illegible]~~ sur X, et permet donc d'identifier $\check{\underline{\mathcal{V}}}_{X/P}(1)$ à un sous-Module loc facteur direct de $\underline{E}_X$, ou encore le ~~[illegible]~~ dual $\underline{\mathcal{V}}_{X/P}(-1)$ à un Module quotient de $\check{\underline{E}}_X$. Par suite, $P(\underline{\mathcal{V}}_{X/P}(-1)) = P(\underline{\mathcal{V}}_{X/P})$ se plonge canoniquement dans $P(\check{\underline{E}}_X) = X \times_S \check{P} = X_{\check{P}}$ comme un sous-fibré projectif sur X, donc comme sous-préschéma fermé. Ce dernier est nécessairement contenu dans $\underline{Y}$ (du fait que $\underline{\Omega}_{X/P}(1)$ est contenu dans le noyau de $\underline{E}_X \to \underline{O}_X(1)$ ...

~~L'ensemble sous-jacent à ce sous-préschéma n'est autre que l'ensemble des points~~ ~~$\check{P}$~~ ~~$y \in \overline{Y}$~~ ~~qui sont "singuliers sur Y_ζ" au sens suivant:~~ des zéros singuliers

~~un point est dit "non singulier" sur Y_ζ si ϕ_ζ est régulier sur $X_{k(\zeta)}$ en y et Y_ζ est lisse sur $k(\zeta)$ en y.~~

L'ensemble sous-jacent à ce préschéma n'est autre que l'ensemble des points de $\underline{Y} = V(\phi)$ qui sont zéros singuliers (par.16) ~~de la~~ section ϕ de $\underline{O}_{X\times\check{P}}(1,1)$ relativement à la base $\check{P}$, i.e. ses points ~~gx~~ à valeurs d un corps k sur $\check{P}$ sont les points x de $Y_k \subset X_k$ tels que ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ ϕ_k s'annule à l'ordre deux au mo en x, i.e. tel que W_k ne soit pas lisse de dimension relative r-1 sur k en x. La caractérisation énoncée des ~~points~~ zéros singuliers co les éléments du sous-préschéma lisse $P(\underline{\Omega}_{X/P})$ de $X_{\check{P}}$ provient aussitô de l'énoncé suivant, qui mérite de figurer en proposition préliminair si S=Spec(k), et si H est un hyperplan de P , alors $Y = X\times_P H$ est ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ lisse sur k de dimension relative d-1 en le point $x \in Y(k)$ (i.e. x est un zéro non singulier, i.e. géom non singulier, de la section ϕ de $\underline{O}_X(1)$ définie par H), si et seulement si H ne contient pas l'image par ϕ' de l'es ce tangent à X en x (rel à k) - ou ~~encore~~ comme on dit~~xxxxx~~ encore (lorsque $f:X \to P$ est une immersion, permettant d'identifier X à un sous-préschéma de P) sss H n'est pas tangent à X en x. Cela résult trivialement du critère jacobien de lissité, ou de la définition du zéro singulier, une fois qu'on a bien précisé le sens de l'énoncé, c'est à dire qu'on a précisé comment un ~~espace tangent~~ sous-espace vectoriel de l'espace tangent à P en un point a (=f(x)) définit une sous-variété linéaire de P (de telle façon que cela a un sens de dire que H ne contient pas ledit sous-espace vectoriel): cela provient bien entendu de la suite exacte (b) ci-dessus, qui permet de ~~identifier~~ définir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-espac vectoriels de l'espace tangent en a, et les sous-variétés linéaires P contenant a. Cette correspondance d'ailleurs revient à associer à une sous-variété linéaire passant par a son espace tangent en a, considéré comme sous-espace ~~tangent~~ de l'espace tangent à P en a. Ce genre de sorites, ensemble avec divers sorites sur les sous-variétés linéaire et les grassmaniennes, devraient être donnés dans un ou deux n^os prélim naires, bien entendu en énonçant tout systématiquement sur une base quelconque.

En fait, il y a mieux, savoir que le <u>sous-préschéma</u> $\underline{Y}^{sing}$ des zéros singuliers de ϕ relativement à $\check{P}$, défini dans par.16, n'est autre que $P(\check{\underline{V}}_{X/P})$, et (comme ce dernier est lisse sur S de dimensic relative $d + (r-d-1) = r-1$ (r étant la dim relative de $\check{P}$ sur S) on est sous les conditions favorables étudiées au par.16 . ~~Pour vérifier cette assertion, on utilise le fait suivant (qui devrait figurer au par. 17 des morphismes lisses), en l'appliquant à $X_{\check{P}}$~~ et $\underline{P}^1(\underline{O}(1,1)$ S : ~~Soit X lisse sur S de dimension relative m, $\underline{M}$ un Module localement libre sur X de rang n, ϕ une section de $\underline{M}$, x $V(\phi)=Z$, supposons que $\dim_x Z_s = n-m$, et (resp. et que $Z_{s\,réd}$ soit lisse sur $\overline{k(s)}$ en $\bar{x}$) alors Z est lisse plat sur S en x (resp. lisse sur S en x). (Dém on peut supposer $M = \underline{O}_X^m$, donc $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$, alors il résulte de la théorie de la dimension et du fait que $\underline{O}_{X_s,x}$ est CM que les $\phi_{i\,s}$ forment une suite $\underline{O}_{X_s}$-régulière en x, donc les ϕ_i sont transversalement $\underline{O}_X$-réguliers rel. à S; si de plus Z~~ Pour le vérifier, notons que par définition, $\underline{Y}^{sing}$ n'est autre que le sous-préschéma de $\underline{Y}$ des zéros de la section $\psi = d\phi|\underline{Y}$ de $\underline{\Omega}^1_{X_{\check{P}}/\check{P}}(1,1)\otimes\underline{O}_Y = \underline{\Omega}^1_{X/S}\otimes\underline{O}_Y(1,$
Nous allons donner une autre interprétation de cette section, dont la conclusion résultera aussitôt. Pour ceci, considérons le diagramme ~~de Modules~~ [illegible] suivant sur $X_{\check{P}}$, ou plus généralement sur un préschéma Z quelconque au dessus d $X_{\check{P}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \underline{\Omega}^1_{X/Y}\otimes\underline{O}_Z(1,0) \arrow[u] & \check{\mathcal{Y}}_{P/S}\otimes\underline{O}_Z(0,-1) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \underline{\Omega}^1_{P/S}\otimes\underline{O}_Z(1,0) \arrow[r] \arrow[u] & E\otimes\underline{O}_Z \arrow[r] \arrow[u] & \underline{O}_Z(1,0) \arrow[r] & 0 \\
 & \check{\underline{\mathcal{J}}}_{X/P}\otimes\underline{O}_Z(1,0) \arrow[u] & \underline{O}_Z(0,-1) \arrow[u] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[ul, dashed, "\beta"] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

où la première colonne est déduite de (a) en tensorisant par $\underline{O}_Z(1,0)$, la ligne est déduite de (b) en tensorisant par $\underline{O}_Z$, et la colonne 2 est déduite de la transposée de la suite analogue ~~xxxxxxx~~ (b$^\vee$) relative à $\check{P}$ (obtenu en remplaçant $\underline{E}$ par $\check{\underline{E}}$) en tensorisant par $\underline{O}_Z$. Par définition même de $\underline{Y}$, Z se trouve au dessus de $\underline{Y}$ si et seulement si le morphisme composé α du diagramme est nul, i.e. si on peut trouver une factorisation $\beta : \underline{O}_Z(0,-1) \to \underline{\Omega}^1_{P/S}\otimes\underline{O}_Z(1,0)$. S'il en est ainsi, on peut considérer son composé avec $\underline{\Omega}^1_{P/S}\otimes\underline{O}_Z(1,0) \to \underline{\Omega}^1_{X/Y}\otimes\underline{O}_Z(1,0)$, qu'on peut aussi interpréter comme une section de $\underline{\Omega}^1_{X/Y}\otimes\underline{O}_Z(1,1)$. Je dis que c'est précisément la section ξ qu'on avait envisagé plus haut (La vérification doit être essentiellement mécanique). Elle est nulle si et seulement si Z est au dessus de $V(\xi)$ (par définition même de $\underline{V}(\xi)$!) , mais cela signifie aussi que β se factorise par $\check{\underline{\mathcal{J}}}_{X/P}\otimes\underline{O}_Z(1,0)$, i.e. que le sous-Module $\underline{O}_Z(0,-1)$ de $E\otimes\underline{O}_Z$ est contenu dans le sous-Module $\check{\underline{\mathcal{J}}}_{X/P}\otimes\underline{O}_Z(1,0)$, ce qui évidemment signifie aussi que Z se trouve au dessus du sous-préschéma $P(\check{\underline{\mathcal{J}}}_{X/P}(1))$ de $P(\check{E}_X)$, achève la démonstration de ce que nous avions annoncé.

Dès avant ce savant exercice de syntaxe (qui m'a couté d'ailleur morphisme de préschémas lisses sur S de dim relative r-1 et r:

passab~~lem~~ment de sueur déjà), on aurait pu remarquer que, ~~Comme~~ de toutes façons du point de vue ensembliste $\underline{Y}^{sing}$ est de ~~xxxxxxxxxxxxxxxxx~~ dimension r-1 ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ si S=Spec(k), alors que $\check{P}$ est de dimension r, donc l'image de $\underline{Y}^{sing}$ dans $\check{P}$ est de codimension ≥ 1, ce qui redonne 2.12. (l'argument bien entendu n'est pas essentiellement distinct de celui utilisé dans 2.12.). On notera que le plus souvent, cet ensemble est effectivement de codimension 1 (cf plus bas). Par suite, on ne pourra trouver en général des "pinceaux linéaires" de sections hyperplanes toutes ~~xxxxxxxxxxxx~~ lisses. Cependant, nous allons voir qu'on pourra s'arranger souvent pour ~~xxxx~~ trouver des pinceaux formés de sections hyperplanes n'ayant aucun point supersingulier, grâce au fait que dans les cas les plus fréquents, l'image de $\underline{Y}^{sup\ sing}$ dans $\check{P}$ sera de codimension 2. Nous allons d'abords résumer les points essentiels de nature différentielle de la situation étudiée ici:

Théorème 8.7. a) Le sous-préschéma $\underline{Y}^{sing}$ (défini au par.16) dans la situation actuelle n'est autre que $P(\underline{\vee}_{X/P})$, considéré comme sous-préschéma de $\underline{Y}$ comme expliqué plus haut.

b) L'ensemble sous-jacent au préschéma $\underline{Y}^{sup\ sing}$ (cf par. 16), ~~x~~ ~~xxxxxxxx~~ n'est autre que l'ensemble des points de ramification de $\underline{Y}^{sing} = P(\underline{\vee}_{X/P}) \longrightarrow \check{P}$, i.e. pour que ce dernier morphisme soit non ramifié en le point y (réf à définition) il f. et s. que y soit géométriquement un point singulier ordinaire pour ϕ_ξ (ξ étant l point de $\check{P}$ image de y).

c) Supposons S=Spec(k), et que $y \in \underline{Y}^{sing} = P(\vee)$ ~~soit rationnel sur k~~; soient et ξ ses projections dans X(k) resp $\check{P}(k)$, et considérons la ~~xxxxxxxx~~ sous-variété linéaire H' de $\check{P}$ "image" de l'application tangente de

L'adhérence de son images dans $\check{P}$, muni de la structure réduite induite, et considérons le morphisme induit $g : \underline{Y}^{sing} \longrightarrow T$ ~~ix~~ (morph me dominant de préschémas ~~irréductibles~~ intègres). Alors les condit (i) à (ii bis) suivantes sont équivalentes:

(i) Le morphisme g est génériquement ~~non ramifié~~ étale (i.e. est ~~non ramifié~~ étale en au moins un point, ou ce qui revient au même, ~~est~~ (étale =) non ramif au point générique de $\underline{Y}^{sing}$).

(i bis) L'extension de corps L/K définie par g est finie et séparable.

(i ter) Le morphisme g est birationnel, i.e. l'extension L/K est l'extension triviale.

(ii) $\underline{Y}^{sing} \neq \underline{Y}^{sup\ sing}$ (ensemblistement, disons).

(ii bis) Il existe un $x \in X(\bar{k})$, et un hyperplan H tangent à $X_{\bar{k}}$ en x qui ne soit pas "osculateur" en x (par quoi on entend précisém que x n'est pas supersingulier pour la section de $\underline{O}_{X_{\bar{k}}}(1)$ qui définit H ...).

Ces conditions impliquent que ($Y^{sup\ sing} \neq \emptyset$ ou) dim $\underline{Y}^{sup\ sing} \leq r-2$, donc qu l'image de $\underline{Y}^{sup\ sing}$ dans $\check{P}$ a une dodimension ≥ 2, et elles impliquent également:

(iii) dim $T = r-1$, i.e. T est de codimension 1 dans $\check{P}$.

Dém. L'équivalence de (i) et (i bis) est triviale, son équi lence avec (ii) est une conséquence triviale de 8.7. b), enfin l'éq valence de (ii) et (ii bis) est pratiquement la définition de $\underline{Y}^{sup\ sing}$. Evidemment (i ter) $\Longrightarrow$ (i), il reste à prouver que (i) $\Longrightarrow$ (i ter). On peut évidemment supposer k alg clos, et on est ramené à prouver (compte tenu de l'hypothèse (m)) qu'il existe un ouvert $U \neq \emptyset$

dans T tel que $\zeta \in U(k)$ ~~X~~ implique qu'il existe exactement un point y d

$\underline{Y}^{sing}(k)$ au dessus de ζ. Cela résultera de 8.7. c) qui implique plus ~~généralement~~ précisément:

Corollaire 8.9. Supposons la condition (i) de 8.8. satisfaite, et soit U l'ouvert de T des points en lesquels T est lisse sur k. Alors $U \neq 0$, et $\underline{Y}^{sing}|U \to U$ est une immersion ouverte, définition $\underline{Y}^{sing}|U$ ne contient pas des point de $\underline{Y}^{sing}$. Si X est propre su k donc $g:\underline{Y}^{sing} \to T$ surjectif, alors $\underline{Y}^{sing}|U \to U$ est un isomorp me, et U est le plus grand ouvert de T ayant cette dernière propriété.

Tout d'abord, comme g est dominant et gén ~~ramifié~~ étale, il est gén. étale, donc on peut trouver un ouvert non vide V de T tel que $\underline{Y}^{sing}|V \to V$ soit étale et surjectif. Si alors $\zeta \in V(k)$ et si y est un point de $\underline{Y}^{sing}(k)$ au dessus de ζ, alors avec les notations de 8.7. c) l'espace H' n'est autre que l'espace tangent à T en ζ, et comme on a noté à cet endroit, cela implique que le point x de X(k) projection de y est déterminé comme le point orthogonal à H', donc es uniquement déterminé, donc comme $\underline{Y}^{sing} \subset X \times \check{P}$, y est uniquement déte miné. Cela prouve déjà que g est birationnel (étant dominant, génériquement ~~non ramifié~~ étale et gén radiciel). D'autre part, le morphisme γ (dont la définition en forme est évidente) qui associe à tout $\zeta \in U(k)$ l'unique point $x = \gamma(\zeta) \in P$ orthogonal à l'espace tangent à U en ζ, coïncide sur V avec le composé $V \to \underline{Y}^{sing}|V \to X$, où la deuxième flèche est la projection; don posant $h = (\gamma, id) : U \to P \times T$, $g_1 = g|g^{-1}(U) : g^{-1}(U) \to U$, le compo

$hg_1 : g^{-1}(U) \longrightarrow P\times T$ n'est autre que l'inclusion canonique, puisqu' en est ainsi de sa restriction à $g^{-1}(V) \simeq V$. Il en résulte que h se factorise à travers l'adhérence schématique $\overline{Y^1}$ de Y^1 dans $P\times T$, donc que l'image inverse de Y^1 (qui est un ouvert de ladite adhérence) par h est un ouvert de U, soit U'. En vertu de $h\,g_1 =$ inclusion, on voit alors aussitôt que g_1 induit un isomorphisme $g^{-1}(U) \simeq U'$, et cela montre bien que $g^{-1}(U) \longrightarrow U$ est une immersion ouverte. Lorsque X est propre sur k i.e. fermé dans P, alors g est propre donc surjectif, donc $g_1 : g^{-1}(U) \longrightarrow U$ est surjectif, donc un isomorphisme. D'ailleurs, si W est un ouvert de T tel que $g^{-1}(W) \longrightarrow W$ soit un isomorphisme, il s'ensuit que W est lisse puisque Y^1 est lisse, donc $W \subset U$. Cela achève la démonstration de 8.9.

~~Remarque~~ Les assertions finales de 8.8, $\underline{Y}^{\text{sup sing}} = \emptyset$ ou dim $\underline{Y}^{\text{sup sing}} = r-2$, et dim $T = r-1$, sont triviales; la première résulte du ~~$\underline{Y}^{\text{sup sing}} \neq \underline{Y}^{\text{si}}$ donc rare dans $\underline{Y}^{\text{sing}}$ puisque celui~~ fait que $\underline{Y}^{\text{sing}}$, de dim r, est irréductible, et du fait que $\underline{Y}^{\text{sing}}$ est défini par l'annulation d'une section D d'un Module inversible; la deuxième du fait que, L étant fini sur K, on a deg tr L/k = deg tr K/k, i.e. dim T = dim $\underline{Y}^{\text{sing}} = r-1$

Remarque 8.10. Comme on a signalé dans 8.9., avec les notations de ce corollaire, on a $g^{-1}(U) \subset \underline{Y}^{\text{sing}} - \underline{Y}^{\text{sup sing}}$; mais on notera que même si X est fermé dans P, cette inclusion n'est pas nécessairement une égalité, en d'autres termes (notant que $g^{-1}(U)$ n'est autre que l'ensemble des points où g est étale, alors que $\underline{Y}^{\text{sing}} - \underline{Y}^{\text{sup sing}}$ est l'ensemble des points où g est non ramifié) il peut y avoir des points y de $\underline{Y}^{\text{sing}}$ en lesquels g est non ramifié, mais non étale (ce qui implique d'ailleurs que g(y) est un point non géom normal et même non géom unibranche de T). En termes géométriques, cela correspond au phénomène suivant: on peut avoir un hyperplan tangent non oscul teur de X en un point $x \in X(k)$, tel qu'il existe un <u>autre point</u> $x' \in X(k)$ en lequel le même hyperplan soit tangent en x. On en fait de exemples évidents avec P de dimension 2, X une courbe non singulière de degré $\geqslant 4$, en caractéristique quelconque. [NB les "tangentes doubles" = X correspondant aux pts doubles de la "courbe duale".

<u>Corollaire</u> 8.11. Supposons k de caractéristique nulle. Alors:

a) L'image de $\underline{Y}^{\text{sup sing}}$ dans $\check{P}$ est de codimension $\geqslant 2$.

b) La condition (iii) de 8.8. équivaut aux autres conditions, i.e la négation des autres conditions, soit $Y^{\text{sing}} = Y^{\text{sup sing}}$, signifie aussi que l'image de $\underline{Y}^{\text{sing}}$ dans $\check{P}$ est de codimension $\geqslant 2$.

Evidemment l'assertion b) implique a), compte tenu de 8.8. Or par la théorie de la dimension, (iii) signifie que L/K est une extension finie, (on pourrait le mettre sous forme (iii bis) dans 8.8.) et en car 0 L est de toutes façons séparable sur K, d'où la condition (i bis) de 8.8.

<u>Remarques</u> 8.12. a) Géométriquement, l'assertion a) signifie essentiellement que pour un pinceau linéaire assez général de sections hyperplanes, tous les membres du pinceau sont lisses ou ont pour seuls points géométriquement des points géométriquement singuliers ordinaires (et en fait, comme on constate aussitôt - et il y aurait lieu d'énoncer a) en conséquence sous une forme un peu plus précise - ont au plus <u>un</u> tel point géométriquement singulier). L'assertion b) signifie essentiellement que lorsque $\underline{Y}^{\text{sing}} = \underline{Y}^{\text{sup sing}}$ (ce qui s'exprime analytiquement par la nullité d'une certaine section D d'un Module inversible $\underline{\omega}_{X/k}^{\otimes 2} \otimes \underline{O}_{Y^1}(1,1)$ sur $\underline{Y}^1$), alors pour un pinceau linéaire assez général de sections hyperplanes, tous les membres de ce pinceau sont lisses. Cette deuxième situation (qu'on soit d'ailleurs en car.0 ou non) doit être considérée comme tout à fait exceptionnel

[illegible] $T = L$, donc $X \subset L^{o}$ [illegible] de L, qui est une droite, donc X est [illegible] d'une droite.

En langage classique, elle s'exprime ~~en disant~~ sauf erreur en disant que X est réglée pour l'immersion projective considérée [– et si ça no chante, nous avons ici tout ce qu'il faut, grâce à 8.5. et ses coroll res, pour expliquer et justitfier une telle terminologie, au cas où ce t'inspirerait de faire le lien avec la taupe]. Par exemple, si $\dim X = 1$, cela implique que X est une droite, car si $x \in X(k)$, donc T contient [illegible]

b) Lorsque la car. est $p > 0$, il faudrait pour bien faire donner des exemples (avec $\dim P = 2$, X une courbe non singulière) où les conditions de 8.6. ne sont pas vérifiées i.e. $\underline{Y}^{\text{sing}} = \underline{Y}^{\text{sup sing}}$, et où néanmoins $\dim T = r-1$, i.e. (des exemples) où L/K est une extension finie inséparable. J'ai la flemme de construire des exemples, mais je ne doute guère qu'il y en ait.

~~Corollaire 8.11.~~ Dans a), faire un appel du pied au ~~xxxxx~~ nº suivant, où on montrera que lorsque le cas exceptionnel "réglé" se produit, alc par une modification triviale de l'immersion projective considérée, on se retrouve dans la situation "générale" de 8.8.

La partie du présent nº de 8.6. à ici devrait sans doute fair un nº à part, de nature différentielle, tandis que le début du nº ave ce qui va suivre serait bloqué dans un nº sur la dimension des exceptionnels. (Je n'utilise que le fait que Y^{sing} est de dim $r-1$).

Proposition 8.13. Nous supposons toujours $f : X \to P$ non ramifié, (et X sans pt isolé), On suppose que X satisfait (R_k) géométrique, et ~~Supposons que X satisfasse la propriété (R_k) géométrique (où k > 0) et si X' est l'ouvert de X des points où X est lisse sur k, le morphisme induit $f' : X' \to P$ satisfasse~~ à la condition $g(\underline{Y}'^{\text{sing}})$ de codimension ≥ 2 dans $\check{P}$ ~~(condition automatiquement vérifiée si k est de car 0 en vertu de 8.11.)~~. Soit Z_k la par de $\check{P}$ ~~xxxxxxxxxxxxx~~ complémentaire de l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tels

~~pour toute composante irréductible X'_i de X' on~~
grâce au fait que X' sing ... de dim r-1, où r = dim P !

que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulière et Y_ζ satisfasse la condition R_k géométrique. Alors:

a) Pour que Z_{k-1} soit de codimension ≥ 2 dans $\check{P}$, il ~~faut~~ s que
X'_i de X' de dim $\leq k$ soit réglée pour f
toute composante irréductible ~~de X soit de codimension $\geq$ k+1 et c'est aussi nécessaire si codim($f(Y'^{sing}_1)$, P) = 1 ("cas non réglé").~~

b) Pour que Z_k soit de codimension ≥ 2 dans $\check{P}$, il ~~faut~~ s que toute composante irréductible ~~de X soit de dimension $\geq$ k+1, et que~~ X'_i de dim $\leq k+1$ de X soit formée de lignes de X et soit réglée pour f
~~l'ensemble singulier T = X - X' n'ait aucun point isolé x avec dim$_x$ X = k+1 ; et c'est aussi nécessaire si chaque X'_i est non réglé~~
i.e. toute composante irréductible X'_i de X' de ...

En effet, pour tout ζ, l'ensemble géométriquement singulier de Y_ζ ~~xxxxxxxxxxx~~ (NB on se borne aux ζ tels que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier, ce qui est inoffensif vu 8.2.) est la réunion de sing(Y'_ζ) et de l'image inverse T_ζ de T dans Y_ζ, donc la codimension de cet ensemble singulier dans Y_ζ est égale à l'inf de codim (sing(Y'_ζ), Y'_ζ) et de codim (T_ζ, Y_ζ). Bornons nous aux ζ tels que sing(Y'_ζ) soit fini ~~X - f($Y'^{sup\ sin}_1$~~ (ce qui est inoffensif, car ~~par hyp~~ cela conduit à se mettre dans le complémentaire d'un ensemble de codimension ≥ 2)), les points singuliers géométriques de Y'_ζ sont alors isolés. La conclusion résulte facilement de là, et de 8.4. ~~A vrai dire, on peut donner un énoncé plus satisfaisant, en disant: il f et suffit que pour toute composante irréd X'_i de X' qui est réglée rel à f, on ait dim X'_i k (resp. dim X'_i k+1), et que l'ensemble singulier ...~~

Combinant 8.13. ~~et~~ 8.5. et 8.6., on trouve à la façon habituelle:

Corollaire 8.14. On suppose $f:X \to P$ non ramifié et X sans pts isolés.

a) Supposons X séparable sur k. Pour que l'ensemble ~~E~~ des $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier et Y_ζ soit séparable ait un complémentaire de codimension ≥ 2, il f et s qu~~il n'existe aucun point géom. singulier~~ isolé de X tel que dim$_x$ X = 1, ~~et que toute~~ ni de composante irréductible X'_i de X' de dim 1 "non réglée" pour f, et que l'on toute composante irréductible X_i de dimension 1 de X ~~soit~~ formée de points lisses de X et soit réglée relativement à f, et que pour tout point fermé x de X tel que $\dim_x X \geqslant 2$, on ait $\mathrm{prof}_x X \geqslant 2$, (conditions automatiquement vérifiées si X est géom normale et toutes ses composantes irréductibles sont de dim $\geqslant 2$).

b) Supposons X géom. normale, ~~pour~~ que l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier et Y_ζ géom normale ait un complémentaire de codimension $\geqslant 2$, il f et s que toute composante irréductible X_i de X de dimension $\leqslant 2$ soit formée de point lisses X et soit réglée rel à f, et que de plus pour tout point fermé x de X tel que $\dim_x X \geqslant 3$, on ait $\mathrm{prof}_x X \geqslant 3$.

Remarque 8.15. Dans 8.6., 8.13. et 8.14. nous avons fait sur X l'hypothèse (S_k) (resp. (R_k), resp. séparable, resp. géom normal) que nous désirions receuillir comme conclusion pour les sections hyperplanes sauf pour un ensemble exceptionnel de codimension $\geqslant 2$. Cela ne restreint pas la généralité (et il n'aurait pas couté plus cher à vrai dire de se dispenser de cette hypothèse préalable), car on voit aussitôt à l'aide des résultats de par. 3.4. et 5.12. que si X ne satisfait pas à l'hypothèse en question, donc (en vertu de par.5) s'il existe un point fermé x en lequel cette hypothèse est en défaut, alors pour tout ζ tel que ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier (condition n'éliminant qu'un ens de codim $\geqslant$ et tel que $x \in Y_\zeta$ (condition qui décrit un ensemble de codimension 1 exactement), Y_ζ ne satisfait pas non plus à ladite hypothèse en x, donc l'ensemble exceptionnel $Z \subset \check{P}$ est de codimension 1 et non 2.
(J'ai peut-être charrié un peu dans le cas (R_k), où il faut encore des conditions (S_1) et d'équidimensionnalité peut-être.....).

~~Proposition 8.16. On suppose f:X P non ramifié~~

Remords. Dans 8.13. et 8.14. , il suffit de supposer que $f:X \to P$ soit non ramifié en les points lisses de X; pour le "il suffit", il suffit même qu'il soit non ramifié sur un ouvert X' de X dont le complémentaire soit de codimension $\geqslant 2+1$.

<u>Proposition</u> 8.16. Supposons $f:X \longrightarrow P$ non ramifié sur un ouvert complémentaire d'un ensemble de codimension $\geqslant 2$, X géom. normal et de profondeur $\geqslant 3$ en ses points fermés, enfin X géom. intègre et propre sur k. Alors l'ensemble des $\zeta \in \check{P}$ tels que ~~$X_{k(\zeta)}$ régulier~~ Y_ζ soit géom. normal et géom intègre de dimension dim X - 1 (est constructible et) a un complémentaire de codimension $\geqslant 2$.

En effet, par 8.14. b) il en est ainsi pour la propriété " Y_ζ est géom normal de dimension dim X - 1 " (la propriété dimensionnelle exprime que ϕ_ζ est $X_{k(\zeta)}$-régulier). Or en vertu de 6.1. tous les Y_ζ sont géom connexes. Or si Y_ζ est géom normal, il est géom intègre sss il est géom connexe, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarques</u> 8.17. a) L'hypothèse de 8.16. implique dim $X \geqslant 3$. Il est possible que, dès que X est géom ~~intègre~~ irré et dim f(X) $\geqslant 3$ (sans hypothèse de normalité ni de non ramification) l'ensemble des ζ tels que Y_ζ soit géom irréd ait un complémentai de codimension $\geqslant 2$. On peut montrer en tous cas qu'il ne contient pas d'hyperplan, cf plus bas.

b) La conclusion de 8.16. est en défaut si on abandonne l'hypothèse $\operatorname{prof}_x X \geqslant 3$ pour x fermé, par exemple elle est en défaut pou une quadrique non singulière X dans P^3 ; ~~dont~~ en effet les hyperplans tangents ~~forment~~ sont ~~tous~~ réductibles (en fait, formés de couples de droites concourrantes), et forment par ailleurs une famille de dimension 2 donc de codimension 1 dans $\check{P}$ (en fait, la duale de la quadrique ~~est~~

*) Supposons cependant X lisse de dim 2, géom. intègre propre / k et f une immersion. Alors il résulte de 6.1. & 8.8. 8.14 que si $Y^{sing} \to \check{P}$ n'est pas géom. fini et inséparable, l'ens des $\xi \in \check{P}$ tel que Y_ξ soit ~~géom~~ séparable sur $k(\xi)$ avec au plus 2 comp. irréd. géom. — un compl. de codim ≥ 2

une quadrique de l'espace dual, relative à la forme duale ...). Dans cas d'une surface non singulière ~~de~~ d'un espace projectif, cette situation doit cependant être considérée comme exceptionnelle, cf nº suivan Nous allons examiner de plus près maintenant le cas des surfaces (le cas des courbes ne se pose évidemment pas du point de vue irréduct: lité des sections hyperplanes ~~!~~).

(NB Je m'aperçois avec effroi que la quadrique n'a pas droit, d l'emploi que j'ai fait du mot "réglé", à être appelée réglée ! Cela d être en désaccord avec nos pères, et il faudra donc inventer un mot pl adéquat pour la notion utilisée ici).

Proposition 8.18. Supposons ~~X géom intègre~~ k alg clos, X ~~intègre et~~ intègre (resp. intègre et normale) de dimension $d \geq 2$ et ~~propre sur k~~, soit T une partie finie fermée de X telle que X-T soit lisse et $f \mid X-T$ soit non ramifié. Pour que l'ensemble des $\xi \in \check{P}$ tel que Y_ξ soit ~~de~~ géom irréd (resp. géom intègre) de dimension ~~1~~ ~~ait~~ un complémentaire de codimension ≥ 2, il f et s que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

a) Pour tout $x \in T$, il existe une section hyperplane Y_ξ ($\xi \in P(k)$ passant par x, de dimension ~~1~~ $d-1$, et qui soit irréductible.

b) $X' =$ X-T est "réglé" (sic) pour f, ou il existe une section hyp plane Y'_ξ ($\xi \in \check{P}(k)$) de X', ~~singulière~~ qui soit de dimension ~~1~~ $d-1$ singulière et irréductible.

~~Soit en effet Z la réunion de $g(\check{Y}^{sing})$, et des hyperplans de P définis par les f(x), x T, et Alors pour $\check{P}$ - Z, Y est lisse de dimension 1, et comme il est connexe par 6.1. , il est géom irréd.~~

~~En vertu de 5.6, l'ensemble U des P tels que Y soit géom~~

Supposons d'abord X géom normale. On sait déjà par 8.14. a) que l'on ~~ex~~ peut trouver un fermé Z' de P de codi~~mension~~mension ≥ 2, tel que $\xi \in P - Z'$ implique que Y_ξ est séparable sur $k(\xi)$ de dim $d-1$; pour un tel ξ, il revient donc au même que Y_ξ soit géom irréd, ou géom intègre, et les deux problèmes (respé et non respé) examinés dans 8.18. sont donc équivalents. D'autre part, en vertu de 5.6. l'ensemble U des $\xi \in \check{P}$ tels que Y_ξ soit géom intègre de dim $d-1$ (l'hypothèse dimensionnelle exprimant que ϕ_ξ est $X_{k(\xi)}$-régulier) est ouvert. Nous allons exhiber un ensemble ouvert non vide évident $P - Z$ contenu dans U, en prenant pour Z la réunion de $g(\underline{Y}'^{sing})$ et des hyperplans $\check{H}_x$ de $\check{P}$ définis par les $f(x)$, $x \in T$. ~~Pour~~ Pour $\xi \in \check{P} - Z$, Y_ξ est lisse de dimension $d-1$, et comme il est géom connexe par 6.1. , il est géom intègre. Il faut donc exprimer que toute ~~xxxxxx~~ composante irréductible de codimension 1 de Z ~~xxxx~~rencontre l'ouvert U. Or ces composantes irréductibles sont les $\check{H}_x$ (répétés éventuellement, peu importe), et d'autre part $g(\underline{Y}'^{sing})$ lorsque ce dernier est bien de codim 1, i.e. X' "non réglée" pour f, (NB on utilise l'irréductibilité de $\underline{Y}'^{sing}$). D'ailleurs, pour que ce dernier ensemble rencontre l'ouvert U, il f et s que $g(\underline{Y}'^{sing})$ (qui en contient un ouvert dense) rencontre U, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx(k)xxxxxxxxxxx~~ Cela prouve 8.18. dans ce cas. Lorsqu'on ne suppose pas X normal, on applique le résultat précédent au normalisé de X; le raisonnement est immédiat et je ne le détaille pas ici. NB dans le cas respé, 8.18. est contenu dans 8.16. plus précis sauf pour $d=2$. C'est pour le cas non respé qu'il peut être utile de ne pas exiger $d=2$, mais seulement $d \geq 2$

Il reste à expliciter les conditions a) et b) de 8.18. Cela conduit à examiner de façon générale la situation suivante: On suppose X géom irréd, ~~intègre~~ sur k ~~alg clos~~, on se donne une sous-variété linéaire L de

$\check{P}$ (correspondant à la question d'étudier les sections hypérplanes de X passant par un point donné x, ou tangent à X en un point ~~simple~~ qcque donné), formé donc des hyperplans contenant une sous-variété linéaire L^o de P (resp. un point, ou l'image d'un espace tangent de X en un point lisse dans les deux cas envisagés), et on se pose la question de savoir si pour le point générique ζ de L (donc pour tous les points d'un ouvert non vide de L), Y_ζ est ~~gécmxxintègrexxsaxdaxmsixx~~ géom irréd., de dim dim X -1. C'est là une variante de Bertini, qui devrait figurer dans le nº3 et se traite par exactement la même méthode ou, si on veut, s'y ramène. La question dimensionnelle s'exprime simplement par $f(X)\not\subset L^o$, ~~Ilxyxxxdsaxxxxx~~ i.e. $X' =$ ~~Xsax~~ $f^{-1}(P - L^o)$ est un ouvert dense de X, ~~stxlaxquestiox~~ Soit Q l'espace projectif des hypérplans passant par L^o (NB si L^o est défini par un sous-espace vectoriel F^o de E, on a $Q = P(F^o)$) et considérons le morphisme canonique (déduit de ~~ExxxE/EX~~ $F^o \to E$, cf Chap II)

$$u : P - L^o \longrightarrow Q,$$

et considérons

$$g = u f' : \quad f^{-1}(P - L^o) = X' \longrightarrow Q,$$

alors ~~laxfamillexdesxxxXixxxxtestxaxtr~~ $L \simeq \check{Q}$, et la famille des X'_ζ ($\zeta \in L$) n'est autre que la famille des "sections hyperplanes" relatif à ce morphisme g. D'autre part, on voit aussitôt que pour tout $\zeta \in L$ "général" X'_ζ est dense dans X_ζ, donc X'_ζ est géom irréd si X l'est. Ceci posé, le théorème de Bertini-Zariski nous montre que nous avons la conclusion voulue ~~dix~~ d'irréductibilité pourvu que $\dim g(X') \geqslant 2$. (A vrai dire, tant qu'à faire on pourrait signaler une réciproque dans 3.1., savoir : ~~Yxxestxgé~~ si X est géom irréd, Y est géom irréd sss ou bien $\dim f(X) \neq 2$, ou bien $\dim f(X)=1$, et f(X) est contenu dans une droite D (définie sur $\bar{k}$) et la fibre générique de $X \to D$ est géom.); cela permet également dans la version présente avec L. d'avoir une condition néc et suffisante d'irréductibilité géom. de Y_ξ, ξ gén. dans L.

Du point de vue cunutesque, ~~ii~~ et en termes de théorie des corps, il y a lieu d'exprimer la condition ~~(suffisante)~~ en termes de degré de transcendance de la façon suivante: on choisit un "hyperplan à l'infini" ne contenant ni L^o ni X, et on se place dans son complémentaire i.e. sur le schéma affine type essentiellement. On choisit une base de l'espace des formes linéaires nulles sur L^o, ~~xxxxxx xxxxxxxxxxx~~ soit $T_1,\ldots,T_p$ ($p = \operatorname{codim}(L^o,P)$), et on considère leurs images inverses $t_1,\ldots,t_p$ dans le corps des fractions K de X (X supposé intègre). Un au moins des t_i, mettons t_1, est $\neq 0$, considérons alors $a_1 = t_2/t_1, \ldots, a_{p-1} = t_p/t_1$. Alors $\dim g(X')$ n'est autre que le degré de transcendance de $k(a_1,\ldots,a_{p-1}) \subset K$ sur k. Donc si ce degré de transcendance est $\geqslant 2$, O.K. ~~De même xxxxx~~ S'il est 1, alors il faut exiger que sur $\bar{k}$, $f(X)$ soit contenu dans une sous-variété linéaire de P contenant L^o et de dimension une de plus, et que la fibre générique de $g : X' \to \overline{g(X')}$ soit géom. irréd.

Supposons que L^o soit de dimension q, alors les fibres de $u : P - L^o \to Q$ sont de dimension $q+1$, donc celles de g sont de dim $\leq q+1$, et par suite on a

$$\dim g(X') \geqslant \dim f(X) - (q+1) ,$$

donc la condition dimensionnelle sur $g(X')$ est vérifiée pourvu que

$$\dim f(X) \geqslant q+3 .$$

Lorsque $q=0$, on trouve le fait signalé dans 8.17. a). ~~xxxxxxxxxxx~~

Revenant aux conditions de 8.18. on voit que la condition a) relative à un $x \in T$ est satisfaite pourvu que X ne soit pas "conique en x relativement à $\mathcal{L}$", dans un sens évident.

A voir si ces derniers développements Bertiniesques ne viendraient pas mieux au nº suivant du changement d'immersion projective.

9. Changement d'immersion projective.

9.1. Pour tout entier $n > 0$, soit $P(n) = P(\underline{Sym}^n(E))$, on a une immersion évidente $u_n : P \to P(n)$, puisque $\underline{O}_P(n)$ est engendré par ses sections au dessus de tout ouvert affine de S et que $p_*(\underline{O}_P(n))$ $\underline{Sym}^n(\underline{E})$, où $p:P \to S$ est la projection. Soit $f:X \to P$ est un morphisme non ramifié (resp. une immersion), il en est de même de $u_n f : X \to P(n)$. Il y a parfois avantage, dans l'étude de X, de ~~xx~~ remplacer f par $u_n f$: pour éviter un comportement trop particulier et parfois ~~général~~ gênan de f à certains égards. Un exemple d'une telle particularité est cell ~~xx~~ signalée (sic) dans 8.12. b), ~~lexmarp~~ où $Y^{sing} \to \check{Y}$ a une image de dimension r-1 mais ~~estxxxxxmorphismexinsépx~~ donne lieu à une extension de corps inséparable. Un autre cas est celui qui se présente dans le c d'une quadrique dans P^3 ~~de dimension impaire dans 2m lorsque r=2m+1,~~ à savoir qu toutes les sections hyperplanes singulières sont géométriquement réductibles (alors que X est cependant géométriquement irréductible).

Proposition 9.2. On suppose S=Spec(k), X lisse sur k, et $f:X \to P$ non ramifié. Soit $n \geq 2$, et considérons $f_n = u_n f$. Alors $f_n : X \to P(n)$ satisfait aux condition équivalentes de 8.8. , en particulier pour $\xi \in \check{P}(n)$ dans le complémentaire d'un ensemble de codimension ≥ 2, la section hyperplane correspondante Y_ξ est lisse ~~xxx~~ ou n'admet qu'un nombre fini de points non lisses, ~~plusxxxxseulxpointxnonxlissex~~ lesquels sont géométriquement singuliers ordinaires~~etxxxationnelsxsurxk(xx)x~~. Si f est une immersion, il y a au plus un tel point singulier, et il est rationnel sur $k(\xi)$.

NB Il fallait énoncer 8.8. de façon à ~~xxxxxx~~ ne pas exclure le cas où f ne serait pas une immersion. La vérification est essentiellement triviale sur la condition (ii bis) de 8.8. -Il faudrait sans doute expliquer dans 9.1. que les sections hyperplanes de X relativement à f_n ne sont autres que les"sections"de X par des hypersurfaces de degré n au lieu de ~~xxxxx~~ hyperplans.

Proposition 9.3. ~~xx~~ Supposons (X géom irréd et dim $f(X) \geq 2$, ~~xx~~ soit $x \in X(k)$, soit $n \geq 2$) ~~xx~~

~~xxxx~~ a) ~~Alors pour $n \geq 2$~~, considérons la famille (des sections hyperplanes de X relativement à $f_n = u_n f$ qui passent par x, son élément générique ~~est~~ définit une $Y^{(n)}_{\zeta}$ qui est géométriquement ~~intègre~~ irréd.

b) ~~Sixf(X)xn'estxpasxcontenuxdansxunxplanxdéfinixsurxkxxxxxxx2x~~ ~~xxxxxxxxx2x~~ Soit L une sous-variété linéaire (linéaire) de P passant par f(x) et ne contenant pas f(X). ~~Alors pour $n \geq 2$~~, considérons la famille (des sections hyperplanes de X relativement à ~~xxxxxx~~ f_n ~~xxxxx~~, définis par des hyperplans de P(n) ~~xxxxxxxxx~~ "tangents à L en x" (i.e. définis par des n-formes sur P qui (sur L) s'annulent à l'ordre 2 au moins en x), son membre générique ~~définit~~ est une $Y^{(n)}_{\zeta}$ géométriquement irréductible.

c) Supposons X lisse en x, ~~xxxxxxxx~~ et ~~soit~~ $n \geq 3$, ou f(X) pas contenu dans un plan défini sur K. ~~xxxxx~~ Considérons la famille des sections hyperplanes ~~génériques~~ singulières $Y^{(n)}_{\zeta}$ de X relativement à f_n qui sont "tangentes à X en x", Alors le membre générique de ladite définit une $Y^{(n)}_{\zeta}$ géométriquement irréductible.

La démonstration est essentiellement triviale en termes des critères de la fin du nº précédent. Prenant un modèle affine de P contenant f(x), on est ramené dans a) à trouver ~~xxx~~ trois polynômes en les coordonnées $T_1, \dots, T_r$, de degré ≤ 2, soient P,Q,R, tels que $Q(t)/P(t)$ et $R(t)/P(t)$ soient alg indép sur k dans K (où K est le corps des fonctions de X, et $t = (t_1, \dots, t_r)$ est le système d'éléments de K défini par les T_i); dans b), on exige de plus que P,Q,R s'annulent à l'ordre 2 au moins sur L, qu'on peut d'ailleurs supposer défini par des équations $T_1, \dots T_s = 0$; enfin dans c) c'est le même pb, mais L étant l'image de l'espace tangent à X en x, et on se permet (éventuellement de prendre P,Q,R ~~xxxxxxxx~~ de degré 3, i.e. un peu plus de marge.

L'hypothèse dim $f(X) \geq 2$ signifie que le degré de transcendance de $k(t_1,\ldots,t_r)$ sur k est ≥ 2, i.e. on peut trouver t_1, t_2 disons alg in[illegible] Dans a) on prendra alors $P = T_1$, $Q = T_1^2$, $R = T_1 T_2$, Dans b), on fait pareil, ~~[illegible]~~ en notant qu'on peut c[illegible] dessus choisir t_1 provenant bien de T_1 nul sur L, grâce au fait $f(X) \not\subset$ (qui implique qu'il existe un indice i entre 1 et s tel que t_s non nul, donc t_s non sonstante (car t_s s'annule en x) donc t_s non alg su[illegible] (NB on peut supposer k alg clos). Le cas c) résulte de b), ~~avec n=~~ ~~même au lieu de n=3,~~ sauf dans le cas où ~~Xx~~ f(X) est contenu dans l'image par f de l'espace tangent à X en x, ~~ce qui exige d'ailleurs p~~ ~~des raisons de dim que l'application tangente en x est injective i.e.~~ ~~f non ramifié en x,~~ ~~[illegible]~~ ~~de sorte que f(X) est contenu dans une sous-variété linéaire de P de même dimension que X~~. [Lorsque dim X= ce cas est effectivement exceptionnel (la trace d'une quadrique tangen à un plan sur ce plan est en général formé de deux droites concourrantes, donc n'est pas irréductible)]. Mais pour traiter ce cas, ~~sous~~ la forme P,Q,R explicitée plus haut, on peut remplacer évidmmment X par L lui-même, où la solution est triviale (si dim L = 2 prendre $P=T_r^2$, $Q=T_r^3$, $R = T_r^2 T_{r-1}$, en notant que $Q/P = T_r$ et $R/P = T_{r-1}$ sont des formes linéaires lin ind sur L, donc alg ind). ~~On pourrait signaler en remarque que dans c), on peut même prendre n=2 sauf si f(X) est contenu dans un plan .~~

Conjuguant avec 8.18 on trouve un

Corollaire 9.4. ~~[illegible]~~

Enfin, il faut encore conjuguer ce dernier avec 9.2. pour trouver un théorème récapitulatif du "cas excellent":

~~Théorème~~ 9.5. (Lorsque X est lisse ~~et~~ propre (et géom intègre) sur k, et $f: X \to P$ non ramifié, X de dimension ≥ 2), en signalant le résultat sur [illegible]. quand $X \to P$ une immersion (unicité des pt singuliers de Y/f).

10. Pinceaux de sections hyperplanes, et fibrations de variétés éclaté

10.1. Soit Z l'ensemble P-exceptionnel dans $\check{P}$ relativement à une certaine propriété constructible P, de sorte que Z est une partie constru tible de $\check{P}$. Supposons S=Spec(k), On sait (cf n° ~~suivant~~, où nous faisans un ratrappage de choses qui auraient sans doute dû venir dans les n°s antérieurs) que pour que l'on ait codim$(Z,\check{P}) \geqslant 2$, il f et s que "toute droite assez générale" L dans $\check{P}$ ne rencontre pas Z, ou encore $\overline{Z}$, – et il suff qu'il existe une droite L dans $\check{P}$ ne rencontrant pas k. Lorsque k est infini, il f donc et s qu'il existe une doite L dans $\check{P}$ ne rencon trant pas $\overline{Z}$. On appelle "pinceau linéaire de sections hyperplanes de X" défini par la droite L de $\check{P}$, le L-préschéma $\underline{Y}_L$ (définition valable pour un S quelconque Ainsi, les réflexions précédentes, jointes aux résultats des n°s 8 et 9 nous donnent des critères d'existence de tels pinceaux, ayant des fibre $\underline{Y}_\xi$ ($\xi \in L$) satisfaisant toutes la propriété P, tout d'abord dans le cas où S est un corps de base infini. Compte tenu de 8.2., lorsque pour tout cycle premier associé à X, on a dim $f(E) > 0$, on peut (en prenant la propriété P' = P + condition de régularité pour ϕ_ξ). exiger que le pinceau $\underline{Y}_L$ soit plat sur L. Dans le cas où S est quelconque, on peut encore souvent, par le procédé de 7.1. construire un tel pinceau au dessus d'un voisinage ouvert d'un point donné s de S, pourvu que k(s) soit infini et qu'on sache que Z est fer (ce qui sera assuré dans divers cas par les résultats du par.5 et l'hypothèse de propreté pour $X \to S$).

Pour bien faire, il conviendrait, après des explications géné rales de cette eau, de donner deux énoncés récapitulatifs où on applique effectivement les résultats précédents pour un certain nombr de propriétés de cette nature (y compris bien sur des propriétés modulé

Comme minimum dans ce sens, il faut donner ici la reformulation de 9.5. en termes de pinceaux linéaires – fait constamment utilisé dans les applications géométriques.

10.2. Par polarité, une droite $\underline{L}$ de $\check{P}$ correspond à une sous-variété linéaire L^{o} de codimension 2 dans P (S quelconque). Posons

$$T = X x_P L^{o}$$

Une autre façon de décrire T est la suivante: L est défini par un quotient loc libre de rang 2 de $\check{\underline{E}}$, ou ce qui revient au même, par un sous-Module localement facteur direct $\underline{F}$ de $\underline{E}$, partout de rang 2; Considérons l'homomorphisme composé

$$\underline{F}_X \longrightarrow \underline{E}_X \longrightarrow \underline{O}_X(1) \quad ,$$

alors T n'est autre que le schéma des zéros de cet homomorphisme compo sé, où ce qui revient au même, est défini par l'Idéal J image de l'homomo phisme correspondant (obtenu en tordant par $\underline{O}_X(-1)$):

$$\underline{F}_X(-1) \longrightarrow \underline{O}_X \quad .$$

~~Supposons Pour~~ Supposons que cet homomorphisme soit <u>régulier</u>, ce qui signifie que si on écrit localement une base tot. ordonnée de $\underline{F}_X(-1)$, ~~leurs~~ images dans $\underline{O}_X$ forment une suite $\underline{O}_X$-régulière, condition qui ne dépend pas de la base choisie et peut s'énoncer intrinsèquement aussi en disant que $\underline{F}_X(-1) \otimes \underline{O}_X/J \rightarrow \underline{J}/\underline{J}^2$ est un isomorphisme, et $V(\underline{J})=T \longrightarrow X$ est une immersion régulière (NB il ~~xxxxx~~ faudrait quelque part dégager la situation générale avec un hom $\underline{G} \rightarrow \underline{O}_X$, $\underline{G}$ localement libre sur préschéma X, par exemple dans le par. des immersions régulières). Alors on a la

~~Proposition~~ <u>Théorème</u> 10.2. Sous l'hypothèse précédente, le pinceau linéaire $\underline{Y}_L$ muni de la projection canonique $\underline{Y}_L \longrightarrow X$ est X-isomorphe de façon unique au préschéma éclaté de X au moyen de T.

55

Pour comprendre la signification de ce théorème, il conviendrait de noter dès le début du nº que si S=Spec(k), alors pour une droite L "assez générale" dans $\check{P}$, la condition de régularité est vérifiée (notamment pour S.?) (cf rattrappages signalés au nº ~~suivant~~). Par suite, dans les constru tions de "bons" pinceaux linéaires indiquées au début du nº, on pouvai imposer que les pinceaux envisagés ~~étaient~~ satisfaisaient ladite condit on (ce qui est une condition de même type mais, distincte de celle qui consiste à exiger que pour tout $\zeta \in L$, ϕ_ζ soit $X_{k(\zeta)}$-régulier). Il fallait incl re la condition en question dans les énoncés récapitulatifs préconisés. ~~D'autre part, on peut noter~~ D'autre part, pratiquement 10.2. est utilisé surtout dans la situation 9.5. , ce qui rend désirable de n'énoncer la réformulation de 9.5. en termes de pinceaux qu'après 10.2. , pour pouvoir inclure dans l'énoncé en question également l'is morphisme du pinceau avec un éclaté (i.e. donner une description de la situation permettant une référence commode). On obtient ainsi un moyen, pour tout schéma projectif lisse (géom ~~xxxxxxx~~ conn X de dim≥2) sur un corps infini k, de trou ver un sous-schéma fermé lisse non vide ~~partout~~ de codimension 2 en chacun de ses points ~~(ce qui n'exclut pas qu'il soit vide) ce qui implique~~ ~~peut être~~ ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ tel que le schéma éclaté admette une fibration sur P^1 , dont toutes les fibres (sont géom intègres, et dont toutes les fibres) sont lisses sont au plus un nombre fini, ces dernières ayant au plus un point ~~xxxxxxxxx~~ géom. singulier, et un tel point étant rationnel sur k et géom. singulier ordinaire . Cela explique l'importance de l'étude approfondie (tout juste ~~à peine~~ abordée à l'heur actuelle) de telles fibrations à fibres singulières, pour réduire dans une certaine mesure l'étude des variétés projectives lisses de dim d à celle des(familles à un paramètre de) variétés projectives de dim d-1 pouvant avoir des singularités ordinaires.

L'énoncé 10.2. est une conséquence à peu près immédiate du suivant, qui est tout à fait indépendant d'histoires de sections hyperplanes, et serait sans doute mieux à sa place dans ~~la~~ un nº en rabiot aux "immersions régulières".

Proposition 10.3. Soient X un préschéma, ~~E~~ $\underline{G}$ un Module quasi-cohére[nt] sur X, et $u: \underline{G} \to \underline{O}_X$ un homomorphisme, $\underline{J} = u(\underline{G})$, $T=V(\underline{J})$. Soit $\tilde{X}$ déduit de X par éclatement de T. Considérons d'autre part $P = P(\underline{G})$, l'homomorphisme canonique $\underline{G}_P \to \underline{O}_P(1)$ et son noyau $\underline{H}$, (de sorte que nous avons la suite exacte $0 \to \underline{H} \to \underline{G}_P \to \underline{O}_P(1) \to 0$), l'homomorphisme $u_P : \underline{G}_P \to \underline{O}_P$, et l'Idéal qu coh $\underline{K} = u_P(\underline{H}) \subset \underline{O}_P$. Alors $\tilde{X}$ est canoniquement isomorphe à un sous-préschéma fermé de $V(\underline{K})$. Lorsque G est localement libre et u est "régulier", alors l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de $\tilde{X}$ avec $V(\underline{K})$ lui-même de plus dans ce cas $\underline{H}$ est localement libre sur P et ~~xxx~~ $\underline{H} \to \underline{O}_P$ (dont le préschéma des zéros est $\tilde{X}$) est également régulier.

Le premier énoncé est à peu près trivial. Le deuxième est un exercice qui ne peut offrir de difficulté (je ne l'ai pas fait en détail, pensant que tu t'en tireras aussi bien que moi).

Lorsque dans 10.2. S = Spec k et X est de ~~les fibres de X/S sont de~~ dimension $\leqslant 1$, alors l'hypothèse de ~~Sa~~régularité faite équivaut à $T = \emptyset$, de sorte que $Y_{\underline{L}} \to X$ est un isomorphisme. On trouve ainsi, en conjuguant avec 9.2. :

Corollaire 10.4. (à 10.2.) Soit X une courbe lisse géom connexe dans ~~dimensionxxx~~ l'espace projectif P sur un corps infini k, et soit n
Alors il existe un pinceau linéaire de n-formes sur P, définissant un morphisme $X \to P^1$ ayant les propriétés suivantes: ce morphisme es[t]

génériquement étale de degré d, et pour tout point géométrique s de P^1, X_s est étale sur le corps alg clos $k' = \overline{k(s)}$, ou est k'-isomorphe à la somme de $d-2$ schémas $\mathrm{Spec}(k')$ et du schéma $I_{k'} = \mathrm{Spec}\, k'[t]/(t^2)$.

En langage de Papa, au dessus de s il y a au plus un point de ramification, et la ramification en ce point est "quadratique".

11. Grassmaniennes. ~~Rattrapages~~

Comme nous avions couramment à utiliser des sous-variétés linéaires de P, pas seulement de dimension relative 0 ou $r-1$, il est clair qu'on aura besoin de quelques notions sur les grassmaniennes et de quelques sorites de nature "géométrie élémentaire" sur les constructions concernant les variétés linéaires, qui devraient venir tout au début du par. De plus, on aura en pratique à prendre parfois des sections linéaires quelconques, pas seulement des sections hyperplanes, et il y a lieu de revoir dans cet esprit élargi tous les nºs antérieurs.

Soit $\underline{E}$ un Module qu coh sur le préschéma S et n un entier > 0. Considérons le foncteur $(Sch)_{/S}^{o} \longrightarrow (Ens)$ défini par

$$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})(S') = \text{ensemble des Modules quotients loc libres de rang } n \text{ de } \underline{E}_{S'} .$$

Ce foncteur est représentable, et le préschéma sur S qui le représente sera donc noté également $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$. Pour prouver la représentabilité, considérer l'homomorphisme de foncteurs naturel

$$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}_1(\bigwedge^n \underline{E}) = \underline{P}(\bigwedge^n \underline{E}) ,$$

défini en associant à tout quotient loc libre de rang n $\underline{G}$ de $\underline{E}_{S'}$, le Module loc libre de rang 1 $\bigwedge^n \underline{G}$, considéré comme un quotient de $\bigwedge^n \underline{E}_{S'}$. On prouve comme dans Séminaire Cartan que ce morphisme est "représentable par immersion fermées", de sorte que $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$

apparait comme un sous-préschéma fermé de $P(\bigwedge^{\sim}\underline{E})$; en particulier, il est séparé sur S et quasi-compact sur S, et si $\underline{E}$ est de type fini, il est projectif sur S. Si $\underline{E}$ est de présentation finie, alors il en est de même de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$: en effet, ~~localement sur S~~ on peut supposer S affine, S=Spec(A), alors $\underline{E}$ provient d'un module de type fi sur un sous-anneau de type fini de A, - or la formation de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ est évidemment compatible avec la changement de base sur S.

Lorsque $\underline{E}$ est localement libre, ~~de type fini~~ alors $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ est lisse sur S (à fibres géom. connexes). Cela provient du fait plus précis: si $\underline{E}$ est libre, de rang r, alors $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ peut être recouvert par $\binom{r}{n}$ ouverts S-isomorphes chacun à l'espace affine type de dimension relative n(r-n) sur S. Cette décomposition correspond au choix grâce à la ba de $\underline{E}$ de $\binom{r}{n}$ décompositions de $\underline{E}$ en suites exactes

$$(s) \qquad 0 \to \underline{E}' \to \underline{E} \to \underline{E}'' \to 0 \ ,$$

avec $\underline{E}'$ loc libre de rang n. Une telle suite exacte permet de définir un sous-foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_n(s)$ de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$, en se bornant aux quotients $\underline{G}$ loc libres de rang n de $\underline{E}_{S'}$ tels que l'homomorpl sme composé $\underline{E}'_{S'} \to \underline{E}_{S'} \to \underline{G}$ soit surjectif (donc bijectif). Or l'inclusion $\underline{\mathrm{Grass}}_n(s) \to \underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ est représentable par immersions ouvertes, et d'autre part $\underline{\mathrm{Grass}}_n(s)$ est canoniquement isomorphe au fibré vectoriel $V(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\underline{E}',\underline{E}''))$.

Comme conséquence par exemple de cette structure particulière, on peut signaler que si $s \in S$, alors ($\underline{E}$ étant loc libre de rang fini) tout point de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ à valeurs dans k(s) se relève en une sectior au dessus d'un voisinage de s. D'autre part, si S=Spec(k), k un corps infini, alors tout ouvert non vide de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ contient un point rationnel sur k.

Un point de $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$ à valeurs dans S, i.e. un Module quotien loc libre de rang n $\underline{G}$ de $\underline{E}$, définit canoniquement un sous-présché de $P(\underline{E})$, savoir $P(\underline{G})$. Un tel sous-préschéma (mais sans imposer le rang de $\underline{G}$) est appelé sous-vari linéaire de $P(\underline{E})$ (relativement à S si une confusion e st possible). C'est donc un fibré projectif, de dimension relative n-1 si $n \geqslant 1$, (et vide si n=0). On vérifie immédiatement que la section de $\underline{\mathrm{Grass}}$ $(\underline{E})$ i.e. G est connu quand on connait la sous-variété linéaire correspondante de $P(\underline{E})$. De cette façon, la grassmanienne peut s'interpréter comme représentant le foncteur "sous-variétés linéaire de dimension relative n-1 ~~xxxxxxxxxxxxxxx~~ de $P_{S'}$ " pour S' variable ($n \geqslant 1$). Il est d'ailleurs possible de donner une caractérisation intrinsèque de ce dernier foncteur i.e. de la notion de sous-variété linéaire de dimension relative m : ce sont les sous-préschémas fermé de P, lisses sur S et partout de dimension relative m, et qui sont de "degré projectif 1" en tout $s \in S$; cette caractérisation sera donnée dans un Chapitre ultérieur, et nous n'en avons nul besoin ici.

Supposant de nouveau $\underline{E}$ loc libre de rang r, soit $\check{\underline{E}}$ son dual. Alors par polarité nous trouvons un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E}) \simeq \underline{\mathrm{Grass}}_{r-n}(\check{\underline{E}})$$

faisant correspondre au quotient $\underline{G}$ de $\underline{E}$ le quotient $\check{\underline{E}}/\check{\underline{G}}$ de $\check{\underline{E}}$. Du point de vue variétés linéaires, à la variété linéaire de dim rel m L dans P, correspond la variété linéaire duale L^o, de dim relative ~~xxxxx~~ (r-1)-1 -m de $\check{P}$, i.e. de codim relative m+1 dans $\check{P}$ (NB r-1 est ici la dim relative commune de P et $\check{P}$ sur S), qu'on peut visualiser géométriquement ains Faisant d'abord n=r-1, on trouve un isomorphisme

$$\underline{P}(\check{\underline{E}}) \simeq \underline{\mathrm{Grass}}_{r-1}(\underline{E})$$

permettant d'identifier les points de $\check{P}$ à valeurs dans S' disc
comme les sous-variétés linéaires de codimension 1 de P (appelés enc
re <u>hyperplans</u> de P). Ceci dit, L^o consiste en les hyperplans qui <u>contiennent</u> la sous-variété linéaire L de P (par quoi bien sûr or entend que les points de L^o à valeurs dans un S' sont les hyperplans dans $P_{S'}$ qui contiennent $L_{S'}$). Ceci résulte du fait (qui aurait dû venir en même temps que le fait qu'une sous-variété linéai L de P, détermine le quotient loc libre $\underline{G}$ de $\underline{E}$ dont il provient) que si $\underline{G}$ et $\underline{G}'$ sont deux quotients loc libres de $\underline{E}$ (pas néc de même rang) alors $P(\underline{G}') \hookrightarrow P(\underline{G})$ (en tant que sous-variétés linéaires de $P(\underline{E})$) : $\underline{G}'$ est majoré par $\underline{G}$ (et l'inclusion $P(\underline{G}') \to P(\underline{G})$ n'est alors autre que le morphisme déduit de $\underline{G} \to \underline{G}'$).

Voici un minimum de sorites dont on devra disposer. La liste complète ne pourra de toutes façons être fixée qu'une fois que l'ensembles des autres nºs du présent paragraphe seront rédigés.

~~12. Ratrappage de résultats subtils sur les sections linéaires.~~

Il me semble commode d'introduire aussi le foncteur

$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})(S')$ = ens des quotients loc. libres (de rang n précis) de $\underline{E}_{S'}$.

Alors $\underline{\mathrm{Grass}}_{\cdot}(\underline{E})$ est représentable par $\coprod_{n \geq 0} \underline{\mathrm{Grass}}_n(\underline{E})$. Les <u>sous-variétés linéaires</u> de $P(\underline{E})$ sont en fait définis par les sections de $\underline{\mathrm{Grass}}_{\cdot}(\underline{E})$ sur S [NB. le rang i.e. la dimension relative peut varier si S non connexe

12. Généralisation de résultats antérieurs aux sections linéaires.

Compléments de notations. Si $P = P(\underline{E})$, $\underline{E}$ Module quasi-cohérent quelconque, on posera aussi $\mathrm{Grass}_n(P) = \mathrm{Grass}_{n+1}(\underline{E})$, de sorte que $\mathrm{Grass}_n(P)$ correspond aux sous-variétés linéaires de dimension n dan P ; ceci vaut pour $n \geq -1$, en convenant que dim -1 signifie vi Lorsque E est localement libre, ~~xxxxxx~~ il y a lieu également d'introduire $\mathrm{Grass}^n(P) = \mathrm{Grass}_{n-1}(\check{P}) = \mathrm{Grass}_n(\check{\underline{E}})$, qui correspond aux sous-variétés linéaires de codimension n dans P. Si $\underline{E}$ est de rang r+1 i P de dimension relative r, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Grass}^n(P) = \mathrm{Grass}_{r-n}(P)$. Par la suite, nous supposons fixé E loc libre de rang r, et nous nous intéressons aux sous-variétés linéair de P de codimension donnée m, donc à $\mathrm{Gr}^m = \mathrm{Gr}^m(P) = \mathrm{Gr}_m(\check{E})$. Sur ce préschéma, il y a donc un quotient $\underline{G}$ loc libre de rang m canoni de $\underline{E}_{Gr}$, soit F. ~~Exxxxxxxxxxxxx~~ Le préschéma d'incidence nature sur $P\times_S \mathrm{Gr}^m$, qui représente le sous-foncteur du foncteur produit correspond à des couples d'une section de P_S, et une sous-variété linéaire de codimension m de P_S, contenant cette dernière, s'explici alors de la façon suivante: Soit $T=P\times_S\mathrm{Gr}^m$ (ou si on préfère, un préschéma quelconque au dessus de ce produit), alors sur T on a $\underline{E}_T$, le quotient $\underline{O}_T(1)$, et le sous-Module localement facteur direct $\check{\underline{G}}_T$. Considérons l'homomorphisme composé des hom canoniques

$$\check{G}_T \longrightarrow \underline{O}_T(1)$$

qui par transposition correspond aussi à l'homomorphisme composé analogue du sous-Module $\underline{O}_T(-1)$ de $\check{\underline{E}}_T$ dans le quotient $\underline{G}_T$v:

$$\underline{O}_T(-1) \longrightarrow G_T \quad ,$$

et peut aussi s'envisager comme défini par une section de $\underline{G}_T(1)$

$$\rho^m \in \Gamma(T, \underline{G}_T(1))$$

Le préschéma d'incidence (resp. son image inverse dans T) n'est alors autre que les préschémas des zéros de l'un ou l'autre homomorphisme, ou encore de la section ϕ^m. On pourrait dénoter le préschéma d'incidence par $H^{(m)}$, pour m=1 on retouve celui du nº1. Si X est au dessus de P, on pourra poser $\underline{Y}^{(m)} = X \times_P \underline{H}^{(m)}$, et définir de mêm la notation $\underline{Y}^m$ lorsque ξ est un point de Pr^m à valeurs dans un S' sur P. Ainsi les $\underline{Y}^m_\xi$ sont les "sections linéaires" de X (ou plutôt d $X_{S'}$) par les sous-variétés linéaires de codimension m de P (ou plutôt des $P_{S'}$).

Je profite de l'occasion pour une ~~xx~~ autocritique notationnell qui pourrait venir dès le nº1. C'est le fait de faire correspondre arbitrairement, pour indiquer un objet $\underline{Y}$ qui correspond à X, la lettr Y à X (de sorte que si X devient Z, on ne sait plus très bien quoi prendre). Cet inconvénient m'a déjà amené à quelques incohérences de notations passagères. Peut-être que le contexte un peu plus général avec un entier m comme ici suggère une solution raisonnnable: écrire $\underline{X}^{(m)}$ au lieu de $\underline{Y}^{(m)}$, donc $\underline{X}^{(1)}$ au lieu du $\underline{Y}$ du nº 1. De cette façon, on aurait bien, à peu de choses près ..., $\underline{X}^{(m)(m')} = X^{(m+m')}$. Je vais essayer cette notation par la suite. Evidemment, l'exposant lui-même prête à critique, car c'est une pratique courante en géométrie algébrique de désigner par un exposant la dimension des variétés qui entrent en jeu. Mais comme nous n'avons jamais fait usage de ce genre de convention, je pense que nous gardons les mains libres à ce sujet.

On voit aussitôt, sur la construction précédente de $\underline{X}^{(m)}$, que l'on a un P-isomorphisme canonique

$$X^{(m)} = \underline{\mathrm{Grass}}_m(\check{F}),$$

où F_X ~~xxtxtx~~ $(\simeq f^*(\Omega^1_{P/S})(1))$ est le noyau de $\underline{E}_X \longrightarrow O_X(1)$, en particulier $\underline{X}^{(m)}$ est lisse sur X, avec des fibres géométriquement de dimension $m(r-m)$, intègres (et en fait des variétés rationelles). Bien entendu, la vérification se réduit au cas X=P, et à ce titre appartient, tout comme les considérations précédentes, au nº des généralités sur les grassmaniennes (qui , je le vois déjà, vont finir par être magnifiés par toi en un paragraphe séparé). Nous sommes maintenant en possession d'un analogue parfait du diagramme du nº1 . Encore un point oublié: comme préschéma au dessus de Gr^m , $\underline{H}^{(m)}$ est canoniquement isomorphe à $P(\underline{E}_{Gr} / \check{\underline{G}})$, c'est donc un excellent fibré projectif (mais on ne peut rien en conclure bien sur en général pour $\underline{X}^{(m)}$ sur Gr^m).

La proposition 2.1. se transpose sans changement. Dans la proposition 2.2. , il faut lire: il f et s que pour tout $x \in Z$, on ait ~~xzgxtr~~ dim $\bar{x} \leqslant m-1$. Pour la démonstration, on peut par exempl se ramener à 2.6. en considérant une ~~xxxtixx~~ variété linéaire de codimension m générique comme intersection de m hyperplans génériques indépendants, Dieudonné demerdetur. Du point de vue rédaction, si (comme il me semble préférable) on fait dès le début m général, m'a semble préférable de prouver en même temps 2.6. , où bien entendu dim X -1 est remplacé par dim X -m (en sous-entendant qu'une dimensio < 0 dans la formule signifie que l'ensemble considéré est vide). Corollaire 2.3. se lit en remplaçant "fini" par "de dimension $\leqslant$ ~~mtx~~ m-1 " . Corollaire 2.4. pareil ; De même pour 2.5. , remplacer dim $f(X_i) > 0$ par dim $f(X_i) \geqslant m$, et même changement dans 2.7. La proposition 2.8.reste valable telle quelle, dans 2.9. remplacer fini par dim $\leqslant m-1$. Kif kif pour 2.10. , 2.11. . L'énoncé 2.12. reste valable tel quel, avec une démonstration essentiellement inchangée (cf aussi plus haut commentaires à nº 8). 2.13. remplacer fini par dim $\leq$ m-1. Th. 2.14. reste valable tel quel. , 2.15. en remplaçant fini par dim $\leq$ m-1. 2.16. valable tel quel ,dans 2.17. remplacer fini par dim $\leq$ m-1. 2.18. tel quel.

Pour 3.1. , on peut l'énoncer avec m quelconque en supposant dim f(X) $\geq$ m+1 , mais je propose de garder l'énoncé principal dan le cas des hypersurfaces, et de signaler le cas général en corollaire ou en remarque (il s'en déduit aussitôt par le procédé habituel de prendre des hyperplans génériques indépendants). A moins qu'il soit amusant d'expliciter une version généralisée du lemme 3.1.1. ...
Pour 3.2. lire dim f(X)$\geq$ m+1 , dans 3.3. remplacer dim $f(X_i) \geq 2$ par dim $f(X_i) \geq$ m+1, et dans la définition de $\mathcal{C}$ dim f(Z) = 0 par dim f(Z) $\leq$ m-1.

Les considérations générales du nº 4 s'appliquent tels que au cas m quelconque. Il en est de même de 4.2. , et de 4.3. en rem çant dans b) (v) et (vi) la condition dimensionelle par dim f(X)$\geq$ m+1. Changement analogue dans 4.4. b).

Le laïus 5.1. passe tel quel. Dans 5.2. il faut se rappeler que ϕ devient une section $\phi^{(m)}$ de $\underline{G}_T(1)$ (où T = $X \times_S Gr^m$) induisant des sections ϕ^m_ξ des $\underline{O}_{X_{k(\xi)}}(1) \otimes_{k(\xi)} \underline{G}(\xi)$ (pour $\xi \in Gr^m$). Or de façon générale, on aura expliqué au par.19 , lorsqu'on a une section ϕ d'un Module loc libre de rang m sur un préschéma, ce que cela veut dire que cette section soit $\underline{F}$ -régulière, pour un Modu $\underline{F}$ donné : en termes d'une base locale, cela signifie qu'on a une suite F-régulière de m sections de $\underline{O}_X$ (et il faut vérifier que cela inchangée (cf aussi plus bas commentaires à n° 8). 2.13. remplacer fini par dim $\leqslant$ m-1. Th. 2.14. reste valable tel quel. , 2.15. en remplaçant fini par dim $\leqslant$ m-1. 2.16. valable tel quel ,dans 2.17. remplacer fini par dim $\leqslant$ m-1. 2.18. tel quel.

Pour 3.1. , on peut l'énoncer avec m quelconque en supposant dim $f(X) \geqslant m+1$, mais je propose de garder l'énoncé principal dans le cas des hypersurfaces, et de signaler le cas général en corollaire ou en remarque (il s'en déduit aussitôt par le procédé habituel de prendre des hyperplans génériques indépendants). A moins qu'il soit amusant d'expliciter une version généralisée du lemme 3.1.1. ... Pour 3.2. lire dim $f(X) \geqslant m+1$, dans 3.3. remplacer dim $f(X_i) \geqslant 2$ par dim $f(X_i) \geqslant m+1$, et dans la définition de dim $f(Z) = 0$ par dim $f(Z) \leqslant m-1$.

Les considérations générales du n° 4 s'appliquent telles que au cas m quelconque. Il en est de même de 4.2. , et de 4.3. en remplaçant dans b) (v) et (vi) la condition dimensionelle par dim $f(X) \geqslant m+1$. Changement analogue dans 4.4. b).

Le laïus 5.1. passe tel quel. Dans 5.2. il faut se rappeler que ϕ devient une section $\phi^{(m)}$ de $\underline{G}_T(1)$ (où T $= X\times_S Gr^m$) induisant des sections ϕ^m_ξ des $\underline{O}_{X_{k(\xi)}}(1)\otimes_{k(\xi)} \underline{G}(\xi)$ (pour $\xi \in Gr^m$). Or de façon générale, on aura expliqué au par.19 , lorsqu'on a une section ϕ d'un Module loc libre de rang m sur un préschéma, ce que cela veut dire que cette section soit $\underline{F}$ -régulière, pour un Module $\underline{F}$ donné : en termes d'une base locale, cela signifie qu'on a une suite F-régulière de m sections de $\underline{O}_X$ (et il faut vérifier que cela est bien indépendant de la base choisie. Dans le cas $m=1$, on a l'interprétation intrinsèque évidente signalée dans 5.2. Avec cette convention de langage, 5.3. reste valable tel quel, de même 5.4. La première partie de la remarque 5.5. admet une ~~généralisation~~ généralisation au ~~ax~~ cas m quelconque: lorsque F_s est (S_m), alors la condition de régularité envisagée pour ϕ_ξ s'exprime de façon purement dimensionel La deuxième partie de la remarque 5.5. vaut telle quelle dans le cas m quelconque. Théorème 5.6. s'étend tel quel, de même 5.7.

Proposition 6.1. : lire $\dim f(X_i) \geqslant m+1$, et plus loin $\dim f(Z) \leqslant m-1$.

Les laius généraux de 7.1. sont valables tels quels dans le cas m quelconque. 7.2. et 7.3. mutatis mutandis (attention dans 7.2. à la notation m, confusante ici), d'autre part dans la démonstratio de 7.4. on n'a plus besoin de procéder de proche en proche, mais on peut prendre directement une section linéaire de codimension $m-n$.

Dans 8.2., remplacer ~~l'hypothèse~~ condition $\dim Y_\xi > \dim X$ par $\dim Y_\xi > \dim X - m$, et l'hypothèse $\dim f(X_i) > 0$ par $\dim f(X_i) \geqslant m$. Modification analogue dans la suite de 8.2. Comme 8.3. présente un exemple, il n'y a pas lieu de le changer, donc on y gardera $m=1$. Je te laisse le soin de faire l'exercice, demandant sans doute un peu plus de soin, de trouver les bons énoncés pour m quelconque correspondants à 8.4. 8.5. et 8.6. (pages 30, 31, 32); il n'est d'ailleurs sans doute pas indispensable de faire cet exercice, s'il te barbe de le faire

~~xPourxétendrextantxquexjexpuissexletxxxlexthéorèmex8.7xxxxnettement exact~~
~~8x7xxxxxxxxadmetxxpasxdtxxalegxexxévidentxpourxmxquelconquex~~

Je pense que essentiellement tous les ~~dévéa~~développements du n°8 à partir de 8.6. peuvent s'~~ap~~adapter également au cas des sections linéaires avec m quelconque. Le faire en forme constituerait un exercice sans doute assez long et fastidieux. Je dois admettre que je ne connais pas d'application s'appuyant de façon essentielle sur l'analyse de cette situation plus générale, donc nous ne sommes pas vraiment obligés d'inclure ces développements dans les Eléments. D'autre part, l'expérience prouve que le fait de rédiger dans un cadre plus général oblige parfois à mieux dévisser et fait mieux comprendre le fourbis, et souvent sans beaucoup plus de mal, de plus un certain nombre d'exercices de syntaxe dans un contexte proprement géométrique comme ici ne ferait pas de mal,- et bien entendu il n'est pas du tout exclu qu'on en ait quand même besoin un jour et soit content de trouver la chose faite. Aussi je te laisse l'entière décision à ce sujet, et me borne à esquisser simplement les ~~gxxxxxxx~~énoncés qu'on pourrait éventuellement donner à ce propos.

Supposons encore que $f : X \to P$ soit non ramfié et X soit lisse sur S, à composantes de dimension $\geq m$. Dans $\underline{X}^{(m)} = V^0$ ~~xxx~~ on distingue alors le sous-préschéma $\underline{X}^{(m)\mathrm{sing}} = V^1$ des zéros singuliers de ϕ^m relativement à Grass^m, qui est aussi formé géométriquement des couples (x, ξ) tels que la variété linéaire L_ξ coupe excédentairement l'espace tangent à X en x (considéré comme sous-variété linéaire de P), i.e. tels que les deux espaces n'engendrent pas P tout entier. Contrairement à ce qui se passe pour $m=1$, lorsque m est quelconque ~~2xxxxxXxxxxxxxxx~~, le morphisme $\underline{X}^{(m)\,\mathrm{sing}} \to X$ n'est en général pas lisse, car la variété des L qui [illegible] coupent ~~e~~excédentairement une sous-variété linéaire donnée $T_{\ni x}$ n'est en général pas lisse sur k: cette variété est seulement l'adhérence de la sous-variété lisse formé des ζ tels que la dimension de $T\cap L_\zeta$ soit juste <u>une</u> de plus que la dimension "normale" $n-m$ ($n=\dim T$, $m = \operatorname{codim} L$). Sauf erreur, l'ensemble (contenu dans l'ensemble supersingulier relatif) V'' introduit dans le pa 16 (compléments) n'est autre que l'ensemble formé des couples (x,L_ζ) tels que la dimension de $T_x\cap L_\zeta$ soit $\geqslant n-m+2$), de sorte qu $V^1 - V''$ ~~xtest xxxxxxxxx~~ lisse sur X, et sauf erreur est même exactement l'ense ble des points de V^1 lisses sur X. (La vérification de ce point demandera une étude de la filtration du ~~xx~~ schéma grassmanien suivant les ~~xxxx~~ dimensions d'intersection des L variables avec une T fixe, sauf erreur on trouve que le cran suivant de la filtration est formée exactement des points non lisses du cran précédent - quand on définit la filtration non seulement ensemblistement, mais aussi schématiquement, en utilisant le lemme de la page 16 des compléments au par.16). Cette étude formerait alors un des nºs du paragraphe "géométrique" consacré aux grassmaniennes). Si on définit de même ~~V(k)~~ $V^{(k)}$ comme le sous-schéma de $X^{(m)}$ correspondant à $\dim T_x\cap L \geqslant n-m+k$, on trouve par un calcul immédiat que ~~dimxVxxxxxxxxxxxxxxxx~~

$$\dim \mathrm{Grass}^m(P) - \dim V^{(k)} = (k-1)(n-m) + k^2$$

(du moins pour les restrictions raisonnables $k \leqslant m$, $k \leqslant r-m$), sauf erreur de calcul (NB ceci résulte plus généralement d'un calcul des dimensions des "cellules" qui interviennent dans la filtration des grassmaniennes à laquelle j'ai fait allusion plus haut). Pour $k = 2$, on trouve une différence de dimension $\geqslant 4$, donc l'image de V'' dans Grass est de codimension $\geqslant 4$, donc si on s'intéresse à ce qui se passe en del d'ensembles de Grass^m de codimension $\geqslant 2$, on peut ~~xxx~~ oublier V'' .

D'autre part, dans $X_{\mathrm{Grass}^m} - V''$ au dessus de Grass^m , la situa est celle du cas favorable envisagé dans les "compléments au par 16" relativement au schéma de base S: $V^1 - V''$ est en effet lisse sur S (1'étant sur X) de dimension relative égale à <u>une</u> de moins que celle d. $Grass^m$ sur S (comme on voit en faisant k=1 dans la formule plus haut). Ainsi les résultats de loc cit s'appliquent, on trouve en particulier le fait que l'ensemble des points supersinguliers de ϕ^m rel à $Grass^m$ n'est autre que $V'' \cup V^2$, où V^2 est le sous-préschéma de ramification de $V^1 - V'' \longrightarrow Grass^m$. On peut donc dire encore que, en dehors de V'', l. zéros supersinguliers résultent du collapsage de (au moins) deux zéros singuliers ordinaires (mais on n'est pas obligé de le dire)).

De cette façon, on a essentiellement l'équivalent de 8.7. a) et b). Il doit être possible de donner un équivalent pour 8.7. c), en utilisa la description explicite du fibré tangent à $Grass^m$ (analogue : celle du cas m=1); cela implique encore que pour un point géométrique de $V^1 - V''$ non ramifié au dessus de $Grass^m$, la connaissance de son image dans $Grass^m$ implique celle de son image dans P, pourvu que la première image soit un point lisse de l'image fermée de V^1 dans $Grass^m$ (on suppose S = spectre d un corps). Je peux fournir un énoncé plus précis sur demande.

Une fois ce point acquis, on a des corollaires évidents généralisan 8.8. , 8.9. , 8.11. Il est sans doute tout aussi possible d'énoncer da le cas m quelconque les autres propositions du par.8. Si cela demande d efforts de rédaction supplémentaires, on peut renoncer à cet générali tion), même si on inclut les développements différentiels précédents. Il en est de même des résultats du nº 9.

Quant au nº 10 , la situation qui y est étudiée se généralise au cas m quelconque de la façon suivante. On se fixe une sous-variété linéa re C de P de codimension m+1, et on considère l'espace projectif Q des sous-variétés linéaires L de P de codimension m passant par C. Q est une sous-préschéma fermé de $Grass^m$, en particulier on peut former $\underline{X}^{(m)}_Q$,

qu'on se propose d'étudier. Un premier point, qui doit en tout état de cause figurer dans le texte, c'est que $\underline{X}^{(m)}_Q \longrightarrow X$ est encore birationn du moins lorsque C coupe "régulièrement" X , et de façon précise $\underline{X}^{(m)}_Q$ est dans ce cas canoniquement isomorphe au préschéma déduit de X en faisant éclater $X \times_P C$: la démonstration de ce fait n'est autre que cel de 10.2. via 18.3. Un deuxième point, qui présente un certain intérêt, mais que nous ne sommes pas absolument obligés d'inclure, consiste à dire que si on a choisi C "assez général", alors $\underline{X}_Q^{(m)} \longrightarrow Q$ a certaines propriétés sympathiques, la plus classique étant celle-ci: X étant supposé lisse sur S=Spec(k), de dim $n \geq m$, propre et ~~et~~ géom irréd , Alors pour C "asse général", l'ensemble T des $\xi \in Q$ pour lesquels $\underline{X}^{(m)}$ n'est pas lisse de dimen sion n-m sur k(ξ) est géom irréductible sur k(ξ), et de codim 1 dans Q, et l'ensemble T^1 des $\xi \in T$ pour lesquels $\underline{X}^{(m)}$ est "supersingulier" en au moins un point est rare dans T; enfin , si f:X$\rightarrow$P est une immersion, alors quitte à agrandir un peu T^1 , pour tout $\xi \in T-T^1$, il y a exactement un point non lisse dans $X^{(m)}_\xi$, et ce dernier est rationnel sur k(ξ). J'a: oublié dans l'énoncé de spécifier qu'on supposait X $\longrightarrow$P non ramifié et que l'on devait au préalable remplacer f par $\phi_n f$, $n \geq 2$ (où ϕ_n est défini dans 9.1.). Le plus naturel pour prouver cet énoncé sem ble d'utiliser le sous-schéma Z (noté T dans 8.8.) des $Grass^m$ tels que $\underline{X}^{(m)}$ soit singulier: on sait, sous les conditions dites, que est géom. irréd. de codimension 1, et que le sous-schéma Z^1 correspond à des $\underline{X}^{(m)}$ "supersinguliers" y est rare. Il resterait ~~alors~~ à prouver u lemme de la nature suivante: soit Z une partie fermée de $Grass^m$ de cod mension q, alors définissant Q(C) en termes de C comme ci-dessus, pour tout C "assez général" l'intersection $Q(C) \cap Z$ est de codim $\geq$ q dans Q(C); de plus, si Z géom. irréd., itou Q(C)$\cap$Z si Z "assez général"

0.13. Morphismes élémentaires et théorème de M. Artin.

Définition 13.1. Un morphisme $f:X \to Y$ de préschémas est dit "morphisme ~~[xxx]~~ élémentaire" si X est ~~xx~~ Y-isomorphe à un préschéma de la forme $X' - Z$, où $X' \to X$ est un morphisme lisse, projectif, à fibres géométriques connexes de dimension 1, et où Z est un sous-préschéma fermé de X', ~~[xxxxxxx]~~ tel que le morphisme $Z \to Y$ soit étale, surjectif, et de degré constant. Un morphisme est dit ~~multi-élémentaire~~ poly-élémentaire s'il est un composé de morphismes élémentaires. Un préschéma X sur un corps k est dit polyélementaire (sur k), si le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(k)$ est poly-élémentaire.

Théorème 13.2. (M. Artin) Soient X un préschéma géom. irréd. sur un corps k parfait infini, x un point lisse de X, alors x admet un systême fondamental de voisinages ouverts polyélémentaires.

Quitte à remplacer X par un voisinage donné de x, ~~on peut [xxxxxx] e ramené à~~ il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert élémentaire de x dans X. ~~On peut supposer évidemment X lisse, et~~ ~~et affine~~ Raisonnant par récurrence sur la dimension n de X, on ~~[xxxxxxxx]~~ est ramené à montrer que si $n>0$ il existe un voisinage ouvert U de x et un morphisme élémentaire $f: U \to V$, V étant un schéma lisse sur k (nécessairement géom. irréd et de dim $n-1$). ~~[xxxxxxx]~~ (Le cas $n=0$ est évidemment trivial, étant donné que alors X est k-isomorphe à $\mathrm{Spec}(k)$, qui est polyélémentaire sur $\mathrm{Spec}(k)$, étant entendu dans 13.1. qu'on n'exclut pas le composé de la famille vide de morphismes - on aurait dû le signaler sous une forme ou une autre dans 13.1.). La nécessité de supposer k parfait au préalable apparait déjà dans le cas $n=1$: alors on prend pour X' le modèle projectif normal canonique du corps des fonctions K de X (cf Chap II) par.7), le fait qu k soit parfait assure que X' est lisse sur k (car X' est en tous cas régulier), et il assure également que $Z = X' - X$, muni de la structure réduite induite, est étale sur k. Traitons maintenant le cas général, dans lequel il est loisible de supposer $n \geq 2$.

~~Comme X est affine donc quasi-projectif~~ On peut évidemment supposer X ~~lisse et~~ affine donc quasi-projectif, puis, quitte à remplacer X par une clôture projective, on peut supposer X projectif, sous réserve toutesfois de prouver que tout voisinage de x contient un voisinage ouvert U admettant un morphisme élémentaire $U \longrightarrow V$. De même, remplaçant X par son normalisé (fini sur X donc projectif, réf.), ce qui ne le change pas au voisinage de x, on peut supposer X normal, donc k étant parfait, géométriquement normal sur k. ~~Choisissons une immersion~~ Le bénéfice de cette hypothèse est que l'ensemble Z des points de X en lesquels X n'est pas lisse sur k est de codim ≥ 2. ~~Soit N tel que~~ Choisissons une immersion projective $i: X \longrightarrow P^r$, ~~On peut supposer que X n'est contenu dans aucun H~~ Comme on obtient un système fondamental de voisinages de x dans P^r en prenant des sections ne s'annulant pas en x des divers $\underline{O}_P(n)$, $n > 0$, on en conclut que tout voisinage de x contient un voisinage de la forme X-Y, où Y est une partie fermée de X , contenant Z, purement de dimension n-1, et telle que $x \notin Y$. Nous munirons Y de la structure réduite induite, de sorte que (k étant parfait) l'ensemble singulier de Y est de dimension $\leq n-2$. Quitte à agrandir l'ensemble Z précédent, on trouve un fermé $Z \subset Y$, de dimension $\leq n-2$, contenant l'ensemble géom. singulier de X et de Y.

L'idée de la démonstration est de fibrer X par ses intersections avec les sous-variétés linéaires L de P , de codimension n-1, contenant une sous-variété linéaire donnée C de codimension n. A cet effet, on aura besoin du

<u>Lemme</u> 13.3. Avec les notations précédentes pour ~~X~~ X,Y,Z ($X \supset Y \supset Z$ sous schémas fermés de P^r_k, de dimensions n,n-1 et $\leq$ n-2, X-Z, ~~lisse de dim n en tous ses points~~, Y-Z lisse, ~~de dim n-1 en tous ses points~~, Z de dimension $\leqslant$ n-2), et quitte au besoin (lorsque k est de car $p>0$) de remplacer l'immersion projective $i : X \to P^r$ par un "multiple" quelconque $\phi_n i$ ($n \geqslant 2$) comme dans le nº 9, il existe une sous-variété linéaire L_o de P^r, de codimension n-1, et ayant les vertus suivantes:

a) $L_o \cap Z = \emptyset$.

b) $L_o \cap X$ est lisse de dimension 1.

c) $L_o \cap Y$ est lisse de dimension 0.

(NB k désigne un corps infini, pas la peine ici qu'il soit parfait).

Admettons ce lemme et montrons comment on en déduit l'existence d'un voisinage ouvert U de x, contenu dans X-Y, et admettant un morphisme élémentaire $U \to V$. ~~En vertu du nº 7 appliqué à l'espace projectif L_o et au sous-schéma lisse $L_o \cap Y$ de celui-ci,~~ Il existe une sous-variété linéaire C de L_o, de codimension n dans P^r i.e. de codimension 1 dans L_o, ne rencontrant pas l'ensemble fini $L_o \cap Y \setminus \{x\}$. ~~telle que $C \cap X$ ($= C \cap (L_o \cap X)$) soit lisse sur k et de~~ et $x \notin C$, ~~dimension 0; de plus, on peut exiger que l'on ait $C \cap Y = \emptyset$ (même argument).~~ Soit $T = X \cap C$, de sorte que T est un sous-schéma de X, étale sur k, non vide, ne contenant pas x, et <u>disjoint</u> de Y. Considérons d'autre part le sous-schéma Q de $Grass^{n-1}(P)$ correspondant aux sous-variétés linéaires de P^r contenant C, de sorte que Q est un ~~xxxxxxxxxxx~~ espace projectif de dimension n-1, en particulier il est lisse sur k de dim. n-1. Alors L_o correspond à un point ξ_o de Q(k). Considérons d'autre part (avec les notations générales introduites par ailleurs) l'image inverse $\underline{X}^{n-1}_Q$ de $\underline{X}^{n-1}$ par l'immersion $Q \to Grass^{n-1}$, et de même les images qui sont aussi des sous-schémas fermés disjoints de $\underline{X}^{n-1}_Q$;

inverses $\underline{Y}^{n-1}_Q$ et $\underline{T}^{n-1}_Q$, soient p,q,r les projections structurales de ces schémas dans Q. Alors par ~~construction~~ hypothèse [illegible], p est lisse en les points au dessus de ζ_o , et q est étale en les points au dessus de ζ_o ; il en est de même de r, car on voit aussitôt que $\underline{T}^{n-1}_Q$ n'est autre que Tx_kQ (Q-isomorphisme). Enfin, le morphisme p est propre, et compte tenu que X est géométriquement connexe, les fibres de p sont géométriquement connexes, (th de Bertini). Par suite, il existe un voisinage ouvert V de ζ_o dans X tel que ~~le morphisme~~ $\underline{X}^{n-1}_Q | V = X'$ soit propre et lisse sur V, à fibres géométriquement connexes, et comme la fibre de ζ_o , qui n'est autre que $X \cap L_o$, est de dimension 1, on peut supposer que les fibres de X' sur V sont toutes de dim. 1. Enfin, prenant V assez petit, on peut supposer que $\underline{Y}^{n-1}_Q | V$ et $\underline{T}^{n-1}_Q | V$ sont étales sur V, donc le préschéma somme Z' de ses deux (qui s'identifie à un sous-~~pré~~schéma fermé de X') est étale sur V. Par suite, ~~en~~ posant $U = X' - Z'$, le morphisme $U \rightarrow V$ est un morphisme élémentaire. Mais U est aussi un ouvert de $X'' = \underline{X}^{n-1}_Q - \underline{Y}^{n-1}_Q - \underline{T}^{n-1}_Q$, image inverse de X-Y-T dans $\underline{X}^{n-1}_Q$, et d'autre part $X'' \rightarrow X-Y-T$ est évidemment un isomorphisme (car $\underline{X}^{n-1}_Q - \underline{T}^{n-1}_Q \rightarrow X-T$ est un isomorphisme). Donc U s'identifie à un ouvert de X-Y-T, ouvert contenant d'ailleurs $L_o \cap X$ et à fortiori x. C'est le voisinage cherché de x contenu dans X-Y.

Reste à prouver le lemme 13.3. Comme d'habitude, il suffit de prouve[r] que la sous-variété linéaire de ce ~~dimension n-1 passant par x générique~~ L, ainsi que le contenu dimensionnel de b possède les propriétés a), b), c). Pour a), cela résulte c) (pour toute immersion projective donnée) aussitôt de 2.3. (revu et corrigé dans le nº 12) appliqué (comme dans u[n] raisonnement déjà fait dans le nº8) à l'espace projectif des droites passant par x, et l'image de Z dans ledit par projection conique à partir de x. [Il pourrait être utile d'ailleurs d'expliciter certains résultats obttenus par cette méthode, concernant les sections linéaires par des sous-variétés linéaires assujetties à passer par une sous-variét[é] linéaire fixe, au cours du texte ou dans un nº à part]. Pour le lissité dans b) et c), ~~remplaçant~~ on peut grâce à a) remplacer X et Y resp. par X-Z et Y-Z qui sont lisses, et on est ramené à prouver ceci: Soit $f: X \to P$ un morphisme non ramifié, avec X lisse sur k, et soit $x \in P(k)$, tel que x n'appartienne à l'image d'aucune composante de X de dim $< m$, alors si η est le point générique de ~~xxxxx~~ la sous-grassmanienne de $\mathrm{Grass}^m(P)$ formée des variétés linéaires L de codimension m passant par x ~~une variété linéaire donnée de codimension m-1~~ $\underline{X}^{(m)}_\eta$ est lisse sur k, tout au moins si k est de car 0, et dans le cas contraire, à condition de remplacer f par $\phi_n f$, n entier ≥ 2 quelconque. C'est là un remords au nº9, qui résulte lui-même du remords suivant au nº 8: Avec les notations de 8.8., (supposant donc X irréductible, ce qui est loisible pour le Pb que nous traitons), si l'on a codim $T \geq 2$ ou si $\underline{Y}^{\mathrm{sing}} \to T$ est génériquement étale (condition automatiquement vérifiée si k est de car 0 ou à condition de remplacer f par $\phi_n f$ avec $n \geq 2$, cf nº 9), alors pour l'hyperplan ~~générique~~ H_η passant par x générique, $\underline{X}^{(1)}_\eta$ est lisse de dimension n-1, sauf dans le cas où on aurait $f(X) = \{x\}$ (donc n=0). Ce résultat admis, qui liquide évidemment le cas particulier m=1 de notre remords, on obtient aussitôt le cas m général par récurrence sur m, en notant qu'à changement de corps de base près, $\underline{X}_{\mathfrak{y}}^{(m)}$ s'obtient en prenant une L' de codimension m-1 passant par x, une H de codimension 1 passant par x, L' et H étant génériques indépendants pour ces propriétés (i.e. en termes orthodoxes, on se place au point générique du ~~xx~~ schéma des couples (L',H) ~~xxxxx~~) et en prenant la section linéaire de X par $L' \cap H$: on peut commencer par prendre la section par H, qui est lisse par ce qui précède, puis par L', qui est lisse par l'hypothèse de récurrence. Ce genre de raisonnement, déjà utilisé pour généraliser 2.6. p.ex. aux sections linéaires de codimension m queconque, mérite d'être explicité une bonne fois en général, pour pouvoir y référer sans entrer ~~dans~~ chaque fois dans les détails un peu lourds d'une présentation en forme.

Reste à prouver le corollaire annoncé de 8.8. dans le cas m=1 . Lorsque ~~dim~~ codim T $\geqslant$ 2, comme d'autre part l'hyperplan Q de $\check{P}$ des $H_{\mathfrak{y}}$ tels que $x \in H_{\mathfrak{y}}$ est de codimension 1, son point générique ne peut être élement de T, et on gagne. Dans le cas codim T = 1, comme T est irréductible, on ne peut avoir $\mathfrak{y} \in T$ que si Q=T , ~~xxxxxxxxxxxxx~~ (supposant k alg clos, ce qui est loisible) i.e. en termes géométriques ~~xxxx~~ pour tout $z \in X(k)$ l'espace tangent de X en z (ou plutôt son image par f'_z) passe par x. Montrons que ceci ne peut se présenter lorsque $\underline{X}^{sing} \rightarrow T$ est gén étale, i.e. lorsqu'on est sous les conditions de 8.8., sauf si $f(X) = \{x\}$ donc X de dimension 0. En effet, 8.7. c) (qui exprime essentiellement la symétrie ~~xxxxx~~ dans la relation entre X et sa duale T) implique alors que pour presque tout point $z \in X(k)$, f(z) est orthogonal à l'espace tangent à T en un certain point, ~~xx~~ donc (puisque T=Q) orthogonal à Q, d'où f(z)=x, d'où $f(X) = \{x\}$. Cela achève la démonstration de nos remords, donc de 13.2

NB Le raisonnement ne marche plus si on remplace x par une sous-variété linéaire X de dim. > 0, et qu'on assujettit H à passer par C: en effet, rien ne s'oppose (prenant par exemple dim $C = r-2$, le plus grand possible pour que H puisse encore effectivement varier) que T contienne la droite C^0 : prendre par exemple une quadrique non singulière dans P, en caractéristique quelconque. Mais il est possible que de tels phénomènes ne puissent non plus se produire pour des $\phi_n f$, $n \geq 2$; on pourrait poser la question en remarque, au nº 9.

Remarques 13.4. a) Nous avons déjà signalé que l'hypothèse que k soit parfait est essentielle pour la validité de 13.2. Par contre, il est plausible que l'hypothèse "k infini" est surabondante. Nous n'avons pas essayé de faire un raisonnement ad hoc pour le cas où k est fini, et signalons seulement que dans ce cas, l'application de 13.2. à la clôture algébrique de k et les raisonnements habituels montrent qu'on peut trouver une extension finie k' de k telle que pour les points de $X_{k'}$ au dessus de x il existe des voisinages ouverts polyélementaires relativement à k'.

b) Lorsque dans 13.2. on abandonne l'hypothèse que X est géom irréductible, la conclusion bien entendu ne subsiste pas telle quelle, (puisqu'un schéma algébrique poly-élementaire est géom irréd !). Elle subsiste cependant sous la forme plus faible qu'on obtiendrait en omettant dans la définition 13.1. le mot "connexes" : c'est ce que montre la démonstration que nous avons donnée.

d) En procédant comme expliqué dans 7.1. on peut donner des variantes de 13.2. dans le cas où on remplace le corps de base k par un préschéma de base général. Signalons la suivante (sans démonstration): Soit $f:X \to$ un morphisme projectif et plat, ~~xxxSxxxxxxxxxxX~~ à fibres géométriques ~~xxxxx~~ irréductibles et (R_2) , S' un sous-préschéma de X fini sur S, $s \in S$, supposons que pour tout $x \in S'$ au dessus de s, X_s soit lisse sur $k(s)$ en x . Alors il existe un voisinage ouvert U de s, et un voisinage ouvert V de $S'|U$ dans $X|U$, tels que $V \longrightarrow U$ soit poly-élémentaire. Si Y est un sous-préschéma fermé de X, ne rencontrant pas S' et tel que l'ensemble Z des points en lesquels Y n'est pas lisse sur S ~~xxxxxxxxxxxxxxxx soit tel que~~ soit tel que $\dim Z_s \leq \dim X_s - 2$, alors on peut ci-dessus prendre V contenu dans $X - Y$.

c) (A être éventuellement inclus dans l'énoncé de 13.2.). Soit avec les notations de 13.2. $\emptyset$ une partie finie de X formée de points lisses de X, et supposons que $\emptyset$ soit contenu dans un ~~xxx~~ ouvert affine de X. Alors $\emptyset$ admet un système fondamental de voisinages ouverts polyélémentaires. (Evidemment on peut supposer $\emptyset$ formé de points fermés. La démonstration est essentiellement la même, sauf qu'on formule 13.3. sous une forme légèrement différente, savoir: il existe une sous-variété linéaire C de P^r de codimension n, ne rencontrant pas $\emptyset \cup Y$, et telle que pour tout $x_i \in \emptyset^{(k)}$, la sous-variété linéaire L_i de codimension $n-1$ engendrée par C et x_i ait les propriétés a) , b) , c) de 13.3. Pour vérifier ce point, on note qu'il suffit de vérifier que la C générique a les propriétés envisagées, or pour une telle ~~alors~~ ~~xxxxx~~ chaque L_i est générique parmi les L de codimension n passant par x_i , de sorte qu'on peut appliquer 13.3. sous la forme initiale (ou du moins sous la forme où nous l'avions prouvée, qui était: toute L_o assez générale passant par x a les propriétés a),b),c)).

e) Une des raisons de l'intérêt de 13.2. est la structure"topologique" particulièrement simple des schémas alg. ~~xxxxxx~~ élémentaires/U. Par exemple, lorsque le corps de base est le corps des nombres complexes, et si U^{an} désigne l'espace analytique associé à U, alors les groupes d'homotopie $\pi_i(U^{an})$ sont nuls pour $i \neq 1$, et ~~xxxxx~~ π_1 est une extension successive de groupes libres; ~~comme d'ailleurs~~ Dne U^{an} ~~est connexe (U l'étant), il~~ est un ~~xxxxxpxxxxx~~ "espace $K(\pi_1, 1)$", classifiant pour π_1 ; de façon plus précise, son revêtement universel est homéomorphe à $\underline{C}^n$ et à fortiori est contractile, et ce revêtement est un "fibré principal universel" de groupe π_1 .

14. Projections coniques.

NB Nous avons déjà utilisé les projections coniques à diverses reprises, notamment à la fin du n°8, formulation de 10.4. et autres, et le sorite qui suit devrait venir sans doute plutôt au début du paragraphe et éventuellement dans le paragraphe auxiliaire "grassmannien".

Soit $C = P(F)$ une sous-variété linéaire de $P(E)=P$, de dimension relative $r-m-1$ ~~dans~~ sur S, i.e. de codimension $m+1$ dans P, donc F est un quotient de E, loc libre de rang $r-m$, $F=E/G$, où G est loc libre de rang $m+1$. On a défini par voie algébrique au Chap II un morphisme

$$p_C : P - C = P(E) - P(E/G) \longrightarrow P(G) ,$$

que nous allons interpréter par voie géométrique, et qui s'appelera (en vertu de la description qui suit) la projection conique de centre C. (NB On suppose $r-m-1$ compris entre -1 et $r-1$, i.e. m compris entre 0 et r, sans plus). Pour ceci, commençons par interpréter ~~Q(C)~~ $P(G)$ comme un sous-préschéma fermé de $Grass^m(P)= Grass_{r-m+1}(P)$, grâce à l'homomorphisme de foncteurs évidents

$$P(G) \longrightarrow Grass_{r-m+1}(E)$$

otebnu en considérant, pour chaque quotient inversible G/G' de G, le Module localement libre de rang $(r-m)+1$ E/G' de E (et kif kif après tout changement de base). L'homomorphisme de foncteurs précédent est un monomorphisme, et comme le premier est propre sur S, le deuxième séparé c'est une immersion fermée. Plus généralement, il y aurait lieu d'expliciter les immersions fermées des grassmaniennes de G, i.e. de $P(G)$, (au sens foncteurs) dans celles de E i.e. de $P=P(E)$. L'image du morphisme obtenu est formé des sous-variétés linéaires L de la dimension voulue de P qui contiennent C. Désignant par $Q(C)$ cette image dans le cas qui nous occupe (i.e. pour les dimensions précisées plus haut), et identifiant $P(G)$ à $Q(C)$, le morphisme de projection conique

$$p_C : \quad P - C \longrightarrow Q(C) \subset Grass^m(P)$$

n'est autre que celui qui associe à toute section de $P - C$ l'unique sous-variété linéaire L de P, de codimension m, contenant à la fois C et ladite section (bien entendu, par "contenir la section" on entend qu la section se factorise par L).

Si maintenant on a un $f: X \longrightarrow P$, il y a lieu de considérer le composé

$$X - f^{-1}(C) \longrightarrow P - C \longrightarrow Q(C)$$

qu'on pourra appeler projection conique de X, relativement à f et au centre C, notée p_C^{Σ} ou p_C^X ou simplement p_C. ~~On fera attention qu'elle n'est pas~~ en général définie sur X tout entier, de façon précise elle l'est sss $f^{-1}(C)=\emptyset$ i.e. $f(X)$ ne rencontre pas le centre de projection C.

Nous allons donner une autre interprétation de ce morphisme, en termes de constructions utilisées dans les nºs antérieurs. Pour ceci, avec les notations introduites par ailleurs, considérons

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\;q\;} & \underline{X}^{(m)}_{Q(C)} = \underline{X}^{(m)} \times_{Grass^m} Q(C) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ & & Q(C) \end{array} .$$

Notons d'autre part que q induit un isomorphisme

$$q' : q^{-1}(X - f^{-1}(C)) \xrightarrow{\sim} X - f^{-1}(C) ,$$

et il est immédiat que p_C n'est autre que $p' \, q'^{-1}$, où p' est la restriction de p à $q^{-1}(X - f^{-1}(C))$. On peut dire encore, utilisant q pour faire une identification pure et simple, que p_C est la restricti du morphisme p à $X - f^{-1}(C) \subset \underline{X}^{(m)}_{Q(C)}$. Pour cette raison, il est commode de dénoter encore par p_C^X ou p_C, et d'appeler (mettons) <u>projectic conique étendue</u> de X, relativement à $f: X \rightarrow P$, de centre C, le morphisı

P_C précédent, ~~qu'il sera commode de noter également de la même façon P_C, pour indiquer sa dépendance de C.~~ De cette façon, les propriétés de la projection conique restreinte sont ramenées ~~dans une large mesure~~ à celles de la projection conique étendue, qui a été étudiée systématiquement par ailleurs, ou est sensée l'avoir été (cf nº 10 et nº 12). La question principale qui se pose est, lorsque S=Spec(k), quelles sont les propriétés de la projection conique de X quand on prend C générique dans $\mathrm{Grass}^{m+1}(E)$ (ce qui exige qu'on fasse un changement de base $k \to k(\eta)$, i.e. C est alors en fait une sous-variété linéaire de $X_{k(\eta)}$); des arguments standart, déjà répétés à satiété, permettront d'en conclure les propriétés analogues pour les projections coniques correspondant à des points de $\mathrm{Grass}^{m+1}(P)$ appartenant à un ouvert non vide de ladite grassmanienne, et enfin, lorsque k est infini, on conclut à l'existence d'une (en fait une infinité) de C <u>définie</u> <u>sur</u> k, i.e. une sous-variété linéaire de P lui-même (sans changement de corps de base), donnant lieu à une projection conique ayant les propriétés en question. Il y aurait lieu de bloquer ce genre d'explications générales avec celles de la même eau données dans les nºs 4 et 7, et que nous avons d'ailleurs déjà utilisées plus ou moins implicitement, par exemple au nº13 (cf 13.4. c). Il y a lieu également, à ce propos, d'examiner les propriétés relatives à un faisceau F sur X, en prenant son image inverse $F^{(m)}_{Q(C)}$ sur $\underline{X}^{(m)}_{Q(C)}$. Il faut d'ailleurs, dans la situation précise envisagée ici, des notations plus simples, je propose $\widetilde{X}(C)$ et $\widetilde{F}(C)$, et simplement $\widetilde{X}$ et $\widetilde{F}$ quand aucune confusion n'en résulte (attention, F ~~précédent~~ ici n'est pas celui du début du nº).

Grosso modo, et lorsque disons on suppose f une immersion, les propriétés de la projection conique générique sont assez différentes, suivant qu'on suppose $\dim X \geqslant m$, ou $\dim X \leqslant m$, voire $\dim X < m$.

Par la suite, nous regardons la $C_y \subset P_{k(y)}$, correspondant au point générique y de Grass^{m+1} , et nous dispensons de faire l'interprétatic des résultats obtenus en termes de "presque tous les points" ...

Tout d'abord, nous avons déjà noté ~~en~~ dans 5.3. (et rattrappage du cas général dans nº 12) que C_y coupe "régulièrement" X_y , de façon plus précise et plus générale, pour tout F quasi-cohérent sur X, la section $\phi_y^{(m+1)}$ du Module loc libre ~~fibré vectoriel~~ de rang m+1 sur $X_{k(y)}$ dont le schéma des zéros est C_y ; est F-régulière. En vertu de 10.2. , cela implique par exemple que le morphisme $\widetilde{X}(C_y) \to X_{k(y)}$ identifie $\widetilde{X}(C_y)$ au préschéma déduit de $X_{k(y)}$ par éclatement de $f^{-1}(C_y) = X \times_P C_y$; ~~Dans le cas~~ dans le c où $\dim f(X) \leqslant m$, on aura même $f^{-1}(C_y) = \emptyset$, et par suite $\widetilde{X}(C_y) \xrightarrow{\sim} X_{k(y)}$ est un <u>isomorphisme</u> , (et en fait, la projection coniqu restreinte est alors définie sur X tout entier à priori). Il se pose ensuite la question de la dimension des fibres de $p_{C_y} : \widetilde{X}(C_y) \longrightarrow Q(C_y)$, et de la platitude de ce morphisme. On trouve:

<u>Proposition</u> 14.1. ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ Supposons X irréductible, ~~a~~ plus généralement, que pour toute composante irréductible X_i de X, la fibre de X_i en le point $f(x_i)$ (x_i = point générique de X_i) ait une dimension ~~[illegible]~~ (indépendante de i), ce qui a lieu par exemple (avec d=0) si $f : X \to P$ est quasi-fini. Alors : a) Si $\dim f(X) > m$, alors la dimension des fibres de $p_C : \widetilde{X}(C_y) \longrightarrow Q(C_y)$ sont toutes égales à $\dim X - m$. b) Si dim $\leqslant m$, (et si les fibres non vides des X_i sur P sont toutes de dim d, alors) les fibres non vides de p_C sont toutes de dimension d, ~~i.e. p_C est quasi fini~~ (donc p_C est fini ~~si f est propre sur k ...~~ [illegible] {si $f : X \to P$ est fini} [illegible]).

$Q(C_y)$

~~On se ramène aussitôt, en décomposant X en ses composantes irréd au cas où X est irréductible.~~ Dans le cas a), ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx correspondant xxxxx~~ on sait déjà (je l'espère !) que pour <u>tout</u> point ζ

$\mathrm{Grass}^m(P)$, la dimension de $\underline{X}^{(m)}_{\xi}$ est au moins égale à $\dim X - m$, il en es en particulier ainsi lorsque ξ provient d'un point de $Q(C_y)$. Pour l'inégalité en sens inverse, notons que (nous plaçant sur le corps $k' = k(\xi)$) comme $C_{y,k'} \subset L_\xi$ est ~~de~~ un hyperplan de L_ξ, si la dimension de $\underline{X}^{(m)}_{\xi} = X \times_P L_\xi$ était $\geqslant \dim X - m + 1$, alors celle de $\underline{X}^{(m+1)}_{y} = X \times_P C_y$ serait $\geqslant \dim X - m$ ~~x~~, (puisque le changement de base $k(y) \to k$ transforme ce dernier préschéma en $(X \times_P L_\xi) \times_{L_\xi} (C_{y,k'})$). Or on a au contraire ~~dimxXxpC~~ dim $\underline{X}^{(m+1)} = \dim X - m - 1$ ~~[illegible]~~ ~~(du moins en supposant dim f(X) > m)~~, en vertu du nº2 (revu au nº10). Le cas b) ~~cas où dim f(X)=m est justiciable également du cas b), qui~~ se trait de façon analogue: si on avait $\dim X \times_P L \geqslant d+1$ ~~[illegible]~~ ou ce qui revient au même ~~[illegible]~~ $f_{k'}(X_{k'}) \cap L_\xi$ de dimension $\geqslant 1$, alors on aurait par le même argument que plus ~~[illegible]~~ haut que $\underline{X}^{(m+1)}_{y} \neq \emptyset$, contrairement à ce qu'on avait signalé avant 14.1.

Corollaire 14.2. Supposons X de dimension m et $f : X \to P$ fini (resp quasi-fini), alors le morphisme $p_{C_y} : X_{k(y)} \longrightarrow Q(C_y)$ est fini surjectif (resp. quasi-fini dominant).

En effet, ce morphisme est quasi-fini, et comme $\dim X_{k(y)} = \dim Q(C_y)$, il est dominant; ~~[illegible]~~ si f est fini, p_{C_y} est de plus fini, ~~[illegible]~~ car propre, donc surjectif étant dominant.

Corollaire 14.3. Sous les conditions de 14.1. a), si X est Cohen-Macaulay, alors le morphisme $p_C : \tilde{X}(C_y) \longrightarrow Q(C_y)$ est un morphisme de Cohen-Macaulay, et à fortiori plat.

Pour la démonstration, cf remarque en haut de la page 21, avant 5. pui donne un résultat plus fort, (à inclure dans 14.3), savoir que les φ_ξ pour $\xi \in Q(C_y)$ sont F-réguliers.

Ce Corollaire devrait être modulé, mais pour simplifier on pourra supposer f quasi-fini: si F est un Module de Cohen-Macaulay sur X, et si pour toute composante irréductible Z de Supp F, on a $\dim Z \geqslant m$, alors $\tilde{F}(C_y)$ est CM (et à fortiori plat) relativement à $Q(C_y)$.

On notera qu'on ne peut pas remplacer, ~~xxxx~~ pour obtenir la seule conclusion p_C plat, l'hypothèse CM sur X par une simple hypothèse dimensionelle. Supposons par exemple f une immersion et X irr de dim m, de sorte que p_C est qu fini, et comme $X_{k(y)}$ et $Q(C_y)$ sont irréd de même dimension, ~~le premier CM~~ et le deuxième régulier, p_C ne peut être plat que si $X_{k(y)}$ est CM.

(E1r)

Des propriétés plus fines sont les propriétés différentielles de la projection conique, notamment pour X lisse sur k et $f:X \longrightarrow P$ non ramifié, étudiées au nº12. ~~Dans les cas où les composantes~~ Rappelons que ~~la fibre générique de~~ en dehors d'une partie Z de codimension 1 de $Q(C_y)$, le morphisme p_{C_y} sur $X(C_y)$ est lisse, Et une analyse plus détaillée (esquissée au nº12) montre que si les dimensions des composantes de X sont $\geqslant$ m, alors (ou montrerait, si nous ne la faisons pas) ~~que~~ en dehors d'une partie $Z' \subset$ de $Q(C_y)$ de codimension $\geqslant 2$, les fibres $p_C^{-1}(\zeta) = \underline{X}_\zeta^{(m)}$ ne peuvent avoir au pis que des points ~~doubles~~ singuliers ordinaires (au sens géométrique), et en fait (si f est une immersion et X est géom irréd), ~~juste~~ au plus un tel point, ce dernier ~~étant~~ étant alors nécessairement ~~xxxxx~~ rationnel sur $k(\zeta)$, - ces assertions étant valables tout au moins si k est de car 0, ou à condition de remplacer f par un $\phi_n f$ $(n \geqslant 2)$ comme au nº 9. Il y a lieu également de donner des propriétés différentiell de p_{C_y} dans le cas où dim $X \leqslant m$, et où par suite p_{C_y} est défini sur $X_{k(y)}$. Je me borne à indiquer les propriétés suivantes, dont la démonstration doit ~~être~~ être facile et est laissée à Dieudonné:

Proposition 14.4. Supposons $f:X \longrightarrow P$ non ramifié, et dim $X \leqslant m$. Soit T un sous-préschéma fini de X, Alors : ~~xxxxxxx~~

a) Si f est une immersion, ~~La~~ la restriction de p_C à $T_{k(y)}$ est ~~un monomorphisme,~~ radicielle i.e. "géométriquement injective". Si de plus Y est une partie fermée de X de dimension $\leqslant$ m-1, on a $p_{C_y}^{-1}(p_{C_y}(Y_{k(y)})) \cap T_{k(y)} = \emptyset$.

b) Si X est lisse en les points de T, alors p_{C_y} est non ramifié en tous point ~~des~~ $T_{k(y)}$, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ et de même les pts de $p_{C_y}^{-1} p_{C_y}(T_{k(y)})$.

Proposition 14.5. Supposons $\dim X \leqslant m-1$, ~~Soit X l'image fermée~~ ~~de~~ $f : X \to P$ une immersion, ~~Soit~~ enfin X séparable sur k. Soit Y_y l'image schématique de $X_{k(y)}$ dans $Q(C_y)$. Alors le morphisme induit $p'_{C_y} : X_{k(y)} \to Y_y$ est birationnel, et pour tout point x de $X_{k(y)}$, en dehors d'un ... fermé de X, p'_{C_y} est étale en x et ... en les points de $p'^{-1}_{C_y}p'_{C_y}(x)$.

Signalons la conséquence suivante:

Corollaire 14.6. Soit X un schéma algébrique projectif irréductible et séparable, de dimension n sur un corps infini k. Alors ∃ immersion birationnelle de ~~X est birationellement isomorphe à~~ ~~dans~~ sur une hypersurface ~~de~~ P^{n+1} .

On se gardera de croire ~~que~~, même si X est un sous-préschéma fer lisse géom irréd de P, de dimension $m-1 = n$, que la projection conique p_{C_y} soit nécessairement une immersion . En effet, lorsque k est infini, cela impliquerait qu'il existe une C rationelle sur k ayant la même propriété, donc que X est isomorphe à une hypersurface non singulière de ~~P~~ P^{n+1}. Or même pour $n=1$, (courbe dans X algébrique projective lisse ~~sur~~ et connexe sur un corps alg clos), il est facile de construire des exemples où X ne peut s'immerger dans un P^2 . De même, dans 14.4. , on se gardera de confondre l'énc cé donné avec l'assertion (en général fausse) que p_C soit lui-même ur monomorphisme (contre-exemple précédent~~xxxxxxx~~, ou contre-exemple enc re plus évident si X est lisse de dimension m), ou que p_C soit non ramifié. Pour ce dernier point, on prendra pour s'en convaincre X sous-~~pré~~schéma fermé- lisse ~~de dim~~ irréd de dim m (sur k alg clos dis si ~~XxxxxQx~~ on avait un $X \to Q \simeq P^m$ non ramifié, il serait étale pour raisons de dimensions, or on peut montrer (cf Chap VIII !) que cela im que $X \rightleftarrows P^m$ (P^m étant "simplement connexe"). — La signification géométr que intuitive de 14.4. est que ~~pour x variable dans~~ l'ensemble de ramification de p_{C_y} est "variable" sur k, plus précisément l'ensemble de ramification de p_{C_y} pour y variable dans un ouvert de $\mathrm{Grass}^{m+1}(\bar{k})$ varie dans $X(\bar{k})$, et n'admet aucun ~~point fermé de X~~ "point fixe" ....

Bien entendu, pour justifier dans le cas ~~xxxxx~~ du présent n° le passage de η générique aux points voisins de $\mathrm{Grass}^{m+1}(P)$, et pouvoir également le cas échéant reprendre à notre compte les explications générales de 7.1., il y a lieu de considérer les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X & \widetilde{X}(C) \arrow[l] \arrow[d] \\ S \arrow[u, no head] & Q(C) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

obtenus à l'aide des divers $C \in \mathrm{Grass}^{m+1}(S)$, et plus généralement, ceux obtenus de même après changement de base $T \to S$ pour des points $\xi \in \mathrm{Grass}^{m+1}(P)$:

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[d] & \widetilde{X}(C_\xi) = \widetilde{X}_T(C_\xi) \arrow[l] \arrow[d] \\ T & Q(C_\xi) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

comme déduits, par changements de base $\xi : T \longrightarrow \mathrm{Grass}^{m+1}\cancel{(P)} = \underline{T}$, du diagramme <u>universel</u> (relatif au point canonique de Grass^{m+1} dans $\underline{T}$)

$$\begin{tikzcd} X_{\underline{T}} \arrow[d] & \widetilde{X}(\underline{C}) \arrow[l] \arrow[d, no head] \\ \underline{T} & Q(\underline{C}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $\underline{C}$ est la sous-variété linéaire canonique de $P_{\underline{T}}$. Alors ci-dessus $\widetilde{X}(C_\xi) \longrightarrow Q(C_\xi)$ n'est autre que le morphisme des fibres génériques pour le $\underline{T}$-morphisme $\widetilde{X}(\underline{C}) \longrightarrow Q(\underline{C})$ de ce dernier diagramme, et toute propriété constructible pour ~~xxxx~~ le morphisme des fibres génériques implique la propriété pour les fibres voisines. — Du point de vue notationel, Q doit être envisagé (et même introduit) comme le nom du morphisme de foncteurs naturel $\mathrm{Grass}^{m+1}(P) \longrightarrow$ ~~Xxxx~~ Sous-préschémas $(\mathrm{Grass}^m(P))$.

15. <u>Axiomatisation de certains des résultats précédents</u>.

Je pense surtout aux résultats des n°s 2 à 8, qui pour la plupart tout au moins sont valables sous des conditions plus générales que pour la famille des hyperplans (ou des hypersurfaces de degré donné) de l'espace projectif. Il me semblerait opportun d'adopter un tel point de vue axiomatique dans les premiers nºs de la rédaction en forme. Je n'ai pas tiré au clair pour le moment s'il y a bien moyen de donner une généralisation dans ce sens de Bertini-Zariski (donc des résultats des nºs 4 et 6 et j'ai écrit aux compétences (Serre, Zariski) pour leur demander s'ils avaient connaissance d'une telle extension; j'ai bien l'impression en effet que des hypothèses de nature différentielle simple, du genre de celles envisagées ci-dessous, doivent suffire à impliquer Bertini-Zariski. Si les compétences ne peuvent nous informer de façon satisfaisante, il faudrait essayer de tirer la chose au clair par nos propres moyens.

On part d'un diagramme commutatif de morphismes de présentation finie

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{tikzcd} P & \underline{P} \arrow[l] \arrow[d] \\ S \arrow[u, dash] & G \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(dans le cas d'application principal, P est un fibré projectif, G une grasmanienne dudit, $\underline{P}$ le préschéma d'incidence). Dans les cas les plus importants, le morphisme correspondant $\underline{P} \longrightarrow P\times_S G$ sera une immersion fermée, et on considère G comme ~~définissant une~~ schéma des paramètres d'une famille de sous-préschémas fermés des fibres de P sur S, de façon précise si $\zeta \in G$, $\underline{P}_\zeta$ est un sous-préschéma fermé de $P_s\, k(\zeta)$, où s est le point de S en dessous de ζ. (D'ailleurs, pour la plupart des énoncés dans ce contexte, on aura sans doute S=Spec(k)). Dans le cas général, on peut encore considérer G comme schéma des paramètres d'une famille de préschémas au dessus des fibres de P sur S, à ζ correspondant $\underline{P}_\zeta$ au dessus de $P_s\, k(\zeta)$. Bien entendu, au lieu de prendre pour ζ un point ~~de~~ (absolu de G, on peut également prendre un point à valeurs dans un S-préschéma T, on obtient alors $\underline{P}_\xi \longrightarrow B_T$ (T-morphisme, qui est une immersion ferm dans le cas envisagé d'abord).

Si $f : X \longrightarrow P$ est un morphisme, on pose $\underline{X} = X \times_P \underline{P}$, et on obtient un diagramme de même type que le carré précédent

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \underline{X} \arrow[l] \arrow[d] \\ S & G \arrow[l] \end{tikzcd} .$$

Il est alors évident que toutes les questions étudiées dans les nºs 2 à gardent un sens dans le contexte général qu'on vient de poser, et il y a lieu de dégager les conditions axiomatiques qui assurent les conclusions tirées dans lesdits nºs .

Nous allons supposer P et G plats sur S, G étant à fibres ~~de dimen~~ géométriquement irréductibles (pour pourvoir en considérer les points génériques !), de dimension N, le morphisme $\underline{P} \longrightarrow P$ est supposé lisse à fibres géométriquement irréductibles de dimension N-m . Donc le morphisme $\underline{X} \longrightarrow X$ aura les mêmes propriétés. Toutes les propriétés envisagées ici et plus tard, sont stables par changment de base sur S, et s'appliqueront en particulier aux fibres.

Supposons d'abord S=Spec(k). Soit Z une partie fermée de X de dimension d, alors son image inverse $\underline{Z}$ dans $\underline{X}$ est une partie fermée de dimension $d + (N-m) = N + d-m$. Si $d < m$, $\underline{Z}$ est de dimension $< N$, donc $\underline{Z} \longrightarrow G$ ne peut être dominant, donc si η est le point générique de G, on a $\underline{Z}_\eta = \emptyset$; en fait, ce raisonnement montre même (en remplaçant Z par $\overline{f(Z)}$) que si $\dim f(Z) < m$, alors $\underline{Z}_\eta = \emptyset$. On veut une condition sur (D) assurant que si $\dim f(Z) \geq m$, alors $\underline{Z}_\eta \neq \emptyset$; ~~et de façon plus précise que dim $\underline{Z}$ = dim Z − m . Pour la propriété $\underline{Z} \neq \emptyset$~~ ; il semble qu'elle doive faire un axiome primitif de la situation (dans la situation du n°2.2. , elle résultait d'un argument global assez spécial) pour toute partie fermée irréductible Z de P de dimension m, $Z_\eta \neq \emptyset$ ~~xx~~ ~~[...]~~ Reprenant alors la partie fermée Z de X, ~~xxxx~~ telle que $\dim f(Z) \geq m$, on voit que $\underline{Z}_\eta \to G$ e[st] dominant, et par suite $\underline{Z}_\eta$ est de dimension $\dim \underline{Z} - \dim G = \dim Z - m$.

Ces propriétés permettent de développer dans le contexte présent les résultats correspondant à 2.1. à 2.11. Il faut une condition sur (assurant la validité de 2.12. i.e. que si X est lisse, alors $\underline{X}$ l'est également, en supposant $f : X \to P$ non ramifié. Nous supposerons maintenant P lisse sur k, ($\underline{P} \to P \times_k G$ quasi-fini,) (où nous supposons k alg clos) et la condition suivante vérifiée: pour tout $x \in P(k)$, et tout sous-espace vectoriel V de dimension $n \geq m$ de l'espace tangent $T_x(P)$ de P en x, considérons l'ensemble $E(x,V)$ ~~Ex~~ des $\xi \in G(k)$ tels que $\underline{P}_\xi$ ait un point z au dessus de x ~~[...]~~ ne satisfaisant pas l'ensemble de conditions suivantes: $\underline{P}_\xi$ est lisse e[n] z, ~~[...]~~ l'application tangente à $\underline{P}_\xi \to P$ en z : $T_z(\underline{P}_\xi) \to T_x(P)$ est injective (i.e. $\underline{P}_\xi \to P$ non ramifié en z) et son image est "transversale" à V i.e. sa somme avec V est $T_x(P)$. Alors $E(x,V)$ (dont nous savons que c'est la trace d'un ensemble constructible ~~xxxxxxxxxx~~ bien déterminé de G sur G(k)) est de dimension $\leq N-n-1$. — Moyennant cette condition, ~~xx~~ l'application du critère jacobien et un comptage de dimensions montre que l'ensemble fermé E des points x de $\underline{X}$ tels que $\underline{X} \to G$ soit non lisse en x, ou $\underline{P} \to G$ non lisse en $\underline{f}(x)$, ou $\underline{P} \to P$ ramifié en $\underline{f}(x)$, est de dimension $\leq n + (N-n-1) = N-1$, (X étant lisse partout de dimension n)

Donc $\dim E < N = \dim G$, donc $E_y = \emptyset$, et à fortiori X_y est lisse. Ce point acquis, on conclut aussitôt à la validité des variantes évidentes de 2.12. à 2.18. dans le contexte actuel.

Le passage au nº4 d'une section générique à une section généra[le] et les développements du nº5, sont évidemment valables dans le contexte actuel (mais sont à tel point des tautologies ou redites ~~xxxxxx~~ des par.8,9,12 ~~x~~ qu'on hésite à les énoncer en forme). De même les développements de 7.1., valables en tous cas si k est ~~infini~~ alg clos (et même si k est simplement infini, si on suppose G rationelle sur k) et les cas particuliers 7.2., 7.3. ; quant au résultat 7.4. ~~et 7.5~~ c'est évidemment une application ~~de nature~~ spéciale de la situation des sections hyperplanes. Comme j'ai dit, les nºs 3 et 6 sont suspendus à l'ext[en]sion du th. de Zariski.

Il resterait à étendre également les résultats du nº8 (respris a[u] nº 12), qui prendront peut-être comme-ça une allure plus sympathique. Je te conseille même de commencer par rédiger ces résultats dans ce cadr[e] en essayant de pousser aussi loin que possible dans cette voie. J'ai l'impression qu'on doit pouvoir récupérer au moins tout ce qui n'est pa[s] conséquence directe de 8.7. c) (et encore pourrait-on essayer d'abstraire des conditions axiomatiques faisant marcher une variante d[e] 8.7. c). Je me borne à ces recommandations, mais suis prêt à y reveni[r] avec plus de détails si tu as des difficultés particulières.

nouveau ECA V

IV 16

Un nouveau n° : <u>Ensemble singulier et supersingulier d'une fonction, et critères différentiels</u>.

Ce n° sera utilisé au par.20 des sections hyperplanes, mais sa place naturelle me semble bien au par. 16.

<u>Définition</u> 1 Soient X un préschéma régulier, ϕ une section de $\underline{O}_X$. Un point $x \in X$ est dit <u>zéro</u> <u>singulier</u> pour ϕ si on a $\phi_x \in \underline{m}_x^2$, zéro <u>supersingulier</u> si c'est un zéro singulier et si de plus l'élément de $\underline{m}_x^2/\underline{m}_x^3 \simeq \mathrm{Sym}(\underline{m}_x/\underline{m}_x^2)$ qu'il définit, interprété comme une forme quadratique sur le dual $\underline{t}_x$ de $\underline{m}_x/\underline{m}_x^2$ sur k(x), est une forme dégénérée. (Un zéro singulier qui n'est pas supersingulier est parfois appelé <u>zéro singulier ordinaire</u>).

<u>Remarques</u> 2 Si $x \in V(\phi)$, alors x est un zéro non singulier de ϕ sss $\phi_x \neq 0$ et x est un point non singulier i.e. régulier de $V(\phi)$, i.e. sss x est un point régulier de $V(\phi)$ et $V(\phi) \neq X$ au voisinage de x . ~~On peut prouver que si x est singulier pour~~ $\cancel{\phi}$~~, il est singulier ordinaire sss~~ $\cancel{\phi_x \neq 0}$ ~~et la multiplicité de~~ $\cancel{\underline{O}_{V(\phi),x}}$ ~~est égale à 2 (ou, comme on dit encore parfois, x est un point singulier ordinaire du préschéma~~ $\cancel{V(\phi)}$ ~~); donc un~~ $\cancel{x \in V(\phi)}$ ~~est non supersingulier pour~~ $\cancel{\phi}$ ~~sss~~ $\cancel{\phi_x \neq 0}$ ~~et la multiplicité de~~ $\cancel{\underline{O}_{V(\phi),x}}$ ~~est~~ $\cancel{\leq 2}$.

<u>Définition</u> 3. Soient X un préschéma lisse sur un corps k, ϕ une section de $\underline{O}_X$, $x \in V(\phi)$. On dit que x est un zéro <u>géométriquement singulier</u> (resp. <u>géométriquement supersingulier</u>) de ϕ rel à k, si pour toute extension k' de k et tout point ξ de X à valeurs dans k', localisé en x, le point correspondant x' de $X_{k'}$ est un zéro singulier (resp. supersingulier) de $\phi_{k'}$.

Remarques 4. a) Du ~~xx~~ critère qui sera développé tout de suite, il résu
te que dans la définition 3, il suffit de tester avec un seul point à valeurs dans un k' - on peut par exemple prendre $k'=k(x)$ ou $\overline{k(x)}$, le point canonique à valeurs dans ce k'. b) Il résulte de la rem que 2 que x est géométriquement non singulier pour ϕ sss $\phi_x \neq 0$ e $V(\phi)$ est lisse sur k en x. c) Supposons que l'on ait un préschéma X li sur un autre S, une section ϕ de $\underline{O}_X$ et un $x \in V(\phi)$, alors on dit que est un zéro singulier (resp. supersingulier) rel à S, s'il l'est rel à k(s) sur la fibre X_s (s étant l'image de x dans S). d) Sous les conditions de déf 1, on voit tout de suite que la singularité resp supersingularité d'un $x \in V(\phi)$ pour ϕ n'est pas modifiée, quand on remplace ϕ par $\phi'=u\phi$, où u est une unité en x. Il s'ensuit aussitôt q la ~~xxxxx~~ définition 1 et par suite aussi la déf. 3 s'étendent de faç évidente au cas où ϕ est une section d'un Module inversible $\underline{L}$ (de faço à redonner les définitions initiales pour $L = \underline{O}_X$) .

~~Considérons la section~~ 2. Soit X un préschéma lisse sur un autre Y, et soit ϕ une section de $\underline{O}_X$, d'où une section $d^2_{X/Y}\phi$ de $P^2_{X/Y}$, se réduisant en la section $d^1_{X/Y}\phi$ de $P^1_{X/Y}$, laquelle elle-même se réduit en la section $d^0\phi = \phi$ de $P^0_{X/Y} = \underline{O}_X$. Ceci posé, on a la

Proposition 5. L'ensemble des zéros de $d^0\phi$ (resp $d^1\phi$) ~~resp d^2~~ est respectivement égal à l'ensemble $V(\phi)$ des zéros de ϕ (resp. à l'ensemble $V(\phi)^{sing}$ des zéros de ϕ singuliers rel à S) ~~resp. à l'ens~~ ~~$V(\phi)^{sup\ sing}$ des zéros de ϕ supersinguliers rel à S).~~

La première assertion est triviale, la deuxième n'est autre que le critère jacobien, ou si on préfère résulte de l'isomorphisme canonique $\underline{m}_x/\underline{m}_x^2 \simeq \Omega^1_{X/k}(x)$ lorsque x est un point rat/k d'un préschéma x sur k, ~~[struck-through typed line]~~

~~[struck-through typed line]~~ $gr^2(P^2_{X/k})(x)$

Notons que $gr^1(\underline{P}^1_{X/Y}) \simeq \underline{\Omega}^1_{X/Y}$, par suite la restriction $d^1\phi\,|V(\phi)$ peut être interprété comme une section de $\underline{\Omega}^1_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V(\phi)}$, qui n'est autre d'ailleurs que la restriction de $d_{X/Y}\,\phi$ à $V(\phi)$. Nous pouvons alors considérer le <u>préschéma des zéros de cette section</u>, que nous noterons $V(\phi)^{sing}$, et dont l'ensemble sous-jacent n'est autre que l'ensemble des zéros de ϕ singuliers rel à Y en vertu de prop.5. (NB si ψ est une section d'un Module localement libre de type fini $\underline{E}$ sur un préschéma X, on définit de façon évidente le sous-préschéma des zéros de ψ, par exemple comme défini par l'Idéal image de $\check{\underline{E}} \longrightarrow \underline{O}_X$ transposé de ψ ; lorsque $\underline{E} = \underline{O}_X^{\,n}$ et $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, alors cet idéal n'est autre que $\sum \psi_i\, \underline{O}_X$, qui définit $V(\psi_1, \dots, \psi_n)$). Prenant maintenant la restriction $d^2\phi\,|V(\phi)^{sing}$, et notant que $gr^2(P^2_{X/Y}) \simeq Sym^2(\underline{\Omega}^1_{X/Y})$, on trouve une section canonique $M(\phi)$ de $Sym^2(\Omega^1_{X/Y}) \otimes \underline{O}_{V^{sing}}$. On vérifie immédiatement que (prenant des point de X à valeurs dans des corps ...) cette section est précisément celle qui détermine les formes quadratiques envisagées dans déf 1 (dans le cas d'un X_k déduit de X/S par $Spec(k) \to S$). On en déduit une description de l'ensemble $V(\phi)^{sup\ sing}$ en termes de cette section, de la façon suivante: interprétant $M(\phi)$ comme définissa homomorphisme

$$M(\phi)' : \quad \mathcal{V}_{X/Y} \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{V^{sing}} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/Y} \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{V^{sing}} ,$$

il faut prendre l'ensemble des points en lesquels cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme. Cela montre en particulier que $V(\phi)^{sup\ sing}$ est un ensemble fermé. On peut le préciser, ~~en~~ introduisant ce dernier

$$D(\phi) = \det M(\phi) \quad \in \Gamma\,(\underline{\Omega}^d_{X/Y}{}^{\otimes 2} \otimes \underline{O}_{V^{sing}}) ,$$

en supposant X de dimension relative d sur Y en chaque point. Il y a lieu de désigner par ~~XXX~~ $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ le sous-préschéma fermé de ~~xxxxx~~ $V(\phi)^{\text{sing}}$ (donc de X) défini par l'annulation de cette section (d'un Module inversible cette fois ci), dont l'ensemble sous-jacent est ce qu'il faut. Il y a lieu de résumer cette construction dans une

Proposition 6.

Dans le cas général, on ne peut ~~dirx~~ dire rien de plus précis sur $V(\phi)^{\text{sing}}$ et $V(\phi)^{\text{sup sing}}$. Nous allons examiner maintenant un cas particulier, intéressant ~~pour~~ certaines applications. Nous supposerons que Y est également lisse sur un préschéma S, avec une dimension relative constante m pour fixer les ~~d~~idées. De plus, nous supposons que $V(\phi)^{\text{sing}}$, que nous notons simplement V^1 pour simplifier, défini par l'annulation de la section $d^1\phi$ du Module $\underline{P}^1_{X/Y}$ ~~xxxxxxxxx~~ loc libre de ~~xxx~~ rang d+1, est lisse sur S de di~~mansion~~ dimension relative $(m+d) - (d+1) = m-1$. (NB Bien entendu, les notations $V(\phi)^{\text{sing}}$ et $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ sont ambigues en ce sens qu'elles ne font pas intervenir le préschéma de base X auxquelles elles se rapportent; dans le cas actuel, il est sous-entendu que c'est Y, et on notera d'ailleurs qu'il résulte aussitôt des hypothèses que tout zéro de ϕ singulier est non singulier relativement à S). Dans cette situation, nous pouvons écrire le diagramme suivant (de Modules loc. libres sur V^1) :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d, leftarrow] & & \\
 & & \underline{\Omega}^1_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1} & & \\
0 \arrow[r] & \underline{P}^{1}_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1} \arrow[ur, "pr"] \arrow[r] & \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_{V^1} \arrow[u] \arrow[r] & \underline{\Omega}^1_{V^1/S} \arrow[r] & 0 \\
 & \underline{O}_{V^1} \arrow[u] \arrow[r] & \underline{\Omega}^1_{Y/S} \otimes \underline{O}_{V^1} \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"] & & \\
\omega^{-2}_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1} \arrow[ur, "="] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

La colonne provient de la suite exacte de transtitivité pour les morphismes lisses $X \to Y$ et $Y \to S$, en ~~xx~~ tensorisant par $\underline{O}_{V1}$ (cela reste exact, car tous les modules de la suite sont loc libres). La ligne horizontale est ~~unx~~ cas particulier d'une suite exacte obtenue chaque fois que sur X ~~lisse~~ sur S, on a une section φ d'un module loc libre F et qu'on prend le schéma W des zéros; on trouve une suite exacten

$$\check{F}\otimes \underline{O}_X \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_W \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{W/S} \longrightarrow 0$$

et (si X/S est lisse) le premier homomorphisme est injectif exactement en les points où W est lisse sur X avec la "bonne " dimension relative (i.e. partout dan le cas actuel). ~~Cet homomorphisme~~ Cette suite exacte est pratiquement ~~[illegible]~~ une conséquence immédiate de la suite exacte

$$\underline{J}/\underline{J}^2 \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_W \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \longrightarrow 0$$

qui figure au par.16 (on y pourrait mettre en corollaire la version signalée ici). La caractérisation de l'ensemble des points où on peut mettre un zéro à gauche est contenue dans le critère Jacobien.

Notons que l'on a un isomorphisme canonique

$$\underline{P}^1_{X/S} = \underline{\Omega}^1_{X/S} + \underline{O}_X \; ; \text{ d'où } \; \check{\underline{P}}^1_{X/S} = \mathcal{G}_{X/S} + \underline{O}_X \; ,$$

d'autre part on vérifie que l'homomorphisme composé μ du diagramme (J) est nul sur le facteur $\underline{O}_{V1}$, et sur le facteur $\mathcal{G}_{X/S} \otimes \underline{O}_{V_1^2}$ il se réduit à l'homomorphisme M(φ)' déduit de la section M(φ) de $\underline{\mathrm{Sym}}^2(\underline{\Omega}^1_{X/S}) \otimes \underline{O}_{V1}$ déjà envisagée. Donc en un point x de X, M(φ) est non dégénéré i.e. M(φ)' est surjectif sss μ est surjectif en x, et on voit sur le diagramme (J) que cela équivaut aussi à dire que ν est surjectif en x (car l'un et l'autre signifie que l'homomorphisme canonique de ~~xxxx~~ la somme des deux sous Modules envisagés de $\underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_{V1}$ dans ce derniers est surjectif en x). On trouve ainsi :

<u>Proposition</u> 7. Sous les conditions précédentes (à rappeler), l'ensemble sous-jacent à $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ n'est autre que l'ensemble des points de $V(\phi)^{\text{sing}}$ ~~xxxix~~ où le morphisme $V(\phi)^{\text{sing}} \longrightarrow Y$ (de préschémas lisses sur S de dimension relative $m-1$ et m respectivement) est <u>ramifié</u>.

En termes de papa (qu'il faudrait signaler en remarque), un point $x \in V(\phi)$ est donc supersingulier rel à Y sss "il consiste en au moins deux points singuliers confondus" ....

On peut et doit préciser prop.7 du point de ~~vue~~ d'une identité de ~~xxx~~ sous-préschémas et non seulement de sous-ensembles. En effet, $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ a été défini comme un sous-préschéma fermé de X , or on peut également définir un sous-préschéma fermé naturel de V^1 de telle façon que l'ensemble sous-jacent soit l'ensemble des points de ramification par rapport à Y. En effet, il faut exprimer l'ensemble des points où un certain homomorphisme de modules loc libres $Q \ (= \underline{\Omega}^1_{Y/S} \otimes \underline{O}_{V^1}) \longrightarrow R \ (= \underline{\Omega}^1_{V^1/S})$ n'est pas surjectif. Si q et r sont les rang respectifs, c'est aussi l'ensemble des points où $\bigwedge^r Q \rightarrow \bigwedge^r R$ n'est pas surjectif, ce qui est aussi l'ensemble des zéros de la section évidente de $\underline{\mathrm{Hom}}(\bigwedge^r Q, \bigwedge^r R) \simeq (\bigwedge^{q-r} Q) \otimes (\bigwedge^r R) \otimes (\bigwedge^q Q)^{\vee}$, donc l'ensemble sous-jacent au ~~préschéma~~ sous-schéma fermé des zéros de cette section, soit $\underline{\mathrm{Ram}}(V^1/Y)$. Je dis que ce dernier sous-schéma est identique à $V(\phi)^{\text{sup sing}}$. C'est un simple exercice sur le diagramme plus haut, compte tenu que $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ est défini par le même procédé que celui explicité pour $Q \longrightarrow R$, mais en termes de l'homomorphisme $P \ (= \check{\underline{P}}^1_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1}) \longrightarrow S \ (= \underline{\Omega}^1_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1})$, comme il résulte de la description de μ donnée plus haut. On est alors ramené à la situation générale suivante:

On a sur un ~~préschéma~~ [illegible] W un module localement libre M de rang m, et deux sous-modules localement libres P et Q de rangs respectifs p et q tels que p+q=m+1 , on utilise la construction précédente relati-vement aux morphismes $P \longrightarrow M/Q = S$ et $Q \longrightarrow M/P = R$, pour trouver des sections ~~dx~~ a de $P \otimes \det S \otimes \det P^{-1} = P \otimes \det M \otimes \det P^{-1} \otimes \det Q^{-1}$ et b de $.. = Q \otimes \det M \otimes \det P^{-1} \otimes \det Q^{-1}$, qu'on peut aussi envisager comme des homomorphismes de $\underline{L} = \det P \otimes \det Q \otimes \det M^{\cdot}$ dans P resp. Q . (NB on dénote, pour un Module loc libre F, par dét F sa puissance extérieure maxima, et on utilise que, pour une suite exacte 0 F' F F" 0 de tels Modules, on a un isomorphisme canonique det F det F' $\otimes$ det F"). Ceci posé, <u>on a commutativité dans le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] & M \\ \det P \otimes \det Q \otimes \det M^{-1} = L \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"] & Q \arrow[u, hook] \end{tikzcd} ,$$

(évdentuellement au signe près, cela dépend peut-être des conventions adoptées pour définir certains des isomorphismes canoniques utilisés, qui comportent le choix d'un signe ...), donc les idéaux $\underline{I}(a)$ et $\underline{I}(b)$ sont identiques (puisque P et Q sont loc facteurs directs dans M). NB en les points $\notin V(a)=V(b)$, L est exactement l'intersection de P et Q dans M

Il reste, pour clariffer complètement la situation particulière envisagée avec X/Y/S et ϕ , décrite dans le diagramme (D) plus haut, ~~dx~~ d'expliciter a et b . On trouve d'abord

$$\det P = \omega_{X/Y}^{-1} \otimes \underline{O}_{Y^1} , \quad \det Q = \omega_{Y/S} \otimes \underline{O}_{Y^1}$$

$$\det M = \omega_{X/S} \otimes \underline{O}_{Y^1} = \omega_{X/Y} \otimes \omega_{Y/S} \otimes \underline{O}_{Y^1}$$

(le dernier isomorphisme provenant de la suite exacte de transitivité pour les $\underline{\Omega}^1$ pour les morphismes~~x~~ lisses X—Y et Y—S), d'où

$$\underline{L} \simeq \omega_{X/Y}^{-2} \otimes \underline{O}_{Y^1}$$

(NB $\omega_{X/Y}$ désigne ~~lxxx~~ dét $\underline{\Omega}^1_{X/Y}$) . Ceci dit, <u>l'homomorphisme a se factorise par la composante $\underline{O}_{Y^1}$</u>

de $\check{\underline{P}}_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1}$, et en tant qu'homomorphisme dans cette composante, il est déterminé précisément par la section $D = \text{dét}\, M(\phi)$ déjà envisagée par ailleurs (tjrs modulo un signe à déterminer). Bien entendu, l'homomorphisme b) s'en déduit, compte tenu de la commutativité énoncée dans le lemme. ~~Axx~~ Les points non supersinguliers$_x$ sont donc exactement ceux en lesquels $\underline{a}: \underline{\omega}^{-2}_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1} \longrightarrow \underline{O}_{X^1}$ est un isomorphisme, et en ces points, ~~xxxxxxdéfinitxxxxxisomorphismexxxx~~ le facteur $\underline{O}_{X^1}$ s'identifie donc exactement à l'intersection de $\underline{P}^1_{X/Y} \otimes \underline{O}_{V^1}$ et $\underline{\Omega}^1_{Y/S} \otimes \underline{O}_{V^1}$ dans $\underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_{V^1}$. Donc sur l'ouvert de~~x~~ V^1 formé des points non supersinguliers, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}_{V^1} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{Y/S} \otimes \underline{O}_{V^1} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{V^1/S} \longrightarrow 0 ,$$

ainsi que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}_{V^1} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_{V^1} \longrightarrow (\underline{\Omega}^1_{X/Y} + \underline{\Omega}^1_{Y/S}) \otimes \underline{O}_{V^1} \longrightarrow 0$$

Il faudrait résumer toute cette situation dans une proposition récapitulative, et sous une forme légèrement plus générale, en partant d'une section ϕ d'un Module inversible ~~xxx~~ K ~~sur~~ X - ce qui oblige à tordre par K un certain~~s~~ nombre~~s~~ des Modules introduits dans les considérations précédentes. C'est en effet cette situation qu'on rencontre dans le par. des sections hyperplanes. Signaler aussi que $V(\phi)^{\text{sing}}$ ~~xxxxx~~ et $V(\phi)^{\text{sup sing}}$ ne changent pas en remplaçant ϕ par u ϕ, où u est une unité, en fait $d(\phi)$, $V(\phi)$ et $M(\phi)$ sont multipliés par u et $D(\phi)$ est multiplié par u^n (n = dim. relative de X sur Y).

<u>Remarque</u> Sous les conditions envisagées sur X,Y,S,ϕ , comme ~~xxx~~)
$U = V(\phi)^{\text{sing}} - V(\phi)^{\text{sup sing}}$ est non ramifié sur Y, ses fibres sur Y sont discrètes, ce qui implique que pour tout $y \in Y$, tout zéro singulier ordinaire de ϕ_y dans X_y est isolé dans l'ensemble des zéros singuliers, ~~et~~ i.e. est ~~à fortiori est~~ isolé dans l'ensemble des points non lisses de $V(\phi_y)/k(y)$ ~~Parxxxxitx~~ On en conclut p.ex. aussitôt que si $d \geq 2$, c'est un point géométri-

ment normal de V_y sur $k(y)$, (puisque de toutes façons ~~X~~ V_y est CM).
On peut montrer plus généralement, sous les conditions de déf.1 , que x est un zéro singulier ordinaire, alors x est une singularité isolée de $V(\phi)$ en ce sens que toute générisation ~~du~~ x' de x dans $V(\phi)$ est un point régulier de $V(\phi)$ (donc si le lieu singulier de $V(\phi)$ est fermé, p. ex. si X est "exxcellent" , x est bien un point isolé de ce lieu singulier). ~~Lorsque~~ (Pour bien faire, il faudrait inclure ce résultat au Chap IV , mais le par. 16 ne semble guère le lieu. Où le mettre ?). Il s'ensuit que si X est lisse sur un corps k, et si x est un zéro géométriquement singulier ordinaire, alors x est un point isolé de l'ensemble des points de non lissité de $V(\phi)$, donc est géom. normal si $\dim_x(X) \geq 2$, (mais nécessairement non normal si $\dim_x X = 1$, comme on le ~~vérifie~~ constate par exemple sur le cas type $\phi = xy$, x et y fonctions coordonnées dans le plan affine)

Voici le diagramme analogue à (D), mais pour une section φ d'un Module inversible K :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & & \Omega^1_{X/Y}\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[u] & & \\
\cdot \arrow[r] & P^1_{X/Y}(K)^\vee\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[r] \arrow[ur, "\mu"] & \Omega^1_{X/S}\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1_{Y'/S} \arrow[r] & \cdot \\
 & K^{-1}\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1_{Y/S}\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[u] \arrow[ur, "\nu"'] & & \\
\omega^{-2}_{X/Y}\otimes K^{-1}\otimes\underline{O}_{Y'} \arrow[ur] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Arrivé à ce point admirable de généralité, je m'aperçois malheureusement que ces développements sont encore trop particuliers, et qu'au lieu d'un sous-préschéma défini par une seule section de $\underline{O}_X$, il y a lieu de considérer celui défini par m sections, ou ce qui revient au même, par un homomorphisme $\underline{E} \longrightarrow \underline{O}_X$, où $\underline{E}$ est un Module loc libre de rang m. Je te laisse le soin de décider s'il y a lieu dès le début de commencer avec le cas général, suivant le principe qu'il faut procéder du général au particulier.

Introduisons d'abord une terminologie pour des anneaux A à augmentation $A \rightarrow A/I$ (qui sera utilisée également dans le contexte faisceautisé). L'augmentation est dite <u>régulière</u> (ou devons nous dire quasi-régulière, avec les définitions adoptées au par.19 ?) si a) I/I^2 est un A/I -Module projectif de type fini, et b) l'homomorphisme

$$\theta : \mathrm{Sym}\,(I/I^2) \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A)$$

est un isomorphisme. Nous dirons que l'augmentation est de type "<u>quadratique ordinaire</u>" lorsque a) ci-dessus est vérifié, ainsi que b') l'homomorphisme canonique précédent a un noyau engendré par θ^2, lequel noyau $\underline{K}$ est un sous-Module inversible "non dégénéré" de $\mathrm{Sym}^2(I/I^2)$. Par "non dégénéré" nous entendons que l'homomorphisme correspondant

$$\underline{K} \otimes (\underline{I}/\underline{I}^2)^{\vee} \longrightarrow \underline{I}/\underline{I}^2$$

(déduit en utilisant l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Sym}^2(I/I^2) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\,(I/I^2)^{\vee},\, I/I^2\,)\quad)$$

est bijectif, ou ce qui revient au même surjectif (car il s'agit de Modules projectifs sur A/I de même rang en chaque point), ou encore : prenant localement une base ϕ de $\underline{K}$, ~~l'homomorphisme correspondant~~ la forme quadratique correspondante sur $(I/I^2)^{\vee}$ est non dégénérée. Il suffit d'ailleurs de vérifier ces dernières conditions pour ~~xx~~ les fibres réduites en les différents idéaux premiers (ou même seulement maximaux) de A/I .

Proposition 8. Pour que l'augmentation $A \to A/I$ soit de type quadratique ordinaire, il f et s que les conditions suivantes soient vérifiées:

1º) ~~xxxx~~ Les $gr_I^n(A)$ sont projectifs de type fini sur A/I .

2º) Si d désigne le rang de $gr_I^1(A) = I/I^2$ en un $\underline{p} \in \mathrm{Spec}(A/I$ alors le rang de $gr_I^n(A)$ en ce même point est égal (ou simplement $\geqslant$) à $\binom{n+d}{d} - \binom{n-2+d}{d}$.

3º) (1º et 2º impliquent déjà que $\underline{K} = \mathrm{Ker}\, \theta^2$ est un Module inversible localement facteur direct dans $\mathrm{Sym}^2(I/I^2)$). Le sous Module $\underline{K} = \mathrm{Ker}\, \theta^2$ de $\mathrm{Sym}^2(I/I^2)$ est non dégénéré.

La démonstration est immédiate à partir du lemme suivant; ~~que je t laisse le soin de démontrer:~~

~~Proposition~~ Lemme 8.1. Soient B un anneau, M un B-module projectif de type fini, $\phi \in \mathrm{Sym}^2(M)$ un élément "non dégénéré" , alors la multiplication par ϕ

$$\mathrm{Sym}^{n-2}(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}^{n}(M)$$

est un isomorphisme sur un sous-module facteur direct, donc le conoyau est un Module projectif de rang $\binom{n+d}{d} - \binom{n-2+d}{d}$ si M est de rang d.

On est immédiatement ramené au cas où B est le spectre d'un corp où c'est trivial (en fait, le "non dégénéré" nous a servi uniquement pour assurer que les $\phi(x)$, $x \in \mathrm{Spec}(B)$, sont tous $\neq 0$, et on pourrait formuler le lemme plus raisonnablement en remplaçant 2 par un entier $k \geqslant 1$ quelconque, sans parler de non dégénérescence).

Proposition 9. Soit A un anneau augmenté vers A/I, à augmentation régulière, I/I^2 étant projectif de rang n sur A/I . Soit E un A-module projectif de rang m, $u:E \to I$ un homomorphisme, d'où un homomorphisme

$$u\otimes id_{A/I} : E\otimes A/I \longrightarrow I/I^2 .$$

~~Conditions Posons~~ Soit $B = A/u(E)A$, muni de l'augmentation $B \to B/J = A/I$ (où $J = I/u(E)A$). Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) L'anneau ~~augmenté~~ B ~~B/J est~~ a une augmentation $B \to B/J$ de type quadratique ordinaire, de rang $n-(m-1) = n-m+1$ (le "rang de l'augmentation" est par définition celui du Module projectif J/J^2).

(ii) $K = \mathrm{Ker}\, u\otimes id_{A/I}$ est un Module inversible, et l'homomorphisme naturel $K \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(J/J^2) = \mathrm{Sym}^2((I/I^2)/\mathrm{Im}\, E\otimes A/I)$ est "non dégénéré".

Il serait peut-être plus clair d'introduire une notation $V = I/I^2$, et $W = J/J^2 = V / \mathrm{Im}\, E\otimes A/I$. L'homomorphisme qualifié de naturel dans (ii) s'obtient en notant que K s'envoie en tous cas dans $I^2/(I^3 + \cancel{I u(E)}\ u(IE)) = (I^2/I^3)/\mathrm{Im}\, IE \simeq \mathrm{Sym}^2(I/I^2)/ \mathrm{Im}\ (I/I^2)\otimes(E\otimes A$ où $I/I^2\otimes(E\otimes A/I) \to \mathrm{Sym}^2(I/I^2)$ est défini via l'homomorphisme canonique de multiplication $I/I^2 \otimes I/I^2 \to \mathrm{Sym}^2(I/I^2)$. Ces explicitations posées, la démonstration de la prop.9 est à peu près triviale.

Corollaire 10. Soit A un anneau local régulier de dimension n, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $k=A/\mathfrak{m}$, E un A-module libre de rang m, $u:E \to \mathfrak{M}$ un homomorphisme, ~~Conditions équivalentes~~ $B = A/u(E)A$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/u(E)A$ l'idéal maximal de B, $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $W = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \cancel{\mathfrak{m}}\ V/ \mathrm{Im}\, E\otimes k$. Conditions équivalentes:

(i) B est de dimension n-m (i.e. , en termes d'une base ~~de~~ (ϕ_i) de E, les images des ϕ_i dans A forment une suite A-régulière) et ~~est~~ le ~~singularité~~ point fermé de Spec(B) est une singularité quadratique ordinaire (par quoi nous entendons que l'augmentation $B \to B/\mathfrak{n}$ est de type quadratique ordinaire).

(ii) Il existe une base $\phi_1 ,\ldots, \phi_m$ de E telle que $\sqrt{A/\sum_{i=1}^{m-1} u(\phi i)}$.

$= A_{m-1}$ ~~soit singulier~~ régulier de dimension $n-(m-1)$, et b) l'image de $u(\phi_m)$ dans A_{m-1} admette le point fermé de $\mathrm{Spec}(A_{m-1})$ comme zéro singulier ordinaire (cf définition 1).

(ii bis) ~~Pour toute~~ Le rang de $\mathrm{Im}(E\otimes k \to V)$ est m-1, et pour toute base $(\phi_i)_{1\leq i\leq m}$ de E telle que les images des ϕ_i $(1\leq i\leq m-1)$ dans V sont linéairement indépendantes, les conditions a) et b) de (ii) sont satisfaites.

(iii) Le noyau K de $E\otimes k \to V$ est de dimension 1, et si $\phi\in K - \{0\}$ ~~la forme~~ l'élément de $\mathrm{Symm}^2(W)$ défini par ϕ est une forme quadratique non dégénérée.

Notes que l'analogue des conditions (ii) et (ii bis) aurait déjà pu remonter dans la proposition 9. Il y a lieu d'introduire la terminologie suivante: si X est un préschéma régulier, $\underline{E}$ un Module localement libre ~~de rang m~~ sur X, $u: \underline{E} \to \underline{O}_X$ un homomorphisme i.e. u une section de $\check{\underline{E}}$, on dira que l'élément x de $V(u)=V(u(\underline{E})\underline{O}_X)$ est un ~~zéro non singulier~~ "zéro non singulier" pour u, si u est $\underline{O}_X$-régulier i.e. $\dim \underline{O}_{V(u),x} = \dim \underline{O}_{X,x} - \mathrm{rang}_x \underline{E}$, et si de plus x est un point régulier de V(u), ce qui en termes d'une base $\phi_1,\dots,\phi_m$ de $\underline{E}$ au voisinage de x s'exprime aussi en disant que les $u(\phi_i)$ forment une partie d'un système régulier de paramètres de $\underline{O}_{X,x}$; dans le cas contraire, x est dit un zéro singulier. On dit que x est un zéro singulier ordinaire s'il satisfait aux conditions équivalentes du corollaire 10 (ce qui implique que c'est bien un zéro singulier), où évidemment $A=\underline{O}_{X,x}$ etc. On dit encore que x est un zéro supersingulier s'il est singulier, sans être singulier ordinaire. Donc non supersingulier = non singulier ou singulier ordinai
Enfin, lorsque X est lisse sur un corps k, on introduit les variantes géométriques de ces notions de façon évidente. On notera que dans ces

notions, mis à part ~~xxx~~ la condition dimensionelle = la condition de $\underline{O}_X$-régularité, le caractère de x se voit ~~xxx~~ en fait sur la nature du point x dans V(u), i.e. sur l'anneau local $\underline{O}_{V(u),x}$ (éventuellement considéré comme algèbre sur k). Lorsque (dans le cas d'un corps de base k) x est rationnel sur k, la notion relative à k coincide avec la notion absolue, comme on voit comme dans le cas où $\underline{E}$ est inversible. Enfin, lorsque X est lisse sur S, et u: $\underline{E} \to \underline{O}_X$ est encore un homomorphisme avec $\underline{E}$ loc libre de type fini, on définit les notions correspondantes relativement à S, en regardant fibre par fibre. On remarquera que si x est non supersingulier relativement à S, alors V(u) est plat sur S ~~xxxxxx~~ e x (car u est $\underline{O}_X$ -régulier relativement à S ...).

Bien entendu (à signaler tout au moins en remarque après les définitions en forme) on pouvait tout aussi bien partir d'une section u d'un Module loc libre $\underline{E}$, les définitions précédentes s'appliquent en interprétant u comme un homomorphisme $\check{\underline{E}} \longrightarrow \underline{O}_X$.

Lorsque X est lisse sur S, u:$\underline{E} \longrightarrow \underline{O}_X$ est donné avec $\underline{E}$ loc libre de rang m, alors l'ensemble des ~~xxxxx~~ zéros de u singuliers rel à S est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma fermé $V(u)^{sing} = V^1$ bien déterminé de $V(u)=V^o$, obtenu ainsi: on considère d^1u section de $P^1_{X/S}(\check{\underline{E}})$, sa restriction à V^o peut alors s'interpréter comme un homomorphisme

$$\underline{E} \otimes \underline{O}_{V^o} \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \otimes \underline{O}_{V^o}$$

et $V(u)^{sing}=V^1$ désignera le préschéma des zéros de ~~xxxxxxxxxxxxxx considérant de même d^2 xxx section de $P^2_{X/S}(\check{\underline{E}})$ xxx puis d^2 xxx V^1 xxx comme homomorphisme correspondant~~ l'homomorphisme correspondant

$$\bigwedge^m \underline{E} \otimes \underline{O}_{V^o} \longrightarrow \underline{\Omega}^m_{X/S} \otimes \underline{O}_{V^o}$$

i.e. d'une section bien déterminée de $\underline{\Omega}^m_{X/S} \otimes \det(\underline{E})^{-1} \otimes \underline{O}_{V^o}$.

Pour caractériser par voie différentielle les zéros singuliers ordinair relativement à $\mathfrak{Y}$, on note qu'il faut simplement exprimer les conditions de la proposition 9 pour l'homomorphisme ~~xxxxxx~~ déduit de u

$$\cancel{x^{\infty}xxx} \qquad P^{\infty}_{X/\mathfrak{Y}}(\underline{E})_{V^1} \to (P^{\infty}_{X/\mathfrak{Y}})_{V^1} \quad ,$$

qui se réduit d'ailleurs à une condition "d'ordre 2" i.e. portant seulement sur l'homomorphisme correspondant

$$P^2_{X/\mathfrak{Y}}(\underline{E})_{V^1} \to (P^2_{X/\mathfrak{Y}})_{V^1} \quad .$$

Il faut exprimer en premier lieu que le noyau $\underline{K}$ de

$$(\ast) \qquad \underline{E}_{V^1} \longrightarrow (\underline{\Omega}^1_{X/\mathfrak{Y}})_{V^1}$$

en x est inversible et facteur direct, i.e. que l'homomorphisme enxisgé (qui en vertu de $x \in V^1$ est de rang m-1 en x) est exactement de rang m-1 en x (NB le rang d'un homomorphisme de ~~m~~modules loc libres en un point est par définition le rang de 'lhomomorphisme de vectoriels sur k(x correspondant), ce qui s'exprime en considérant

$$(\bigwedge^{m-1} \underline{E})_{V^1} \to (\underline{\Omega}^{m-1}_{X/\mathfrak{Y}})_{V^1} \quad ,$$

le schéma V" des zéros de cet homomorphisme ($V'' \subset V^1$) et en écrivant simplement $x \notin V''$. La définition de V" assure que $K \mid V^1 - V''$ est un Module inversible, et que le conoyau $\underline{W}$ de $(\ast)$ est tel que $\underline{W} \mid V^1 - V''$ est localement libre de rang égal à $d-(m-1)$ (où d est la dimension relative de X sur S, égale au rang de $\underline{\Omega}^1_{X/\mathfrak{Y}}$). Appliquant la construction expliquée avec la prop.9*, on trouve ~~xxxxxxxxx~~ un homomorphisme

$$M : \qquad \underline{K} \longrightarrow \underline{\mathrm{Symm}}^2(\underline{W})$$

et il reste à exprimer que ce dernier est "non dégénéré" en x. Pour ceci, introduisons le discriminant

$$D \in \Gamma(V^1 - V'', \underline{K}^{-n+m-1} \otimes \mathrm{dét}(\underline{W})^2)$$

(où les exposants désignent des puissances tensorielles de Modules inversibles). Posant $V^2 = V(D)$, qui est un sous-préschéma fermé de $V^1 - V''$, on trouve donc que l'ensemble des ~~xxxxxxx~~ zéros singuliers ordinaires rel. Y n'est autre que $V^1 - V'' - V^2$, i.e. l'ensemble des zéros supersinguliers ~~xxx~~ rel à S est V'' V^2 .

Au moment de l'introduction de V", en affirmant que $\underline{W}$ et $\underline{K}$ sont localement libres sur $V^1 - V''$, j'ai utilisé en fait général, que je dégage ici en lemme (où $V^1 - V''$ est devenu X):

<u>Lemme</u> Soient $v\colon \underline{E} \to \underline{F}$ un homomorphisme de Modules localement libre sur le préschéma X, ~~xxxxxx~~ m un entier > 0, supposons que $\bigwedge^m u$ soit nul. ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ Alors $\bigwedge^{m-1} u$ ne s'annule en aucun point (du point de vue fibres réduites, bien sur) ssi ~~xxxxxxx~~ $u(\underline{E})$ est un sous-Module localement facteur direct de $\underline{F}$, localement libre de rang m-1, ou encore ssi u est de rang m-1 en chaque pt de X.

Il y a lieu de résumer ces constructions dans une proposition qui généralise prop.6 . Il faut voir comment on peut généraliser de même prop.7. Pour ceci, on suppose que Y lui-même est lisse sur un préschéma S , de dimension relative N, donc X est lisse sur S, de dimension relative N+d, où d est celle de sur Y. On supposera de plus avec les notations précédentes $V''=\emptyset$, i.e. $\underline{W}$ localement libre de rang d-m+1 (c'est tjrs le cas si m=1 !). Enfin, on supposera les sous-préschémas fermés V^0 et V^1 de X lisses <u>sur</u> S , de dimension relative ~~minima~~ en chaque point minima (pour les données d,N,m) , ~~xxxxx~~ c'est à dire, comme on constate aussitôt, de dimensions relatives $(N+d) - m$ et $(N+d) - m - (d-m+1) = N - 1$. (Du point de vue rédaction, le mieux semble de poser brutalement ces nombres, peut être plutôt en termes de codimension fibre par fibre, celle de V^0 dans X étant m, celle de V^1 dans V^0 étant d-m+1 ; et de signaler en remarque la justification de ce choix par le principe de la dimension minima ~~en~~ dimension ~~xxxxxx~~

X_K "générique"). Ceci posé, il faudrait vérifier que l'ensemble V^2 des points supersinguliers de u rel. à Y n'est autre que l'ensemble des points en lesquels $V^{(1)} \longrightarrow Y$ est ramifié, et préciser ce point comme une identité de sous-préschémas fermés de X, V^2 = "sous-préschéma de ramification" de $V^1 \longrightarrow Y$. Je n'ai pas fait l'exercice en détail, mais ne doute pas qu'il ne puisse se faire par essentiellement ~~la~~ le même ~~méthode~~ genre de dévissage que ~~celle~~ celui ~~développée~~ développé après la prop.7.

Si $E \longrightarrow F$ est un homomorphisme de Modules localement libres ~~sur~~ sur le préschéma régulier X, de rangs m et d ($m \leqslant d$), et si Z est l'ensemble des points de X en lesquels le rang de u est $\leqslant m-1$, alors on peut montrer que Z est de codimension $\geqslant d-m+1$ en chacun de ses points, ~~[illegible]~~

IV 17.15. Formes lisses, ~~[illegible]~~ quadratiques et singularités élémentaires.

NB Je viens de m'apercevoir que la terminologie introduite dans ma rédaction SUP de la Supersingularité est déraisonnable, et conflicte en particulier avec la terminologie recue. (De toutes façons, tu as dû noter que dans la déf.1 de ce texte, il faut lire "dégénérée" au lieu de "non dégénérée"). Le canular provient des variétés de dimension paire en car.2 , ~~xxxxxxxxxxxxxxx~~ définies par exemple par une équation $\phi=0$ dans une variété ambiante de dim impaire, car avec la terminologie de mes notes, une telle variété ne peut avoir de ~~xxxxxxxxx~~ "point singulier ordinaire" (= singularité quadratique ordinaire), i.e. ϕ ne peut avoir de "zéro singulier ordinaire", dû au fait qu'en car 2, une forme quadratique à un nombre impair de variables est toujours "dégénérée". Or tout le monde a toujours considéré que même en car. 2, l'origine du cône affine $x^2 + yz = 0$ est une singularité quadratique ordinaire. Dans les présentes notes, je dégage la notion de forme quadratique lisse (ou "ordinaire") (sur un Module loc libre de type fini), de telle façon que non dégénéré $\Longrightarrow$ lisse, la réciproque étant vraie si E est de rang pair ou les car résiduelles de la base S sont toutes $\neq 2$. Cette notion étant posée, je propose de garder la terminologie "supersingulière" (qui ne conflicte avec aucune terminologie reçue) ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ de SUP, comme correspondant à la notion de forme quadratique non dégénérée; on parlera de même de point supersingulier d'un préschéma loc noeth. , ou géométriquement supersingulier pour un préschéma loc de type fini sur un corps, dans le même sens (en regardant l'hom $\mathrm{Sym}(\underline{M}/\underline{m}^2) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\underline{m}}(A)$ et en disant que le noyau ne peut être engendré par une forme quadratique non dégénérée); donc ce qui dans SUP s'appelait à tort "zéro singulier ordinaire" s'appelera "zéro singulier non supersingulier" , ou "zéro singulier quadratique non dégénéré" si on tient à une terminologie voisine de la terminologie ~~xx~~ recue en car.0 ; de même, on pourra parler de "singularité quadratique non dégénérée" d'un préschéma loc noeth , resp. "géométriquement quadratique non dégénérée" quand on est loc de type fini sur un corps k. Par contre, la terminologie "zéro singulier ordinaire" ou mieux "zéro quadratique ordinaire", et de même "singularité quadratique ordinaire","singularité géométriquement quadratique ordinaire", devra s'entendre (conformément à l'usage) comme correspondant à la notion de forme quadratique lisse. D'ailleurs, il peut être indiqué de remplacer le terme "ordinaire" par "élémentaire" et d'étendre cette terminologie aux singularités pas nécessairement quadratiques, mais de multiplicité quelconque. Tu me diras ton impression à cet égard. – Il semble bien d'autre part que le texte SUP soit formellement correct, en particulier dans prop.7 la notion qui s'introduit vraiment est celle de zéro supersingulier. Cela n'empêche qu'il y aurait lieu, au moins en remarque, d'introduire aussi ~~V(∅)xxxxxxx~~ le sous-préschéma $V(\emptyset)^{\text{ult sing}}$ de $V(\emptyset)^{\text{sup sing}}$, correspondant à la considération des zéros ultra-singuliers, i.e. ~~xxx~~ qui sont singuliers sans être quadratiques élémentaires; il se décrit essentiellement par le même procédé que $V(\emptyset)^{\text{sup sing}}$, en prenant le préschéma des zéros du "discriminant corrigé" introduit plus bas, au lieu du discriminant ordinaire. Donc les seules corrections à apporter à SUP semblent d'ordre terminologique (et elles doivent porter également, évidemment, sur ~~xxxx~~ la terminologie introduite ci-dessus dans SUP p.10). Par contre, IV 23.9.2. est faux tel quel sauf si k est de car $\neq 2$ ou les composantes irréductibles de X de dimension paire; dans le cas général, il faut supprimer "f_n satisfait aux conditions équivalentes de 8.8., en particulier ~~xx~~" ; le reste de la proposition semble correct , et devrait se prouver de façon toute analog en montrant que pour $x \in X(k)$ donné, il y a une hypersurface H de degré $n \geq 2$ donné qui est tangente à X en x, et telle que x soit un point quadratiqu élémentaire de $X \cap H$, de dimension une de moins .... Bien mettre les pieds dans le plat, en faisant remarquer que si k <u>est</u> de car.2 et X connexe non vide de dimension impaire, alors les conditions de 8.8. <u>ne sont pas</u> vérifiées i.e. L/K est nécessairement inséparable (je crois, de degré 2 exactement si $X \subset P^r$, mais sans garantie ...).

15.1. Soient S un préschéma, $\underline{E}$ un Module loc libre de type fini sur S, ϕ une section de $\underline{\mathrm{Symm}}^n(\underline{E})$, i.e. une "n-forme sur $\check{\underline{E}}$ " , où $n > 0$ La donnée de ϕ équivaut à la donnée d'une section de $\underline{O}_P(n)$ sur $P=P(\underline{E})$ (réf àIII), et définit donc un sous-préschéma $V(\phi)$ de P. Nous dirons que la forme ϕ est <u>lisse</u> si $V(\phi)$ est lisse, et si de plus pour tout $s \in S$, $V(\phi)_s \neq P_s$ (i.e. $\phi(s) \in \mathrm{Sym}^n_{k(s)} E \otimes k(s)$ est $\neq 0$). On voit aussitôt que ϕ est lisse sss pour tout $s \in S$, $\phi(s)$ est lisse, ~~xxxxxxxxxxxx xxxxxxxx~~ (ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps) et que la notion de forme lisse est invariante par changement de corps de base (ce quin nous ramène en particulier au cas d'un corps de base alg clos); on peut résumer ces deux propriétés en disant que si $S' \to S$ est un morphisme surjectif, alors ϕ est lisse sss son image inverse ϕ' sur S l'est. Bien entendu, si E est un module projectif de type fini sur un anneau A, et $\phi \in \mathrm{Sym}^n_A(E)$, on dit que ϕ est lisse si .... Lorsque $E=A^{N+1}$, la donnée de ϕ équivaut à celle d'un ~~xxxxxx~~ polynôme homogène de degré n en des variables $X_0,..,X_r$, et le critère jacobien implique immédiatement que disons ϕ est lisse sss l'idéal engendré par ϕ et les $\frac{\partial \phi}{\partial X_i}$ contient une puissance de l'idéal d'augmentation $(X_0,...,X_r)$, i.e. contient une

Car on ne savait trouver les sections inversibles de $\underline{O}_S$!

puissance de chaque variable X_i . Plus précisément, le sous-préschéma de P^r défini par l'idéal homogène engendré par ϕ et les $\frac{\partial \phi}{\partial X_i}$ est exactement formé des points de $V(\phi)$ en lesquels $V(\phi)$ n'est pas lisse sur Spec(A) avec une dimension relative r-1.

15.2. Soient X un préschéma, $\underline{J}$ un Idéal qu coh ~~dexxx~~ sur X, nous dirons que l'homomorphisme "d'augmentation" $\underline{O}_X \to \underline{O}_X/\underline{J}$ est une "augmentation élémentaire de multiplicité n" si elle satisfait aux conditions suivant[es]

a) $\underline{J}/\underline{J}^2 = \underline{N}_{Y/X}$ est loc libre de type fini sur $Y = V(\underline{J})$.

b) Le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\mu : \underline{\mathrm{Sym}}_{\underline{O}_Y}(\underline{N}) \longrightarrow gr_{\underline{J}}(\underline{O}_X)$$

est engendré par le noyau K de μ^n , lequel est un sous-Module inversible localement facteur direct de $\underline{\mathrm{Sym}}^n_{\underline{O}_Y}(\underline{N})$ (i.e. est engendrable localement sur Y par une section ϕ qui ne s'annule en aucun point).

c) Ladite ϕ (qui n'est définie, localement, que modulo multiplicati[on] par une unité) est une forme lisse . (NB On aurait pu introduire dans 15.1. la notion de sous-Module inversible lisse de $\underline{\mathrm{Sym}}^n(E)$, à vrai dire géométriquement plus importante que celle de section lisse, car $V(\phi)$ est en fait défini par un tel sous-Module ...; cela aurait l'avantage de permettre de formuler b) et c) en une seule condition).

Lorsque n=2, on parlera de "augmentation de type quadratique élémentaire"
Si A est un anneau, ~~xxxxxxxxxxxxxxxx~~ muni d'une augmentation $A \to A/J$, on conviendra encore de dire que cette augmentation est élémentaire de multiplicité n , s'il en est ainsi pour .... Lorsque A est un anneau local, on dira simplement par abus de langage que A est "élémentaire d[e] multiplicité n" si l'augmentation $A \longrightarrow A/\underline{r}(A)$ est élémentaire de multiplicité n; noter que cela implique $n \geqslant 2$, et si A est noethérien, A est nécessairement non régulier. Si X est un préschéma, n un entier

de Picard, déduit de la section de ce dernier définie par $\underline{O}_P(1)$, est un <u>isomorphisme</u>.

Soit P un fibré projectif sur un corps k. Un Module inversible $\underline{L}$ sur P est dit <u>de degré</u> n si $\underline{L}$ est isomorphe à $\underline{O}_P(n)$; lorsque dim $P \geq 1$, cela détermine n en termes de $\underline{L}$, mais si dim $P \leq 0$ (i.e. p est vide, ou réduit à un point) alors $\underline{L}$ est degré n pour tout n. Lorsque P est un fibré projectif sur une base quelconque, un Module inversible $\underline{L}$ sur P est dit de degré n s'il est de degré n sur chaque fi[bre]. Cela détermine n, sauf si toutes les fibres de P/S sont de dim ≤ 0, alo[rs] $\underline{L}$ est de degré n pour tout n. Dire que $\underline{L}$ est de degré n signifie auss[i] en vertu de 1.1. et 1.2., que la classe ~~l'image~~ de $\underline{L}$ dans Pic(P) est dans l'image de Pic S x{n} par l'homomorphisme (x) $\mathrm{Pic}(S)\times\underline{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(P)$ envisagé plus haut, i.e. que $\underline{L}$ est isomorphe à un Module de la forme $f^*(\underline{M})(n)$, où $\underline{M}$ est inversible sur S. D'ailleurs, lorsque les fibres de P sont non vides i.e. $\underline{E}$ partout de rang ≥ 1, alors $\underline{M}$ est déterminé à isomorphisme unique près en termes de $\underline{L}$, comme il résulte encore de 1.1. et 1.2. (A ce pro[-] pos, je m'aperçois qu'il y avait lieu d'énoncer 1.1. ainsi, sans hypothè[se] sur le rang de $\underline{E}$: tout $\underline{L}$ inversible sur S peut se mettre sous la forme indiquée dans l'énoncé; lorsque les fibres de P sont non vides i.e. le rang de $\underline{E}$ partout $\neq 0$, alors $\underline{M}$ est déterminé à isom unique près par $\underline{L}$; lorsque les fibres de P sont toutes de dim ≥ 1, i.e. le rang de E partout ≥ 2 alors la partitio[n] de S est également déterminée de façon unique par le choix de $\underline{L}$. De ce[tte] façon, la remarque 1.2. est éliminée et passe dans la démonstration).

Soit $P' = P(\underline{E}')$ un deuxième fibré projectif, alors la détermin[a]tion de Pic(P) permet en principe de déterminer les S-morphismes $g:P\to P'$, puisque ceux-ci sont définis par un Module inversible $\underline{L}$ $(\simeq g^*\underline{O}_{P'}$ sur et un homomorphisme $f^*(\underline{L}) \longleftarrow \underline{E}'$ (tel que l'homomorphisme associé $f^*(\underline{E}') \to \underline{L}$ soit surjectif), modulo isomorphisme en $\underline{L}$. On dira que $g: P \to P'$ est de degré n si $\underline{L} = g^*(\underline{O}_{P'}(1))$ est de degré n. Il suffit évidemment de savoir déterminer les homomorphismes de degré n pour tout n donné. Noter que si g est de degré n, et P est à fibres de dimension ≥ 1, on aura nécessairement $n \geq 0$ (car sur un corps k, si dim P ≥ 1, $\underline{O}_P(n)$ n'est engendré par ses sections que si $n \geq 0$); bien entendu, on peut ~~aussi~~ se restreindre au cas où P a ses fibres de dim ≥ 1 (en procédant comme dans 1.2.). Comme on a

$$f_*(f^*(\underline{M})(n)) = \underline{M} \otimes f_*(\underline{O}_P(n)) = \underline{M} \otimes \underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E}),$$

on voit que la détermination des S-morphismes $g: P \to P'$ est ramenée à la détermination des couples $(\underline{M},u)$ à isom près, où $\underline{M}$ est un Module inversible sur S et $u: \underline{E}' \to \underline{M}\otimes\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})$ un homomorphisme tel que l'homomorphisme correspondant $f^*(\underline{E}') \to f^*(\underline{M})(n)$ soit un épimorphisme. Donc g détermine un premier invariant de nature globale sur S, savoir $\mathrm{cl}(\underline{M}) \in \mathrm{Pic}(S)$, et cet invariant fixé par un $\underline{M}$ choisi, les g correspondants correspondent à un certain sous-ensemble de l'ensemble quotient $\mathrm{Hom}(\underline{E}',\underline{M}\otimes\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E}))/\mathrm{I}(S,\underline{O}_S)^*$, le passage au quotient par le groupe $\mathrm{I}(S,\underline{O}_S)^*$ correspondant au "modulo isomorphisme" dans la description des $g:P \to P'$ via Modules inversibles (NB les endomorphismes resp. automorphismes d'un $\underline{L}$ inversible sur un fibré projectif $\underline{P}$, correspondant aux sections resp. sections inversibles de $\underline{O}_P$ sur P, ou encore des sections resp sections inversibles de $\underline{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\underline{O}_P)$ sur S).

Cas particuliers: 1) n=0 , alors il faut prendre les homomorphism $\underline{E}' \to \underline{M}$ qui sont ~~partout non nuls~~ surjectifs i.e. partout non nuls, modulo isomorphisme en $\underline{M}$: on trouve exactement les morphismes $g:P \to P'$ de la forme hf , où h est une section de P' sur S (savoir celle déterminée par le quotient inversib $\underline{M}$ de $\underline{E}'$). Donc les S-morphismes de degré 0 de P dans P' sont les morphis mes constants rel. à S. 2) n=1, alors il faut prendre les homomorphismes $\underline{E}' \to \underline{E}\otimes\underline{M}$ qui sont surjectifs, comme on vérifie aussitôt, et l'homomorphisme correspondant $g: P \to P'$ n'est autre que le composé $P(\underline{E}) \simeq P(\underline{E}\otimes\underline{M}) \to P(\underline{E}')$, où le premier hom est l'isomorphisme canonique envisagé dans le Chap II, et le deuxième l'immersion fermée canonique déduite de l'épimorphisme $\underline{E}' \to \underline{E}\otimes\underline{M}$. Si on appelle linéaires les hom de P dans P' qui se décrivent comme un tel composé, on voit donc que les morphismes $g:P \to P'$ qui sont de degré 1 sont exactement ceux qui sont linéaires.

Pour terminer, déterminons les isomorphismes de P avec P':

Théorème 1.6. Soient S un préschéma, $P=P(\underline{E})$ et $P'=P(\underline{E}')$ deux fibrés projectifs sur S définis par $\underline{E}$, $\underline{E}'$ loc. libres de type fini. Alors tout S-isomorphisme $g: P \xrightarrow{\sim} P'$ est définissable comme le composé $P(\underline{E}) \xrightarrow{\sim} P(\underline{E}\otimes\underline{M}) \to P(\underline{E}')$, où $\underline{M}$ est un Module inversible sur S, le premier hom est l'isom can de Chap II , et le deuxième est l'isomorphisme déduit d'un isomorphisme $u: \underline{E}' \xrightarrow{\sim} \underline{E}\otimes\underline{M}$. Lorsque les fibres de P sont non vides (resp. de dim ≥ 1) alors $\underline{M}$ (resp. le couple $(\underline{M},u)$) est déterminé à isomorphisme unique près en termes de g.

D'après les considérations précédentes, on est ramené à prouver que g est de degré 1, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps, et bien sûr on peut supposer dim $P \geq 1$. Mais notons que $\underline{O}_P(1)$ est alors caractérisé intrinséquement (i.e indépendamment de la façon dont P a été réalisé comme fibré projectif) comme le générateur de Pic(P) (parmi les deux générateurs $\underline{O}_P(1)$ et $\underline{O}_P(-1)$) qui est ample ; par suite si $g : P \to P'$ est un isomorphisme, alors $g^*(\underline{O}_{P'}(1))$ est isomorphe à $\underline{O}_P(1)$, et on gagne. - Sous forme locale et moins savante, on peut énoncer:

Corollaire 1.7. Sous les conditions de 1.6. , tout S-isomorphisme $g:P \to P'$ peut se décrire, au voisinage de tout $s \in S$, à l'aide d'un isomorphisme $u: \underline{E}|U \simeq \underline{E}'|U$, ce dernier étant bien déterminé mod mult par un élément de $\Gamma(U,\underline{O}_U)^*$.

En particulier:

<u>Corollaire</u> 1.8. Soient S un préschéma, $P=P(\underline{E})$ un fibré projectif sur S défini par $\underline{E}$ loc libre de type fini, u un automorphisme de P. Alors u est déterminé, au vosinage de tout point $s\in S$, par un automorphisme u de $\underline{E}|U$, ce dernier étant bien déterminé par u modulo multiplication p un élément de $\Gamma(U,\underline{O}_U)^*$.

<u>Remarque</u> 1.9. De 1.8., on ~~déduit~~ peut déduire facilement que le fonct ~~[illegible]~~ en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_S(P)$ sur S est représentable par un préschéma affin de présentation finie sur S, qui s'interprète aussi comme le ~~schéma~~ préschéma en groupes <u>quotient</u> du schéma en groupes linéaire $\underline{Gl}(\underline{E})$ par son centre $\underline{G}_m$. Ce préschéma en groupes s'appelle ~~[illegible]~~ le <u>préschéma en groupes projectif</u>, ou simplement <u>groupe projectif</u>, déf par $\underline{E}$, et se note $GP(\underline{E})$, Lorsque $\underline{E}$ est libre, $\underline{E}\simeq\underline{O}_S^{r+1}$, alors $GP(\underline{E})$ n'est autre que le ~~schéma~~ préschéma en groupes $GP(r)_S$ déduit par le changement de base $S\to\mathrm{Spec}(\underline{Z})$ ~~[illegible]~~ du schéma en groupes analogue $GP(r)$ sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, appelé le <u>Groupe Projectif</u> <u>absolu</u>.

[illegible] ! [illegible] P(E ⊗ E) [illegible] déterminant

2. Diviseurs relatifs et faisceaux inversibles sur les fibrés projectifs et multiprojectifs.

2.1. Soit comme au N°1 $P=P(\underline{E})$, $\underline{E}$ loc libre sur S de rang ≥ 2 partout. Nous nous proposons de déterminer l'ensemble $\mathrm{Div}(P/S)$ des diviseurs relatifs ≥ 0 sur P p. r. à S. On sait que la donnée d'un tel diviseur revient à la donnée d'un Module inversible $\underline{L}$ sur P, muni d'une section ϕ de $\underline{L}$ transversalement régulière. Or d'après 1.1. (abstraction faite d'une partition éventuelle de S, lorsque S n'est pas connexe) $\underline{L}$ est isomorph à un $\underline{M}\otimes\underline{O}_P(n)$, où $\underline{M}$ est un Module inversible sur S, d'ailleurs détermin à isomorphisme unique près en termes de $\underline{L}$. D'ailleurs, on sait que l'on a alors des isom canoniques

$$(*) \qquad f_*(\underline{L}) \simeq \underline{M} \otimes f_*(\underline{O}_P(n)) \simeq \underline{M}\otimes\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})$$

donc la donnée d'une section ~~de~~ ϕ de $\underline{E}$ revient à la donnée d'une sectio ψ de $\underline{M}\otimes\underline{\mathrm{Sym}}^n(E)$. Compte tenu du fait que les fibres de P/S sont intègres on voit d'ailleurs que ϕ est transversalement régulière (i.e. réguli sur chaque fibre) sss $\psi(s)\neq 0$ pour tout $s\in S$, ou ce qui revient au même ssi l'homomorphisme

$$\psi : \check{\underline{M}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}^n(E)$$

défini par ψ est "universellement injectif" i.e. loc un isomorphisme su un facteur direct, ou ce qui revient au même, si son transposé

$$\check{\psi} : \underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})^\vee \longrightarrow \underline{M}$$

est surjectif.

Nous dirons que le diviseur relatif D sur P est de degré n si $\underline{O}_X(\underline{D})=\underline{L}$ est de degré n au sens du n° précédent. ~~Ainsi, grâce à 1. pour D donné, il existe une unique décomposition de S en somme d'ouverts S (n N) tel~~

Lorsque $D \geqslant 0$, cela implique $n \geqslant 0$, car si $n < 0$ toute section de

$\underline{L}$ sur X serait nulle. Grâce à 1.1. , si D est un diviseur relatif $\geqslant 0$ sur P, alors il existe une unique décomposition de D en somme disjointe d'ouverts S_n $(n \in \underline{N})$ telle que pour tout $n \in \underline{N}$, $\underline{L} \mid P \mid S_n$ soit de degré n. Cela ramène la détermination de l'ensemble des diviseurs relatifs $\geqslant 0$ au cas des diviseurs relatifs $\geqslant 0$ de degré n donné. (Ce texte remplacera évidemment le "abstraction faite" plus haut). Ceci p(les refexions précédentes établissent la

Proposition 2.2. Sous les hypothèses précédentes, on a une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathrm{Div}^n(P/S)$ des diviseurs relatifs $\geqslant 0$ de degré n sur P, et l'ensemble des Modules quotients inversibles $\underline{M}$ de $\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})^\vee$, (ou ce qui revient au même, les sous-Modules inversibles loc facteurs directs $\check{\underline{M}}$ de $\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})$) . Si D et $\underline{M}$ se correspondent, alors $\underline{O}_P(D)$ est canoniquement isomorphe à $\underline{M} \otimes \underline{O}_P(n)$, et la section s_D s'identifie par cet isomorphisme à ce qu'on devine, compte tenu de (*).

Notons que cette description est compatible avec tout changement base en S. Compte tenu de l'interprétation des Modules quotients inv d $\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})^\vee$ comme les sections sur S de $P(\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})^\vee)$, on trouve ceci:

Corollaire 2.3. Le sous-foncteur $\mathrm{Div}^n_{P/S}$ de $\mathrm{Div}^+_{P/S}$ est représenta canoniquement par $P(\underline{\mathrm{Sym}}^n(\underline{E})^\vee)$.

Compte tenu des considérations de 2.1. , il s'ensuit:

Corollaire 2.4. $\underline{\mathrm{Div}}^+_{P/S}$ est représentable canoniquement ~~xxxxx~~ par le S-préschéma somme des $P(\underline{\mathrm{Sym}}^n_{P/S}(\underline{E})^\vee)$, $n \in \underline{N}$.

2.5. Supposons maintenant donné une famille finie $(\underline{E}_i)_{i \in I}$ de Modules localement libres sur S, d'où des $P_i = P(\underline{E}_i)$ et un P= produit fibré de P_i , appelé aussi fibré multiprojectif sur S défini par $(\underline{E}_i)$. Pour simplifier les notations, désignons par $\underline{O}_i(n)$ l'image inverse sur P d

Module inversible $\underline{O}_{P_i}(n)$ sur P_i . Pour tout système d'entiers

$$\underline{n} = (n_i)_{i \in I} \in \underline{Z}^I$$

nous ~~désignerons~~ poserons

$$\underline{O}_P(\underline{n}) = \bigotimes_i \underline{O}_i(n_i) = \bigotimes_{i\,\underline{O}_S} \underline{O}_{P_i}(n_i) \quad .$$

Ceci posé, 1.1. se généralise de la façon suivante:

<u>Proposition</u> 2.6. Supposons les $\underline{E}_i$ partout de rang ≥ 2. Alors pour tout Module inversible $\underline{L}$ sur le fibré multiprojectif P, il existe une ~~partition~~ décomposition de S en somme disjointe d'ouverts $\underline{S}_{\underline{n}}$, $\underline{n} \in \underline{Z}^I$, et ~~pour tout $\underline{n} \in \underline{Z}^I$~~ un Module inversible $\underline{M}$ sur S, tels que $\underline{L}|P|S_{\underline{n}}$ soit isomorphe à $\underline{O}_P(\underline{n})|P|S_n$. De plus, les $S_{\underline{n}}$ sont déterminés de façon unique, et ~~les~~ $\underline{M}$ est déterminé à isomorphisme unique près.

2.7. La démonstration ~~résulte~~ consiste en une réduction immédiate à 1.1. Sous les conditions de 2.6. , on peut donc associer à tout $\underline{L}$ inversible sur P un "multidegré" $\underline{n} = (n_i)_{i \in I} \in \underline{Z}(S)^I$, qui caractérise $\underline{L}$ à isomorphisme près lorsque Pic(S)=0 . On peut d'ailleurs interpréter n_i (appelé "<u>degré partiel</u> de $\underline{L}$ par rapport au facteur P_i d'indice i "), lorsqu'on se donne pour chaque i une section g_i de P_i sur S (NB de telles sections existent en tous cas localement sur S), en notant que ce système définit pour chaque i un S-morphisme

$$h_i : P_i \longrightarrow P \quad ;$$

ceci posé, on a

$$n_i = \deg h_i^*(\underline{L}) \quad .$$

On fera attention qu'en général, les n_i ne sont pas des entiers, mais des applications localement constantes de S dans $\underline{Z}$.

Procédant comme au Nº1, on peut déduire de 2.6. la détermination des morphismes d'un fibré multiprojectif dans un autre, et en particulier celle des automorphismes d'un fibré multiprojectif. Plus intéressant pour nous, en vue du par.25 sur le résultats et le discriminant des formes, sera la détermination des diviseurs relatifs $\geqslant 0$ sur un fibré multiprojectif.

2.8. Si $\underline{D}$ est un diviseur relatif sur P, on définit son multidegré comme éta celui de $\underline{O}_P(D)$. Comme plus haut, la détermination de $\mathrm{Div}^+(P/S)$ est ramen à celle de $\mathrm{Div}^{\underline{n}}(P/S)$, pour un multidegré $\underline{n} \in \underline{N}^I$ donné, qui fournit un isomorphisme

$$\underline{L} = \underline{O}_X(D) \simeq \underline{M} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_P(\underline{n}) \ .$$

Or on obtient, grâce au Chap II par.2 (~~xxxxxxxxxxxx~~

$$(xx) \qquad f_*(\underline{D}) = \underline{M} \otimes f_*(\underline{O}_P(\underline{n})) = \underline{M} \otimes \bigotimes_i \underline{\mathrm{Sym}}^{n_i}(\underline{E}_i) \ .$$

Proéédant maintenaht comme pour 2.2. on trouve la

<u>Proposition</u> 2.9. Avec les notations précédentes, à reppaler, on ~~a~~ une corr biun can entre l'ensemble $\mathrm{Div}^{\underline{n}}(P/S)$ des diviseurs relatifs de multidegré $\underline{n}$ sur P, et l'ensemble des Modules inversibles quotients $\underline{M}$ de $\bigotimes_i \underline{\mathrm{Sym}}^{n_i}(\underline{E}_i)^\vee$ (ou ce qui revient au même ...) . Si D et $\underline{M}$ se corres pondent, $\underline{O}_P(D)$ est can isomorphe à $\underline{M} \otimes \underline{O}_P(\underline{n})$, et s_D s'identifie alors à ce qu'on devine, compte tenu de (xx).

<u>Corollaire</u> 2.10. Le sous-foncteur $\mathrm{Div}^{\underline{n}}_{P/S}$ de $\mathrm{Div}^+_{P/S}$ correspondant aux diviseurs relatifs de multidegré $\underline{n}$ est can représentable par le fibré projectif $P(\bigotimes_i \underline{\mathrm{Sym}}^{n_i}(\underline{E}_i)^\vee)$, et $\underline{\mathrm{Div}}^+_{P/S}$ est can repr par le préschéma somme de ces derniers, pour $\underline{n} \in \underline{N}^I$.

2.11. La détermination précédente très simple des $\mathrm{Div}_{P/S}$ est due à la structure très simple de Pic(P/S) (en fait, à la structure"discrète" du préschéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{P/S}$ ....). Nous pouvons abstraire le raisonnement fait, qui revient essentiellement à établir une représentabilité "relative (par rapport à $\underline{\mathrm{Pic}}$). Pour ceci, donnons-nous un morphisme

$$f : X \to S$$

propre et plat de présentation finie, <u>et</u> un Module inversible $\underline{L}$ sur X.

Nous nous proposons de déterminer le sous-groupe $\mathrm{Div}^L(X/S)$ de $\mathrm{Div}^+(X/S)$ formé des diviseurs relatifs positifs tels que $\underline{O}_X(D)$ soit isomorphe à un Module de la forme $\underline{L}\otimes_{\underline{O}_X}\underline{M}$, où $\underline{M}$ est un Module inv sur S (dépendant de D). Nous supposerons qu'on a

$$f_*(\underline{O}_X) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_S \quad ,$$

ce qui implique que ci-dessus $\underline{M}$ est déterminé à isom unique près en termes de D, comme

$$\underline{M} \simeq f_*(\underline{L}^{-1}\otimes\underline{O}_X(D)) \quad .$$

La donnée d'un D correspondant à un $\underline{M}$ donné revient donc à la donnée d'une ~~sectionx~~ section ϕ de $\underline{L}\otimes\underline{M}$ transversalement régulière. Or on a vu au Chap III par 7 ~~fx(L⊗M)xxxxfx(L)⊗M xx~~ qu'il ~~xixx~~ existe un Module Q de présentation finie sur S, dont la formation commute d'ailleurs à tout changement de base, et un isomorphisme de foncteurs en $\underline{G}$ (Module qu coh variable sur S)

$$f_*(\underline{L}\otimes\underline{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{Q},G) \quad .$$

(A vrai dire, dans loc cit on a supposé S loc noethérien, mais on se débarasse de cette hypothèse de façon évidente, par le procédé bréveté compte tenu de la commutation de Q au changement de base). En particulier la donnée de ϕ équivaut à ~~xx~~ la donnée d'un homomorphisme

$$\psi \ : \ Q \longrightarrow M \ .$$

Une condition nécessaire pour que ϕ soit transversalement régulière, et qui est suffisante lorsque les fibres de X sont intégres, est que ϕ soit $\neq 0$ ~~xix~~ fibre par fibre, ce qui en termes de ψ signifie simplement que ψ est surjectif, donc que ~~Mxxxx~~ ψ correspond à une section du fibré projectif $\underline{P}(\underline{Q})$ sur S. On obtient ainsi la

<u>Proposition</u> 2.11. ~~Xxuxxlexxxxxxxxxxx~~ Avec les notations précédentes, ~~xxxxX/S~~ $\mathrm{Div}^L(X/S)$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des ~~pxixx~~ sections de $\underline{P}(\underline{Q})$ sur S, correspondant à des Modules quotients $\underline{M}$ de $\underline{Q}$ tels que

la sedtion ϕ de $\underline{L}\otimes\underline{M}$ définie par ψ : $Q \longrightarrow \underline{M}$ soit transversalement régulière.

Supposons maintenant que l'hypothèse $\underline{O}_S \simeq f_*(\underline{O}_X)$ soit encore vra après tout changement de base, ou ce qui revient au même grâce à III 7, qu'on ait la condition

(xxx) $\qquad k(s) \simeq H^0(X_s, \underline{O}_{X_s})$

pour tout $s \in S$. Alors 2.12. s'applique également à tout $X_{S'}/S'$, pour un changement de base quelconque $S' \longrightarrow S$. On obtient ainsi le

Théorème 2.13. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme ~~plat~~ de présentation finie, propre et plat satisfaisant à (xxx) ci-dessus, $\underline{L}$ un Module inversible sur X, considérons le sous-foncteur $\mathrm{Div}^{L}_{X/S}$ de $\mathrm{Div}^{+}_{X/S}$ défini ci-dessus en termes de $\underline{L}$. ~~Exxfonstenx~~ Il existe un Module de présentation finie $\underline{Q}$ sur S tel que le foncteur précédent soit représentable par un sous-préschéma ouvert rétrocompact du fibré projectif $\underline{P}(\underline{Q})$; lorsque les fibres de X/S sont géométriquement intègres, alors $\mathrm{Div}^{L}_{X/S}$ est représentable par ce fibré ~~xxxxxx~~ projectif lui-même.

La dernière assertion résulte immédiatement de ce qu'on avait dit avant. Pour le cas général, on avait déjà noté qu'on a un morphisme

$$\mathrm{Div}^{L}_{X/S} \longrightarrow \underline{P}(\underline{Q}) ,$$

on est ramené à prouver que ce dernier est représentable par une immersio ouverte quasi-compacte, ce qui nous ramène à prouver que si on se donne une section de $P(\underline{Q})$ sur S i.e. un Module quotient inversible $\underline{M}$ de $\underline{Q}$, d'où une section ϕ de $\underline{L}\otimes\underline{M}$ non nulle sur chaque fibre, alors le sous-foncteur U du foncteur final S sur $(Sch)_{/S}$ "consistant à rendre ϕ transversalement régulière" est représentable par un ouvert rétrocompact de S. Or le fait qu'il est représentable par un ouvert provient du fait que f est propre et que la régularité transversale est une condition ouverte (cf pa 11 ...), la rétrocompacité se voit immédiatement par réduction au cas noethérien.

№ 3.4 3) Systèmes linéaires de diviseurs, et morphismes dans les espaces projectifs.

~~16. Traductions en langage de systèmes linéaires.~~

Soit X plat et loc de présentation finie sur S, et T un S-préschéma. On appelle famille de ~~xxxxxxx~~ diviseurs (sous-entendu de Cartier) positifs de X/S paramétrée par S, un sous-préschéma fermé de $X \times_S T$ qui est un diviseur de Cartier rel. à T, i.e. qui est intersection complète ~~xxxxxxxxxxx~~ relative de codimension 1 relativement à T en chacun de ses points, ou ~~xxx~~ ce qui revient au même, qui est plat loc de prés finie par rapport à T, et induit sur chaque fibre de $X_{T\,t} = X_{s\,k(t)}$ de X_T sur T un "diviseur de Cartier positif" i.e. un sous-préschéma qui est en chacun de ses points intersection complète dans X_t de codimension 1. L'ensemble $Div_{X/S}(T)$ de telles familles de diviseurs est, pour T variable, un foncteur contravariant à valeurs dans (Ens), noté $Div_{X/S}$. Nous verrons au Chap V qu'il est représentable lorsque $f:X \to S$ est projectif. Lorsque $X = P(E)$ fibré projectif défini par E localement libre de type fini, il est possible avec les seuls résultats du Chap III de prouver que $Div_{P/S}$ est représentable par le préschéma somme des $P(Symm^n(\underline{E}))$, les composants de cette somme correspondant aux diviseurs de degré relatif n, ($n \geq 2$). Ce résultat n'est pas indispensable pour la suite, et il suffira de le signaler en remarque; nous l'inclurons peut-être quelque part dans III, et au plus tard dans V.

Soit D une famille de diviseurs sur X/S paramétrée par T (nous sous-entendons par la suite "positif"). Un point $x \in X$ est dit "point fixe" pour cette famille de diviseurs si $pr_1^{-1}(x) \subset D$ ensemblistement, de sorte que l'ensemble des points non fixes est le complémentaire de $pr_1(X \times_S T - D)$; par suite, si $T \longrightarrow S$ est universellement ouvert (par exemple plat loc de prés finie) l'ensemble des points fixes est fermé. On dit que la famille de diviseurs est "sans points fixes" si l'ensemble Z des points fixes est vide.

~~Parxsymétriex~~ Lorsque Z est fermé, alors X-Z est le plus grand ouvert tel que la famille de diviseurs de X-Z paramétrée par T, induite par l famille donnée (dans un sens évident) est sans point fixe.

Si la famille D est sans point fixe, et si T est plat ~~loc~~ de prés fin sur S à fibres (S_1), et géom irréd, alors D est aussi un diviseur ~~de Cartier~~ relativement à X (pour $pr_1 : X \times_S T \longrightarrow X$): en effet, D est défini localem au point $z \in \operatorname{supp} D$ par une équation ~~fx0~~ $\phi = 0$, et l'équation induite sur la fibre $T_{s\ k(x)}$ du point $x \in X$ (au dessus de $s \in S$) est non ~~identiquementxnulle~~ nilpotente en z (car autrement $pr_1^{-1}(x) D = V(\phi_x)$ ~~serait~~ contiendrait ensembli ment un voisinage de z dans $T_{s\ k(x)}$, donc contiendrait $T_{s\ k(x)}$, i.e. x serait point fixe, ce qui n'est pas); or comme $T_{s\ k(x)}$ est irréd et (S il s'ensuit que ϕ_x est $\underline{O}_{T_{s\ k(x)}}$-régulière en z. On obtient ainsi ~~unxmorphisme~~ une famille de div de T/S paramétrée par X, i.e. un morp

$$X \longrightarrow \mathrm{Div}_{T/S}$$

Dans le cas général où la famille de diviseurs de X peut avoir des points fixes, on obtient une famille de diviseurs de T/S paramétrée par X-Z, i;e. un morphisme

$$X - Z \longrightarrow \mathrm{Div}_{T/S} ,$$

en remplaçant dans la définition précédente X par X-T. D'ailleurs la ~~xsixDxestxsansxpointsxfixesx~~

~~Notonsxenxpassantxquexlaxfamillexdexdiviseursx(notéexᵗDx)x dexT/Sxxparamétréexparxx X-Z xxestxévidemment sans points fixes, et on obtientxainsixunexcorrespondancexbiunivoque entre familles de diviseurs sansxpointsxfixes~~ démonstration ci-dessus montre que X-Z est exactemer le plus grand ouvert U de X tel que $D|(U \times_S T)$ soit un diviseur ~~de Cartier~~ relativement à U, i.e. (tel que son symétrique ᵗD) soit une famille de diviseurs de T/S paramétrée par U/S .

On pourra noter aussi en remarque que lorsque X et T sont tous les deux plats loc de présentation finie sur S, à fibres (S_1) et géom irréd. alors la symétrie $D \longrightarrow {}^tD$ donne une correspondance biunivoque entre familles de diviseurs de X/S paramétrées par T qui sont sans points fixes et familles de diviseurs de T/S paramétrées par X qui sont sans points fixes. Si dans cet énoncé on désire se débarasser des hypothèses spécifiques faites sur les fibres de X/S et T/S , il convient de remplacer les "points fixes" par "points fixes au sens large" , en entendant par point fixe au sens large de D un $x \in X$ tel que D ne soit pas diviseur ~~de Cartier~~ relatif par rapport à X en tous les points de $pr_1^{-1}(x)$. Si W est l'ouvert des points de $X \times_S T$ en lesquels D est diviseur ~~de Cartier~~ relatif par rapport à X, alors l'ensemble des points fixes au sens large de D est égal à $pr_1(X \times_S T - W)$; lorsque $T \rightarrow S$ est propre, c'est donc une partie fermée Z' de X, En tous cas, on obtient une famille de diviseurs de T/S paramétrée par $X - \overline{Z'}$. L'hypothèse que les fibres de T/S soient (S_1) et géom irréductibles sert précisément à assurer que Z=Z' (point fixes = points fixes au sens large). Géométriquement, supposant pour simplifier que S=Spec(k), k corps algébriquement clos (ce qui est loisible pour T/S plat loc de prés finie, via changement de base), dire que $x \in X(k)$ est point fixe (resp. point fixe au sens large) signifie que $x \in \operatorname{supp} D_t$ pour tout $t \in T(k)$ (resp. qu'il existe un cycle premier T' associé à T tel que $x \in D_t$ pour tout $t \in T'(k)$).

~~Ce petit sorite précédent n'a guère rien à voir dansle présent paragraphe, et je suggérerai d'en faire plutôt un nº au par. 19 à propos des intersections complètes relatives, sous le titre: diviseurs de Cartier relatifs, et familles de diviseurs.~~ Un oubli: La formation de l'ensemble des points fixes Z est compatible avec (supposé ouvert, p ex T/S pl 15

changement de base en S; d'autre part, X-Z est universellement lorsque T → S est surjectif)

schématiquement dense dans X rel à S. Ce dernier fait résulte du ~~xxxxx xxxxxxxxxxxxxxxxxxx xxxxxx~~ par. 11 et du fait que pour tout s Z_s ne contient aucun point de X_s associé à $\underline{O}_{X_s}$ (en effet, le support diviseur ~~de Cartier~~ sur X_s ne contient aucun tel point).

Dans le cas où T ~~devient~~ est un fibré projectif $Q=P(F)$, $\mathrm{Div}_{Q/S}$ étant représentable par la somme des $P(\mathrm{Sym}^n(\check{F})) = P(n)$, on trouve un morphisme $X\text{-}Z \longrightarrow P(n)$. On dit que la famille de diviseurs D est de degré n, si le morphisme précédent se factorise par P(n); s $X \neq \emptyset$, d'où $X\text{-}Z \neq \emptyset$, le n en question est bien déterminé par D. D'leurs pour définir cette notion, on n'a pas besoin à la rigueur du ré tat de représentabilité énoncé plus haut, mais seulement d'avoir déf les monomorphismes canoniques

$$P(n) \longrightarrow \mathrm{Div}_{\check{P}/S}$$

(NB on pose $P = P(\check{F})$, d'où $Q = P(F) = \check{P}$ avec les notations dès nºs pr dents). ~~Cela pourra être fait à titre d'exemple dans le nº préconisé par 19~~. On appelle système linéaire de diviseurs sur X/S, paramétr par le fibré projectif $Q = \check{P}$, toute famille de diviseurs sur X/S paramétrée par Q, qui soit de degré 1, i.e. définisse

$$f : X\text{-}Z \longrightarrow P \quad .$$

Ainsi, à un tel système ~~de~~ linéaire de diviseurs (et lorsque les fibres de $\check{P}$ sont ...) est associé canonique une application rationnelle de X dans un fibré projectif, (en fait, un p savoir un "pseudo-morphisme rel. à S" mieux même qu'une application rationelle). Par construction même, $D \mid (X\text{-}Z)\times_S\check{P}$ n'est autre que l'image inverse par $f\times\mathrm{id}_{\check{P}}$ du diviseur canonique (le diviseur d'incidence) H sur $P\times_S\check{P}$. Donc la connaissan de $f: X\text{-}Z \longrightarrow P$ permet de réconstituer ~~xxxxx~~ tout au moins la f le de diviseurs de X-Z induite par D, – donc si la famille est s points fixes, elle est déterminée ~~xxxxxxxx~~ par le morphisme $f:X \longrightarrow P$ associé. Noter d'ailleurs qu'on ~~x~~obtient évidemment ainsi une corresp dance biunivoque entre systêmes linéaires de diviseurs de X/S paramét par $\check{P}$, et morphismes $f:X \longrightarrow P$ tel que ~~xx~~$(f \times_S \mathrm{id})^{-1}(\underline{H})$ soit un diviseur ~~de Cartier~~ ~~xxx~~ relatif sur $X \times_S \check{P}$ par rapport à $\check{P}$. Cette ~~se~~ condition vérifie aussi fibre par fibre, et on obtient :

<u>Proposition</u> 3.1. On a une correspondance biunivoque entre les ~~xxxxxxxxx~~ systêmes linéaires sans points fixes de diviseurs sur X/S paramétrés par $\check{P}$, et les morph mes $f: X \longrightarrow P$ ayant la propriété suivante: pour tout $s \in S$, désignant par $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k(s)$, et pour tout cycle premier assoc X' de $X_{\bar{k}}$, $f(X') \subset P_{\bar{k}}$ n'est contenu dans aucun hyperplan de $P_{\bar{k}}$. ~~xxx~~ (Lorsque X est à fibres géométriquement ~~xxxxxxx~~ intègres, ceci ~~xxxxxxxxxx~~ ~~xx~~ s'énoncé simplement en disant que $f(X_{\bar{k}})$ n'est contenu dans aucun hyperplan de $P_{\bar{k}}$).

En général (i.e. ~~xx~~ lorsque $Z \neq \emptyset$) on ne peut plus affirmer que la connaissance de f détermine la famille de diviseurs. Le cas le plu trivial est celui où $\check{P} = S$ est de dim relative 0, alors la donnée d'un systême linéaire d diviseurs de X/S paramétrée par S équivaut à celle d'un diviseur de Cartier relatif D sur X par rapport à S; ~~xxxxxxxxxx~~ le morphisme associé est la projection $X-D \to S$, et on voit ~~xxxxxxx~~ que la conna sance de ce morphisme (y compris celle de son domaine de définition) ne détermine pas D. Dans ce cas également, supposant pour simplifier réduit, le domaine de définition de ~~xxxxxxxxxx~~ f ~~xxxxxxxx~~ considér comme application rationelle de X dans $P = S$ n'est pas $X-D$, mais X. Pour éliminer ce genre de phénomènes déplaisants, il y a lieu de se borner aux systêmes linéaires de diviseurs "<u>sans composante fixe</u>". De façon générale, si $S=\mathrm{Spec}(k)$, étant donné une famille (non néc linéaire

de diviseurs de X/S paramétrée par T, on appelle "composante fixe" de
famille toute composante irréductible de dodimension 1 de l'ensemble Z
points fixes de la famille; on dit que la famille est "sans composante
fixe" si elle est sans composante fixe, i.e. si codim $(Z,X) \geq 2$. Cett
terminologie s'étend aussitôt au cas où S est quelconque, en regardant
fibre par fibre. Le fait d'être sans composante fixe est évidemment sta
par changement de base.

Proposition ~~2~~ /Supposons $X \to S$ plat loc de présentation finie, à fibres (S_2), et soit D un systême linéaire de diviseurs sans composante fixe sur X/S, paramétrée par $\check{P}$. Alors D est uniquement déterminé par la connaissance du morphisme $f: X - Z \longrightarrow P$ correspondant (Z = ensemble des points fixes), et même par la connaissance de la classe de f comme "~~application rationelle~~ pseudo-morphisme ~~xxxxxxxxxxxxS~~ rel à S" ; X-Z est le ~~xxxxxxxxxxxxxx~~ domaine de définition de ladite classe.

Pour la notion et le sorite des "~~applications rationelles~~ pseudo-morphismes rel à S" voir ~~SGAD XVIII nº1~~ §20.10., ~~qu'on pourrait éventuellement rajouter au dernier nº du par. 11 sur la densité schématique.~~ Il faut prouver que si ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ D' est une autre syst lin de diviseurs sans comp fixe paramétrée par $\check{P}$, ~~xxxx~~ définissant $f': X-Z' \longrightarrow P$, et si f et f' coincident dans un ouvert $U \subset (X-Z)\cap(X-Z')$ schématiquement dense relativement à S, alors D=D'. En fait, comme P est séparé sur S, on peut prendre $U=(X-Z)\cap(X-Z')$ = ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ $X-Z''$, où $Z'' = Z \cup Z'$. Comme Z" est de codim ≥ 2 sur chaque fibre et que X est à fibres (S_2), il s'ensuit que pour tout $x \in Z''$, la fibre X_s est de profondeur ≥ 2 en x. On va en conclure (utilisant de plus bien sûr le fait que X est plat loc de présentation finie
§20.11. sur S) que tout diviseur ~~de Cartier positif~~ sur X (pas nécessairement transversal aux fibres) est connu quand on connait sa restriction à X-Z"

ce qui entrainera la conclusion voulue. Soit $\underline{J}$ l'Idéal qui définit D, il suffira évidemment de prouver que $\underline{J} \to i_*(\underline{J}|X-Z")$ est un isomorphisme ($i: X-Z" \to X$ désignant l'immersion canonique), alors l'homomorphisme $\underline{J} \to \underline{O}_X$ se reconstruit en effet en appliquant le foncteur i_* à $\underline{J}\,|\,X-Z" \longrightarrow \underline{O}_X\,|\,X-Z"$. Or comme $\underline{J}$ est inversible, il est plat sur S et ~~pour tout~~ $x \in Z" \Rightarrow \mathrm{prof}_x \underline{J}_{s\,x} \geqslant 2$. Il suffit donc de prouver le

Lemme 3.1. Soit $X \to S$ loc de présentation finie, F un Module de présentation finie sur X plat rel à S, T une partie fermée de X, supposons que pour tout $x \in X$ au dessus de $s \in S$, on ait $\mathrm{prof}_x F_{s\,x} \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}_x F_s \geqslant 2$). Alors l'homomorphisme canonique $F \to i_*(F|X-T)$ est injectif (resp. bijectif), où $i: X-T \to T$ est l'immersion canonique.

Démonstration du lemme: on peut supposer S,X affines, et on se ramène par le procédé brévété au cas S noethérien. Alors l'hypothèse implique, en vertu du par.6, que l'on a $\mathrm{prof}_x F \geqslant \mathrm{prof}_x F_s$ pour tout $x \in X$ sur $s \in S$, donc $\mathrm{prof}_x F_s \geqslant 1$ (resp. $\geqslant 2$) si $x \in T$. On conclut alors grâce au par.5. (NB Pour bien faire, ce lemme devrait figurer au par 11 sous la rubrique; élimination des hypothèses noethériennes ...).

Il reste enfin à vérifier la dernière assertion de prop.2, savoir que $X-Z$ est exactement le domaine de définition de l'application rationnelle rel à S définie par f. Soit $U \supset X-Z$ ce domaine, il résulte alors de la proposition 1 que $U \longrightarrow P$ est associé à un système lin. de diviseurs D' sur U/S paramétré par $\check{P}$, et on a $D'|(X-Z)\times_S \check{P} = D|(X-Z)\times_S \check{P}$. Appliquant le résultat d'unicité (déjà démontré) à D' et $D|U\times_S \check{P}$, on voit donc que ces deux derniers diviseurs sont égaux, donc $D|U\times_S\check{P}$ n'a pas de point fixes i.e. $Z \cap U = \emptyset$ donc $U = X-Z$, cqfd.

$\check{V}$, et $f_U^*(1)$ satisfait la condition de non dégénérescence envisagée dans 3.1.

Je me répens d'avoir donné la proposition sous une forme éculée et pisseuse, à mi chemin entre les hypothèses classiques et les hypothèses naturelles, et sans donner une réciproque. Aussi je propose l'énoncé:

Proposition 3.3. ~~révisée et corrigée~~. Soit $X \to S$ plat loc de présentation finie, $Q=\check{P} = P(\check{E})$ un fibré projectif sur S défini par un Module loc libre de type fini $F = \check{E}$, considérons l'ensemble $\emptyset$ des systêmes linéaires D de diviseurs sur X, paramétrés par Q, tels que l'ensemble Z des points fixes de D satisfasse la propriété: $z \in Z$ implique $\mathrm{prof}_z \underline{O}_{X_s} \geqslant 2$ (où s est l'image de z dans S). Soit $\emptyset'$ l'ensemble des pseudo-morphismes ~~applications rationelles~~ rel S f de X dans P, telles que le domaine de définition $U=\mathrm{dom}(f)$ satisfasse la condition : $z \in X-U \Longrightarrow \mathrm{prof}_z \underline{O}_{X_s} \geqslant 2$. Considérons l'application naturelle $D \rightsquigarrow f_D$ de $\emptyset$ dans $\emptyset'$. Alors :

a) Cette application est injective, et pour $D \in \emptyset$, l'ensemble des points fixes Z n'est autre que l'ensemble complémentaire du domaine de définition U de f_D.

b) Soit $f \in \emptyset'$, et soit U un ouvert sur lequel f soit défini, et tel que $z \in X-U$ implique $\mathrm{prof}\, \underline{O}_{X_s,z} \geqslant 2$ (par exemple $U = U(f)$ domaine de définition de f). Pour que f provienne d'une $D \in \emptyset$, il f et suffit que posant $\underline{L}_U = f_U^*(\underline{O}_P(1))$ (où $f_U: U \to P$ est le morphisme induit par f), le Module $i_*(\underline{L}_U)$ sur X soit inversible (où $i:U \to X$ est l'immersion canonique).

On remarquera que lorsque les fibres de X sur S satisfont à (S_2), par exemple sont normales, voire géométriquement normales, alors la condition de profondeur envisagée sur une partie fermée Z de X dans la proposition signifie simplement que pour tout $s \in S$, (du moins si $X \to X$ est proj[illegible] [illegible], cas auquel on se ramène sans difficulté

Z_S est de codimension ≥ 2 dans X_s ;

$\emptyset$ est alors l'ensemble des ~~familles~~ syst lin de diviseurs par P qui sont sans composante fixe. D'autre part, si S=Spec(k), et si X est normal, alors pour toute application rationnelle $f: X \to P$, l'ensemble de définition U(f) vérifie codim $(X-U(f),X) \geq 2$ (II 7), donc dans ce cas $\emptyset$ est formé de l'ensemble de toutes les applications rationnelles de X dans P.

La démonstration de a) a déjà été donnée. Pour prouver b), notons que la formation de $i_*(L_U)$ commute avec toute extension plate de la base S' S (réf), donc la cond. envisagée est inv. par fid plat qu c changement de base. On prendra $S' = \check{P}$, et on note que l'hypothèse $i'_*(L'_U)$ inversible ne change pas en remplaçant L'_U par $L'_U \otimes_{S'} M'$, où M' est un Module inversible sur S' (car $i'_*(L'_U \otimes_{S'} M') \simeq i'_*(L'_U) \otimes_{S'} M'$). On prendra $M' = \underline{O}_{\check{P}}(1)$, de sorte que la condition envisagée signifie aussi que $i'_*(\underline{N}')$ est un Module inversible, où $\underline{N}' = (f_U \times_S id_{\check{P}})^*(\underline{O}_{P \times \check{P}}(1,1))$. Or $\underline{O}(1,1)$ est précisément le Module inversible défini par le diviseur canonique $\underline{H}$ sur $P \times_S \check{P}$, de sorte que $\underline{N}$ n'est autre que le Module inversible défini par $D' = (f_U \times id_{\check{P}})^*(\underline{H})$. Lorsque f provient de $D \in \emptyset$, D' n'est autre que $D|U \times_S \check{P}$, donc $\underline{N}' = \underline{N}|U \times_S \check{P}$, où $\underline{N}$ est le Module inversible sur $X \times_S \check{P}$ défini par D, et il résulte du lemme 3.2 plus haut appliqué à $P \times_S \check{P} \to \check{P}$ qu'on aura $i'_*(\underline{N}') \simeq \underline{N}$, donc $i'_*(\underline{N}')$ est inversible. Inversement, si cette condition est remplie prouvons que f provient d'un $D \in \emptyset$, ou ce qui revient manifestement au même, que le diviseur D' se prolonge en un diviseur de Cartier relatif par rapport à $\check{P}$ sur $X \times_S \check{P}$. Il ~~suffit~~ revient au même de dire qu'il se prolonge en un diviseur ~~de Cartier~~ D sur $X \times_S \check{P}$, car D sera automatiquement ~~de Cartier~~ relatif pour la base P , comme il résulte du fait que U contient les éléments associés au $\underline{O}_{X_s}$, $s \in S$, condition qui est stable par tout changement de base et en particulier par $S'=\check{P} \longrightarrow S$. Or il résulte aussitôt du lemme 4.2. plus haut que D' se prolonge en un diviseur ~~de Cartier~~ D sss $\underline{N}'$ se prolonge en un Module inversible, ou encore $i'_*(\underline{N}')$ est inversible. ~~Donc~~ Il faudrait rédiger mieux la fin de la démonstration en termes de cond néc et suff (sans y aller en deux fois comme je l'ai fait), et dégager d'abord aussi le

Corollaire 3.4. au lemme 3.2. Supposons $g:X \to S$ plat loc de présentation finie, soit Z une partie fermée de X telle que $x \in Z$ implique prof$_x$ $\underline{O}_{X_s} \geq 2$ (où $s = g(x)$), soit $U=X-Z$ et $i:U \to X$ l'immersion can. ~~[illegible]~~ Pour tout Module loc libre de t.f. $\underline{L}$ sur X, considérons sa restriction $\underline{L}' = \underline{L}|U$. Alors a) le foncteur $\underline{L} \rightsquigarrow \underline{L}'$ est pleinement fidèle, et pour ~~[illegible]~~ tout $\underline{L}$, ~~xxx~~ l'hom canonique $\underline{L} \to i_*(\underline{L}')$ est un isomorphisme. (Pour que L soit de rang n, il f et s que L' le soit.) b) Soit $\underline{L}'$ un Module loc libre sur U, alors $\underline{L}'$ est isomorphe à la restriction d'un Module loc libre $\underline{L}$ sss $i_*(\underline{L}')$ est loc libre. c) Supposons que $\underline{L}'$ soit le Module inversible associé à un diviseur ~~de Cartier~~ D' sur U. Alors la condition envisagée dans b) est aussi néc et suffisante pour que D' soit la restriction d'un diviseur ~~de Cartier~~ D sur X, (lequel sera alors unique, et égal à l'adhérence schématique de D' dans X.) Pour que D' soit diviseur ~~de Cartier~~ relatif par rapport à S, il f. et s. que D le soit.

On utilise simplement le fait que tout $\underline{L}$ satisfait aux ~~xxx~~ hypothèses énoncées pour $\underline{F}$ dans le lemme 3.2...

Corollaire 3.5. Supposons les anneaux locaux de X factoriels, (par exemple X régulier) ~~(par exemple S régulier, et X lisse sur S)~~. Alors l'application $\emptyset \to \emptyset'$ est bijective. En particulier, si X est un préschéma régulier loc de type fini sur un corps k, et P un fibré projectif sur k, il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble $\emptyset$ d systêmes linéaires de diviseurs sans composante fixe sur X paramétrés par $\check{P}$, et l'ensemble $\check{V}$ des applications rationelles de X dans P, qui sur k ne se factorisent par aucun hyperplan de P_k.

lorsque les anneaux locaux de X sont factoriels.

En effet, ~~et comme codim(X-U,X) ≥ 2~~, il s'ensuit que tout Module inversible sur U peut se prolonger en un Module inversible sur X, donc la condition envisagée dans b) est automatiquement satisfaite. D'autre part, d'après Auslander-Buchsbaum (~~qui figurera un jour au Chap III~~) cf. § 20 un anneau local régulier est factoriel.

La proposition 2 b) nous montre que moyennant une hypothèse supplémentaire sur ~~une famille~~ système linéaire de diviseurs D, (savoir D ...) on peut lui associer canoniquement un Module inversible $\underline{L}$ sur X, prolongement canonique de $\underline{L}^X_U = f^*(\underline{O}_P(1))$, où U=X-Z. On peut en donner une autre interprétati indépendante de l'hypothèse D $\emptyset$, de la façon suivante; par construct ~~[illegible]~~ ou presque $\underline{L}^X_U \otimes_S \underline{O}_P(1)$ est can isomorphe à la restriction $\underline{N}'$ à $U \times_S \check{P}$ du Module inversible $\underline{N}$ sur $X \times_S \check{P}$ défini par D. En ver du ~~[illegible]~~ nº1, cela détermine ~~[illegible]~~ $\underline{L}_U$ à isom unique près et (comme U est dense dans X) il existe un Module inversible $\underline{L}$ sur X déterminé à isom unique près (donc prolongeant $\underline{L}_U$) tel que l'on ait un isomorphisme $\underline{L} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{\check{P}}(1) \simeq \underline{N}$; $\underline{L}$ est donné par exemple par

$$\underline{L} \simeq pr_{1*}(\underline{N}) \;;$$

on l'appelle le Module inversible sur X associé au système lin de divi seurs D.

7. <u>Systêmes linéaires de diviseurs et Modules inversibles</u>.

Utilisant le résultat du n°1, nous allons donner une description complète des systêmes linéaires sur X en termes des faisceaux inversibl sur X. Nous pouvons supposer évidemment $\check{P} \to S$ surjectif. Alors $X\times_S\check{P} \to \check{P}$ l'est a ~~En effet,~~ d'après les généralités du n° 2 (S 2.5), la donnée d'un diviseur ~~de Cartier~~ D sur $X\times_S\check{P}$ ~~(fibré projectif sur X)~~ revient à la donnée d'un Module inversible $\underline{N}$ sur $X\times_S\check{P}$, et d'une section régulière ϕ de ce dernier. ~~Exxxxxx~~ L'hypothèse que D est une systême linéaire diviseurs sur X paramétrée par $\check{P}$ s'exprime alors par les deux conditic 1°) les ϕ_t ($t \in \check{P}$) induits par ϕ sur les fibres de $X\times_S\check{P}$ au dessus de sont réguliers (ce qui entraine que ϕ est régulier), et 2°) les $\underline{N}_x$ ($x \in X$ induits par $\underline{N}$ ~~xxxx~~ sur les fibres des $X\times_S\check{P}$ sur X sont <u>de degré</u> 1 . Or la donnée d'un $\underline{N}$ inversible sur le fibré projectif $X\times_S\check{P}$ sur X, satisfaisant à la condition 2°) ci-dessus, équivaut en vertu du n°1 à la donnée d'un Module inversible $\underline{L}$ sur X, $\underline{N}$ étant déterminé en fonct: de $\underline{L}$ par

$$\underline{N} \simeq \underline{L}\otimes_{\underline{O}_S}\underline{O}_{\check{P}}(1) \quad ,$$

et $\underline{L}$ étant d'ailleurs déterminé en termes de $\underline{N}$ par $\underline{L} \simeq pr_{1*}(\underline{N}(-1))$, où (-1) désigne le tensorisation par $\underline{O}_{\check{P}}(-1)$ sur $\underline{O}_S$. La donnée de ϕ revient à la donnée d'une section de $\underline{L}\otimes_{\underline{O}_S}\underline{O}_{\check{P}}(1)$, i.e. d'une section de $pr_{1*}(\underline{L}\otimes_{\underline{O}_X}\underline{O}_{X\times_S\check{P}}(1)) = \underline{L}\otimes_{\underline{O}_S} pr_{1*}(\underline{O}_{X\times_S\check{P}}(1))$, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ ~~XxXxxxxx~~ or en vertu de III 2 on a $pr_{1*}(\underline{O}_{X\times_S\check{P}}(1)) \simeq \check{\underline{E}}_X$, donc la donnée de ϕ équivaut à ~~xxxx~~ la donnée d'un homomorphisme $g^*(\underline{E}) \to \underline{L}$ où ce qui revient au même, d'un morphisme $u: \underline{E} \to g_*(\underline{L})$ (NB $g:X \to S$ est la projection canonique). Il reste à exprimer la condition 1°) plus haut en termes de u. Comme les constructions faites commutent avec le changement de base, il suffit d'exprimer cette condition fibre par fi et compte tenu que les points de $\check{P}$ à valeurs dans une extension k d k(s) correspondent exactement aux droites de $E(s)\otimes_{k(s)}k$, cette

$X\times_S\check{P}(1)$

condition s'exprime simplement en exigeant que pour tout $t \in E(s)$, la section correspondante $u(s)$ de $\underline{L}_s$ sur X_s soit régulière, et que la condition analogue soit vérifiée après toute extension du corps de base. On voit comme d'habitude qu'il suffit de tester cette condition sur une clôture algébrique de k. En résumé:

<u>Proposition</u> 5.1. Soit $g:X \to S$ un morphisme plat loc de présentation finie, $P=P(E)$ un fibré projectif sur X défini par $\underline{E}$ loc libre de type fini, $\check{P} = \check{P}(E)$, Alors il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des systêmes linéaires de diviseurs sur X/S paramétrés par $\check{P}$ et l'ensemble des couples (à isomorphisme près) $(\underline{L},u)$, où $\underline{L}$ est un Module inversible sur X et $u: \underline{E} \to g_*(\underline{L})$ un homomorphisme, tel que pour tout $s \in S$ et tout point t de $E(s) \otimes_{k(s)} k$ (pour une extension quelconque K de k(s), qu'on peut supposer être la clôture algébrique de k(s)), la section correspondante $u(t)$ de $\underline{L}_{s\ k}$ sur $X_{s\ k}$ soit régulière.

pourtant ≠ 0 [illegible]

On notera que lorsque les fibres de X sont ~~(Sx) et géom irréd~~ géométriquement intègres, cette condition sur u signifie simplement que pour tout $s \in S$, $u(s): E(s) \rightarrowtail H^0(X_s,\underline{L}_s)$ est injectif, fait qu'il faudrait également expliciter dans 5.1. ; il faudrait également rappeler (pour la commodité de la référence) la construction du diviseur D en termes de $(\underline{L},u)$ comme diviseur de la section évidente ϕ de $\underline{L} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{\check{P}}(1)$ définie par u.

<u>Corollaire</u> 5.2. ~~Soit~~ Supposons $f: X \longrightarrow S$ propre, plat, de présentation finie et à fibres géométriquement intègres, ~~et~~ soit $\underline{L}$ un Module inversible sur X, et $P=P(\underline{E})$ un fibré projectif sur S comme dans 5.1. ~~Soit enfin~~ Il existe un Module Q de présentation finie sur S et un isomorphisme de foncteurs en le $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent F :

$$\mathrm{Hom}\ (Q,F) \xrightarrow{\sim} g_*(\underline{L} \otimes_{\underline{O}_S} F) .$$

Ceci posé, les ~~familles~~ systêmes linéaires de diviseurs sur X paramétr

par $\check{P}$, et associés à $\underline{L}$ (dans le sens de §.1.) correspondent biunivo-
quement aux homomorphismes surjectifs $Q \longrightarrow \check{\underline{E}}$, modulo multiplication par des sections de O_S^*.

L'existence de Q se ramène par le procédé brévété au cas S noethérien, et dans ce cas n'est autre que III 7.7.6. (l'hypothèse sur les fibres de X étant d'ailleurs inutile). Comme $\underline{E}$ est loc libre de type fini la donnée d'un hom $\underline{E} \rightarrow f(\underline{L})$ équivaut à celle d'une section de $\underline{L} \otimes_{O_S} \check{\underline{E}}$, donc à celle d'un homomorphisme $Q \rightarrow \check{\underline{E}}$. Il reste à exprimer que la condition envisagée dans §.1. est bien vérifiée, ce qui (grâce à l'hypothèse faite sur les fibres de X/S) se réduit à vérifier que fibre par fibre l'homomorphisme correspondant $E(s) \rightarrow$ ~~Q(s)~~ $H^0(X_s, L_s) \simeq \mathrm{Hom}_{k(s)}(Q(s), k(s))$ est injectif, ou encore $Q(s) \rightarrow \check{E}(s)$ surjectif, ce qui par Nakayama signifie aussi que Q E est surjectif. Le "modulo sections de O_S" provient du "modulo isomorphisme" dans §.1.

On peut interpréter ~~xxxxxxxxx~~ §.1. par une autre voie, en utilisant le fait que P(Q) représente le ~~xxxxxxxx~~ sous-foncteur de $\mathrm{Div}_{X/S}$ défini par $\underline{L}$, en vertu du n°2. et associé à $\underline{L}$. Par suite, un système linéaire de diviseurs paramétré par $\check{P}$ s'interprète comme un morphisme $\check{P} = P(\check{\underline{E}}) \longrightarrow P(Q)$; le caractère linéaire de la famille de diviseurs définie par un tel morphisme s'interprète alors par le fait que ce morphisme soit "linéaire", i.e. précisément défini par un morphisme surjectif $Q \longrightarrow \check{\underline{E}}$. On voit aussi dans ce cas que le morphisme $\check{P} \longrightarrow \mathrm{Div}_{X/S}$ est un monomorphisme (puisque $\check{P} \longrightarrow P(Q) \hookrightarrow \mathrm{Div}_{X/S}$ l'est), fait d'ailleurs bien général, cf corollaire plus bas. Convenons alors de dire que deux familles linéaires de diviseurs de X/S, paramétrées par les fibrés projectifs $\check{P}, \check{P}'$ sont isomorphes s'ils sont transformés l'un en l'autre par un S-isomorphisme $\check{P} \longrightarrow \check{P}'$ (lequel sera d'ailleurs unique grâce au fait qu'on a des monomorphismes dans $\mathrm{Div}_{X/S}$). ~~On appelera système linéaire de diviseurs dans X/S (sans référence à un fibré projectif précisé qui le paramétriserait) un~~

On peut alors exprimer 4.2. en disant que l'ensemble des classes à isomorphisme près de systèmes linéaires de diviseurs sur X associés à $\underline{L}$, est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble ~~Grassx~~ Grass(Q)(S~~zmx~~ et cette correspondance étant compatible avec ~~les~~ changem de base quelconques, on voit que le foncteur

$$S' \rightsquigarrow \text{ensemble des classes (mod isomorphisme) de systèmes linéaires de diviseurs de } X_{S'}/S' \text{ associés à } \underline{L}_{S'}$$

est représentable par le S-préschéma $\underline{\text{Grass}}$ (Q).

~~Le résultat suivant, de nature moins technique que 5.2., devrait plutôt passer avant ce dernier:~~

~~Corollaire 5.3. Soit f:X S un morphisme fidèlement plat loc de prés finie. Alors pour tout ~~famille~~ système linéaire de diviseurs, paramétr sur X/S par un fibré projectif $\check{P}$ sur S, le morphisme correspondant~~

~~$$\check{P} \qquad \mathrm{Div}_{X/S}$$~~

~~est un monomorphisme.~~

~~Cela signifie que deux morphismes S' $\check{P}$ ayant même composé avec le morphisme précédent sont égaux. Faisant le changement de base S' S, on est ramené ~~xxxxxxxxxxxxxxx~~ au cas de deux sections de $\check{P}$ sur S,~~

et Il faut expliciter aussi dans 5.1. que $\underline{L}|X-Z$ est canoniquemen isomorphe à $f^*(\underline{O}_P(1))$ (avec les notations du nº précédent), donc dans le cas $D \in \emptyset$ envisagé dans 3.3., $\underline{L}|X-Z$ n'est autre que $\underline{L}_{X-Z}$ de 3.3. b), et par suite $\underline{L}$ n'est autre que le prolongement canonique et unique de $f^*(\underline{O}_P(1))$ en un faisceau inversible sur X.

Proposition 5.3. Soit D un système linéaire de diviseurs sur X/S paramétré par $\check{P}$, où $g: X \longrightarrow S$ est ~~xxxx~~ un morphisme plat loc de présentation finie.

a) Supposons (g de prés. finie et) que pour tout $s \in S$, désignant par k une clôture alg

lin. complet associé à L est $g_*(\underline{L})$ est loc. libre, sa formation commute aux fibres, et pour tout $s \in S$, et $\varphi \in H^0(X_s, \underline{L}|X_s)$, $\varphi \neq 0$, φ [illegible] sections régulières, brique de $k(s)$, il existe un cycle premier T associé à X_k tel que $k \to H^0(T,\underline{O}_T)$ soit un isomorphisme (condition automatiquement satisfaite si g est propre et surjectif). Alors le morphisme $D: \check{P} \to \mathrm{Div}_{X/S}$ est un monomorphisme.

b) ~~Supposons~~ Considérons l'application $u \rightsquigarrow D\circ u$ de $\mathrm{Aut}_S(\check{P})$ dans l'ensemble des familles de diviseurs sur X/S paramétrées par $\check{P}$. Alors si g est surjectif, l'application précédente est injective, en particulier $D = D\,u$ implique $u = \mathrm{id}_{\check{P}}$; plus généralement, le morphisme de foncteurs $\underline{\mathrm{Aut}}_S(\check{P}) \to \underline{\mathrm{Syst.\,lin.\,div}}_{X/S,\check{P}}$ est un monomorphisme

On notera que sous les hypothèses de a), b) est une conséquence triviale de a); d'autre part, b) est valable sous des hypothèses moins restrictives que a). On fera attention que a) devient faux si on abandonne l'hypothèse restrictive qui y a ~~été~~ été faite: prendre par exemple $S=\mathrm{Spec}(k)$, X un ouvert de P^1_k ne contenant pas les deux points distincts a et b de $P^1_k(k)$, D la famille de diviseurs définie par l'immersion canonique de X dans P^1_k. Alors les deux ~~morphismes~~ points a et b définissent les mêmes diviseurs de X (à savoir le diviseur nul), sans être eux-mêmes identiques.

Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps ~~alg clos~~ k, qu'on peut évidemment (par "descente") supposer alg clos. Soit T comme dans a), qu'on munit de la structure réduite induite, on a alors un morphisme "diviseur induit" $\mathrm{Div}_{X/k} \to \mathrm{Div}_{T/k}$, et il suffit de prouver que le composé $\check{P} \to \mathrm{Div}_{T/k}$ est un monomorphisme. Comme ce dernier est encore un syst lin de div, on est ramené au cas où $X=T$, donc au cas où $H^0(X,\underline{O}_X) \xleftarrow{\sim} k$. Alors pour tout S sur k, on a $g_{S*}(\underline{O}_{X_S}) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_S$, donc (si $\underline{L}$ sur X et $u: \underline{E} \to g_*(\underline{L})$ sont comme dans §.1.) si deux sections ϕ, ψ de $\underline{E}_S$ partout non nulles sont telles que $u(\phi)$ et $u(\psi)$ sont des sections de $\underline{L}_S$ sur X_S ayant même diviseur, donc ~~txxxxf~~ déduites l'une de l'autre par multiplication par une section inversible de $\underline{O}_{X_S}$, il s'ensuit que ψ est déduit de ϕ par multiplicat

non automatiquement vérifiée si les X_s sont ~~...~~ intègres.

par une section inversible de $\underline{O}_S$, donc ϕ et ψ définissent le même poin de $\check{P}$ à valeurs dans S. Comme tout point de $\check{P}$ à valeurs dans S est défini localement sur S, par une section ϕ de $\underline{E}_S$ qui ne s'annule pas (cf Chap I a) s'ensuit. Pour prouver b), on note le

<u>Lemme</u> Soit D un syst lin de diviseurs sur X non vide loc de type fini sur k alg clos, paramétré par $\check{P}(E)$, et considérons le morphisme correspo dant $f: X-Z \longrightarrow P$, où Z est l'ensemble des points fixes. Alors ~~xx~~ si $r = \mathrm{rang}_k E > 0$, il existe r+1 points x_i $(1 \leq i \leq r+1)$ de ~~xxx~~ $X(k)-Z(k)$ tels que les $f(x_i)$ forment une "base projective" de P, i.e. tels que pour toute partie J de $[1,r+1]$ ayant r ~~xx~~ éléments, les $f(x_i), i \in J$, ~~xxxx~~ ne sont p contenus dans un hyperplan de P.

On peut évidemment supposer $Z=\emptyset$, ~~X intègre (en le remplaçant par une xxxxxx composanteirréductible T de X muni de la structure induit réduite). xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ Comme par 4.1. f(X) n'est contenu dan aucun hyperplan de P, on en conclut d'abord l'existence de r points x_i $(1 \leq i \leq r)$ de X ~~xxxxxx~~ tels que les $f(x_i)$ soient projectivement indépendants dans P, i.e. soient défini par des formes linéairement indépendantes sur E. Reste à prouver qu'il existe un $x_{r+1} = x$ dans X(k) tel que f(x) ne soit dans aucun des r hyperplans H_i définis par les ~~$f(x_i)$~~ systèmes de r-1 parmi les $f(x_i)$. Or dan le cas contraire, compte tenu du sorite Jacobson, on aurait $f(X) \subset \bigcup_i H_i$, donc ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ si X_o est une composante irréductible de X, $f(X_o)$ serait contenu dans un des H_i , ce qui contredi 4.1. - Ceci posé, pour prouver b), on peut évidemment supposer $Z=\emptyset$, et utilisant 4.1. on est ramené à prouver qu'un automorphisme u de $\check{P}$ est déterminé quand on connait le ~~xxx~~ composé de son contragrédient u dans P avec $f: X \longrightarrow P$, - et que l'asser tion analogue est vraie après tout changement de base $S \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ pour un automorphisme u de $\check{P}_S$. Or cela résulte aussitôt du lemme précédent, et de la détermination des automorphismes de $\check{P}(E) = P(\check{E})$ fait au n°1, qui implique qu'un automorphisme d'un fibré projectif sur un S (relatif à un Module loc libre de type fini) est connu quand on connait son effet sur une famille de sections formant une "base projective" (i.e. formant une base projective en chaque ~~point~~ fibre).

Esquissons maintenant le cas général: S quelconque. Bien entendu, quitte à faire un changement de base sur S, on est ramené dans a) à prou que deux sections de $\check{P}$ sur S qui définissent le même diviseur sur X sc identiques, et dans b) que deux automorphismes de $\check{P}$ qui sont tels que $D \circ u = D \circ v$ sont identiques. On peut supposer S affine, Dans le cas b) où on n'a pas supposé expres ment g de présentation finie, mais g surjectif, on se ramène aussitôt (grâce au fait que g est ouvert) au cas où X est également affine, donc de présentation finie sur S. Par le procédé bréveté, on peut maintenant se réduire au cas S noethérien. Or pour un préschéma de base S loc noethérie et un morphisme de foncteurs $F \xrightarrow{h} G$ sur S (F et G des foncteurs $(Sch)_{/S}^{o} \longrightarrow (Ens)$), on a ~~des~~ critère~~s~~ très généra~~ux~~ (qui sera explicité au Chap V permettant d'affir mer que si pour tout $s \in S$, le~~s~~ morphisme correspondant $F_s \longrightarrow G_s$ est un monomorphisme, alors $F \longrightarrow G$ est un monomorphisme (NB on pose $F_s = F \times_S S$p $(k(s))$, et de même pour G_s), moyennant des hypothèses simples sur F e: (vérifiées par exemple si F et G sont tous les deux représentables par (préschémas loc de type fini sur S; mais dans le cas qui nous occupe, seu le premier des deux foncteurs est représentable à priori). Nous allons esquisser le raisonnement du Chap V dans le~~s~~ deux cas particuliers qui nous intéressent ici. On a deux sections u, v (de $\check{P}$, resp. du groupe projectif $GP(\check{E})$) d'un préschéma de type fini (f) sur S dont on veut montrer qu~~e~~'elles sont égales, pour ceci manifestement il suffit de prouver qu'elles sont égales après tout changement de base $Spec(\underline{O}_{S,s}/\underline{m}_s^{n+1}) \rightarrow S$, ce qui nous ramène au cas où S est artinien local, S=Spec(A). On procède par récurrence sur l'entier n tel que $m^{n+1}=0$, ce qui nous permet de supposer que les deux sections envisagées u,v sont égales mod m^{n}. Donc l'une se déduit de l'autre à l'aide d'un élément ~~xxxxxxxxxx xxxxxxx~~ δ de $\mathrm{Hom}_k(u_o^*(\Omega^1_{F_o/k}), V)$, où $k=A/m$ est le corps résiduel, $F_o=F\otimes_A k$ est la fibre réduite, $V=m^n = m^n/m^{n+1}$. Il faut prouver que $\delta = 0$, moyennant l'hypothèse $h(u)=h(v)$. Le principe général de la vérification est le suivant: exprimant d'abord que $h(u)$ et $h(v)$ coïncident mod m^n, on voit que leur "différence" peut s'écrire comme un élément δ' de $\mathrm{Hom}_k(w_o^*(\Omega^1_{G_o/k}),V)$, où $w_o = h_o(u_o)=h_o(v_o)$ ~~xxx~~ et où $G_o = G\otimes_A k$; cet élément n'est autre que celui qui est déduit de δ par composition ave l'homomorphisme naturel $h_o^* : w_o^*(\Omega^1_{G_o/k}) \longrightarrow u_o^*(\Omega^1_{F_o/k})$ déduit de $h_o: F_o \longrightarrow G_o$. Comme $h(u)=h(v)$ donc $\delta' = 0$, le composé de δ avec l'homomorphisme précédent h_o^* est nul, donc si on sait que h_o est surjectif, il s'ensuit que $\delta=0$ et on gagne. Or le fait que $h_o:F_o \rightarrow G_o$ est un monomorphisme, donc ind un monomorphisme pour l'ensemble des points à valeurs dans les nombres duaux sur k, implique bien en effet que h_o^* est surjectif (son transpos étant injectif). Ce raisonnement est bien valable tel quel lorsque G est représentable, ce qui n'est pas le cas cependant dansle cas qui nous intéresse. ~~Il faut donc~~ On peut cependant encore définir un vectoriel V_{w_o} sur k, jouant le rôle (espace tangent à G_o/k en w_o) dual de du $w_o^*(\Omega^1_{G_o/k})$ pour exprimer la "déviation" de deux points de G qui coïncident mod m^n comme un élément de $V_{w_o}\otimes_k V$. C'est essentiellement straightforward, et contenu dans les développements systématiques du par. 26 (? Extensions infinitésimales), auquel on pourrait renvoyer ici. Dans le cas a), G étant le foncteur $\mathrm{Div}_{X/S}$, w_o correspond donc à un diviseur de Cartier ~~xx~~ D_o sur $X_o = X\otimes_A k$, et il faut prendre $\Omega= H^o(D_o, \underline{n}_{D_o/X_o})$ où le $\underline{n}$ est le faisceaux normal de D_o dans X_o , isomorphe également au faisceau induit sur D_o

par $\underline{\mathcal{O}}_{X_o}(D_o)$ sur D_o. Dans le cas b), on peut supposer D sans points fixes, et il est plus commode d'interpréter la situation en termes de morphismes dans P (cf 4.1.), de sorte que G devient le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,P)$, et $\mathcal{V}_{w_o}$ sera l'espace ~~xxxxx~~ $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*(\Omega^1_{P_o/k}), \underline{O}_{P_o})$. Dans l'un et l'autre cas, on aura un homomorphisme naturel $\mathcal{V}_{u_o} \otimes_k V \to \mathcal{V}_{w_o} \otimes_k V$ (où $\mathcal{V}_{u_o}$ = dual de $u_o^*(\Omega^1_{F_o/k})$) exprimant le passa de la déviation δ à la déviation δ' correspondante par application de h, et l'injectivité de cette application résulte~~ra~~ encore de l'injectivit de $\mathcal{V}_{u_o} \longrightarrow \mathcal{V}_{w_o}$, qui elle provien~~dra~~ du fait que $h_o: F_o \to G_o$ est un monomorphisme.

Pratiquement, il ne semble guère possible de rédiger cette dernié partie de la démonstration sans référer aux petits calculs du par.25 (qu'il n'est pas question de refaire ici dans un cas particulier). On signalera que cela ne donne pas lieu à des cercles vicieux, car le par. 25 ~~xxx~~ et les calculs qu'on y ~~xxxx~~ développe ne dépend que des sorite de calcul différentiel du par.16, et d'ailleurs §.3. ne sera plus utilisé dans le Chap IV, sauf peut-être dans les deux nºs qui suivent.

L'intérêt de §.3. a) est de montrer que sous les conditions ~~de a)~~ énoncées, le fibré projectif paramétrisant peut s'interpréter comme un sous-foncte de $\mathrm{Div}_{X/S}$, ce qui permet d'interpréter de façon intrinsèque la notion de classe (à isomorphisme près sur le ~~xxxxx~~ fibré projectif paramétris teur) de système linéaire sur X/S, ~~exxxxxxxxxxx~~ comme étant un sous-foncteur $\check{P}$ de $\mathrm{Div}_{X/S}$ qui satisfait certaines propriétés (savoir est représentable par un fibré projectif, et la famille de diviseurs définie par l'injection canonique de ce dernier dans $\mathrm{Div}_{X/S}$ est linéaire au ser du nº3), ce qui est ~~xxxxxxxxx~~ essentiellement le point de vue classique (où un~~e~~ système linéaire de diviseurs est défini comme un <u>ensemble</u> de diviseurs satisfaisant certaines conditions, cf 4.4.). D'autre part, 4.3. b) équivaut ~~essentiellement~~ aussi à dire que lorsque g est surjectif, si deux systèmes lin de diviseurs sur X/S ~~sont~~ paramétrés par deux fibrés projectifs $\check{P}, \check{P}'$ sont isomorphes alors il existe un unique isomorphisme de $\check{P}$ sur $\check{P}'$ compatibles avec D,D'; on peut donc dire qu'une classe (à isom près) de systèmes linéaires sur X/S détermine son fibré projectif paramétrisateur à isomorphisme unique près. Techniquement, ce résultat permettra (une fois qu'on disposera de la technique de descente, exposée au Chap V) de faire de la descente fid plate pour des systèmes linéaires de diviseurs, - sous réserve toutefois d'admettre également comme fibrés paramétrisateurs des "fibrés projectifs tordus", ce qui va être fait au prochain ~~paragraphe~~ numéro.

Descendant à nouveau par terre, et bien bas, pour expliciter en termes vulgaires la notion de système linéaire, en nous plaçant pour simplifier sur un corps de base (bien que l'énoncé subsiste essentiellement tel quel sur une base affine):

Proposition 4.4. Soit X un préschéma ~~lui~~ de type fini sur un corps k, tel que $k \to H^0(X, \underline{O}_X)$ soit un isomorphisme. A tout système linéaire D de diviseurs sur X, paramétré par un fibré projectif $\check{P}$ sur k, associons l'ensemble (!) Ens(D) de tous les diviseurs sur X de la forme D(t), où $t \in \check{P}(k)$. a) Si ~~alors~~ D' est un autre système lin de diviseurs sur X, paramétré par un fibré projectif $\check{D}'$, alors D et D' sont isomorphes sss Ens(D)=Ens(D').

b) (Supposons k alg. clos et X séparé intègre.) Pour qu'un ensemble Δ de diviseurs de Cartier positifs sur X soit de la forme Ens(D), il f et s qu'il existe ~~soit vide, ou qu'il satisfasse la condition suivante: [...] il existe des [...]~~ une suite finie $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de fonctions rationelles rel k sur X, telles que pour tout système d'eléments $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ de k un sous-k-espace vectoriel E de l'espace des fonctions ~~rationelles~~ méromorphes ~~strictes~~ ~~xxxxxxx~~ sur X, tel que pour tout $\phi \in E-(0)$, ϕ soit ~~inversible dans l'xxxxxxx~~ régulier ~~strictes~~ ~~anneau des fonctions rationelles~~ ~~xxxxxx~~, i.e. div(ϕ) est défini ~~comme diviseur de Cartier~~, et que Δ soit l'ensemble des div(ϕ) pour $\phi \in E-(0)$

c) Soient E, E' deux sous-k-espaces vectoriels de l'espace des fonctions rationelles strictes ~~xxxxxxx~~ sur X, ~~xxxx~~ satisfaisant la condition envisagée dans b), alors les ensembles de diviseurs Δ, Δ' qu'ils définissent respectivement sont égaux sss il existe une méromorphe fonction ~~rationelle stricte~~ régulière ~~inversible~~ ϕ sur X, telle que $E' = \phi E$. Si $E \neq (0)$ (i.e. $\Delta \neq \emptyset$), une telle ϕ est déterminée modulo multiplication par un élément c de k^*.

La démonstration est un exercice facile, en utilisant §.1. , et je me dispense d'en écrire la démonstration, sauf réclamation de ta part. Il me semble d'ailleurs que §.4. viendrait avantageusement dès avant §.3., étant techniquement nettement plus trivial. Noter d'ailleurs que lorsque X est géom intègre, la condition sur E énoncée dans b) devient vide. La restriction mise au début de b) tient au fait qu'il se pourrait autrement que la condition énoncée pour b) ne soit plus vérifiée après passage à la clôture algébrique de k (il est facile d'en donner des exemples, en toute caractéristique, et même lorsque k est séparablement clos en cas p > 0). Pour bien faire, on devrait énoncer b) sans condition supplémentaire sur k ou X, mais en énoncant la condition sur E en passant à la clôture algébrique de k (et signaler que si X est géom intègre, cette condition devient vide). — Par abus de langage, un ens. Δ de diviseurs de la forme Div(D) serait parfois appelé système linéaire de diviseurs sur X ;

E Tr.

27.1.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par.20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu ~~xxx~~ subdiviser (mon ancien par.20), et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est paffois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un nº de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord:

20. ???
21. ???
22. Systêmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.
23. Grassmaniennes.
24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.
25. Sections hyperplanes et bordel.
26. Résultant et discriminant.
27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant, $27=3^3$ est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscriptes que je t'avais passées, si même je t'e ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire: il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets ... Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs (il finit toujours par s'en trouver ..). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un joint papar.

Pour par.20 , 10.9.1. , il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble ~~dxxxx~~ des points de Z_λ en lesquels F_λ ~~xsixd~~ restreint à la fibre est de prof $\geq$ n donné, est <u>constructible</u> (on a même dû prouver au par.12 qu'il est ouvert, avec les hypothès de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son ima inverse dans Z est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que λ. C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A Grothendieck

§20 compléments sur ... [illegible]

§21 Diviseurs de Cartier, Weil, Picard, Syst. lin., Brauer-Severi.

§22 Grassmanniennes

§23 Sch. ... [illegible]

§24 Ext. Inf.

IV 21 Faisceaux inversibles et diviseurs relatifs sur les fibrés projectifs et multiprojectifs; systêmes linéaires de diviseurs.

1. Faisceaux inversibles sur ~~lesxf~~ un fibré projectif; application aux morphismes d'un fibré projectif dans un autre.

2. Représentabilité de $\underline{\mathrm{Div}}^{L}_{X/S}$; diviseurs relatifs sur les fibrés projectifs et multiprojectifs.

3. Systêmes linéaires de diviseurs$_x$ et morphismes dans les fibrés projectifs.

4. Systêmes linéaires de diviseurs$_x$ et Modules inversibles.

Les résultats développés dans le présent paragraphe et les suivant sont déjà en partie de nature globale, et donnent notamment des compléments desur les schémas projectifs, utilisant ~~dexfaçonxessentielle~~ les constructions globales du Chap II, et même ici certains résultats du Chap III, en plus des résultats purement locaux du présent Chapitre IV.

Un des buts du présent paragraphe est de développer le langage des "systêmes linéaires de diviseurs", lié d'une part à la classification de morphismes dans un fibré projectif, d'autre part à celle des Modules inversibles sur un préschéma relatif donné. Notons d'ailleurs ici que les "schémas de paramètres" vraiment naturels pour les systêmes linéaires de diviseurs sont les schémas de Brauer-Séveri, qui généralisent les fibrés projectifs, et peuvent se définir par exemple comme les fibrés qui deviennent isomorphes à un fibré projectif après extension étale surjective de la base. Comme leur étude utilise la théorie de la descente, développée au Chap V, et que d'ailleurs leur classification équivaut à celle des ~~fi xfibrésxprincipauxxhomogènes~~ torseurs de groupe le groupe projectif, nous renvoyons pour l'étude de ces schémas et ses liens avec la notion de systême linéaire de diviseurs au Chap VI$_x$ de notre savant ouvrage.

Du point de vue technique, le résultat principal du présent paragra est le théorème 1.1. déterminant le groupe de Picard d'un fibré projectif en termes de celui de sa base, et ses premiers coroallaires, développés dans les nºs 1 et 2.

I . Sections hyp[illegible]lanes et projections co[illegible]s.

No[illegible]ions.

Section hyperplane gén[illegible]que: pr[illegible]iétés local[illegible].

Section [illegible]yperplane générique: irréductibilité et connexi[illegible] g[illegible].

Se[illegible] hypérplane variable: section[illegible] "assez généralcs".

Théorèmes du type Seidenberg.

[illegible]exion Co[illegible] d'une section hyperpl[illegible] quelcon[illegible].

multisecti[illegible]

A[illegible]ication a des constructions de sections hyperplanes et m[illegible] [illegible] spéciales.

[illegible]usion Di[illegible] de l'ens[illegible]ble des hyperplans exceptionn[illegible]ls.

C[illegible]ent d'immersion projective.

. P[illegible]ceaux de sections hyperplanes, et fibrations de vari[illegible]

[illegible]ma. . G[illegible]smaniennes.

[illegible]lisation G[illegible]ralisation de résultats [illegible] à des sections lin[illegible]

A.

[illegible]smes [illegible]phismes élémentaires et théorè[illegible] de M. Art[illegible].

1 . Projections co[illegible]iques.

1[illegible]. A[illegible]iomatisation de certains des résultats précédents.

. Traductions en langage de systèmes linéaires.

[illegible]ires. Ce[illegible] rédaction donne pêle mêle une esquis[illegible] détaillée [illegible] l'ensemble des r[illegible]sult[illegible] qui devraient figurer dans une rédaction [illegible]al[illegible]. Pour parvenir à cette dernière, il faudra une réorganisation de [illegible]d [illegible] comble du présent Etat 0, la première t[illegible] étant probablem[illegible] [illegible]ssement d'un nouveau plan (dans lequel s[illegible] doute les n[illegible] [illegible],12,14,15 v[illegible]ndront beaucoup plus tôt). Je n'ai pas encor[illegible] [illegible] 1[illegible] 16 , qui en principe ne doit offrir aucune difficulté ni [illegible]l[illegible] en aucune manière sur les nºs précédents, puisqu'il s'agit d[illegible] déduit de $f:P\to S$, le deuxième déterminé par l'élément cl $(\underline{O}_P(1))$ de Pic(P). On en conclut un homomorphisme canonique

(x) $$\mathrm{Pic}(S)\times\underline{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(P)\ ,$$

défini d'ailleurs sans hypothèse restrictive sur S ni sur $\underline{E}$. Ceci posé:

<u>Corollaire</u> 1.4. Sous les conditions de 1.1., si $S\neq\emptyset$, alors l'homomorphisme précédent est injectif, et même bijectif lorsque S est connexe. ~~non vide~~

[Lorsqu'on abandonne l'hypothèse sur le rang ≥ 2, il résulte de 1.2. et 1.3. que l'homomorphisme précédent est encore surjectif si S est connexe, mais pas nécessairement bijectif, le noyau étant isomorphe à $\underline{Z}$ resp. à $\mathrm{Pic}(S)\times\underline{Z}$ lorsque $\underline{E}$ est de rang 1, resp. de rang 0.

Démontrons 1.1. en commençant par l'unicité. Tout d'abord, si S est le spectre d'un corps, notons que $\underline{O}(n)$ n'est isomorphe à $\underline{O}(m)$ i.e. $\underline{O}(m-n)$ n'est isomorphe à $\underline{O}_P$, que si $n=m$ i.e. $n-m=0$. Cela provient du fait que $\underline{O}(1)$ est ample et $\dim P\geq 1$ (d'après l'hypothèse rang $\underline{E}\geq 2$): on peut en effet supposer $d=m-n\geq 0$, si on avait $d>0$, alors $\underline{O}(d)$ serait ample, et ne pourrait être isomorphe à $\underline{O}_P$ que si P est quasi-affine, donc fini (puisqu'il est propre sur k). Ceci prouve déjà l'unicité de la famille $(S_n)_{n\in\underline{Z}}$ considérée dans 1.1. Pour l'unicité de $\underline{M}$ à isom. unique près, on est ramené au cas où $S=S_n$, je dis que dans ce cas on a un isomorphisme (uniquement déterminé en termes de l'isom $\underline{L}\simeq f^*(\underline{M})(n)$)

(xx) $$M\simeq f_*(\underline{L}(-n))\ .$$

En effet, l'isomorphisme $\underline{L}\simeq f^*(\underline{M})(n)$ définit un isomorphisme $\underline{L}(-n)\simeq f^*(\underline{M})$ et par suite un isomorphisme du deuxième membre de (xx) avec $f_*(f^*(\underline{M}))$, qui lui-même est isomorphe ($\underline{M}$ étant loc libre) à $\underline{M}\otimes f_*(\underline{O}_P)$, or (réf) $f_*(\underline{O}_P)\xleftarrow{\sim}\underline{O}_S$, d'où l'isomorphisme (xx).

Prouvons l'existence des (S_n), $\underline{M}$. Grâce à l'unicité déjà prouvée, la question est <u>locale</u> sur S, i.e. on est ramené à prouver le

<u>Corollaire</u> 1.5. Soit $\underline{E}$ loc libre de rang fini sur S, $P=P(\underline{E})$, $\underline{L}$ un Module inversible sur P, $s \in S$, alors il existe un voisinage ouvert U de s et un entier $n \in \mathbb{Z}$, tel que $\underline{L} \mid f^{-1}(U)$ soit isomorphe à $\underline{O}_P(n) \mid f^{-1}(U)$.

{Bien entendu, lorsque le rang de E en s est $\geqslant 2$, l'entier n est bie déterminé. D'ailleurs 1.5. est trivial lorsque le rang de $\underline{E}$ en s est $\leqslant 1$}

Noter que $\underline{E}$ est de la frime, car la question étant locale, on peut suppos déjà $\underline{E} = \underline{O}_S^{r+1}$, donc $P = P_S^{r}$. Par le procédé bréveté du par.8, on est ramené de plus au cas où S est noethérien. Nous précédons en deux pas:

a) S est le spectre d'un corps k. Nous savons que $\underline{L}$ est défini par un Module gradué de type fini L sur l'anneau gradué $k[t_0,\ldots,t_r]$. On sait aussi que la restriction L' de $\tilde{L}$ à l'espace affine épointé $E_k^{r+1} - (0)$ n'est autre que l'image inverse de $\underline{L}$ par le morphisme de projection canonique $q: E_k^{r+1} - (0) \longrightarrow P_k^r$, et c'est donc un Module inversible. Soit $i : E^{r+1}-(0) \rightarrow E^{r+1}$ l'immersion canonique, il résulte alors du fait que l'anneau affine $k[t_0,\ldots,t_r]$ de E^{r+1} est factoriel, donc à fortiori son localisé en le point 0 de E^{r+1} est factoriel, et du fait que ce dernier anneau est de dimension $\geqslant 2$, que $i_*(\tilde{L'})$ est un Module inversible, ~~xxxxxx~~ donc correspond à un module inversible M sur $k[t_0,\ldots,t_r]$. D'ailleurs $M = \Gamma(E^{r+1}-0, q'(\underline{L}))$ est gradué de façon natu relle, enfin l'homomorphisme $L \rightarrow M$ est évidemment un isomorphisme en tous les ~~xxxxxxxxxxxx~~ points de E^{r+1} distincts de 0. Donc quitte à remplacer L par M, on est ramené au cas où L est inversible. Mais $k[t_0,\ldots,t_r]$ étant factoriel, L est donc <u>libre</u> de rang 1, d'abord en faisant abstraction de sa graduation; mais un lemme standard (qui se trouve sans doute dans Bourbaki) implique qu'il est alors libre de rang 1 en tant que module gradué, ce qui implique que le Module associé sur P est isomorphe à un $\underline{O}_P(n)$. - Du point de vue rédaction, il était maladroit de commencer par considérer un $\underline{L}$ de type fini. Commencer carrément par considérer $L = \Gamma(E^{r+1}-(0), q_*(\underline{L}))$ définissant le Module $\tilde{L} = i_*(q^*(\underline{L}))$, on sait (Chap II) que L estb un Module gradué qui détermine précisément $\underline{L}$, puis on montre que L est libre de rang 1 ~~comme Module~~ gradué par le raisonnement indiqué.

b) Cas général. Il se déduit du cas a) grâce à III 4.6.5., en utilisant la relation $H^1(P^r_k, \underline{O}_{P^r_k}) = 0$ établie dans III 2. CQFD

Variante à 1.4. Soit $\underline{Z}(S)$ l'ensemble des fonctions localemen constantes à valeurs entières sur S, on définit un homomorphisme évident

$$Z(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(P) ,$$

les ~~xxxxx~~ $\underline{n} \in Z(S)$ correspondant en eff~~xxx~~ aux ~~xxx~~ partitions $(S_n)_{n\in\underline{Z}}$ en ouve disjoints (dont certains peuvent être vides), ~~xxxxxxxxxxxx~~ et ~~xx~~ à une telle partition on associe le Module inversible $\underline{O}_P(\underline{n})$ dont la restr à ~~xxxxxxxxx~~ $f^{-1}(S_n)$ est $\underline{O}_P(n)$. On trouve donc une variante

(x bis) $\qquad \mathrm{Pic}(S)\times\underline{Z}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(P)$,

et un énoncé plus général et plus satisfaisant que 1.4. affirme que (sous les conditions de 1.1.) c'est là une bijection. (NB Lorsque $S \neq \emptyset$ resp. connexe alors l'application canonique $\underline{Z} \longrightarrow \underline{Z}(S)$ associant à tout $n \in \underline{Z}$ la fonct on constante de valeur n, est injective resp. surjective, et on retrouve formellement 1.4., qu'il y a donc lieu d'énoncer sous la forme plus générale que je viens d'expliciter. Signaler aussi en remarque que dans le langage du schéma de Picard qui sera introduit au Chap V, 1.1. (sous la forme équivalente précédente) s'énonce simplement en disant que l'homomorphisme canonique

$$\underline{Z}_S \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{P/S}$$

du schéma en groupes constant ~~xxxxZxSxdéfinixpar~~ $\underline{Z}$ sur S dans le schéma

Faisceaux inversibles et diviseurs sur les fibrés projectifs et ... projectifs. Systèmes linéaires de diviseurs.

IV.21 ~~Compléments sur les faisceaux inversibles~~, ~~les diviseurs de~~

et
~~Cartier~~, ~~les systèmes linéaires de diviseurs.~~

1. Détermination des faisceaux inversibles sur les fibrés projectifs. Application~~s~~ au ~~groupe~~ des automorphismes d'un fibré projectif.

Théorème 1.1. Soient S un préschéma, $\underline{E}$ un Module loc libre sur S ~~qui~~ de rang $n \geq 2$ en tout point, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ $P = P(\underline{E})$ le fibré projectif qu'il définit. Alors pour tout Module inversible $\underline{L}$ sur P, on peut trouver une famille ~~xxx~~ $(S_n)_{n\in \underline{Z}}$ d'ouverts disjoints de S recouvrant S, indexée par $\underline{Z}$, et ~~xxxxxxxxxx~~ un Module inversible $\underline{M}$ sur S_n, de telle façon que ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ la restriction de $\underline{L}$ à $f^{-1}(S_n)$ soit isomorphe à celle de $\underline{M} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_P(1) = f^*(\underline{M})(n)$. De plus, la ~~xxxxxxx~~ famille des S_n ~~xxxxxxxxxxxxx~~ est uniquement déterminée par ses conditions, ainsi que $\underline{M}$ à isomorphisme unique près.

Remarque 1.2. Lorsque on ne fait pas d'hypothèse sur le rang de $\underline{E}$, S se décompose canoniquement en (le préschéma) somme de trois ouverts S^0, S^1, S^2 tel que sur ceux-ci, le rang de $\underline{E}$ soit resp. 0, 1, et ≥ 2. Alors la détermination des Modules inversibles sur P se ramène à celle des $f^{-1}(S^i)$ pour i=0,1,2. Le cas i=2 est justiciable de 1.1. , d'autre part $f^{-1}(S^1)$ est S^1-isomorphe à S^1 donc son groupe de Picard n'est autre que $\mathrm{Pic}(S^1)$, enfin $f^{-1}(S^0)$ est vide donc son groupe de Picard est nul.

Corollaire 1.3. Sous les conditions de 1.1. supposons S connexe non vide. Alors tout Module inversible $\underline{L}$ sur P est isomorphe à un Module de la forme $f^*(\underline{M})(n)$, où $n \in \underline{Z}$ et $\underline{M}$ est un Module inversible sur S. De plus n est uniquement déterminé, et $\underline{M}$ est déterminé à isom unique près, par la donnée de $\underline{L}$.

Une autre façon de formuler ce corollaire est la suivante. Considérons les homomorphismes naturels $\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(E)$, $\underline{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(P)$, le premier k-isomorphe à $k[T]/TT^n$) . Si d=1 , x rat. sur k, la notion de point singulier élémentaire de multiplicité n correspond à la terminologie classique "point singulier ordinaire à n tangentes disctinctes" . (On aura dû explicité dans 15.2. que si x est un point de X rat sur k, alor la notion de singularité élémentaire de mult. n, au sens absolu ou au sens relatif, est la même; cela reste d'ailleurs valable si k(x) est une extension finie séparable de k - sans doute d'ailleurs "finie" est inutile - et ce fait mérite d'être inséré en corollaire ou en proposition).

NB J'avais inclus au par.20 un nº sur l'éclatement d'un préschéma X le long d'un sous-présdhéma fermé Y tel que l'augmentation $\underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_Y$ soit élémentaire de mult.n (auquel j'ai fait allusion dans 15.6.). Je signale qu'il s'agit d'un nº court et bien venu, dont les seuls ingrédients sont les résultats généraux de lissité du par.17, et la définition du début de 17.15.2. (et encore pourrait-on éviter cette dernière). Rien n'empêcherait d'incopporer ces résultats dès ici, par exemple immédiatement après la définition 15.1. ci-dessus; alors la gamme "géométrique" de 15.2. et la suite 15.3. à 15.7. pourraient être séparés de ces résultats, en les groupant dans un Nº 17.16. De toutes façons, je m'aperçois en cours de rédaction que le nouveau nº 15 prévu sur les formes lisses éclate en au moins deux numéros assez distincts et indépendants, l'un contenant des sorites généraux pour les trucs "élémentaires de mult n" , n quelconque, l'autre contenant caractérisation des formes <u>quadratiques</u> lisses, et qui n'emprunte au précédent que le nº 15.1. , i.e. pratiquement la définition de la lissi d'une forme.

un sous-préschéma X" de X, régulier, ~~[illegible]~~ contenant X, et tel que X puisse se décrire dans X''_x par une seule équation $\phi = 0$, admettant x com zéro sing élémentaire de multiplicité n.

On conclut en particulier que si A est local noeth élémentaire de
~~[illegible]~~

mult. n, alors A est Coh. Mac. ~~[illegible]~~ Nous montrerons au par.20
~~[illegible]~~

(par un calcul facile d'éclatement) que le point fermé de Spec(A) est le seul point singulier de Spec(A); il en résulte que ~~[illegible]~~ A est normal sss dim A $\geq$ 2, réduit sss dimA $\geq$1. Si dim A = 0, alors A est élémentair de multiplicité n sss m/m^2 est de ~~[illegible]~~ 1 et n est le plus petit entier tel que $\underline{m}^n = 0$; on notera que ces anneaux sont aussi lesquotients d'annea de valu~~[illegible]~~ion discrète par ~~la~~ puissance n.ème de ~~l'~~ leur idéal maximal.

15.7. Il y a lieu de dégager les variantes "géométriques" de 15.6. , on trouvera en particulier que si X est un préschéma loc de type fini sur le corps k, $x \in X$, et si $d = \dim_x X$, alors x est une singularité ~~[illegible]~~ élémentaire ~~[illegible]~~ de multiplicité n de X, sss il existe un voisinage ouvert U de x tel que U se plonge comme sous-préschéma d'un préschéma lisse X' sur k, ~~[illegible]~~ connexe et de dimension $d+1$, défini par une équation $\phi=0$, x étant un zéro géom. singulier ordinaire de multiplicité n de ϕ . On aura dit d'ailleu dans 15.5. que cela signifie que la valeur en x de ~~partie principale~~ $d^n\phi$ de ϕ , ~~[illegible]~~ (qui à priori est un élément ~~[illegible]~~ de $\underline{P}^n_{X'/k} \otimes k(x)$,et plus précisément de son Idéal d'augmentation $\underline{I}$) est en fait un élément de ~~[illegible]~~ $\underline{I}^n = \underline{\mathrm{Sym}}^n_{\underline{O}_U}(\underline{\Omega}^1_{X'/k} \otimes k(x))$, et à ce titre est une forme ~~[illegible]~~ lisse ~~[illegible]~~ [NB Oubli dans 15.1. : l'ensemble des points de lissité d'une forme est ouvert]. On remarquera de même qu'un tel point est isolé dans l'ensemble des points non lisses, il est géom normal ~~xxxx~~ (resp. géom réduit) sss $d \geq 2$ (resp. $d \geq 1$). Si $d = 0$ et $k(x) = k$ (i.e. x isolé et rationnel sur k) alors x point singulier élémentaire de mult n signifie que $\underline{O}_{X,x}$ est ~~k [illegible]~~

≥ 2, on dira que $x \in X$ est un point singulier élémentaire de multiplicité n, si son anneau local $\underline{O}_{X,x}$ est élémentaire de multiplicité n. (Signaler en remarque que cette ~~xxxxxx~~ terminologie est en accord avec la notion générale de multiplicité due à Samuel). Pour n=2, on parlera en particulier de singularité quadratique élémentaire (ou ordinaire, dans la terminologie classique). On introduit de même, conformément à l'usage général, les variantes "géométriques" pour X localement de type fini sur un corps: $x \in X$ est dit singularité géométriquement élémentaire de multiplicité n, si pour toute (ou, ce qui revient au même, une) extension K de k, et tout (ou un) point z de X_K au dessus de x, rationnel sur K, z est une singularité élémentaire de multiplicité n.

15.3. "Généraliser" SUP prop.8 au cas de la multiplicité n.

15.4. "Généraliser" SUP prop.9 et cor.10. au cas de la multiplicité n.

(Il ne s'agit pas vraiment de généralisations, mais de variantes..)

15.5. Introduire la notion de zéro singulier élémentaire de multiplicité n (pour n=2, zéro singulier quadratique élémentaire, ou ordinaire) d'une section ϕ de $\underline{O}_X$, ou plus généralement d'un Module localament libre, sur un X localement noethérien, et la notion géométrique correspondante (sur un corps de base k).

15.6. Soit X un sous-préschéma d'un préschéma loc noeth régulier X', et soit $x \in X$. Pour que x soit une singularité élémentaire de multiplicité n de X, il f et s qu'il existe un voisinage ouvert U de x, et une suite $\underline{O}_U$-régulière $(\phi_1,..,\phi_d)$ qui soit telle que $X|U = V(\phi_1,..,\phi_d)$ et que x soit un zéro singulier élémentaire de multiplicité n de $(\phi_1,..)$. En particulier, si A est anneau local noethérien qui est élémentaire de multiplicité n, alors A est un anneau "intersection complète"; d'ailleurs, on voit grâce à 15.4. que l'on peut trouver, au voisinage de x,

17.16. Formes quadratiques lisses.

16.1. Soit Q une section de $\underline{\mathrm{Sym}}^2(\underline{E})$, ($\underline{E}$ loc libre de rang fini), de sorte que Q ~~définit~~ (qu'on peut aussi interpréter comme une forme quadratique sur $\check{\underline{E}}$) ~~aux sections de comme une section~~ définit une forme bilinéaire symétrique B sur $\check{\underline{E}}$, d'où un homomorphisme $\check{\underline{E}} \longrightarrow \underline{E}$, et passant aux Modules déterminants on trouve dét $\check{\underline{E}} \longrightarrow$ det $\underline{E}$, d'où enfin une sectio

$$d(Q) \in \Gamma(\text{dét } (E)^{\otimes 2})$$

appelée (sauf erreur) discriminant de la forme quadratique Q. Lorsque $\underline{E} = \underline{O}_S^{\,n}$, c'est simplement la section de $\underline{O}_S$ déterminant de la matrice à n lignes et n colonnes, à coeff dans $\Gamma \underline{O}_S$, qui exprime Q . Notons tou de suite:

Proposition 16.2. Supposons que pour tout $s \in S$, on ait car $k(s) \neq 2$ ou rang $E \otimes k(s)$ pair. Alors, pour que Q soit lisse, il f et s que Q soit "non dégénérée" i.e. que d(Q) soit inversible. (D'ailleurs la condition e suffisante sans restriction sur S ni $\underline{E}$).

La dernière assertion n'est mise que pour la commodité des référen ces éventuelles, car elle est trivialement contenue dans la première, l'hypothèse que Q est non dégénérée implique en effet que $\underline{E}$ est de rang pair en tout point dont la car est 2. D'ailleurs, elle se démontre direc tement sans considération de caractéristique, car (se plaçant sur un corp et prenant une base) elle exprime que les $\frac{\partial Q}{\partial X_i}$ n'ont pas de zérox commu non trivial, à fortiori ils n'ont pas de zéro commun non trivial avec Q. Si car $k \neq 2$, la réciproque est vraie, car en vertu de la formule

$$2Q = \sum X_i \frac{\partial Q}{\partial X_i}$$

on voit alors que tout zéro commun aux $\frac{\partial E}{\partial X_i}$ est aussi un zéro de Q. Enfin si car k = 2 , ~~et si E est de rang pair~~ alors la forme bilinéaire B associée à Q (définie par la matrice des $\frac{\partial Q}{\partial X_i}$) est alternée, donc son "noyau" $N \subset \check{E}$ est tel que $\check{E}/N$ soit de rang <u>pair</u>, donc si E est lui-même de rang pair, il en est de même de N. Donc si $N \neq 0$, le rang de N est au moins 2, d'où s'ensuit qu'il existe au moins un zéro non banal d Q dans N, i.e. Q est non lisse. NB Ce recours aux coordonnées est déci ment indigne de nous, il faudrait les utiliser uniquement pour prouver simplement le

<u>Lemme</u> 16.3. E vectoriel de rang fini sur un corps k, $Q \in \mathrm{Sym}^2(E)$ un élément non nul d $\check{E}$, x' son image dans P(E), supposons $Q(x,x) = 0$ i.e. $x' \in V(Q)$. Alors pour que V(Q) soit lisse en x et de dim rang E − 1 (i.e. $Q \neq 0$), il f et s que x n'appartienne pas au noyau de l'homomorphisme $\check{E} \to E$ défini par la forme bilinéaire symétrique B associée à Q.

16.4. L'étude qui suit est destinée essentiellement à donner un critère de lissité pour une forme quadratique dans le cas non couvert par 16.2. , i.e. essentiellement dans le cas d'un vectoriel de dimension impaire sur un corps de car 2. Dans ce cas <u>toute</u> forme quadratique Q sur $\check{E}$ est dégénérée, mais on voit aisément (prenant notamment la "forme standart") qu'elle peut fort bien être lisse.

Introduisons, pour tout entier $n > 0$, la "forme quadratique standard" Q_n sur $\underline{Z}^n$, comme <u>une</u> forme à coéfficients entiers en n variables $X_1, \ldots, X_n$, en distinguant les deux cas:

a) $n = 2m$, $Q_{2m}(X_1, \ldots, X_{2m}) = X_1X_2 + X_3X_4 + \ldots$

b) $n = 2m+1$, $Q_{2m+1}(X_1, \ldots, X_{2m+1}) = Q_{2m}(X_1, \ldots, X_{2m}) + X_{2m+1}^2$

<u>Lemme</u> 16.5 Soit n un entier impair, et considérons

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i a_i X_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} X_i X_j ,$$

une forme quadratique en n indéterminées X_i, à coéff indéterminés a_i, b_{ij}, de sorte que le discriminant $d(Q)$ est un polynôme à coéfficients entiers en les a_i, b_{ij}. Alors le "contenu" de ce polynôme est égal à 2 (i.e. le pgcd de ses coéfficients est 2).

~~Gela~~ Prouvons d'abord que ce contenu est ~~de~~ multiple de 2.
En effet, cela signifie aussi que ~~si~~ lorsqu'on spécialise ce polynôme en ~~le~~ corps $Z/2Z$, ~~avec $p \neq 2$~~ il ~~n'~~est pas identiquement nul, ce qui résulte du fait qu'une forme quadratique de degré impair sur un corps de car 2 est tjrs dégénérée, i.e. à un discriminant nul. Pour prouver que le contenu c est exactement 2, il suffit de faire le calcul du discriminant de la forme ~~standart~~ de degré n, d'une part elle doit être multiple de c, d'autre part le calcul donne 2, (car c'est 1 pour le degré pair, et 2 pour le degré 1 ...).

Il y a lieu alors d'introduire le polynôme

$$\tilde{d}(Q) = \frac{1}{2}d(Q)$$

en les coéfficients de Q, qui est encore à coéffieients entiers, donc prend une valeur bien déterminée quand on spécialise les a_i, b_{ij} dans un anneau A quelconque, i.e. quand on prend une forme quadratique q de degré n à coéfficients dans A. On appela $\tilde{d}(Q)$ le "polynôme discrimihant corrigé de la forme quadratique indétérminée Q à n variables", et sa valeur relativement aux coéfficients d'une forme quadratique q à coef. dans un anneau A quelconque sera appelé le "discriminant corrigé de la forme quadratique q". Plus généralement, on déduit de façon essentiellement triviale de 16.5. l'énoncé suivant:

Proposition 16.6. On peut, et d'une seule manière, associér à tout préschéma S, muni d'un Module loc libre de rang fini $\underline{E}$ et d'une forme q $Q \in \Gamma\,\underline{Sym}^2(E)$, associer une section $\tilde{d}(Q)$ de $\text{dét}(E)^{\otimes 2}$, de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

(a) Compatibilité avec changement de base, et fonctorialité pour isomorphie en $\underline{E}$.

(b) Si E est partout de rang pair, on a $\tilde{d}(Q) = d(Q)$ (ou $d(Q)$ désigne le discriminant de Q).

(c) Si $\underline{E}$ est partout de rang impair, on a $2\tilde{d}(Q)^{2} = d(Q)$.

~~De plus, le discriminant corrigé d ainsi introduit satisfait aux conditions suivantes~~ NB Il n'est pas raisonnable d'énoncer la propriété de compatibilité avec le changement de base, sans énoncer en même temps, ou même avant, la propriété de fonctorialité par isomorphismes sur $\underline{E}$, étant donné que le changement de base lui-même n'est guère défini que modulo isomorphisme; il n'en serait plus de même si on se restreignait au cas $E = \underline{O}_S^{\,n}$, (ce qui ne serait pas commode pour les références).

~~Corollaire 16.7~~ Définition 16.7. La section $\tilde{d}(Q)$ de $\mathrm{dét}(E)^{\otimes 2}$ s'appelera le discriminant corrigé de la forme quadratique Q.

Corollaire 16.8. Soient Q, Q' des formes relatives à $\underline{E}$, $\underline{E}'$, supposons la parité des rangs de $\underline{E}$ (resp. $\underline{E}'$) constante sur S. Alors

a) Si $\underline{E}$ et $\underline{E}'$ ne sont pas tous deux de rang impair, on a

$$\tilde{d}(Q \oplus Q') = \tilde{d}(Q)\tilde{d}(Q')$$

b) Si $\underline{E}$ et $\underline{E}'$ sont tous deux de rang impair, on a

$$\tilde{d}(Q \oplus Q') = 2\,\tilde{d}(Q)\tilde{d}(Q')$$

La vérification est triviale.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal du présent numéro:

Théorème 16.9. Soient $\underline{E}$ un Module loc libre de rang fini sur le préschéma S, $Q \in \Gamma\,\underline{\mathrm{Sym}}^2(\underline{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Q est lisse.

(ii) Le discriminant modifié $\tilde{d}(Q) \in \Gamma\ \mathrm{dét}(\underline{E})^{\otimes 2}$ est inversible.

(Lorsque $\underline{E}$ est de rang constant n)

(iii) Il existe un morphisme surjectif S' S tel que la forme $Q_{S'}$ déduite de Q par changement de base soit isomorphe à la forme quadratique standart en n variables.

(iii bis). Comme (iii), mais en supposant $S' \to S$ fidèlement plat de présentation finie.

Corollaire 16.10. Soient k un corps, E un vectoriel de dimension finie sur k, $Q \in \mathrm{Sym}^2(E)$. Conditions équivalentes:

(i) Q est lisse.

(ii) $\tilde{d}(Q) \neq 0$.

(iii) Il existe une extension ~~finie~~ k' de k telle que $Q \otimes k'$ soit isomorphe à la forme standart.

(iii bis) Comme (iii), avec k' une extension finie de k.

C'est une conséquence triviale de 16.9. On notera que lorsque k est algébriquement clos, alors (iii) et (iii bis) se remplacent par la condition plus frappante: Q est isomorphe à la forme standart.

Démonstration de 16.9. On ~~a évidemment~~ peut évidemment supposer E de rang constant n. On aura évidemment

$$\text{(iii bis)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(ii)}$$

compte tenu que pour la forme standart, le discriminant modifié est 1. Nous prouverons maintenant (ii) $\Longrightarrow$ (iii bis), puis (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Soit $\underline{E}_o = \underline{O}_S^n$, Q_o la forme standart sur $\underline{E}_o$, Considérons le foncteur

$$\underline{\mathrm{Isom}}((\underline{E}_o, Q_o), (\underline{E}, Q)) : (\mathrm{Sch})_{/S}^{o} \longrightarrow (\mathrm{Ens}),$$

dont la valeur en tout S' sur S est formé de l'ensemble des isomorphismes $\underline{E}_{o\,S'} \to \underline{E}_{S'}$ compatibles avec les formes $Q_{o\,S'}$ et $Q_{S'}$. Il est immédiat (sans condition sur E ni Q) que ce foncteur est représentable par un préschéma P affine et de présentation finie sur S, qui est un sous-~~pré~~schéma de $W = W(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\underline{E}_o, \underline{E}))$, et un sous-préschéma fermé de ~~Isom~~ l'ouvert $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}_o, \underline{E}_1)$ de W. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii bis) sera prouvée si nous montrons que lorsque $\tilde{d}(Q)$ est inversible, P est fidélement plat sur S: on prendra en effet S'=P.

Posons pour simplifier ~~Q_o~~

$$\underline{Q}(\underline{E}) = W\underline{\mathrm{Sym}}^2(\underline{E}))$$

et définissons de même $\underline{Q}(\underline{E}_o)$; par l'opération de "transport de structure" on aura donc un morphisme $u \rightsquigarrow \underline{Q}(u)$:

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}_o,\underline{E}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{Q}(\underline{E}_o),\underline{Q}(\underline{E})),$$

et, utilisant la section q_o de $\underline{Q}(E_o)$ correspondant à Q_o , on trouve un morphisme $u \rightsquigarrow \underline{Q}(u)(q_o)$:

(*) $$\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}_o,\underline{E}) \longrightarrow \underline{Q}(\underline{E}) .$$

D'autre part, la forme Q ~~xxxxE~~ correspond à une section q de $\underline{Q}(\underline{E})$ sur S, et P n'est autre que l'image inverse de q(S) par (*), comme il résulte trivialement des définitions, (ce qui, d'ailleurs, établit en passant la représentabilité annoncée de P comme préschéma affine et de ~~type~~ prés finie sur S). Introddisons maintenant l'ouvert ~~Q(x~~

$$\underline{Q}(\underline{E})^* = \underline{Q}(\underline{E})_{\tilde{d}}$$

de $\underline{Q}(\underline{E})$, correspondant aux formes quadratiques de discriminant corrigé inversible (représentant ~~x~~ le foncteur S' $\rightsquigarrow$ ensemble des ~~formes~~ sections de $\underline{\mathrm{Sym}}^2(\underline{E}_{S'})$ à discriminant corrigé inversible). En fait, par transport de structure on a $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}_o,\underline{E}) \to \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{Q}(\underline{E}_o)^*,\underline{Q}(\underline{E})^*)$, et comme q_o est une section de $\underline{Q}(\underline{E}_o)^*$ (puisque le discriminant corrigé de la forme type Q_o vaut 1), le morphisme (*) se factorise en fait en un morphisme

(* *) $$\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}_o,\underline{E}) \longrightarrow \underline{Q}(\underline{E})^* ,$$

qui est évidemment de présentation finie, puisque les deux membres sont présentation finie sur S. Il suffit maintenant de prouver la

~~Lemme~~ Proposition 16.11. Avec les notations précédentes (à rappeler), le morphisme (* *) est fidèlement plat .

Il s'ensui~~t que~~vra que si Q satisfait à (ii), i.e. si q est ~~un~~ en fait une sect de $\underline{Q}(\underline{E})^*$, alors P (déduit de (**) par un changement de base q) est encor fidèlement plat sur S, ce qui prouvera (ii) $\Longrightarrow$ (iii bis) dans 16.9.

Démonstration de 16.11. Comme les deux membres sont lisses sur il suffit de prouver la platitude fibre par fibre, ce qui nous ramène a cas où S est le spectre d'un corps alg clos k. On peut ~~xiexx~~ supposer évidemment $\underline{E}_0=\underline{E}$, donc ($*$ $*$) prend la forme

$$(***) \qquad Gl(\underline{E}) \longrightarrow \underline{Q}(\underline{E})^* \quad ,$$

ce morphisme étant déduit des opérations naturelles du schéma en groupe $Gl(\underline{E})$ sur $\underline{Q}(\underline{E})^*$, par $u \rightsquigarrow u(q_0)$, où q_0 est une section de $\underline{Q}(\underline{E})^*$ correspondant à la forme standart Q_0. Or par le théorème de platitude générá comme $\underline{Q}(\underline{E})^*$ est lisse sur k, donc réduit, il existe un ouvert dense U de $\underline{Q}(\underline{E})^*$ au dessus duquel le morphisme précédent soit plat. Pour tout ~~xxxGl(E)(k)~~ $u \in Gl(\underline{E})(k)$, i.e. pour tout automorphisme u de $\underline{E}$, u(U) satisfera alors à la même condition, et il suffit (pour établir la platitude de (***)) de prouver ~~xxxxxxxxx~~ que les u(U) recouvrent $\underline{Q}(\underline{E})^*$. Or pour ceci il suffit de prouver que $Gl(\underline{E})(k)= Aut(\underline{E})$ opère transitivement dans $\underline{Q}(\underline{E})^*(k)$, ensemble des formes quadratiques ~~xxxxE~~ sur E à discriminant non nul, ~~xx~~ i.e. que (***) est surjectif, ce qui prouvera alors 16.11. On est donc ramené à prouver le

<u>Lemme</u> 16.11.1. Soit Q une forme quadratique en n variables sur un corps alg clos, telle que $d(Q)\neq 0$, alors Q est isomorphe à la forme standart (i.e. se met sous forme standart par un choix convenable de la base).

Lorsque E est de rang pair ou k est de car $\neq 2$, alors l'hypothèse signifie que Q est non dégénérée, et la conclusion se trouve dans Bourba Dans le cas contraire (k de car 2, ~~&ix~~ rang E impair) on sait que Q est dégénérée, ~~dxxx~~ soit E_1 une droite dans E qui est dans le noyau de la forme associée, E_2 un supplémentaire, de sorte que Q se met sous forme d'une somme directe de formes $Q_1 \oplus Q_2$, Q_1 de rang 1 et Q_2 de rang pai[r]. En vertu de 16.8. on voit que Q_1, Q_2 sont de discriminant corrigé $\neq 0$, en vertu de ce qui précède il s'ensuit que Q_2 est isomorphe à la forme standart, et d'autre part Q_1 est non nulle, donc isomorphe à la forme standart de degré 1, donc Q est isomorphe à la forme standart, ce qui prouve 16.11.1.

Il reste à prouver l'équivalence de (i) et (ii) dans 16.9. On peut évidemment supposer que S est ~~le spectre d'un corps alg~~ clos, et on est ramené à prouver dans ce cas Lemme 16.11.2. Q lisse $\Leftrightarrow$ Q standart. En vertu de 16.2. on peut supposer que k est de car 2 et E est de rang impair. Lorsque Q est isomorphe à la forme standart, on vérifie aussitôt, grâce à 16.3. , qu'elle est lisse (le noyau de $\check{E} \longrightarrow E^\vee$ est de dimension 1, et Q n'est pas identiquement nulle sur ce noyau, donc n'y admet que le zéro trivial); D'autre part, toujours par 16.3. , Q lisse implique que la restriction de Q au noyau N de Q n'admet que le zéro trivial, ce qui évidemment signifie que N est de dim 1 et que $Q|N \neq 0$. Or prenant un supplémentai[re] de N, on voit aussitôt que cela implique que Q est isomorphe à la forme standard. Cela prouve 16.11.2. et achève la démonstration de 16.9.

NB On aurait pû donner 16.11.2. dès le début en corollaire à 16.2. ou 16.3. (qui auraient dû s'interchanger); ainsi la partie du nº indépendante du "discriminant corrigé" serait bloquée au début du nº. D'ailleurs tu dois mieux savoir que moi dans quelle mesure la notion de discriminant corrigé et 16.9. étaient connus, pour en créditer qui d[e] droit. Peut-être y a-t-il déjà une autre terminologie reçue ? Je remarq[ue] d'ailleurs que c'est le discriminant corrigé qui mérite vraiment le nom de discriminant, c'est lui qui se généralise en le discriminant d'une forme quelconque (cf Nº suivant). Le discriminant d'une forme quadrati[que] (dans la terminologie adoptée ici, et qui, si je ne me trompe, est la terminologie reçue - je n'ai pas Bourbaki sous la main pour vérifier ce point-) devrait s'appeler déterminant de la forme quadratique, et non discriminant. J'aimerais connaitre ton opinion sur cette question; si tu es d'accord, nous profiterions de l'occasion pour rectifier sur ce point la terminologie reçue, qui induit en erreur (puisque jusqu'à ces derniers jours, j'ai sans m'en rendre compte confondu discriminant et déterminant).

Remarques 16.12. Lorsqu'on fait opérer le schéma en groupes absolu $Gl(n)$ ~~xxxxZ~~ $= \underline{Aut}(\underline{Z}^n)$ sur $\underline{Q}(\underline{Z}^n)$, le stabilisateur de la forme quadratique standart est désigné par $\underline{O}(n)$, et s'appelle le "groupe orthogonal absolu".(Plus généralement, pour toute forme quadratique $Q \in \Gamma \underline{Sym}^2(\underline{E})$, on introduit le sous-préschéma en groupes fermé de $Gl(\underline{E})$ ~~xxx~~ stabilisateur de Q , noté $\underline{O}(Q)$ et appelé schéma en groupes orthogonal relatif à la forme Q; lorsque Q est isomorphe à l'image inverse de la forme standart a n variables, $\underline{O}(Q)$ est isomorphe à $O(n)_S$). Ceci posé il est immédiat que deux points Q, Q' du premier membre de (**), à valeurs dan un S', ont même image dans le deuxième membre, sss ~~ilsxsentxcongruxxile deuxième~~ on a $u' = uv$, avec $v \in \underline{O}(n)(S')$; compte tenu de 16.11. (et avec la terminologie qui sera développée de façon plus détaillée dans EGA V ou VI) (voir en attendant SGAD IV) on voit donc que les opérations naturelles à droite de $\underline{O}(n)_S$ sur le premier membre de (**), et la projection (**), font de $\underline{Isom}(\underline{E}_0,\underline{E})$ un fibré principal homogène sur $\underline{Q}(\underline{E})^*$, de groupe $\underline{O}(n)_{\underline{Q}(\underline{E})^*}$ plus particulièrement, ~~Gl(E)xxxxGl~~ $Gl(n)$ est un fibré principal homogène sur $\underline{Q}(n)^* = \underline{Q}(\underline{Z}^n)^*$, de groupe structural $\underline{O}(n)_{\underline{Q}(n)^*}$. Il s'ensuit ~~que~~ d'abord que (avec les notations de la démonstration de 16.9 P est en fait un fibré principal homogène sous le groupe $\underline{O}(n)_S$, associé ~~xxxxxxxxxxxx~~ d'ailleurs canoniquement à la forme Q (de façon fonctoriel pour les isomorphismes de formes, et de façon compatible avec les change ments de base. Des arguments purements formels, ~~xxxxxxxxxxxx~~ joints à "théorie de la descente plate" de EGA V 1 , montreront alors que le foncteur $(\underline{E},Q) \rightsquigarrow P$ établit une <u>équivalence</u> de la catégorie fibrée des formes quadratiques lisses sur des Modules localement libres de rang n, de base un préschéma S quelconque, avec la catégorie fibrée des <u>fibrés principaux homogènes</u> sur un préschéma quelconque S, <u>de groupe</u> $\underline{O}(n)_S$.

16.13. Soit Q une forme quadratique lisse sur un $\underline{E}$ loc libre de rang fini, alors on vérifie facilement que pour $s \in S$, $\underline{O}(Q)$ est lisse sur un voisinage ouvert de s , ~~xxxxxk(s)xxxxxxxxxxx~~ sauf exactement dans le cas où k(s) est de car 2 et le rang de $\underline{E}$ en s est impair. Supposons que cette circonstance ne se produise pour aucun $s \in S$, alors (et alors seulement) le P envisagé plus haut est lisse sur S (étant un fibré principal homogène sous $\underline{O}(n)_S$, donc lisse sss ce dernier l'est). Utilisant le "lemme de Hensel" , il s'ensuit que ~~xxxxxx~~ l'on peut alors aux conditions équivalentes de 16.9. adjoindre la condition ~~ex~~ équivalente

(iii ter) ~~Hxxxistexxxxxxxphixxx~~ Comme (iii), en supposant $S' \to S$ <u>étale</u> surjectif.

En fait, il y a mieux (en gardant toujours les hypothèses précédentes), car il résulte de la théorie générale des schémas en groupes réductifs et fibrés principaux homogènes sur iceux (cf SGAD XXIV) que ~~txxx~~ si Q est lisse, alors tout point s admet un voisinage ouvert U, et un morphisme étale surjectif <u>fini</u> $S' \to U$, tel que $Q_{S'}$ soit la forme standart. Si par exemple S est local, on peut dans (iii ter) supposer en plus $S' \to S$ <u>fini</u>.

16.14. signalés dans 16.12.
Les résultats (à commencer par la condition (iii ter) pour une Q lisse), tombent en défaut quand on abandonne l'hypothèse supplémentaire de rang et de car. , par exemple lorsque S=Spec(k), k corps imparfait de car.2 , et que E est de rang 1, car la forme quadratique at^2 , pour $a \in k - k^2$, ne

manifestement se mettre sous forme standart après une extension séparab

de k (vu que $k(a^{1/2})$ n'est pas séparable sur k). Cependant, dans le ca

~~cas~~ général, on peut trouver un morphisme fini ~~surjectif~~ localement

libre et surjectif $S' \longrightarrow S$ (en fait, un fibré principal homogène sous

le schéma en groupes $\mu_{2\,S}$ ($\simeq \underline{O}(n)_S/\underline{SO}(n)_S$) des racines carrées de l'unité sur S~~...~~, — le ch

gement de base $S' \longrightarrow S$ ayant pour effet de réduire le groupe structural

$\underline{O}(n)$ à $\underline{SO}(n)$, qui est lisse), de sorte que pour $Q_{S'}$, le résultat de

locale isotrivialité envisagé précédemment soit vrai. En particulier,

S est local, alors on peut dans (iii bis) supposer $S' \rightarrow S$ <u>fini</u> .