EXPOSÉ XXII

GROUPES RÉDUCTIFS : DÉPLOIEMENTS, SOUS-GROUPES, GROUPES QUOTIENTS

par M. Demazure

Cet exposé comporte deux parties. La première (1 à 5.5) rassemble les résultats **156**
techniques nécessaires à la démonstration des théorèmes d'unicité et d'existence. La seconde (5.6 à la fin) ne sera pas utilisée dans cette démonstration ; la fin du n°5 sera utilisée en particulier dans l'exposé XXVI consacré aux sous-groupes paraboliques ; le n°6 établit dans le cadre des schémas les résultats classiques sur le groupe dérivé d'un groupe réductif.

1. Racines et coracines. Groupes déployés et données radicielles

Théorème 1.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* α *une racine de* G *par rapport à* T.

(i) *Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs* T

$$\exp_\alpha : \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui induise sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$. *Ce morphisme est une immersion fermée. Le morphisme correspondant*

$$\mathrm{T} \cdot_\alpha \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

est également une immersion fermée. **157**

Si $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *est un monomorphisme normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*, il existe un unique* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ [1] *tel que* $p_\alpha(x) = \exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)$ *; on a* $\mathscr{L}ie(p_\alpha)(1) = \mathrm{X}_\alpha$ *et les deux formules précédentes établissent une correspondance bijective entre* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et l'ensemble des monomorphismes* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *normalisés par* T *avec le multiplicateur* α.

[0] version α du 24 mai 09 (et modifs dans 5.10.4–5)

[1] N.D.E. : rappeler la définition de $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

(ii) *Il existe une dualité unique* (*notée* $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY}$)

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathrm{S}},$$

et un unique morphisme de groupes

$$\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T},$$

tels que l'on ait la formule (F) de Exp. XX 2.1. *On a*

$$\alpha \circ \alpha^* = 2, \qquad (-\alpha)^* = -\alpha^*,$$

et α^* *est donné par la formule de* Exp. XX 2.7.

En effet, un morphisme normalisé par T avec le multiplicateur α se factorise nécessairement par le sous-groupe fermé $\mathrm{Z}_{\alpha} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_{\alpha})$ de G (cf. Exp. XIX 3.9). Or $(\mathrm{Z}_{\alpha}, \mathrm{T}, \alpha)$ est un S-système élémentaire (Exp. XX 1.4), et on est ramené aux résultats de l'exposé XX (1.5, 2.1 et 5.9).

Remarque 1.2. — La partie (i) du théorème 1.1 reste valable si on suppose seulement que α est un caractère de T, non trivial sur chaque fibre. En effet, on a alors une décomposition $\mathrm{S} = \mathrm{S}' \amalg \mathrm{S}''$, telle que $\alpha|_{\mathrm{S}'}$ soit une racine de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathfrak{g}^{\alpha}|_{\mathrm{S}''} = 0$. Si $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$, on est ramené à 1.1 ; si $\mathrm{S} = \mathrm{S}''$ le résultat est trivial ; le cas général s'en déduit aussitôt.

158 ***Notations 1.3***. — Comme dans l'exposé XX, on note P_{α} l'image de $\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})$; c'est un sous-groupe fermé de G, muni canoniquement d'une structure vectorielle. On dira que c'est le *groupe vectoriel associé à la racine* α. On dit que α^* est la *coracine* associée à α. Des sections $\mathrm{X}_{\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})$ et $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$ sont dites *appariées* si $\mathrm{X}_{\alpha}\mathrm{X}_{-\alpha} = 1$. Alors $\mathrm{X}_{\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$ et de même pour $\mathrm{X}_{-\alpha}$. Les morphismes p_{α} et $p_{-\alpha}$ correspondants sont contragrédients l'un de l'autre et on a

$$p_{\alpha}(x)\, p_{-\alpha}(y) = p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\right) \alpha^*(1+xy)\, p_{\alpha}\left(\frac{x}{1+xy}\right).$$

Proposition 1.4. — *Sous les conditions de* 1.1, *soit* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$. *Alors* $\beta = \alpha \circ \mathrm{int}(w)^{-1} : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ *est une racine de* G *par rapport à* T, $\beta^* = \mathrm{int}(w) \circ \alpha^*$ *est la coracine correspondante, et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \arrow[r, "\exp_{\alpha}"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(w)"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{int}(w)"] \\
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\beta}) \arrow[r, "\exp_{\beta}"] & \mathrm{G}.
\end{tikzcd}$$

Trivial : transport de structure.

Définition 1.5. — Sous les conditions de 1.1, on note s_{α} l'automorphisme de T défini par

$$s_{\alpha}(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t))^{-1}.$$

On note (,) l'accouplement canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) = \mathbb{Z}_{\mathrm{S}}.$$

Alors s_α opère dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$, resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$ par les formules suivantes, où m (resp. u) désigne une section arbitraire de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ (resp. de 159
$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$) :

$$s_\alpha(m) = m - (\alpha^*, m)\, \alpha,$$
$$s_\alpha(u) = u - (u, \alpha)\, \alpha^*.$$

On a $s_\alpha \circ s_\alpha = \mathrm{id}$ et $s_{-\alpha} = s_\alpha$.

Si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, alors l'automorphisme intérieur $w_\alpha(\mathrm{X})$ de T défini par

$$w_\alpha(\mathrm{X}) = \exp_\alpha(\mathrm{X}) \exp_{-\alpha}(-\mathrm{X}^{-1}) \exp_\alpha(\mathrm{X})$$

(cf. Exp. XX 3.1) coïncide avec s_α (*loc. cit.*) On conclut alors de 1.4 :

Corollaire 1.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* α *et* β *deux racines de* G *par rapport à* T*. Alors*

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha^*, \beta)\, \alpha$$

est une racine de G *par rapport à* T*, la coracine correspondante étant*

$$s_\alpha(\beta)^* = s_\alpha(\beta^*) = \beta^* - (\beta^*, \alpha)\, \alpha^*.$$

Corollaire 1.7. — *Sous les conditions précédentes,* $\alpha^* = \beta^*$ *implique* $\alpha = \beta$*.*

En effet, si $\alpha^* = \beta^*$, on a cf. XXI ? ?

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta, \qquad s_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha,$$

et on en déduit aussitôt

$$(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha).$$

Si $\beta \neq \alpha$, il existe un $s \in \mathrm{S}$ avec $\alpha_s \neq \beta_s$. Mais alors la formule précédente montre qu'il existe une infinité de racines distinctes de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, ce qui est impossible.

Si $u : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$ est un morphisme de groupes, on dira que u est une *coracine* de 160
G par rapport à T, s'il existe une racine α de G par rapport à T telle que $\alpha^* = u$. Considérons le foncteur $\mathscr{R}^*$ des coracines de G par rapport à T défini comme suit :

$$\mathscr{R}^*(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des coracines de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \text{ par rapport à } \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}.$$

Si $\mathscr{R}$ est le foncteur des racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.8.), on a un morphisme canonique $\mathscr{R} \to \mathscr{R}^*$. En vertu de 1.7 et de Exp. XIX 3.8, on a :

Corollaire 1.8. — *Le morphisme canonique* $\mathscr{R} \to \mathscr{R}^*$ *est un isomorphisme. En particulier,* $\mathscr{R}^*$ *est représentable par un* S*-préschéma* fini constant tordu *qui est un sous-préschéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$*.*

Ceci conduit à poser la définition suivante :

Définition 1.9. — Soient S un préschéma, T un S-tore. On appelle *donnée radicielle tordue* dans T la donnée :

(i) d'un sous-schéma fini $\mathscr{R}$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$,

(ii) d'un sous-schéma fini $\mathscr{R}^*$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$,

(iii) d'un isomorphisme $\mathscr{R} \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}^*$ noté $\alpha \mapsto \alpha^*$,

vérifiant les conditions suivantes :

(DR 1) Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $\alpha \in \mathscr{R}(\mathrm{S}')$, on a $\alpha \circ \alpha^* = 2$.

(DR 2) Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathscr{R}(\mathrm{S}')$, on a

$$\alpha - (\beta^*, \alpha)\,\beta \in \mathscr{R}(\mathrm{S}'), \qquad \alpha^* - (\alpha^*, \beta)\,\beta^* \in \mathscr{R}(\mathrm{S}').$$

161 De plus, si $\alpha \in \mathscr{R}(\mathrm{S}')$ $(\mathrm{S}' \neq \varnothing)$ entraîne $2\alpha \notin \mathscr{R}(\mathrm{S}')$, on dit que la donnée radicielle est *réduite*.

Proposition 1.10. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* $\mathscr{R}$ (*resp.* $\mathscr{R}^*$) *le schéma des racines* (*resp. des coracines*) *de* G *par rapport à* T*. Alors* $(\mathscr{R}, \mathscr{R}^*)$ *est une donnée radicielle tordue* réduite *dans* T.

Le seul fait qui reste à vérifier est que cette donnée radicielle tordue est réduite. C'est ce qu'on a fait en Exp. XIX 3.10.

1.11. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ un tore *trivialisé.* Si on note M^* le groupe abélien dual de M, on a des isomorphismes canoniques (cf. Exp. VIII 1.5) :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M_S}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^*_{\mathrm{S}},$$

donc des isomorphismes de groupes :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}, \mathrm{M}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}, \mathrm{M}^*).$$

Un caractère de T (resp. un morphisme de groupes $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$) sera dit *constant* (relativement à la trivialisation donnée) si l'isomorphisme précédent le transforme en une application constante de S dans M (resp. M^*).

1.12. Sous les mêmes notations, soit $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ une donnée radicielle (Exp. XXI). Alors $(\mathrm{R_S}, \mathrm{R^*_S})$ est une donnée radicielle tordue dans T. Réciproquement, si
162 $(\mathscr{R}, \mathscr{R}^*)$ est une donnée radicielle tordue dans un tore T, on appellera *déploiement* de cette donnée radicielle la donnée d'une donnée radicielle habituelle $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ qui transforme $(\mathscr{R}, \mathscr{R}^*)$ en $(\mathrm{R_S}, \mathrm{R^*_S})$.

Définition 1.13. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. On appelle *déploiement de* G *relativement à* T la donnée

(i) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$,

(ii) d'un système de racines R de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6),

vérifiant les deux conditions suivantes :

(D_1) S est non vide et les racines $\alpha \in \mathrm{R}$ (resp. les coracines correspondantes) s'identifient à des fonctions constantes de S dans (resp. M^*).

(D_2) Les $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{R}$) sont des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules libres.

On dit que G est *déployable relativement à* T s'il existe un déploiement de G relativement à T. On appelle *déploiement* de G la donnée d'un tore maximal T de G et d'un déploiement de G par rapport à T. On dit que G est *déployable* s'il existe un déploiement de G. On appelle S-groupe *déployé* un S-groupe réductif muni d'un déploiement ; on le notera par un symbole du type $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$, ou simplement G s'il n'y a pas de confusion possible.

La condition (D 1) entraîne que R (resp. R^*) s'identifie canoniquement à une partie de M (resp. M^*).

Proposition 1.14. — *Soient* S *un préschéma* (*non vide*), $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé, alors*

$$\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$$

est une donnée radicielle réduite (Exp. XXI 1.1 et 2.1.3) *; c'est un déploiement de la* **163**
donnée radicielle tordue de 1.10.

C'est une conséquence triviale de 1.10 et de Exp. XIX 3.7.

Nous noterons parfois pour simplifier $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = \mathscr{R}(\mathrm{G})$. Nous utiliserons systématiquement les notations V, $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, W, ... de Exp. XXI.

Remarque 1.15. — a) Si S est connexe non vide (resp. si $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}) = 0$) la condition (D 1) (resp. (D 2)) est automatiquement vérifiée.

b) Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un S-groupe déployé, alors pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{S}' \neq \varnothing$, $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un S′-groupe déployé et $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$.

1.16. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ un tore *trivialisé*. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T s'identifie canoniquement (Exp. II 5.1, cor.) à

$$\mathfrak{t} \simeq \mathrm{M}^* \otimes \mathscr{O}_\mathrm{S}.$$

Pour tout morphisme de groupes $u : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, $\mathscr{L}ie(u)$ est une forme linéaire

$$\mathscr{L}ie(u) : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathscr{O}_\mathrm{S} = \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}).$$

En particulier, si u est défini par un élément $\alpha \in \mathrm{M}$, alors $\mathscr{L}ie(u)$ est la forme linéaire $\overline{\alpha}$ sur $\mathrm{M}^* \otimes \mathscr{O}_\mathrm{S}$ définie par α :

$$\overline{\alpha}(m \otimes x) = (m, \alpha)\, x.$$

Symétriquement, pour tout morphisme de groupes $h : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, $\mathscr{L}ie(h)$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-morphisme $\mathscr{O}_\mathrm{S} = \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \to \mathfrak{t}$, défini canoniquement par la section

$$\mathrm{H} = \mathscr{L}ie(h)(1) \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t}).$$

En particulier, si h est défini par un élément $m \in \mathrm{M}^*$, on a **164**

$$\mathrm{H} = \mathscr{L}ie(h)(1) = m \otimes 1.$$

Comparant les deux définitions, on trouve en particulier

$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}) = (h, \alpha) \cdot 1 \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

1.17. Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où T est le tore maximal d'un groupe déployé. Toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$ définit une *racine infinitésimale* $\overline{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathfrak{t}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ avec

$$\overline{\alpha}(m \otimes x) = (m, \alpha)\, x.$$

Chaque coracine $\alpha \in \mathrm{R}$ définit une *coracine infinitésimale*

$$\mathrm{H}_{\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t}), \qquad \mathrm{H}_{\alpha} = \alpha^{*} \otimes 1.$$

On a pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, la relation

$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}_{\beta}) = (\beta^{*}, \alpha) \cdot 1,$$

et en particulier

$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}_{\alpha}) = 2.$$

En particulier, si 2 est inversible sur S, alors $\overline{\alpha}$ et H_{α} sont non nuls sur chaque fibre.

2. Existence d'un déploiement. Type d'un groupe réductif

165 ***Proposition 2.1***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Supposons* T trivial*. Alors* G *est* localement *déployable par rapport à* T *: pour tout* $s_0 \in \mathrm{S}$*, il existe un voisinage ouvert* U *de* s_0 *tel que le* U*-groupe* G_{U} *soit déployable relativement à* T_{U}.

En effet, écrivons $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ et

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}^{m}.$$

Soit $\mathrm{R} = \{m \in \mathrm{M} \mid m \neq 0,\ \mathfrak{g}^{m}(s_0) \neq 0\}$. Quitte à restreindre S et à le remplacer par un voisinage ouvert de s_0, on peut supposer les $\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{R}$, libres, et les $\mathfrak{g}^{m}$, $m \neq 0$, $m \notin \mathrm{R}$, nuls. On a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

les $\mathfrak{g}^{\alpha}$ étant libres de rang 1. Il en résulte que R est un système de racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6). Les coracines α^{*} correspondant aux $\alpha \in \mathrm{R}$ s'identifient alors à des fonctions localement constantes sur S à valeurs dans M^{*}. En restreignant encore S, on peut les supposer constantes et on a terminé. (2)

Notons que la démonstration donne aussitôt :

Proposition 2.2. — *Soit* S *un préschéma* connexe *non vide tel que* $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}) = 0$*, par exemple* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *ou un schéma local (en particulier le spectre d'un corps). Si* G *est un* S*-groupe réductif possédant un tore maximal trivial* T*, alors* G *est déployable relativement à* T.

(2) N.D.E. : Comparer ceci à la démonstration de 18.7 dans : A. Borel, *Linear algebraic groups*, Second enlarged edition, 1991.

On déduit aussitôt de 2.1 et du fait qu'un groupe réductif possède localement des **166**
tores maximaux pour la topologie étale (Exp. XIX 2.5) :

Corollaire 2.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif* (*resp. et* T *un tore maximal de* G). *Alors* G *est* localement déployable (*resp. localement déployable relativement à* T) pour la topologie étale *sur* S.

Corollaire 2.4. — *Soient* k *un corps,* G *un* k*-groupe réductif. Il existe une extension séparable finie* K/k *telle que* G_K *soit déployable.*

Remarque 2.5. — En utilisant 2.1 et Exp. XIX 2.9, on prouve aussitôt le résultat suivant : soit $G = (G, T, M, R)$ un S-groupe déployé ; il existe un recouvrement de S par des ouverts U_i tel que chaque groupe déployé G_{U_i} provienne par changement de base d'un groupe déployé sur un anneau noethérien (et en fait une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini). Nous prouverons d'ailleurs que tout groupe déployé sur S provient déjà d'un $\mathbb{Z}$-groupe déployé (Exp. XXV).

2.6. Soient k un corps algébriquement clos et G un k-groupe réductif. On sait (2.4 par exemple) qu'il existe des déploiements de G. Soient (G, T, M, R) et (G, T', M', R') deux déploiements de G ; les données radicielles $\mathscr{R}(G, T, M, R)$ et $\mathscr{R}(G, T', M', R')$ sont alors isomorphes.

En effet, on voit d'abord qu'on peut se ramener au cas où $T = T'$ (car il existe $g \in G(k)$ tel que $T' = \operatorname{int}(g)T$, et on vérifie facilement que si on transporte un déploiement par un automorphisme de G, on trouve une donnée radicielle isomorphe à la donnée initiale) ; mais $S = \operatorname{Spec}(k)$ étant connexe, l'isomorphisme $D_k(M) \xrightarrow{\sim} T \xrightarrow{\sim} D_k(M')$
provient d'un unique isomorphisme $M \simeq M'$; pour la même raison, il existe au plus **167**
un système de racines de G par rapport à T.

Définition 2.6.1. — [(3)] Si G est un k-groupe réductif (k un corps algébriquement clos), on appellera *type de* G la classe d'isomorphisme de la donnée radicielle définie par un déploiement quelconque de G ; si G est un tore, de type M au sens de Exp. IX 1.4, alors le type de G comme groupe réductif est donné par la donnée radicielle triviale $(M, M^*, \varnothing, \varnothing)$.

Par 1.17, le type est invariant par extension (algébriquement close) du corps de base.

Définition 2.7. — Si G est un S-groupe réductif et si $s \in S$, on appelle *type de* G *en* s le type du $\overline{s}$-groupe réductif $G_{\overline{s}}$.

Pour tout $S' \to S$ et tout $s' \in S'$ se projetant en $s \in S$, le type de $G_{S'}$ en s' est égal au type de G en s.

Si G est déployable, et si (G, T, M, R) est un déploiement de G, alors le type de G en s est la classe d'isomorphisme de $\mathscr{R}(G, T, M, R)$ en vertu de 1.17. Il résulte alors aussitôt de 2.3 la

(3) N.D.E. : On a ajouté le n°2.6.1, pour références ultérieures.

Proposition 2.8. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. La fonction*

$$s \mapsto \ \textit{type de}\ \mathrm{G}\ \textit{en}\ s$$

est localement constante *sur* S. *En particulier, il existe une partition de* S *en sous-préschémas ouverts non vides tels que sur chacun d'eux* G *soit de type constant. Plus précisément, soit* E *l'ensemble des types des fibres de* G *; pour tout* $t \in \mathrm{E}$*, soit* S_t *l'ensemble des points* $s \in \mathrm{S}$ *où* G *est de type* t *; alors* $(\mathrm{S}_t)_{t\in\mathrm{E}}$ *est une partition de* S *et chaque* S_t *est ouvert et fermé* (*et non vide*).

3. Le groupe de Weyl

168 **3.1.** Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Alors

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est un S-groupe *étale fini* (Exp. XIX 2.5). Par passage au quotient à partir de $n \mapsto \mathrm{int}(n)$, on a un monomorphisme canonique (c'est d'ailleurs une immersion ouverte)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}).$$

3.2. Supposons maintenant que G soit déployable relativement à T. Choisissons un déploiement, soit $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$. On a alors un isomorphisme canonique (Exp. VIII 1.5)

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}) \simeq (\mathrm{Aut}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}))_{\mathrm{S}}.$$

En particulier, si W est le groupe de Weyl de la donnée radicielle $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ (Exp. XXI 1.1.8), on a un monomorphisme

$$\mathrm{W}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}).$$

3.3. Pour chaque racine $\alpha \in \mathrm{R}$, la symétrie $s_\alpha \in \mathrm{W}$ opère dans M par

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha^*, x)\,\alpha,$$

donc dans T (par le morphisme précédent), par

$$s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t))^{-1}.$$

D'autre part, comme $\mathfrak{g}^\alpha$ est supposé *libre*, il existe un $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S},\mathfrak{g}^\alpha)^\times$. Considérons alors $w_\alpha(\mathrm{X}) \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (Exp. XX 3.1). On a (*loc. cit.*)

$$\mathrm{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))(t) = s_\alpha(t).$$

169 Comme W est engendré par les s_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, il résulte des remarques précédentes que si on considère W et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})/\mathrm{T}(\mathrm{S})$ comme des groupes d'automorphismes de T, on a

$$\mathrm{W} \subseteq \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})/\mathrm{T}(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}).$$

Par définition du groupe constant $\mathrm{W_S}$ associé à W, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W_S} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{W_G(T)} \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}) & \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.4. — *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{G,T,M,R})$ *un* S*-groupe déployé,* W *le groupe de Weyl de la donnée radicielle* $\mathscr{R}(\mathrm{G})$*. Alors le monomorphisme canonique*

$$\mathrm{W_S} \longrightarrow \mathrm{W_G(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est un isomorphisme.

Ce sont en effet des groupes étales sur S; il suffit donc de vérifier que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{W_S}(\overline{s}) \to \mathrm{W_G(T)}(\overline{s})$ est un isomorphisme. Or cette dernière assertion résulte, par exemple, de *Bible*, § 11.3, th. 2.

Remarque 3.5. — En utilisant 2.3, 3.4 donne une nouvelle démonstration du fait que le groupe de Weyl d'un tore maximal d'un groupe réductif est fini (Exp. XIX 2.5 (ii)).

3.6. Sous les condition de 3.1, pour tout $w \in \mathrm{W_G(T)(S)}$, on note Q_w le produit fibré suivant : 170

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Q}_w \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Norm_G(T)} \arrow[d] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "w"] & \mathrm{W_G(T)}. \end{tikzcd}$$

C'est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Norm}}(\mathrm{T})$, qui est un fibré principal homogène sous T à gauche (resp. à droite) par la loi $(t,q) \mapsto tq$ (resp. $(q,t) \mapsto qt$). Si $n \in \mathrm{Q}_w(\mathrm{S})$, on a

$$\mathrm{Q}_{ww'} = n \cdot \mathrm{Q}_{w'}, \qquad \mathrm{Q}_{w'w} = \mathrm{Q}_{w'} \cdot n.$$

3.7. En particulier, si α est une racine de G par rapport à T, Q_{s_α} n'est autre que ce qui avait été noté Q en Exp. XX n° 3. Si $\mathfrak{g}^\alpha$ est libre sur S, on a donc $\mathrm{Q}_{s_\alpha}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$.

Par 3.4 et la condition (D 2) du déploiement, on en déduit le

Corollaire 3.8. — *Sous les conditions de* 3.4*,*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{W_G(T)(S)} = \mathrm{Hom_{loc.cons.}(S,W)}$$

est surjectif. En particulier, pour tout $w \in \mathrm{W}$*, il existe un* $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(n_w)|_{\mathrm{T}} = w$.

4. Homomorphismes de groupes déployés 171

4.1. La « grosse cellule ». —

4.1.1. — Soit (G, T, M, R) un S-groupe déployé. Choisissons un *système de racines positives* (Exp. XXI 3.2.1) R_+ de la donnée radicielle $\mathscr{R}(G)$. On pose $R_- = -R_+$.

Choisissons un ordre total sur R_+ (resp. R_-) et considérons le morphisme induit par le produit dans G

$$u : \prod_{\alpha \in R_-} P_\alpha \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} \prod_{\alpha \in R_+} P_\alpha \longrightarrow G.$$

C'est une *immersion ouverte.* En effet, comme les deux membres sont plats et de présentation finie sur S, il suffit de la vérifier sur chaque fibre géométrique (SGA 1, I 5.7 et VIII 5.4) ; on est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos ; mais, par *Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3, u est radiciel et dominant ; comme l'application tangente à u à l'origine est un isomorphisme (définition d'un système de racines), u est birationnel ; mais G étant normal, on peut appliquer le « Main Theorem » de Zariski (EGA III_1, 4.4.9) et u est une immersion ouverte. Montrons que l'image Ω de cette immersion ouverte est indépendante de l'ordre choisi sur R_+ (resp. R_-). Comme il s'agit de comparer des ouverts de G, on est ramené à prouver qu'ils ont mêmes points géométriques, donc on peut supposer encore que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Mais alors l'assertion n'est autre que *Bible*, § 13, prop. 1 et th. 1.

172 On a donc prouvé :

Proposition 4.1.2. — *Soit* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé. Soit* R_+ *un système de racines positives de* R*. Il existe un ouvert* Ω_{R_+} *de* G *tel que pour tout ordre total sur* R_+ (*resp.* R_-)*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$\prod_{\alpha \in R_-} P_\alpha \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} \prod_{\alpha \in R_+} P_\alpha \longrightarrow G$$

soit une immersion ouverte d'image Ω_{R_+}.

Remarque 4.1.3. — On peut traduire 4.1.2 de la façon suivante : choisissons pour tout $\alpha \in R$ un isomorphisme de groupes vectoriels $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} P_\alpha$ (cf. 1.19) ; alors le morphisme (on pose $N = \mathrm{Card}(R_+) = \mathrm{Card}(R_-)$)

$$\mathbb{G}_{a,S}^N \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,S}^N \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par

$$((x_\alpha)_{\alpha \in R_-}, t, (x_\alpha)_{\alpha \in R_+}) \longmapsto \prod_{\alpha \in R_-} p_\alpha(x_\alpha) \cdot t \cdot \prod_{\alpha \in R_+} p_\alpha(x_\alpha)$$

est une immersion ouverte, dont l'image ne dépend que de R_+ (et non du choix des p_α et des ordres sur R_+ et R_-).

Notation 4.1.4. — On note $\Omega_{R_+} = \prod_{\alpha \in R_-} P_\alpha \cdot T \cdot \prod_{\alpha \in R_+} P_\alpha$.

Proposition 4.1.5. — *Le préschéma* Ω_{R_+} *est de présentation finie sur* S (*donc* rétrocompact dans G) *et* relativement schématiquement dense *dans* G (Exp. XVIII 1).

La première assertion est triviale, la seconde résulte de ce que Ω_{R_+} contient la section unité, donc coupe chaque fibre de G, et de Exp. XVIII 1.3. **173**

Corollaire 4.1.6. — *Sous les conditions de* 4.1.2*, on a*

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$$

On peut invoquer Exp. XII 4.8 et 4.11 ; on peut aussi le démontrer directement comme suit. Il suffit évidemment de prouver que $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}) = \bigcap_\alpha \mathrm{Ker}(\alpha)(\mathrm{S})$. Si $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ et si $\alpha(t) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, alors $\mathrm{int}(t)$ induit l'identité sur T et chaque P_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, donc aussi sur Ω_{R_+}, donc sur G par densité schématique. Réciproquement, si $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ centralise T et les P_α, c'est une section de T (Exp. XIX 2.8) qui annule les $\alpha \in \mathrm{R}$.

Corollaire 4.1.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif. Alors le centre de* G *est représentable par un sous-groupe fermé de* G*, de type multiplicatif ; c'est aussi « l'intersection des tores maximaux de* G *» au sens suivant : Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}')$ *est l'ensemble des* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *dont l'image réciproque dans* $\mathrm{G}(\mathrm{S}'')$*, pour tout* $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$*, est contenue dans tous les* $\mathrm{T}(\mathrm{S}'')$*, où* T *parcourt l'ensemble des tores maximaux de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$*.*

La première assertion est triviale par descente. Démontrons la seconde. Soit H « l'intersection des tores maximaux de G » au sens précédent. On a évidemment $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{H}$. Pour prouver $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$, il suffit de prouver que si G est déployé, $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ est l'intersection des tores maximaux de G (au sens habituel) ; cela résulte alors de la remarque suivante : si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, alors $\mathrm{int}(\exp_\alpha(\mathrm{X}))(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T} = \mathrm{Ker}(\alpha)$, comme le montre un calcul trivial. (Cf. aussi Exp. XII 8.6 et 8.8 pour un énoncé plus général).

Remarque 4.1.8. — Dans la suite, nous identifierons systématiquement dans le cas déployé T à $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ n'est autre que $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}))$, où (Exp. XXI) $\Gamma_0(\mathrm{R})$ est le sous-groupe de M engendré par R. Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ est un système de racines simples de R, on a aussitôt (cf. Exp. XX 1.19) : **174**

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap \mathrm{Ker}(\alpha_i) = \bigcap \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{Z}_{\alpha_i}).$$

Proposition 4.1.9. — *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* Q *un* S*-tore,* α_0 *un caractère de* Q*,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module inversible,*

$$f : \mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad p : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

des morphismes de groupes vérifiant la relation ensembliste

$$p(\alpha_0(q)\, x) = \mathrm{int}(f(q)) \cdot p(x),$$

pour tous $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*. Supposons que* f *sépare les éléments de* R *au sens suivant : si* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{R}$ *et si* $m, m' \in \mathbb{Z}$ *alors* $m\,\alpha \circ f = m'\alpha' \circ f$ *entraîne* $m\,\alpha = m'\alpha'$*. Soit enfin* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $(\alpha_0)_{\overline{s}} \neq e$ *et* $p_{\overline{s}} \neq e$*.*

Il existe alors un ouvert U *de* S *contenant* s, *un entier* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$, *une racine* $\alpha \in \mathrm{R}$ *et un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$*-modules*

$$h : (\mathscr{L}|_{\mathrm{U}})^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^r|_{\mathrm{U}}$$

tels que

(i) $(\alpha \circ f)_{\mathrm{U}} = q\,(\alpha_0)_{\mathrm{U}}$,

(ii) $p(\mathrm{X}) = \exp_\alpha(h(\mathrm{X}^q))$ *pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$.

De plus, une fois U *choisi,* q, α *et* h *sont uniquement déterminés.*

175 Quitte à restreindre S, nous pouvons supposer que α_0 est non nul sur chaque fibre de S. Choisissons un système de racines positives R_+ de R et soit $\mathrm{U} = p^{-1}(\Omega_{\mathrm{R}_+})$. C'est un ouvert de $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ contenant la section nulle et stable par multiplication par tout $\alpha_0(q)$, $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Comme α_0 est non trivial sur chaque fibre, il s'ensuit immédiatement que $\mathrm{U} = \mathrm{W}(\mathscr{L})$, donc que p se factorise par Ω_{R_+}. Choisissons un ordre quelconque sur R_+ et R_- ; tous les produits seront supposés pris dans cet ordre. On a donc des morphismes uniques

$$a_\alpha : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{P}_\alpha, \qquad \alpha \in \mathrm{R},$$
$$b : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{T}$$

tels que

$$p(x) = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} a_\alpha(x)\cdot b(x)\cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} a_\alpha(x).$$

Écrivant la condition de covariance sous Q, on obtient aussitôt

$$a_\alpha(\alpha_0(q)\,x) = r(f(q))\,a_\alpha(x), \qquad \alpha \in \mathrm{R}$$
$$b(\alpha_0(q)\,x) = b(x)$$

pour tous $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. La seconde condition donne aussitôt $b = e$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $(a_\alpha)_{\overline{s}} \neq e$ (nous savons qu'il existe un tel α, car $p_{\overline{s}}$ est supposé $\neq e$). Appliquant Exp. XIX 4.12 (a), on en déduit qu'il existe un entier $n > 0$, tel que $(\alpha \circ f)_{\overline{s}} = n\,(\alpha_0)_{\overline{s}}$. Quitte à restreindre S, on peut supposer $(\alpha \circ f) = n\,\alpha_0$ (Exp. IX 5.3). Mais alors, pour tout $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha' \neq \alpha$, on a $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}} \neq m\,\alpha_0$ pour tout entier $m > 0$ en vertu de l'hypothèse faite sur f (et du fait que les seules racines proportionnelles à α sont α et $-\alpha$). Appliquant de nouveau Exp. XIX 4.12 (a), à $a_{\alpha'}$
176 cette fois, on en déduit que $a_{\alpha'}$ est nul au voisinage de S ; R étant fini, on peut, quitte à restreindre encore S, supposer les $a_{\alpha'}$ nuls pour $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha' \neq \alpha$. On a alors $p = a_\alpha$, et on peut lui appliquer Exp. XIX 4.12 (b), puis (c), qui donne le résultat annoncé (les assertions d'unicité sont évidentes).

Remarque 4.1.10. — La condition imposée à f en 4.1.9 est vérifiée en particulier si f est surjectif (= fidèlement plat).

Proposition 4.1.11. — *Soient* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives de* R, Ω_{R_+} *la « grosse cellule » correspondante.*

(i) *Soit* H *un* S-*foncteur en groupes, séparé pour* (fppf). *Si* $f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *sont deux morphismes de groupes qui coïncident sur* Ω_{R_+}, *alors* $f = g$.

(ii) *Soient* H *un* S-*faisceau en groupes pour* (fppf) *et* $f : \Omega_{\mathrm{R}_+} \to \mathrm{H}$ *un* S-*morphisme vérifiant la condition suivante : pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* x, $y \in \Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}')$ *tels que* $xy \in \Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}')$, *on a* $f(xy) = f(x)f(y)$. *Il existe alors un* (unique, par (i)) *morphisme de groupes* $\overline{f} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *qui prolonge* f.

En effet, par 4.1.5, (i) (resp. (ii)) résulte aussitôt de Exp. XVIII 2.2 (resp. 2.3 et 2.4).

Remarque 4.1.12. — Si $\alpha \in \mathrm{R}_+$, on a

$$\Omega_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha.$$

En particulier, si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathfrak{g}^\alpha)$ et $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$, on a

$$\exp_\alpha(\mathrm{X}) \exp_\alpha(\mathrm{Y}) \in \Omega(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow 1 + \mathrm{XY} \text{ inversible.}$$

En effet $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{T}_\alpha)$, et α et $-\alpha$ sont les deux seuls éléments de R s'annulant sur T_α.

4.2. Morphismes de groupes déployés. — 177

Définition 4.2.1. — Soient S un préschéma (non vide), $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ et $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}')$ deux S-groupes déployés. On dit que le morphisme de groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est *compatible* avec les déploiements, ou définit un *morphisme de groupes déployés*, si la restriction de f à T se factorise en un morphisme $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ qui soit de la forme $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)$, où $h : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ est un homomorphisme de groupes vérifiant la condition suivante :

il existe une bijection $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ et pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ un entier $q(\alpha) > 0$ tel que $x \mapsto x^{q(\alpha)}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ et que

$$h(u(\alpha)) = q(\alpha)\, r, \qquad {}^t h(\alpha^*) = q(\alpha)\, u(\alpha)^*.$$

Remarque 4.2.2. — Il est immédiat que h, u, $q(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$, sont uniquement déterminés par f. On note $h = \mathscr{R}(f)$. Les $q(\alpha)$ sont les *exposants radiciels de* f (ou de h).

Soit p le nombre premier (s'il existe) qui est nul sur S ; posons $p = 1$ s'il n'existe aucun nombre premier nul sur S. Alors $\mathscr{R}(f)$ est un p-*morphisme* de données radicielles réduites au sens de Exp. XXI 6.8. On a donc défini un foncteur $\mathscr{R}$ de la catégorie des S-groupes déployés dans celle des données radicielles réduites (munie des p-morphismes).

Proposition 4.2.3. — *Sous les conditions de* 4.2.1, *on a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *il existe isomorphisme unique de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*

$$f_\alpha : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q(\alpha)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{u(\alpha)}$$

tel que

$$f(\exp_\alpha(\mathrm{X})) = \exp_{u(\alpha)}(f_\alpha(\mathrm{X}^{q(\alpha)}))$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *on a* $q(-\alpha) = q(\alpha)$ *et* f_α *et* $f_{-\alpha}$ *sont contragrédients l'un de l'autre.* 178

(iii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *tout* $\mathrm{Z} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^*(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on a*

$$f(w_\alpha(\mathrm{Z})) = w_{u(\alpha)}(\mathrm{Z}^{q(\alpha)}).$$

Par hypothèse le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "q(\alpha)"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[d, "q(\alpha)"'] \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "u(\alpha)^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "u(\alpha)"] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Il en résulte que f applique $\mathrm{Ker}(\alpha)$ dans $\mathrm{Ker}(u(\alpha))$, donc T_α dans $\mathrm{T}'_{u(\alpha)}$, donc Z_α dans $\mathrm{Z}'_{u(\alpha)}$. Il n'y a plus alors qu'à appliquer Exp. XX 3.10 et 3.11 aux groupes Z_α et $\mathrm{Z}'_{u(\alpha)}$.

Proposition 4.2.4. — *Le morphisme* f *induit un morphisme* f_{N} *de* $\underline{\mathrm{Norm}}(\mathrm{T})$ *dans* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$, *donc un morphisme* f_w *de* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *dans* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$ *; celui-ci est un isomorphisme. Plus précisément, si on note* $\overline{u} : \mathrm{W}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) = \mathrm{W} \to \mathrm{W}' = \mathrm{W}(\mathscr{R}(\mathrm{G}'))$ *l'isomorphisme qui prolonge* $s_\alpha \mapsto s_{u(\alpha)}$ (Exp. XXI 6.8.4), *on a un diagramme commutatif d'isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \arrow[r, "f_w", "\sim"'] & \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}') \\
\mathrm{W}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\overline{u}_{\mathrm{S}}", "\sim"'] & \mathrm{W}'_{\mathrm{S}}. \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Cela résulte aussitôt de 3.4, Exp. XXI 6.8.4, et (iii) ci-dessus

179 ***Remarque 4.2.5***. — Avec les notations de 4.2.3, la restriction de f à Ω_{R_+} (pour un système de racines positives R_+) s'écrit explicitement : elle applique Ω_{R_+} dans $\Omega'_{u(\mathrm{R}_+)}$ ($u(\mathrm{R}_+)$ est un système de racines positives de R' par Exp. XXI 6.8.7) et est donnée par la formule ensembliste :

$$f\left(\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)\cdot t\cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)\right)$$
$$= \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \exp_{u(\alpha)}\left(f_\alpha(\mathrm{X}_\alpha^{q(\alpha)})\right)\cdot f_{\mathrm{T}}(t)\cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \exp_{u(\alpha)}\left(f_\alpha(\mathrm{X}_\alpha^{q(\alpha)})\right).$$

Proposition 4.2.6. — (i) *f est surjectif* (= fidèlement plat dans le cas présent, cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$ [(4)]) *si et seulement si f_{T} l'est.*

(ii) *On a* $\mathrm{Ker}(f) \subset \Omega_{\mathrm{R}_+}$.

Prouvons (i) : si f est surjectif, alors $f(\mathrm{T}) = f_{\mathrm{T}}(\mathrm{T})$ est un tore maximal de G' (en effet $f_{\mathrm{T}}(\mathrm{T})$ est un sous-tore de T', Exp. IX 6.8 ; pour vérifier qu'il est maximal, on est ramené au cas d'un corps algébriquement clos, où c'est *Bible*, § 7. ? ?, th. 3 (a)), donc $f_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}'$. Si f_{T} est surjectif, alors la formule précédente montre que $f|_{\Omega}$ est surjectif, ce qui entraîne que f est surjectif (Exp. VI).

Prouvons (ii) et pour cela admettons un résultat qui sera démontré ci-dessous (5.7.4) : choisissons pour chaque $w \in \mathrm{W}$ un $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ qui le représente ; alors les ouverts $n_w\Omega$ ($w \in \mathrm{W}$) forment un recouvrement de G. Il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap n_w\Omega \neq \varnothing$ entraîne $w = 1$. Si $x \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $f(n_w x) = e$, on a $f(x) = f(n_w)^{-1}$; or $f(x) \in \Omega'(\mathrm{S}')$ et $f(n_w)^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')(\mathrm{S}')$. En vertu de 4.2.4, on est ramené à prouver :

Lemme 4.2.7. — *Sous les conditions de* 4.1.2*, on a*

$$\Omega \bigcap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}.$$

Soit **180**

$$x = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} p_\alpha(x_\alpha)\cdot t\cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} p_\alpha(x_\alpha) = v\,t\,u \in \Omega(\mathrm{S}').$$

Si x normalise $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, on a pour tout $t' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$,

$$x\,t'\,x^{-1} = t'' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}'),$$

c'est-à-dire $x\,t' = t''\,x$, ce qui s'écrit

$$v\,(tt')\,(t'^{-1}ut') = (t''\,v\,t''^{-1})\,(t''t)\,u,$$

ce qui donne $t'^{-1}\,u\,t' = u$, donc $u \in \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}') = \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, soit $u = e$. De même $v = e$.

Corollaire 4.2.8. — *On a*

$$\mathrm{Ker}(f) = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \mathrm{K}_\alpha \cdot \mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{T}} \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \mathrm{K}_\alpha,$$

où pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, K_α désigne le S*-groupe fini*

$$\mathrm{K}_\alpha = \mathrm{Ker}(\mathrm{P}_\alpha \longrightarrow \mathrm{P}_\alpha^{\otimes q(\alpha)}) \simeq \boldsymbol{\alpha}_{q(\alpha),\,\mathrm{S}}.$$

Pour appliquer ce lemme, posons :

Définition 4.2.9. — Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs. Un morphisme de groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ fidèlement plat et fini (i.e. surjectif et à noyau fini sur S) est appelé une *isogénie.* Si $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe central de G, on dit que f est une *isogénie centrale.*

(4) N.D.E. : référence à préciser. . .

Proposition 4.2.10. — *Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes déployés. Pour que f soit une* isogénie (*resp. une isogénie centrale*) *il faut et il suffit que f_{T} soit une isogénie i.e. que $\mathscr{R}(f)$ soit injectif de conoyau fini* (*resp. et que pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on ait $q(\alpha) = 1$*).

181 En effet, par 4.2.8 $\mathrm{Ker}(f)$ est fini sur S si et seulement si $\mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}})$ est fini sur S, et $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{T}$ si et seulement si chaque $q(\alpha) = 1$ ($\mathrm{Ker}(f)$ alors central car de type multiplicatif et distingué, cf. Exp. IX 5.5).

Remarque 4.2.11. — a) On voit donc que $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est une isogénie centrale si et seulement si $\mathscr{R}(f) : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ est une isogénie au sens de Exp. XXI 6.2 ; de plus on a dans ce cas (avec les notations de *loc. cit.*) :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{D_S}(\mathrm{K}(\mathscr{R}(f))), \qquad \mathrm{K}(\mathscr{R}(f)) = \mathrm{Coker}(\mathscr{R}(f)).$$

b) Si G et G′ sont semi-simples, tout morphisme de groupes déployés $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est une isogénie.

c) Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est fidèlement plat et fini et si G est réductif (resp. semi-simple), alors G′ l'est aussi. Il est en effet de présentation finie sur S (Exp. V 9.1), affine sur S (EGA II 6.7.1), lisse sur S (Exp. VI), à fibres géométriques connexes et réductives (resp. semi-simples) par Exp. XIX 1.7.

La définition 4.2.1 peut sembler arbitraire. Elle est justifiée par la proposition qui suit (que nous énoncerons, pour simplifier, pour des groupes semi-simples).

Disons qu'un morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ de S-groupes réductifs est *déployable* s'il existe des déploiements de G et G′ avec lesquels f soit compatible. On a alors la

Proposition 4.2.12. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes semi-simples, $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes. Soit $s \in \mathrm{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

182 (i) $\mathrm{Ker}\, f_{\overline{s}}$ *est fini* ($\Leftrightarrow$ *e est isolé dans* $\mathrm{Ker}\, f(\overline{s})$) *et $f_{\overline{s}}$ est surjectif, i.e. $f_{\overline{s}}$ est une isogénie.*

(ii) *$f_{\overline{s}}$ est déployable.*

(iii) *Il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrant s tel que $f_{\mathrm{S}'} : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}'_{\mathrm{S}'}$ soit déployable.*

On a évidemment (iii) $\Leftrightarrow$ (ii) ; (ii) $\Leftrightarrow$ [(5)] (i) résulte de 4.2.10 (b) (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que G et G′ sont semi-simples – les autre implications sont valables pour des groupes réductifs).

Prouvons maintenant (i) $\Rightarrow$ (iii). On peut supposer G et G′ déployés de telle sorte que f induise un morphisme $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ (2.3 et Exp. XIX 2.8) ; quitte à restreindre S, on peut supposer que $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D_S}(h)$, où h est un morphisme de groupes $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$. Soit $\alpha \in \mathrm{R}$, considérons le morphisme composé

$$p : \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \xrightarrow{\exp_{\alpha}} \mathrm{G} \xrightarrow{f} \mathrm{G}'.$$

(5) N.D.E. : corriger l'un des $\Leftrightarrow$ en implication. . .

Comme Ker $p_{\overline{s}}$ est fini, $p_{\overline{s}} \neq e$. D'autre part $f_{\mathrm{T}\overline{s}}$ est surjectif ; on peut donc appliquer 4.1.9 et il existe un ouvert U_α de S contenant s, une racine $\alpha' \in \mathrm{R}'$, un entier $q(\alpha)$ tel que $x \mapsto x^{q(\alpha)}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$ et un isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{U}$-modules

$$f_\alpha : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q(\alpha)}|_{\mathrm{U}_\alpha} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\alpha'}|_{\mathrm{U}_\alpha}$$

tel que $f(\exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)) = \exp_{u(\alpha)}\left(f_\alpha(\mathrm{X}_\alpha^{q(\alpha)})\right)$ et $\alpha' \circ f_\mathrm{T} = h(\alpha') = q(\alpha)\alpha$. On peut remplacer S par l'intersection des U_α, $\alpha \in \mathrm{R}$. Posons $\alpha' = u(\alpha)$. Il est clair que $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ est une bijection, car le noyau de h est fini ($f_{\mathrm{T}_{\overline{s}}}$ étant surjectif). Il ne reste plus qu'à prouver que $f_\mathrm{T} \circ \alpha^* = q(\alpha)\,\alpha'^*$, ce qui se fait par une modification triviale de l'argument utilisé en Exp. XX 3.11.

De toutes façons, comme on l'a vu au cours de la démonstration, on a (i) ⇒ (iii). **183**
On a donc :

Corollaire 4.2.13. — *Soient* S *un préschéma,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *une isogénie de groupes réductifs. Alors* f *est* localement déployable pour la topologie étale.

4.3. Quotients centraux de groupes réductifs.

— Considérons d'abord un cas particulier.

Proposition 4.3.1. — *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* N *un sous-groupe de* M *contenant* R, $\mathrm{Q} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M}/\mathrm{N}) \subseteq \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$. *Alors :*

(i) $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est un* S*-groupe réductif,* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Q}$ *en est un tore maximal ;*

(ii) *si on identifie* T' *à* $\mathrm{D_S}(\mathrm{N})$*, alors* $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{N}$ *est un système de racines de* G' *par rapport à* T', $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{N}, \mathrm{R})$ *est un déploiement de* G*, et* $\mathscr{R}(\mathrm{G}')$ *s'identifie canoniquement à la donnée radicielle induite* (Exp. XXI 6.5) $\mathscr{R}(\mathrm{G})_\mathrm{N}$ *;*

(iii) *le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *est compatible avec les déploiements, d'exposants radiciels* 1*, et donne par fonctorialité le morphisme canonique* (*loc. cit.*) $\mathscr{R}(\mathrm{G})_\mathrm{N} \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$.

On sait que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ est représentable par un préschéma en groupes affine sur S (Exp. VIII 5.7), lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ [(6)]), à fibres géométriques connexes et réductives (comme quotients de groupes réductifs, cf. Exp. XIX 1.7) ; G' est donc un S-groupe réductif.

Il est clair que $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Q} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{N})$ en est un tore maximal. Remarquons ensuite qu'en choisissant un système de racines positives R_+ de R, l'ouvert Ω_{R_+} de 4.2 est **184**
stable sous Q et que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{\mathrm{R}_+}/\mathrm{Q} \simeq \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \mathrm{P}_\alpha \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathrm{T}/\mathrm{Q}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \mathrm{P}_\alpha,$$

$\Omega_{\mathrm{R}_+}/\mathrm{Q}$ étant un ouvert de G', contenant la section unité (Exp. IV 4.7.2 et 6.4.1).

Il en résulte que si on note $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G' et α le caractère de T/Q induit par α (ou, ce qui revient au même défini par $\alpha \in \mathrm{N}$ dans l'identification

(6) N.D.E. : réf. à préciser ...

$T/Q = D_S(N)$), le morphisme canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ induit pour chaque $\alpha \in R$ un isomorphisme

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{r}.$$

On a donc prouvé que R est un système de racines de G′ par rapport à T′, et on termine la démonstration sans difficulté.

Corollaire 4.3.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un sous-groupe* invariant *de type multiplicatif de* G*. Alors* Q *est* central *dans* G*, le quotient* G/Q *est représentable par un* S*-groupe réductif. Le morphisme canonique* $G \to G/Q$ *est localement déployable pour la topologie étale* (*avec des exposants radiciels égaux à* 1).

La première assertion résulte de Exp. IX 5.5 ; les autres sont locales pour la topologie étale et on est ramené à 4.3.1.

Définition 4.3.3. — Soit G un S-groupe réductif. On dit que G est *adjoint* (resp. *simplement connexe*) si pour tout $s \in S$, le type de G en s est donné par une donnée radicielle adjointe (resp. simplement connexe), i.e. (Exp. XXI 6.2.6) telle que M soit engendré par R (resp. M^* engendré par R^*).

185 ***Proposition 4.3.4***. — (i) *Un groupe réductif adjoint* (*resp. simplement connexe*) *est semi-simple.*

(ii) *Si* T *est un tore maximal du groupe réductif adjoint* (*resp. simplement connexe*) G *et si* α *est une racine de* G *par rapport à* T*, alors la racine infinitésimale* $\overline{\alpha}$ *est non nulle sur chaque fibre* (*resp.* α^* *est un monomorphisme et la coracine infinitésimale* H_α *est non nulle sur chaque fibre*).

En effet, (i) est trivial, (ii) se vérifie sur les fibres géométriques et résulte aussitôt de Exp. XXI 6.2.8.

Proposition 4.3.5. — (i) *Pour que le groupe réductif* G *soit adjoint, il faut et il suffit que* $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \{e\}_S$.

(ii) *Pour tout groupe réductif* G*, le groupe quotient* $G/\underline{\mathrm{Centr}}(G)$ *est un groupe réductif adjoint.*

En effet, on peut supposer G déployé, alors (i) est trivial (car $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = D_S(M/\Gamma_0(R))$), (ii) résulte de 4.3.1.

Définition 4.3.6. — Soit G un S-groupe réductif. On appelle *groupe adjoint* de G et on note ad(G) le groupe $G/\underline{\mathrm{Centr}}(G)$. On appelle *radical* de G et on note rad(G) le tore maximal (unique Exp. XII 1.12) de $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$. On appelle *groupe semi-simple associé* à G le quotient G/ rad(G).

Les définitions précédentes sont compatibles au changement de base. Si $s \in S$, $\mathrm{rad}(G)_{\overline{s}}$ est bien le radical de $G_{\overline{s}}$ au sens habituel (Exp. XIX 1.6).

4.3.7. — Si (G, T, M, R) est un groupe déployé, alors $\mathrm{rad}(G) = D_S(M/N)$, où $N =$
186 $M \cap \mathscr{V}(R)$, donc le groupe semi-simple associé à G (comme d'ailleurs le groupe adjoint

de G) est muni d'un déploiement canonique (4.3.1) et on a un diagramme de groupes déployés

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G})$$

correspondant au diagramme canonique de données radicielles (Exp. XXI 6.5.5)

$$\mathrm{ad}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathrm{G}).$$

Remarque 4.3.8. — Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé, *adjoint* (resp. *simplement connexe*), Δ un système de racines simples de R. Alors la famille $\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, resp. $\{\alpha^*\}_{\alpha\in\Delta}$, induit un isomorphisme

$$\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})^{\Delta} \qquad , \quad \text{resp.} \quad (\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})^{\Delta} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}.$$

En effet, $\mathrm{M} = \Gamma_0(\mathrm{R})$ (resp. . .) et Δ est une base du groupe abélien libre $\Gamma_0(\mathrm{R})$ (Exp. XXI 3.1.8).

Remarque 4.3.9. — Le radical d'un groupe réductif est un sous-groupe *caractéristique* (i.e. stable sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$), vu sa définition.

5. Sous-groupes de type (R)

Nous nous intéressons spécialement aux groupes réductifs, mais certains des résultats que nous allons établir sont valables plus généralement pour une classe de groupes plus large : les groupes de type (RR). 187

5.1. Groupes de type (RR). —

Définition 5.1.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. On dit que G est de type (RR) s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) G est lisse et de présentation finie sur S et à fibres connexes.

(ii) G possède localement pour la topologie (fpqc) des tores maximaux.

(iii) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, tout tore maximal T de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ et toute racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (Exp. XIX 1.10), $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_{\overline{s}})^{\alpha}$ est de rang 1 (comme espace vectoriel sur $\overline{\kappa}(s)$).

(iv) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, tout tore maximal T de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, notons R l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à T et $\Gamma_0(\mathrm{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\overline{s}})$ engendré par R ; alors le contenu [7] de toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$ dans le groupe abélien libre $\Gamma_0(\mathrm{R})$ (qui est donc entier > 0) est *inversible* sur S.

Remarque 5.1.2. — a) En vertu de Exp. XII 7.1 (où l'hypothèse G séparé est inutile car automatiquement vérifiée, Exp. $\mathrm{VI_B}$ [8]) (i) et (ii) entraînent que G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (resp. des sous-groupes de Cartan) conjugués localement pour la topologie étale.

b) Les sous-groupes de Cartan de G sont à fibres connexes (Exp. XII 6.6).

c) Si G est affine sur S, (i) et (ii) sont équivalents respectivement à 188

(7) N.D.E. : rappeler la définition = le générateur positif de l'idéal $\{f(\alpha), f \in \Gamma_0(\mathrm{R})^*\}$ de $\mathbb{Z}$ = le plus grand entier $c > 0$ tel que $\alpha/c \in \Gamma_0(\mathrm{R})$.

(8) N.D.E. : à préciser . . .

(i′) G est lisse sur S et à fibres connexes.

(ii′) Le rang réductif des fibres de G est localement constant. (Exp. XII 1.7).

d) Par Exp. XII 8.8 c), G possède un centre réductif Z ; sous les conditions de (iv), on a $Z_{\overline{s}} = \bigcap_{\alpha\in R} \mathrm{Ker}(\alpha)$ (*loc. cit.* d)), donc

$$\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}((T/Z)_{\overline{s}}, \mathbb{G}_{m,\,\overline{s}}) \simeq \Gamma_0(R).$$

e) La condition (iv) est vérifiée en particulier dans les deux cas suivants : 1°) S est de caractéristique 0 ; 2°) toute racine est un élément indivisible du groupe engendré par les racines.

f) Le fait d'être de type (RR) est stable par changement de base et local pour (fpqc).

Des remarques c) et e), il résulte aussitôt la

Proposition 5.1.3. — *Un groupe réductif est de type* (RR).

Proposition 5.1.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* Q *un sous-groupe central de* G *de présentation finie sur* S *tel que le quotient* G/Q *soit représentable* (*par exemple* G *affine sur* S *et* Q *de type multiplicatif ou bien* S *artinien*) *; alors* G/Q *est un* S*-groupe de type* (RR).

En effet (i) est clair (G/Q est lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ [(9)]), de présentation finie sur S (Exp. V 9.1), à fibres connexes) ; (ii) résulte de Exp. XII 7.6 ; il reste à vérifier (iii) et (iv).

Notons $G' = G/Q$, soit $u : G \to G'$ le morphisme canonique, $T' = u(T)$ le tore maximal de G′ image de T (Exp. XII 7.1 e)) ; pour chaque $\alpha \in R$, notons également par α le caractère de T′ défini par α (en effet $Q \cap T \subseteq Z = \bigcap_{\alpha\in R} \mathrm{Ker}(\alpha)$).

Prouvons d'abord :

189 ***Lemme 5.1.5***. — *Sous les conditions de* 5.1.4*, soit* $T = D_S(M)$ *un tore maximal trivial de* G*, supposons que la décomposition de* $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G)$ *sous* Ad(T) *soit de la forme*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in R} \mathfrak{g}^\alpha \qquad , \quad R \subseteq M - \{0\},$$

où pour tout $s \in S$, $\mathfrak{g}^\alpha(s) \neq 0$ *pour* $\alpha \in R$ (donc $\mathfrak{g}^\alpha$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-module inversible pour tout* $\alpha \in R$ *et* R *est l'ensemble des racines de* $G_{\overline{s}}$ *par rapport à* $T_{\overline{s}}$ *pour tout* $s \in S$).

Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ *de* G′ *se décompose sous* Ad(T′) *de la manière suivante :*

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in R} \mathfrak{g}'^\alpha$$

et $\mathscr{L}ie(u)$ *induit un isomorphisme de* $\mathfrak{g}^\alpha$ *sur* $\mathfrak{g}'^\alpha$.

(9) N.D.E. : à préciser . . .

En effet, soit $p = \mathscr{L}ie(u) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$. On a aussitôt $p(\mathfrak{g}^\alpha) \subseteq \mathfrak{g}'^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, et $p(\mathfrak{g}^0) \subseteq \mathfrak{g}'^0$. Comme

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathscr{L}ie(\mathrm{Q}) \subseteq \mathscr{L}ie(\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})) = \mathfrak{g}^0,$$

p induit un monomorphisme de $\mathfrak{g}^\alpha$ dans $\mathfrak{g}'^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et en vertu des remarques précédentes, il suffit alors de prouver que $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R})$. Or posons $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$, $\mathrm{C}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$; par Exp. XII 7.1 e), u induit un morphisme fidèlement plat $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ de noyau Q. On a donc

$$\dim \mathrm{C}' + \dim \mathrm{Q} = \dim \mathrm{C}.$$

Mais G, G′, C et C′ sont lisses, donc 190

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{G} = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) &= \dim \mathrm{C} + \mathrm{Card}(\mathrm{R})\\ &= \dim \mathrm{Q} + \dim \mathrm{C}' + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) = \dim \mathrm{Q} + \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R})\\ \mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \dim \mathrm{G}' = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{Q}\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}),$$

c'est-à-dire la relation cherchée.

Revenons à la démonstration de 5.1.4 ; on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit T un tore maximal de G ; appliquant 5.1.5, on a aussitôt (iii) et (iv) pour G/Q.

Pour utiliser la proposition précédente, introduisons une définition :

Définition 5.1.6. — On dit que le S-préschéma en groupes G est de type (RA), s'il est de type (RR) et s'il vérifie en outre la condition (iv′) (plus forte que (iv)) :

(iv′) Pour tout $s \in \mathrm{S}$ et tout tore maximal T de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, toute racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à T a un contenu dans $\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\overline{s}})$ qui est inversible sur S.

Remarques 5.1.7. — a) Un S-groupe réductif *adjoint* est de type (RA).

b) Si S est de caractéristique 0, tout groupe de type (RR) est de type (RA).

c) Le fait d'être de type (RA) est stable par changement de base et local pour (fpqc).

La remarque (a) précédente se généralise par : 191

Proposition 5.1.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*groupe de type* (RR), Z *son centre réductif, supposons le quotient* G/Z *représentable* (*par exemple* G *affine sur* S, *ou* S *artinien*) ; *alors* G/Z *est de type* (RA).

En effet, cela résulte aussitôt de 5.1.4, 5.1.5 et 5.1.2 d).

Remarque 5.1.9. — Si G est de type (RR) et si T est un tore maximal de G, on peut appliquer Exp. XIX 6.3. En particulier $\mathrm{W}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ est étale, quasi-fini et séparé sur S.

5.2. Sous-groupes de type (R). —

Définition 5.2.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie et à fibres connexes, H un sous-préschéma en groupes de G. On dit que H est de type (R) si

(i) H est lisse, de présentation finie sur S (= rétrocompact dans G [10]) et à fibres connexes.

(ii) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Cette notion est stable par changement de base et locale pour (fpqc).

Rappel 5.2.2. — (Exp. XII 7.9). Sous les conditions précédentes :

a) $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})^0$.

b) Si G contient localement pour la topologie étale des sous-groupes de Cartan
192 (resp. des tores maximaux), il en est de même de H, et les sous-groupes de Cartan (resp. les tores maximaux) de H sont des sous-groupes de Cartan (resp. des tores maximaux) de G.

Exemples 5.2.3. — a) *Sous-groupes de Borel* : un groupe de Borel de G est un sous-groupe de type (R) dont les fibres sont des sous-groupes de Borel des fibres de G.

b) *Sous-groupes paraboliques* : un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe de type (R) dont les fibres géométriques contiennent des sous-groupes de Borel.

D'autres exemples sont donnés par les propositions suivantes.

Proposition 5.2.4. — *Soit* G *comme dans* 5.2.1*,* $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{H}$ *deux sous-préschémas en groupes de* G*,* H *étant supposé de type* (R)*. Alors* K *est un sous-groupe de type* (R) *de* H *si et seulement si c'est un sous-groupe de type* (R) *de* G*.*

Trivial.

Proposition 5.2.5. — *Soit* G *comme dans* 5.2.1*,* T *un tore maximal de* G*,* Q *un sous-tore de* T*,* $\mathrm{Z} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$*. Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *contenant* T*, alors* $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}$ *est un sous-groupe de type* (R) *de* Z*.*

Rappelons d'abord que Z est un sous-préschéma en groupes fermé de G, de présentation finie (Exp. XI 6.11), à fibres connexes (Exp. XII 6.6), lisse sur S (Exp. IX 3.3), donc vérifie les conditions imposées dans la définition 5.2.1. De même, $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}$ est de présentation finie, lisse et à fibres connexes (car $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q})$) ; de plus $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z} \supseteq \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

Proposition 5.2.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR) (*resp.* (RA))*,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G*. Alors* H *est un* S*-groupe de type* (RR) (*resp.* (RA))*.*

193 En effet (i) est clair, (ii) résulte de 5.2.2 b), (iii) et (iv) (resp. (iv′)) sont à vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Alors H contient un tore

[10] N.D.E. : préciser cette égalité...

maximal T de G (et donc aussi $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$) et les assertions à démontrer résultent aussitôt de :

Lemme 5.2.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* $T = D_S(M)$ *un tore maximal trivial de* G *; supposons que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha,$$

les $\mathfrak{g}^\alpha$ *étant inversibles. Soit* H *un sous-groupe de type* (R) *contenant* $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ (*i.e. contenant* T)*. Alors* $\mathfrak{h} = \mathscr{L}ie(H/S)$ *est localement sur* S *de la forme*

$$\mathfrak{g}^0 + \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{R'};$$

de manière précise, soit pour chaque $s \in S$, $R'(s) = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}^\alpha(s) \subseteq \mathfrak{h}(s)\}$*. Alors* $R'(s)$ *est une fonction localement constante de* s *; si* U *est un ouvert de* S *sur lequel* $R'(s) = R'$*, on a*

$$\mathfrak{h}_U = \mathfrak{g}^0_U \bigoplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha_U.$$

En effet, $\mathfrak{h}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$, localement facteur direct, contenant $\mathfrak{g}^0$ et stable par T.

5.3. Transporteur strict de deux sous-groupes de type (R). Applications. — 194

Proposition 5.3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RA) (5.1.6)*,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G*,* $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}$ *leurs algèbres de Lie.*

Alors $\underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})$ (*qui est de toutes façons représentable par un sous-préschéma fermé de* G *de présentation finie sur* S) *est* lisse *sur* S le long de la section unité *et on a*

$$H = \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})^0.$$

Comme H est lisse et de présentation finie sur S, la proposition est équivalente (Exp. VI [(11)]) au fait suivant : pour tout $s \in S$

$$\mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)) = \mathfrak{h}(s).$$

On est donc ramené par 5.2.7 à prouver :

Lemme 5.3.2. — *Sous les conditions de* 5.2.7*, si* G *est de type* (RA)*, on a, pour tout* $s \in S$*,*

$$\mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)) = \mathfrak{h}(s).$$

[(11)] N.D.E. : à préciser…

En effet, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, donc où $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ pour un certain $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}$. Mais on a déjà

$$\mathrm{Transp}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

En effet, si $\mathrm{H} \in \mathfrak{t}$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a $[\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \overline{\alpha}(\mathrm{H})\,\mathrm{X}$, où $\overline{\alpha} : \mathfrak{t} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est le morphisme dérivé de α. Or la condition (iv′) dit justement que $\overline{\alpha} \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Corollaire 5.3.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RA)*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*,* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}'$ *leurs algèbres de Lie. Alors*

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' \iff \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'.$$

195 ***Corollaire 5.3.4***. — *Sous les conditions de* 5.2.7*,* G *étant de type* (RA)*, les applications*

$$\mathrm{H} \mapsto \mathscr{L}ie(\mathrm{H}/\mathrm{S}), \qquad \mathfrak{h} \mapsto \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})^0$$

réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) *de* G *contenant* T*, et l'ensemble des sous-algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{g}^0$ *et stables par* T*, et dont le normalisateur dans* G *est lisse le long de la section unité.*

Corollaire 5.3.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR) (5.1.1.)*,* T *un tore maximal de* G*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*, contenant* T*. Alors*

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' \iff \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'.$$

En vertu des hypothèses de présentation finie, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien ; il suffit alors de vérifier que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ implique $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}'_{\mathrm{S}'}$ pour tout S′ spectre d'un quotient artinien d'un anneau local de S ; on est donc ramené au cas où S est artinien et où on peut appliquer 5.1.8.

Posons $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ et soit $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ le tore maximal de G′ correspondant à T. En vertu de Exp. XII 7.12, il existe des sous-groupes de type (R) H_1 et H'_1 de G′, contenant T′, tels que $\mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}_1)$ et $\mathrm{H}' = u^{-1}(\mathrm{H}'_1)$, où $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est le morphisme canonique. Il suffit de prouver $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}'_1$. Mais par 5.2.7 et 5.1.5, on a

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{H}_1) = \mathscr{L}ie(\mathrm{H}'_1),$$

et on est ramené à 5.3.3.

196 ***Remarque 5.3.6***. — Le fait que H et H′ contiennent le même tore maximal est essentiel pour la validité de 5.3.5 lorsque G n'est pas de type (RA). Exemple : tores maximaux de $\mathrm{SL}_{2,\,k}$, pour k de caractéristique 2.

Corollaire 5.3.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* T *un tore maximal de* G*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*, contenant* T*. L'ensemble* U *des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}'_s$ *est ouvert et fermé dans* S *et* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$.

En effet, cela résulte aussitôt de 5.3.5 et 5.2.7.

Corollaire 5.3.8. — *Le « foncteur des sous-groupes de type* (R) *contenant* T »*, où* T *est un tore maximal donné dans un groupe* G *de type* (RR) *est formellement non ramifié* (Exp. XI 1.1).

Théorème 5.3.9. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR) (5.1.1)*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) (5.2.1)*. Soit* $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *le transporteur strict de* H *dans* H′ *défini par*

$$\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')(\mathrm{S}') = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid \mathrm{int}(g)\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}'_{\mathrm{S}'}\}.$$

Alors $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *est représentable par un sous-préschéma* fermé *de* G*, qui est* lisse et de présentation finie *sur* S.

Le fait que $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ soit représentable par un sous-préschéma fermé de G, de présentation finie sur S résulte de Exp. XI 6.11 a). Pour démontrer qu'il est lisse sur S, il faut prouver que si S est affine et si S_0 est le sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent J, et si $g_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ et $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$, il existe un $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, se projetant sur g_0 et tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} = \mathrm{H}'$. Comme la question de lissité est locale pour **197**
la topologie étale, on peut supposer que H contient un tore maximal T de G.

Alors T_0 est un tore maximal de H_0, donc $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{T}_0$ un tore maximal de H'_0. Par Exp. IX 3.6 bis, il existe un tore T′ de H′ tel que $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{int}(g_0)\mathrm{T}_0$; par Exp. IX 3.3 bis, il existe donc un $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, se projetant sur g_0 et tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{T} = \mathrm{T}'$. Quitte à remplacer H par $\mathrm{int}(g)\mathrm{H}$, on peut donc supposer que H et H′ contiennent le même tore maximal T et que $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$. Mais alors $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ par 5.3.7. C.Q.F.D.

Corollaire 5.3.10. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G*. Alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, de présentation finie et* lisse *sur* S.

Raisonnant maintenant comme dans Exp. XI 5.2 bis ⇒ 5.4 bis, on obtient :

Corollaire 5.3.11. — *Sous les hypothèses de* 5.3.9*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *et* H′ *sont conjugués localement dans* G *pour la topologie étale.*

(i bis) *idem pour la topologie* (fpqc)*.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{H}'_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{G}(\overline{s})$*.*

(ii bis) *Le morphisme structural* $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}') \to \mathrm{S}$ *est surjectif.*

(iii) $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *est un fibré principal homogène sous l'action du* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$*.*

Remarquons simplement que l'assertion non triviale (iii) ⇒ (i) est le lemme de **198**
Hensel.

Utilisant maintenant *Bible*, § 6.4, th. 4 (= [**C05**], § 6.5 th. 5) et § 9.3, th. 1, on obtient par 5.3.10 et 5.3.11 :

Corollaire 5.3.12. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*. Les sous-groupes de Borel de* G *sont fermés dans* G*, leur propre normalisateur, et conjugués localement pour la topologie étale.*

Définition 5.3.13. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie et à fibres connexes. On appelle *couple de Killing* de G un couple $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{B}$, où T est un tore maximal de G et B un sous-groupe de Borel de G contenant T.

Utilisant maintenant la conjugaison des tores maximaux dans B (5.1.2 a) et 5.2.6, par exemple), on a :

Corollaire 5.3.14. — *Soit* G *un* S*-groupe de type* (RR)*. Les couples de Killing de* G *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

Corollaire 5.3.15. — *Soit* G *un* S*-groupe de type* (RR)*. Soit* T *un tore maximal de* G*,* $\mathrm{W_G(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le groupe de Weyl correspondant* (Exp. XIX 6.3)*. Le « foncteur des groupes de Borel de* G *contenant* T *» est formellement principal homogène sous* $\mathrm{W_G(T)}$*.*

Cela résulte aussitôt de 5.3.14 et du fait que si B est un sous-groupe de Borel de G contenant T, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \bigcap \mathrm{B} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}),$$

cf. Exp. XIV 4.4.

199 ***Proposition 5.3.16***. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* H *un sous-groupe de type* (R)*,* $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *son normalisateur* (5.3.10)*. Soient* T *un tore maximal de* H*,* $\mathrm{W_H(T)}$ *et* $\mathrm{W_N(T)}$ *les groupes de Weyl correspondants* (*étales quasi-finis séparés par* Exp. XIX 6.3)*. On a la suite exacte de faisceaux* (*pour la topologie étale*) *suivante* (les morphismes sont induits par les morphismes évidents) *:*

$$e \longrightarrow \mathrm{W_H(T)} \longrightarrow \mathrm{W_N(T)} \longrightarrow \mathrm{N/H} \longrightarrow e.$$

Le seul point non trivial est le fait que la dernière flèche soit un épimorphisme. Soit donc $n \in \mathrm{N(S')}$, $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$. Les deux tores maximaux T et $\mathrm{int}(n)\mathrm{T}$ de H sont conjugués dans H localement pour la topologie étale. Il existe donc une famille couvrante $\{\mathrm{S}'_i \to \mathrm{S'}\}$ et pour chaque i un $h_i \in \mathrm{H}(\mathrm{S}'_i)$ tel que $\mathrm{int}(h_i)\mathrm{T} = \mathrm{int}(n)\mathrm{T}$. On a donc $nh_i^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T})$, ce qui entraîne le résultat cherché.

Remarque 5.3.17. — On peut décrire $\mathrm{W_N(T)}$, de la manière suivante : supposons-nous ramenés à la situation de 5.2.7, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathrm{R'}}$. Alors $\mathrm{W_N(T)}$ égale $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{W}}(\mathrm{R'})$, le faisceau des sections de $\mathrm{W} = \mathrm{W_G(T)}$ qui, opérant sur R, normalisent R′. En effet, par 5.3.5, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

Corollaire 5.3.18. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* H *un sous-groupe de type* (R)*. Supposons « les groupes de Weyl de* G *finis », i.e. que pour tout* $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ *et tout tore maximal* T *de* $\mathrm{G_{S'}}$*, le* S′*-préschéma étale* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{T})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{T})$ *soit fini* (cf. Exp. XIX 6.3 (iii))*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *est fermé dans* G*.*

200 (ii) $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ *est représentable par un* S*-préschéma* fini étale*.*

(iii) *« les groupes de Weyl de* H *sont finis ».*

En effet, on peut supposer que H possède un tore maximal T. Comme $\mathrm{W_N(T)}$ est fermé dans $\mathrm{W_G(T)}$, $\mathrm{W_N(T)}$ est fini sur S. On a évidemment (i) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (ii) par la suite exacte de 5.3.16, et (ii) ⇒ (i) car si N/H est fini, il est séparé, donc H est fermé dans N.

Remarque 5.3.19. — Lorsque G est réductif, les conditions précédentes sur H semblent toujours vérifiées. Nous les démontrons ci-dessous dans la plupart des cas.

5.4. Sous-groupes de type (R) d'un groupe réductif déployé (généralités). —

5.4.1. — Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G, H contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G. Par 2.3, on peut, localement pour la topologie étale, supposer G déployé par rapport à ce tore. Soit donc $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé, H un sous-groupe de type (R) de G contenant T. Par 5.3.5 un tel sous-groupe est caractérisé par son algèbre de Lie, laquelle (5.2.7) est localement sur S de la forme $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Définition 5.4.2. — Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé. On dira que la partie R' de R est de type (R) si $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de G contenant T. Ce sous-groupe, uniquement déterminé par R', est noté $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$.

Lemme 5.4.3. — *Sous les conditions précédentes, on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{T} &\Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{R}', \quad -\alpha \notin \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \supseteq \mathrm{P}_\alpha &\Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \cap \mathrm{P}_\alpha = e &\Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \supseteq \mathrm{Z}_\alpha &\Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}', \quad -\alpha \in \mathrm{R}'. \end{aligned}$$

En effet, $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_\alpha$ est un sous-groupe de type (R) de Z_α, par 5.2.5 ; mais un sous- 201
groupe de type (R) de Z_α, contenant T, est localement égal à l'un des sous-groupes suivants : T, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha$, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_{-\alpha}$, Z_α, par 5.3.5.

Lemme 5.4.4. — *Sous les conditions de* 5.4.2, *soit* R_+ *un système de racines positives ; choisissons des ordres sur* $\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+$ *et* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}_+$. *Le morphisme*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}_+} \mathrm{P}_\alpha \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+} \mathrm{P}_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}$$

induit par le produit dans G *induit une immersion ouverte*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}.$$

En effet, par 5.4.3, ce morphisme se factorise par $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ et induit donc une immersion $\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$. On raisonne alors comme dans 4.1.1.

Proposition 5.4.5. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé. Soient* R' *et* R'' *deux parties de* R, *de type* (R).

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ *est lisse le long de la section unité,* $\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''$ *est de type* (R) *et on a*

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''})^0 = \mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}.$$

(ii) *On a l'équivalence* 202

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{R}''} \Longleftrightarrow \mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}''.$$

En effet, (ii) résulte aussitôt de (i). Pour prouver (i), il suffit de prouver que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ est lisse le long de la section unité : sa composante neutre sera alors un groupe de type (R) contenant T, donc égale à $\mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}$; mais $\Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'} \cap \Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}''} = \Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}$ est un ouvert de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ contenant la section unité et lisse sur S.

Corollaire 5.4.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*, s un point de* S*. Si* H *et* H′ *sont deux sous-groupes de type* (R) *de* G *contenant* T *tels que* $\mathrm{H}_s \subseteq \mathrm{H}'_s$*, il existe un ouvert* U *de* S *contenant s tel que* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$.

On peut en effet supposer G déployé par rapport à T. L'assertion résulte alors aussitôt de 5.4.5 (ii).

On est conduit à se demander quelles sont les parties R′ de type (R) de R. On peut supposer le groupe adjoint ; il faut alors vérifier que $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ est une algèbre de Lie et que son normalisateur est lisse le long de la section unité. Le cas le plus important est donné par le

Théorème 5.4.7. — *Toute partie* close R′ *de* R *est de type* (R). (On rappelle, cf. Exp. XXI 3.1.4, que $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}$ est dite *close* si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}'$, $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$ entraîne $\alpha + \beta \in \mathrm{R}'$).

Remarque 5.4.8. — Nous verrons plus tard (Exp. XXIII 6.6) que si S possède une caractéristique résiduelle distincte de 2 et de 3 (i.e. si 6 n'est pas nul sur S), le fait
203 que $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ soit une algèbre de Lie entraîne déjà que R′ est close, donc R′ est de type (R) si et seulement si elle est close. Le théorème 5.4.7 donne donc toutes les parties de type (R) « indépendantes de la caractéristique ».

Démontrons d'abord :

Lemme 5.4.9. — *Choisissons pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}$ *un* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$*. Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$*, avec* $\alpha + \beta \neq 0$ *et soit q le plus grand entier i tel que* $\alpha + i\,\beta \in \mathrm{R}$*. Il existe des sections* $\mathrm{M}_{\alpha,\beta,i} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$*, uniquement déterminées, telles que*

$$\mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta) = \mathrm{X}_\beta + \sum_{i=1}^{q} \mathrm{M}_{\alpha,\beta,i}\, x^i\, \mathrm{X}_{\beta+i\alpha},$$

pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

En effet, $x \mapsto \mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta)$ définit un morphisme $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{G}^m_{a,\mathrm{S}}$. Il existe donc des sections $\mathrm{Y}_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g})$, uniquement déterminées, telles que

$$\mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta) = \sum_{n \geqslant 0} x^n\, \mathrm{Y}_n.$$

Faisant opérer l'automorphisme intérieur défini par une section t de T, on trouve aussitôt

$$\mathrm{Ad}(t)(\mathrm{Y}_n) = \beta(t)\, \alpha(t)^n\, \mathrm{Y}_n,$$

ce qui entraîne $\mathrm{Y}_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha})$. Comme α et β ne sont pas proportionnelles, aucun des $\beta + n\alpha$ n'est nul ; on a donc $\mathrm{Y}_n = 0$ pour $n > q$, $\mathrm{Y}_n = \mathrm{M}_{\alpha,\beta,n}\ \mathrm{X}_{\beta+n\alpha}$ pour

$0 \leqslant n \leqslant q$, où $\mathrm{M}_{\alpha,\beta,n} \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ est uniquement déterminé. Faisant $x = 0$ dans la formule obtenue, on trouve $\mathrm{Y}_0 = \mathrm{X}_\beta$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.4.10. — En dérivant pour $x = 0$ la formule précédente, on trouve 204

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \mathrm{N}_{\alpha,\beta}\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad \text{où } \mathrm{N}_{\alpha,\beta} = \mathrm{M}_{\alpha,\beta,1}, \quad \text{si } \alpha+\beta \in \mathrm{R},$$
$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = 0 \qquad \text{si } \alpha+\beta \notin \mathrm{R},\ \alpha+\beta \neq 0.$$

Démontrons maintenant 5.4.7 ; si R' est une partie close de R, alors $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, par 5.4.10 et Exp. XX 2.10, formule (3). Par 5.4.9 et Exp. XX 2.10, formule (2), P_α normalise $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}'$. Choisissons un système de racines positives R_+ et considérons l'ouvert Ω_{R_+} de 4.1.2 ; soit $\Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'}$ le sous-préschéma fermé de Ω_{R_+} défini comme suit :

$$\Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'} = \Big(\prod_{\alpha\in\mathrm{R}'\cap-\mathrm{R}_+} \mathrm{P}_\alpha\Big)\cdot\mathrm{T}\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}_+} \mathrm{P}_\alpha\Big).$$

L'immersion canonique $\Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'} \to \mathrm{G}$ se factorise par $i : \Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'} \to \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'})$. Supposons G adjoint ; l'application tangente à i en les points de la section unité est bijective par 5.3.2 ; en particulier, le morphisme i est lisse le long de la section unité (Exp. $\mathrm{VI_B}$ [(12)]), donc est une immersion locale le long de la section unité, donc $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'})$ est lisse le long de la section unité, ce qu'il fallait démontrer.

5.5. Sous-groupes de Borel d'un groupe réductif déployé. —

Proposition 5.5.1. — *Soit* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé. Pour tout système de racines positives* R_+ *de* R*,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ (*qui existe par* 5.4.7) *est un sous-groupe de Borel de* G *et, pour tout ordre sur* R_+*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$\mathrm{T}\underset{\mathrm{S}}{\times}\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+}\mathrm{P}_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}$$

est une immersion fermée d'image $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$*. On note* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$*.* 205

Par définition des sous-groupes de Borel, la première assertion peut se vérifier en remplaçant S par le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit alors B le sous-groupe de Borel de G contenant T et correspondant au système de racines positives R_+ (*Bible*, § 10.xx, prop. 9) ; l'algèbre de Lie de B est $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}_+}$; on a donc $\mathrm{B} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ par 5.3.5.

Démontrons la seconde assertion : le morphisme de l'énoncé induit une immersion ouverte $i : \mathrm{T}\times_\mathrm{S}\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+}\mathrm{P}_\alpha \to \mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ (5.4.4). Or i est surjectif (*Bible*, § 15.xx, cor. 1 à la prop. 1).

Corollaire 5.5.2. — *Choisissons un ordre quelconque sur* R_+ *et pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}_+$ *un* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S},\mathfrak{g}^\alpha)^\times$*. Soient* $\alpha,\beta \in \mathrm{R}_+$*. Pour chaque couple* $(i,j) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *tel que* $i\,\alpha + j\,\beta \in \mathrm{R}$*, il existe une section unique*

$$\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta} \in \Gamma(\mathrm{S},\mathscr{O}_\mathrm{S})$$

(12) N.D.E. : à préciser …

telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on ait*

$$\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)\exp_s(y\mathrm{X}_\beta)\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)^{-1} = \exp_s(y\mathrm{X}_\beta)\prod_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^*\\ i\alpha+j\beta\in\mathrm{R}}}\exp_{i\alpha+j\beta}(\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}\,x^i\,y^j\,\mathrm{X}_{i\alpha+j\beta}).$$

Si $\alpha = \beta$, l'assertion est triviale. Supposons donc $\alpha \neq \beta$; alors, en vertu de la proposition, il existe des morphismes uniques

$$\mathrm{F}_0 : \mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad \mathrm{F}_\gamma : \mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \quad (\gamma \in \mathrm{R}_+)$$

206 tels que l'on ait

$$\exp(x\mathrm{X}_\alpha)\exp(y\mathrm{X}_\beta)\exp(x\mathrm{X}_\alpha)^{-1} = \mathrm{F}_0(x,y)\prod_{\gamma\in\mathrm{R}_+}\exp(\mathrm{F}_\gamma(x,y)\mathrm{X}_\gamma).$$

Soit $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Faisons agir $\mathrm{int}(t)$ sur cette formule ; on a aussitôt les relations

$$\mathrm{F}_0(\alpha(t)\,x, \beta(t)\,y) = \mathrm{F}_0(x,y), \tag{1}$$

$$\mathrm{F}_\gamma(\alpha(t)\,x, \beta(t)\,y) = \gamma(t)\,\mathrm{F}_\gamma(x,y). \tag{2}$$

Comme α et β sont deux caractères linéairement indépendants (sur $\mathbb{Q}$) de T, on conclut comme d'habitude de la première relation que F_0 est constant, donc $\mathrm{F}_0(x,y) = e$. Écrivons ensuite

$$\mathrm{F}_\gamma(x,y) = \sum a_{ij}x^iy^j, \quad \text{avec} \quad a_{ij} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}).$$

Reportant dans la relation (2) et identifiant les polynômes des deux membres on trouve

$$a_{ij}\big(\alpha(t)^i\beta(t)^j - \gamma(t)\big) = 0.$$

Si $\gamma \neq ir + js$, on sait (Exp. XIX 4.13) qu'il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plat quasi-compact et un $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ tel que $\alpha(t)^i\beta(t)^j - \gamma(t) = 1$. On a donc $a_{ij} = 0$ sur S', donc sur S. Si $\gamma = i\alpha + j\beta$, on pose $a_{ij} = \mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$. Faisant $x = 0$ (resp. $y = 0$), on trouve $\mathrm{C}_{0,1,\alpha,\beta} = 1$ (resp. $\mathrm{C}_{1,0,\alpha,\beta} = 0$).

Remarque 5.5.3. — Dérivant pour $y = 0$ et comparant à 5.4.9, on trouve

$$\mathrm{C}_{i,1,\alpha,\beta} = \mathrm{M}_{\alpha,\beta,i}.$$

207 ***Corollaire 5.5.4***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* α *et* β *deux racines de* G *par rapport à* T *telles que* $\alpha+\beta$ *soit non trivial sur chaque fibre. Ordonnons l'ensemble des* $i\alpha+j\beta$ $(i, j \in \mathbb{N}^*)$ *de manière quelconque. Pour tous* $i, j \in \mathbb{N}^*$*, il existe un unique morphisme de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules*

$$f_{\alpha,\beta,i,j} : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes i} \otimes (\mathfrak{g}^\beta)^{\otimes j} \longrightarrow \mathfrak{g}^{i\alpha+j\beta}$$

tel que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{s})(\mathrm{S}')$ *on ait* (les exp au second membre étant pris au sens de 1.2 [13]) *:*

$$\exp_{\alpha}(\mathrm{X}) \exp_{\beta}(\mathrm{Y}) \exp_{\alpha}(-\mathrm{X}) = \exp_{\beta}(\mathrm{Y}) \prod_{(i,j)} \exp_{i\alpha+j\beta}(f_{\alpha,\beta,i,j}(\mathrm{X}^{i} \otimes \mathrm{Y}^{j})).$$

L'assertion est locale pour (fpqc). On peut donc supposer G déployé relativement à T, α et β constantes dans le déploiement. Comme $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un système de racines positives R_{+} contenant α et β (Exp. XXI 3.5.4) et on est ramené à 5.5.2.

Corollaire 5.5.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) G *possède localement des sous-groupes de Borel pour la topologie étale. Si* T *est un tore maximal de* G, G *possède également localement pour la topologie étale des sous-groupes de Borel contenant* T.

(ii) *Si* T *est un tore maximal de* G, *le « foncteur des sous-groupes de Borel de* G *contenant* T *» est représentable par un fibré principal homogène sous* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

(iii) *Si* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *est déployé, tout sous-groupe de Borel* B *de* G *contenant* T *est localement sur* S *de la forme* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{+}}$, *où* R_{+} *est un système de racines positives de* R.

(iv) *Si* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{B}$ *est un couple de Killing de* G, *il existe une famille couvrante* $\{\mathrm{S}_{i} \to$ **208**
$\mathrm{S}\}$ *pour la topologie étale, et pour chaque i un déploiement* $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{i}}, \mathrm{T}_{\mathrm{S}_{i}}, \mathrm{M}_{i}, \mathrm{R}_{i})$ *et un système de racines positives* R_{i+} *de* R_{i} *tel que* $\mathrm{B}_{\mathrm{S}_{i}} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{i+}}$.

En effet, (i) résulte de 2.3 et 5.5.1, (ii) de (i) et 5.3.15, (iii) de 5.5.1 et (ii), (iv) de 2.3 et (iii).

Lemme 5.5.6. — *Choisissons sur le groupe* $\Gamma_{0}(\mathrm{R})$ *engendré par les racines une structure de groupe totalement ordonné telle que les racines* > 0 *soient les éléments de* R_{+} (cf. Exp. XXI 3.5.6) [14]. *Soient* $\alpha_{1} < \cdots < \alpha_{\mathrm{N}}$ *les éléments de* R_{+}. *Considérons l'isomorphisme*

$$f : \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{P}_{\alpha_{1}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \cdots \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{P}_{\alpha_{\mathrm{N}}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{+}}$$

induit par le produit dans G. *Posons pour* $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$,

$$\mathrm{U}_{i} = f(\mathrm{P}_{\alpha_{i}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \cdots \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{P}_{\alpha_{\mathrm{N}}}).$$

(i) *Chaque* U_{i} *est un sous-groupe invariant de* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{+}}$.

(ii) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}-1$, U_{i} *s'identifie au produit semi-direct*

$$\mathrm{U}_{i} = \mathrm{P}_{i} \cdot \mathrm{U}_{i+1}.$$

(iii) $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{+}}$ *s'identifie au produit semi-direct*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{R}_{+}} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{1}.$$

(iv) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}-1$, *les automorphismes intérieurs de* U_{1} *opèrent trivialement dans* $\mathrm{U}_{i}/\mathrm{U}_{i+1}$ *(qui s'identifie à* P_{i} *par* (ii)).

---

[13] N.D.E. : Clarifier ce point : est-ce que les $i\alpha + j\beta$ sont non triviaux sur chaque fibre, de façon à pouvoir appliquer la remarque 1.2 ?

[14] N.D.E. : Noter qu'un tel ordre est nécessairement compatible avec $\mathrm{ord}_{\mathrm{S}}$, où $\mathrm{S} = \mathscr{S}(\mathrm{R}_{+})$.

Prouvons d'abord par récurrence sur i l'assertion suivante :

U_i est un sous-groupe invariant de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$, produit semi-direct de P_i et de U_{i+1}.

209 L'assertion est vraie pour $i = \mathrm{N}$; supposons-la vraie pour $i+1$ et prouvons-la pour i. On a (comme préschémas)

$$\mathrm{U}_i = \mathrm{P}_i \cdot \mathrm{U}_{i+1};$$

il est d'abord clair que U_i est stable par les automorphismes intérieurs de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$. C'est clair pour $\mathrm{int}(t)$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$, il suffit de le vérifier pour $\mathrm{int}(x)$, $x \in \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha \in \mathrm{R}_+$. Or U_{i+1} est supposé invariant, donc il suffit de voir que $\mathrm{int}(x)\mathrm{P}_i \subseteq \mathrm{U}_i$. Par 5.5.2, si $y \in \mathrm{P}_i(\mathrm{S}')$, on a $y^{-1}xyx^{-1} \in \mathrm{U}_{i+1}(\mathrm{S}')$, ce qui entraîne $\mathrm{int}(x)y \in \mathrm{U}_i(\mathrm{S}')$.

Prouvons maintenant que U_i est un sous-groupe de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$. Si $x, y \in \mathrm{U}_i(\mathrm{S})$, on peut écrire $x = px'$, $y = qy'$, avec $p, q \in \mathrm{P}_i(\mathrm{S})$, et $x', y' \in \mathrm{U}_{i+1}(\mathrm{S})$. On a

$$xy = px'qy' = pq(q^{-1}x'q)y' \in \mathrm{P}_i(\mathrm{S}')\mathrm{U}_{i+1}(\mathrm{S}');$$

de même $x^{-1} = p^{-1}(px'^{-1}p^{-1}) \in \mathrm{P}_i(\mathrm{S}')\mathrm{U}_{i+1}(\mathrm{S}')$. Nous avons donc prouvé (i) et (ii), ainsi que (iv) chemin faisant. Quant à (iii), c'est une conséquence triviale de 5.5.1.

Lemme 5.5.7. — *Avec les notations précédentes, choisissons pour chaque* $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$ *un* $\mathrm{X}_i \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha_i})^\times$ *et considérons l'isomorphisme*

$$a : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}^{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathrm{U}_1$$

défini ensemblistement par

$$a(x_1 \ldots, x_\mathrm{N}) = \exp_{\alpha_1}(x_1\mathrm{X}_1) \cdots \exp_{\alpha_\mathrm{N}}(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N}).$$

Il existe une famille unique (Q_i), $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, *de polynômes*

$$\mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, x_\mathrm{N}, y_1, \ldots, y_\mathrm{N})$$

à coefficients dans $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ *telle que l'on ait ensemblistement*

$$a(x_1, \ldots, x_\mathrm{N})\, a(y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = a\big(\mathrm{Q}_1(x_1, \ldots, y_\mathrm{N}), \ldots, \mathrm{Q}_\mathrm{N}(x_1, \ldots, y_\mathrm{N})\big).$$

210 *De plus, les* Q_i *sont à coefficients dans le sous-anneau de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ *engendré par les* $\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$ *de* 5.5.2 $(\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+,\ i, j \in \mathbb{N}^*)$ *et chaque* Q_i *est de la forme*

$$\mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = x_i + y_i + \mathrm{Q}'_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}).$$

L'existence et l'unicité des Q_i résultent aussitôt du fait que a est un isomorphisme de préschémas. Notant z, z', z'' des sections de U_{i+1}, on a

$$a(x_1, \ldots, x_\mathrm{N})\, a(y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = a(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots 0) \exp(x_i\mathrm{X}_i)\, z \quad \times$$
$$a(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, \ldots, 0) \exp(y_i\mathrm{X}_i)\, z';$$

utilisant 5.5.6 (i) et (iv), ceci s'écrit

$$a(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0)\, a(y_1 \ldots, y_{i-1}, 0, \ldots, 0)\ \exp((x_i + y_i)\mathrm{X}_i)z'';$$

ce qui donne, réutilisant 5.5.6,

$$\mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, x_\mathrm{N}, y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = x_i + y_i + \mathrm{Q}'_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}),$$

avec

$$\mathrm{Q}'_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}) = \mathrm{Q}_i(x_i, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, 0);$$

soit la forme précise demandée.

Démontrons enfin l'assertion sur les coefficients des polynômes Q_i. Soit A le sous-anneau de $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ engendré par les $\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+,\ i, j \in \mathbb{N}^*$). Démontrons par récurrence [15] sur i que si $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$ et $y_1 = y_2 = \ldots = y_{i-1} = 0$, c'est-à-dire si $a(x_1, \ldots, x_\mathrm{N})$ et $a(y_1, \ldots, y_\mathrm{N})$ sont des sections de U_i, alors les polynômes

$$\mathrm{R}_j(x_i, \ldots, x_\mathrm{N}, y_i, \ldots, y_\mathrm{N}) = \mathrm{Q}_j(x_1, \ldots, x_\mathrm{N}, y_1, \ldots, y_\mathrm{N})),$$

sont à coefficients dans A. C'est trivial pour $i = \mathrm{N}$ et aussi pour $j < i$ (car $\mathrm{R}_j = 0$ pour $j < i$). Soit $i < \mathrm{N}$, supposons l'assertion vérifiée pour $i + 1$ et prouvons-la pour i (et $j \geqslant i$). On a **211**

$$a(0, \ldots, 0, x_i, \ldots, x_\mathrm{N}) = \exp(x_i \mathrm{X}_i)\, a(0, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_\mathrm{N}) = \exp(x_i \mathrm{X}_i)\, \mathrm{Z}_i.$$

Écrivons de même

$$a(0, \ldots, y_i, \ldots, y_\mathrm{N}) = \exp(y_i \mathrm{X}_i)\, \mathrm{T}_i.$$

On a

$$a(0, \ldots, x_i, \ldots, x_\mathrm{N})\, a(0, \ldots, y_i, \ldots, y_\mathrm{N}) = \exp((x_i + y_i)\mathrm{X}_i)\ \operatorname{int}(\exp(-y_i \mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i) \cdot \mathrm{T}_i.$$

Or

$$\operatorname{int}(\exp(-y_i \mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i) = \operatorname{int}(\exp(-y_i \mathrm{Y}_i))\Big(\exp(x_{i+1}\mathrm{X}_{i+1}) \cdots \exp(x_\mathrm{N} \mathrm{X}_\mathrm{N})\Big)$$

est un produit de $\mathrm{N} - i - 1$ sections de U_{i+1} dont les coefficients dans la décomposition $\mathrm{U}_{i+1} = \mathrm{P}_{\alpha_{i+1}} \cdots \mathrm{P}_{\alpha_\mathrm{N}}$ sont des polynômes en y_i et $x_{i+1}, \ldots, x_\mathrm{N}$ à coefficients dans A (par 5.5.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les coefficients de

$$\operatorname{int}(\exp(-y_i \mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i) \cdot \mathrm{T}_i$$

sont également des polynômes à coefficients dans A, ce qui termine la démonstration.

Remarquons que la récurrence précédente donne aussitôt une démonstration du

Lemme 5.5.8. — *Avec les notations de* 5.5.6, *soit pour chaque* $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, *un morphisme de groupes*

$$f_i : \mathrm{P}_{\alpha_i} \longrightarrow \mathrm{H},$$

où H *est un* S*-foncteur en groupes. Pour que le morphisme*

$$f : \mathrm{U}_1 \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini par

$$f\big(\exp(x_1 \mathrm{X}_1) \cdots \exp(x_\mathrm{N} \mathrm{X}_\mathrm{N})\,\big) = f_1(\exp(x_1 \mathrm{X}_1)) \cdots f_\mathrm{N}(\exp(x_\mathrm{N} \mathrm{X}_\mathrm{N}))$$

soit un morphisme de groupes, il faut et il suffit que pour tout couple $i < j$, *on ait* **212**

$$f_j(\exp(x_j \mathrm{X}_j))\, f_i(\exp(x_i \mathrm{X}_i))\, f_j(\exp(-x_j \mathrm{X}_j)) = \\ f\Big(\exp(x_j \mathrm{X}_j)\ \exp(x_i \mathrm{X}_i)\ \exp(-x_j \mathrm{X}_j)\Big).$$

[15] N.D.E. : décroissante

5.6. Sous-groupes de type (R) à fibres résolubles. —

Proposition 5.6.1. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R' *une partie de* R *de type* (R) (5.4.2)*,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *le sous-groupe de* G *correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est à fibres géométriques résolubles.*

(ii) *Il existe un système de racines positives* R_+ *tel que* $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}_+$*, donc* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ (*cf.* 5.4.5)*.*

(iii) $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$*.*

(iv) *Pour tout ordre sur* R'*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathrm{P}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$$

est un isomorphisme.

(v) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$*.*

(vi) *Pour toute partie* R'' *de* R*, de type* (R)*, on a* (*cf.* 5.4.5)

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \bigcap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}.$$

Nous allons démontrer ces équivalences selon le schéma logique

$$\begin{tikzcd}
\text{(iii)} \arrow[dd, Rightarrow] & \text{(ii)} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(vi)} \arrow[dd, Rightarrow] \\
& \text{(iv)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(i)} \arrow[uur, Rightarrow] & & \text{(v).} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

213 On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (vi) $\Rightarrow$ (v) (prendre $\mathrm{R}'' = \varnothing$). Par 5.4.6, il suffit de vérifier $\Rightarrow$ (ii) sur les fibres géométriques ; or si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ est contenu dans un groupe de Borel contenant T, donc de la forme $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ (5.5.5 (iii)).

De même (iii) $\Rightarrow$ (i) se vérifie sur les fibres géométriques ; supposons (iii) vérifié ; si $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ n'était pas résoluble, il existerait un sous-tore Q de T, de codimension 1 dans T tel que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$ ne soit pas résoluble (*Bible*, § 10.4, prop. 8) ; or $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$ a comme algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}$, où R'' est l'ensemble des racines de R' s'annulant sur Q, donc $\mathrm{R}'' = \varnothing$ ou $\{\alpha\}$ (en vertu de (iii)) ; donc $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$, qui est un sous-groupe de type (R) de G, est T ou $\mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha$, donc résoluble contrairement à l'hypothèse.

De même (ii) $\Rightarrow$ (iv) se vérifie sur les fibres géométriques (car il s'agit de S-préschémas plats et de présentation finie) ; par *Bible*, § 13.2, th. 1 d), le morphisme en question est bijectif ; il induit un isomorphisme sur les espaces tangents à l'origine, et on conclut comme d'habitude (cf. 4.4.1).

On a (iv) $\Rightarrow$ (v) par 4.2.7. Pour prouver (v) $\Rightarrow$ (i), on est encore ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos et on conclut par *Bible*, § 10.3, cor. à la prop. 6 et § 9.3, cor. 3 au th. 1.

Il ne reste donc à prouver que l'assertion (ii) $\Rightarrow$ (vi). On peut se ramener au cas où G est adjoint. On a alors, par 5.3.3 [16]

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}) \subseteq \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}). \qquad [17]$$

Par 5.4.5, il suffit de prouver 214

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{Transp}_{\mathrm{G}(\mathrm{S})}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}) \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S}).$$

Démontrons d'abord un lemme.

Lemme 5.6.2. — *Dans les notations de* 5.5.7, *soit*

$$u = \exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N})$$

où $x_i \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$. *Soit* m *un entier,* $1 \leqslant m \leqslant \mathrm{N}$, *tel que* $x_i = 0$ *pour* $i < m$. *Si* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t})$, *la composante de* $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X}$ *sur* $\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ *est*

$$-\overline{\alpha}_m(\mathrm{X})\, x_m\, \mathrm{X}_m.$$

Si $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha_m})$, *la composante de* $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y}$ *sur* $\mathfrak{t}$ *est* (avec les notations de ? ?)

$$x_m\, (\mathrm{X}_m\mathrm{Y})\, \mathrm{H}_{\alpha_m}.$$

Notons en effet $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\alpha_{m+1}} + \cdots + \mathfrak{g}^{\alpha_\mathrm{N}}$. En vertu de 5.4.9, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i\mathrm{X}_i))\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}, \qquad \text{pour} \quad i > m.$$

Par Exp. XX 2.10, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i\mathrm{X}_i))\mathrm{X} = \mathrm{X} - \overline{\alpha}_i(\mathrm{X})\, x_i\, \mathrm{X}_i.$$

Cela donne aussitôt, modulo $\mathfrak{h}$,

$$\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X} = \mathrm{Ad}(\exp(x_m\mathrm{X}_m))\mathrm{X},$$

ce qui entraîne le premier résultat.

De même, notons $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\alpha_1} + \cdots + \mathfrak{g}^{\alpha_m}$. Pour $i > m$, on a $\alpha_i > \alpha_m$, donc (5.4.9)

$$\mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y} - \mathrm{Y} \in \mathfrak{u}.$$

Appliquant Exp. XX 2.10, on a donc

$$\mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y} - \mathrm{Y} - x_m\, (\mathrm{X}_m\mathrm{Y})\, \mathrm{H}_{\alpha_m} \in \mathfrak{u}, \qquad [18]$$

Revenons à la démonstration de la formule (x). Supposons qu'il existe un $h \in$ 215
$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S})$, $h \notin \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S})$, tel que

$$\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}.$$

On peut écrire

$$h = t\exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N}).$$

[16] N.D.E. : vérifier cette référence : ajouter 5.3.1 ?
[17] N.D.E. : vérifier les notations Tran, Transt, Transp, etc.
[18] N.D.E. : correction à faire ici, sinon $(\mathrm{X}_m\mathrm{Y})\,\mathrm{H}_{\alpha_m} \in \mathfrak{u}$. . .

Comme $h \notin \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S})$, il existe un plus petit m tel que

$$t\exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_{m-1}\mathrm{X}_{m-1}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S}),$$
$$\alpha_m \notin \mathrm{R}'', \quad x_m \neq 0.$$

Alors $h' = \exp(x_m\mathrm{X}_m)\cdots\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N})$ vérifie aussi les conditions imposées à h ci-dessus. Mais par 5.6.2, la composante de $\mathrm{Ad}(h')\mathrm{X}$ sur $\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ est $-\overline{\alpha}_m(\mathrm{X})\,x_m\,\mathrm{X}_m$, si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S},\mathfrak{t})$. En vertu de l'hypothèse sur h et sur m, on a donc $\overline{\alpha}_m(\mathrm{X}) = 0$, ce qui est impossible (car G est supposé adjoint et $\overline{\alpha}_m$ est donc non nul sur chaque fibre).

Remarque 5.6.2. bis. — Reprenons les notations de 5.6.2. Si $\mathrm{Ad}(u)$ est l'identité sur $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha_m}$, on a $x_m = 0$. En effet, on a $x_m\,\overline{\alpha}_m = 0$ et $x_m\,\mathrm{H}_{\alpha_m} = 0$; si $\alpha_m \notin 2\mathrm{M}$, $\overline{\alpha}_m$ est non nul sur chaque fibre ; si $\alpha_m \in 2\mathrm{M}$, alors $\alpha_m^* \notin 2\mathrm{M}^*$ et H_{α_m} est non nul sur chaque fibre ; dans chaque cas, cela entraîne $x_m = 0$. Il en résulte que $u = e$ si $\mathrm{Ad}(u)$ opère trivialement sur $\mathfrak{g}$.

Remarque 5.6.3. — Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G, à fibres géométriques résolubles, alors H est fermé dans G et $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ est représentable par un S-schéma *fini étale.*

Trivial par 5.3.18.

Corollaire 5.6.4. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un groupe réductif déployé. Si* $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}$ *est close et si* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$*, alors* R' *est contenu dans un système de racines positives.*

En effet, R' est de type (R) par 5.4.7.

216 ***Corollaire 5.6.5***. — *Sous les conditions de* 5.6.1*, le produit dans* G *induit un isomorphisme*

$$\prod_{\alpha\in\mathrm{R}'} \mathrm{P}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_{\mathrm{R}'},$$

où $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, lisse sur* S*, à fibres géométriques connexes et unipotentes, indépendant du choix de l'ordre sur* R'*. De plus,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est le produit semi-direct* $\mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ $(\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ *invariant*$)$.

En effet, si $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}_+$, alors $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{U}_1$ (notations de 5.5.6) est un sous-groupe fermé de G de présentation finie, invariant dans $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$. Par 5.6.1 (iv), on a $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$, ce qui entraîne les autres assertions.

Remarque 5.6.6. — En particulier, $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+}$ est le groupe U_1 de 5.5.6.

Dégageons certains corollaires des résultats précédents concernant les groupes du type $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

Corollaire 5.6.7. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un groupe réductif déployé,* R' *et* R'' *deux parties de* R *de type* (R)*, avec* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$.

(i) *On a*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}.$$

(ii) *Supposons* R' clos. *Si* $\alpha \in \mathrm{R}'$*,* $\beta \in \mathrm{R}''$*,* $\alpha+\beta \in \mathrm{R}$ *entraîne* $\alpha+\beta \in \mathrm{R}'$*, alors* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ *normalise* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

En effet, (i) résulte aussitôt de 5.6.5 et 5.6.1 (vi). Pour prouver (ii), il suffit, vu 5.4.4, de montrer que T et chaque P_β, $\beta \in \mathrm{R}''$ normalisent $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$; pour T, c'est trivial, pour P_β, cela résulte de 5.5.2 et Exp. XXI 2.3.5.

Corollaire 5.6.8. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives,* α *une racine simple de* R_+ (i.e. un élément de R_+ tel que $\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}$ soit clos). *Notons*

$$\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}}.$$

Alors **217**

(i) $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$ *est un sous-groupe invariant de* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$.

(ii) $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+}$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$ *par* P_α.

(iii) $\mathrm{P}_{-\alpha}$ *normalise* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$.

(iv) Z_α *normalise* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$.

Si on définit de même $\mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_- - \{-\alpha\}}$ (*où* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$), *on a*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+} = \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}} \cdot \mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha \cdot \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}.$$

En effet, (i) est trivial par 5.6.7 (ii), (ii) est évident par 5.6.5, (iii) résulte de 5.5.2 (en effet, si $\beta \in \mathrm{R}_+$, $\beta \neq \alpha$, aucune combinaison $i(-\alpha) + j\beta$, avec i, $j > 0$ ne peut être négative car β contient au moins une racine simple $\neq \alpha$), (iv) résulte aussitôt de (i) et (iii), car $\mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha$ est schématiquement dense dans Z_α. La dernière assertion est triviale par (ii).

Revenons à la situation générale.

Proposition 5.6.9. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R), *à fibres géométriques résolubles.*

(i) $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ *est représentable par un* S-*groupe constant tordu, dont le type en* $s \in \mathrm{S}$ *est* $\mathbb{Z}^{\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_s)}$. *Le morphisme de bidualité* (Exp. VIII 1)

$$f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$$

est lisse et surjectif

(ii) *Le noyau* H^u *de* f *est le plus grand sous-préschéma en groupes invariant fermé de* H, *lisse sur* S, *à fibres géométriques connexes et unipotentes.* On dit que c'est la *partie unipotente* de H. On note aussi $\mathrm{H}^u = \mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$.

Alors H^u *est aussi le* faisceau des commutateurs *de* H *: tout morphisme de groupes de* H *dans un* S-*préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour* (fppf), *s'annule sur* H^u *et se factorise donc par* $\mathrm{H}/\mathrm{H}^u = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$.

(iii) *Si* T *est un tore maximal de* H, *le morphisme* $\mathrm{T} \to \mathrm{H}$ *induit des isomorphismes* **218** $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$. *De plus,* H *s'identifie au produit semi-direct de* H^u *par* T.

(iv) *Dans la situation de* 5.6.1, *si* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$, *alors* $\mathrm{H}^u = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

Les assertions de la proposition sont locales pour la topologie étale, (Exp. X 5.5). On peut donc se ramener au cas de 5.6.1. On sait (5.6.5) que $H_{R'}$ est le produit semi-direct de $U_{R'}$ par T. Montrons que $U_{R'}$ est le faisceau des commutateurs de $H_{R'}$: comme $H_{R'}/U_{R'} = T$ est commutatif, il suffit de prouver que tout morphisme de groupes $g : H_{R'} \to V$ comme dans (ii) s'annule sur $U_{R'}$. Il suffit de prouver que g s'annule sur chaque P_α, $\alpha \in R'$. Or si $t \in T(S')$, $X \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$, on a

$$e = g\big(t \exp_\alpha(X)\, t^{-1} \exp_\alpha(-X)\big) = g\big(\exp_\alpha((\alpha(t) - 1)X)\big).$$

Comme $\alpha : T \to \mathbb{G}_{m,S}$ est fidèlement plat, on en déduit aussitôt que h s'annule sur $P_\alpha^\times$; mais toute section de P_α est localement somme de deux sections de $P_\alpha^\times$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(H, V) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(H/U_{R'}, V)$$

pour tout V comme ci-dessus. Appliquant ce résultat à $V = \mathbb{G}_{m,S}$, on en déduit aussitôt (i) et (iii), puis (iv) et la seconde assertion de (ii). Il nous suffit maintenant de prouver la première assertion de (ii) ; le seul fait non trivial est que tout sous-groupe U fermé invariant de H, lisse sur S à fibres géométriques connexes et unipotentes est un sous-groupe de H^u. Or on a d'abord :

Lemme 5.6.10. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal,* U *un sous-préschéma en groupes de* G*, lisse sur* S*, à fibres géométriques unipotentes, normalisé par* T*. Alors* $U \cap T = e$.

219 En effet, comme $T = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$, on a $U \cap T = U^T$ (invariants sous int(T)). Appliquant Exp. XIX 1.4, on en déduit que $U \cap T$ est lisse sur S, mais il est aussi radiciel sur S : pour tout $s \in S$, $U(\overline{s}) \cap T(\overline{s})$ est formé d'éléments à la fois unipotents et semi-simples. Ceci prouve le lemme.

Si U est un sous-groupe invariant de H comme ci-dessus, le produit semi-direct $T \cdot U$ est donc un sous-groupe de type (R) de G, à fibres géométriques résolubles. On peut donc le supposer de la forme $H_{R''}$, avec $R'' \subseteq R'$. Il suffit de prouver $U = U_{R''}$ et on est donc ramené au cas où $H = T \cdot U$; mais le quotient H/U étant commutatif, U est un sous-faisceau du faisceau des commutateurs de H, qui est H^u. C.Q.F.D.

Remarquons que nous venons en fait de prouver :

Proposition 5.6.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Les applications*

$$H \mapsto H^u, \qquad U \mapsto T \cdot U$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) *de* G*, contenant* T *et à fibres géométriques* résolubles*, et l'ensemble des sous-groupes fermés* (*ou rétrocompacts*) *de* G*, lisses sur* S*, normalisés par* T*, à fibres géométriques connexes et* unipotentes.

En particulier, si (G, T, M, R) *est déployé,* $H_{R'}$ *et* $U_{R'}$ *se correspondent.*

Corollaire 5.6.12. — *Soient* S *un préschéma,* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé* (*resp. et* R_+ *un système de racines positives de* R *définissant le sous-groupe de Borel* B).

220 *Tout sous-préschéma en groupes lisse et de présentation finie de* G*, à fibres géo-*

métriques connexes et unipotentes (*resp. tout sous-préschéma en groupe lisse et de présentation finie de* B^u) *normalisé par* T *est localement sur* S *de la forme* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$, *où* R' *est une partie de* R *contenue dans un système de racines positives* (*resp. une partie de* R_+) *de type* (R).

Pour le cas « respé », il suffit de remarquer que les fibres géométriques du groupe donné sont unipotentes et connexes par *Bible*, § 13.2, th. 1 d).

La proposition 5.6.9 a d'autre part le corollaire suivant :

Corollaire 5.6.13. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R) *à fibres géométriques résolubles,* $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{H})$ *le foncteur des tores maximaux de* H :

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{H})(\mathrm{S}') = \{\textit{tores maximaux de } \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}\}.$$

Alors $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-préschéma affine et lisse, qui est un fibré principal homogène sous* H^u *pour la loi* $(h, \mathrm{T}) \mapsto \mathrm{int}(h)\mathrm{T}$.

En effet, si T et T' sont deux tores maximaux de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, il existe une unique section $h \in \mathrm{H}^u(\mathrm{S}')$ telle que $\mathrm{int}(h)\mathrm{T} = \mathrm{T}'$. L'unicité de h résulte aussitôt de l'égalité

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H}^u = e$$

(cf. par exemple 5.6.1) ; il suffit de prouver l'existence de h localement pour la topologie étale et on peut supposer T et T' conjugués par une section de H ; mais on conclut alors par $\mathrm{H} = \mathrm{H}^u \cdot \mathrm{T}$ [(19)]. Il s'ensuit que Tor(H) est un faisceau principal homogène sous H^u, qui est affine et lisse sur S, ce qui entraîne aussitôt l'énoncé.

221

5.7. Théorème de Bruhat. —

Rappel 5.7.1. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, B un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal de B, $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. Alors

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{B}(k)\,\mathrm{N}(k)\,\mathrm{B}(k);$$

c'est le théorème de Bruhat (*Bible*, § 13.x, cor. 1 au th. 3) ; plus précisément, avec les notations de 3.6, les ensembles

$$\mathrm{B}(k)\,\mathrm{Q}_w(k)\,\mathrm{B}(k) = \mathrm{B}^u(k)\,\mathrm{Q}_w(k)\,\mathrm{B}^u(k)$$

forment, lorsque w parcourt $(\mathrm{N}/\mathrm{T})(k)$ une partition de $\mathrm{G}(k)$. Si B' est une autre sous-groupe de Borel de G contenant T, les ensembles $\mathrm{B}'(k)\,\mathrm{Q}_w(k)\,\mathrm{B}(k)$ forment aussi une partition de $\mathrm{G}(k)$. En effet, si $y \in \mathrm{N}(k)$ est tel que $\mathrm{int}(y)\mathrm{B} = \mathrm{B}'$, on a

$$y\mathrm{B}(k)\,\mathrm{Q}_w(k)\,\mathrm{B}(k) = \mathrm{B}'(k)\,\mathrm{Q}_{yw}(k)\,\mathrm{B}(k).$$

Définition 5.7.2. — Soient $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé, R_- un système de racines positives de R, $\mathrm{B}' = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_-}$ le groupe de Borel qu'il définit. Pour $w \in \mathrm{W}$, on note

$$\mathrm{R}_-^w = \mathrm{R}_- \cap w(\mathrm{R}_-)$$

$$\mathrm{B}'^u_w = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_-^w} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-^w} \mathrm{P}_\alpha \qquad \text{(cf. 5.6.5).}$$

(19) N.D.E. : préciser ceci...

Si $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ est un représentant de w (3.8), on peut aussi écrire

$$\mathrm{B}'^u_w = \mathrm{B}'^u \cap \mathrm{int}(n_w)\mathrm{B}'^u.$$

222 ***Lemme 5.7.3***. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives de* R*,* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$*,* B (*resp.* B′) *le sous-groupe de Borel de* G *défini par* R_+ (*resp.* R_-)*. Soient* $w \in \mathrm{W}$*,* Q_w *et* B'^u_w *les sous-préschémas de* G *correspondants* (3.8 et 5.7.2).

(i) *Le faisceau* $\mathrm{B}' \cdot \mathrm{Q}_w \cdot \mathrm{B}$*, image du morphisme*

$$\mathrm{B}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Q}_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{G}$$

induit par le produit dans G*, est représentable par un sous-préschéma de* G (*et en fait un sous-préschéma fermé de l'ouvert* $n_w\Omega_{\mathrm{R}_+}$).

(ii) *Le morphisme*

$$\mathrm{B}'^u_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Q}_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B}^u \longrightarrow \mathrm{G},$$

induit par le produit dans G*, est une immersion d'image le sous-préschéma précédent.*

Montrons d'abord que le morphisme de (ii) est une immersion. Par définition, $\mathrm{int}(n_w)^{-1}$ induit une immersion fermée de B'^u_w dans B'^u, donc le morphisme

$$(u, b) \longmapsto n_w^{-1} u\, n_w\, b$$

induit une immersion fermée

$$\mathrm{B}'^u_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{R}_+}.$$

Cela entraîne immédiatement que le morphisme de (ii) induit une immersion fermée du premier membre dans l'ouvert $n_w\Omega_{\mathrm{R}_+}$. Pour prouver (i), il suffit de voir que

$$\mathrm{B}'(\mathrm{S})\, \mathrm{Q}_w(\mathrm{S})\, \mathrm{B}(\mathrm{S}) = \mathrm{B}'^u_w(\mathrm{S})\, \mathrm{Q}_w(\mathrm{S})\, \mathrm{B}^u(\mathrm{S}).$$

223 Or, si $\alpha \in \mathrm{R}$, on a $\mathrm{int}(n_w)\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{P}_{w(\alpha)}(\mathrm{S})$, donc si $w^{-1}(\alpha) \in \mathrm{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})\mathrm{Q}_w(\mathrm{S})\mathrm{B}(\mathrm{S}) &= \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S}) n_w \mathrm{T}(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\\ &= n_w \mathrm{P}_{w^{-1}(\alpha)}(\mathrm{S})\mathrm{T}(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\\ &= n_w \mathrm{B}(\mathrm{S}) = \mathrm{Q}_w(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S}).\end{aligned}$$

Cela entraîne aussitôt, vu la définition de R^w_-, l'assertion cherchée.

Théorème 5.7.4. — *Soient* S *un préschéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé,* B *le sous-groupe de Borel défini par le système de racines positives* R_+*,* B′ *le sous-groupe de Borel défini par* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$.

(i) (Théorème de Bruhat) *Les sous-préschémas* $\mathrm{B}'^u_w \cdot \mathrm{Q}_w \cdot \mathrm{B}$ *forment, pour* w *parcourant* W*, une partition de l'ensemble sous-jacent à* G.

(ii) *Soit pour chaque* $w \in \mathrm{W}$*, un représentant* n_w *de* w *dans* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (3.8)*; les ouverts* $n_w\Omega = n_w\mathrm{B}'^u \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{B}^u$ *forment, pour* w *parcourant* W*, un recouvrement de* G.

Les deux assertions se vérifient en effet sur les fibres géométriques, où on conclut par 5.7.1 et 5.7.3.

Remarque 5.7.5. — (i) entraîne que si S est le spectre d'un corps, G(S) est la réunion disjointe des $\mathrm{B}'^{u}_{w}(\mathrm{S}) \cdot \mathrm{T}(\mathrm{S}) \cdot \mathrm{B}^{u}(\mathrm{S})$. L'assertion correspondante pour un S quelconque (même local ou artinien) est évidemment fausse. Remarquons cependant que (ii) entraîne que si S est *local*, G(S) est bien la réunion des $n_w\Omega(\mathrm{S})$. En fait :

Corollaire 5.7.6. — *Soit* Δ *un système de racines simples du groupe déployé* G *sur le schéma* local S. *Alors* G(S) *est engendré par* T(S) *et les* $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$. **224**

Si G *est simplement connexe,* G(S) *est déjà engendré par les* $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$.

En effet, soit H le sous-groupe de G(S) engendré par les $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$. Remarquons d'abord que H contient un représentant de chaque s_α ($\alpha \in \Delta$) dans $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (Exp. XX 3.1), donc un représentant n_w de chaque $w \in \mathrm{W}$.

Comme tout $\alpha \in \mathrm{R}$ s'écrit $w(\alpha_0)$ avec $w \in \mathrm{W}$, $\alpha_0 \in \Delta$, on a

$$\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{int}(n_w)\mathrm{P}_{\alpha_0}(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{H}.$$

Le sous-groupe engendré par H et T(S) contient donc $\Omega(\mathrm{S})$ et est donc G(S) tout entier, par la remarque faite antérieurement.

Si maintenant G est simplement connexe, prouvons que $\mathrm{H} \supseteq \mathrm{T}(\mathrm{S})$. Par Exp. XX 2.7, H contient $\alpha^*(\mathbb{G}_m(\mathrm{S}))$ pour tout $\alpha \in \Delta$, et il suffit d'appliquer 4.3.8.

Remarque 5.7.6.1. — Au lieu de prendre, pour chaque $\alpha \in \Delta$, $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$ et $\mathrm{P}_{-\alpha}(\mathrm{S})$, on peut se contenter de prendre $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$ et un représentant w_α de la symétrie s_α, ou bien $\mathrm{P}_\alpha(\mathrm{S})$ et une section de $\mathrm{P}^\times_{-\alpha}$, ...

Corollaire 5.7.7. — *Si* G *est de rang semi-simple* 1, *choisissons un* $u_\alpha \in \mathrm{P}^\times_\alpha$. *Alors* Ω *et* $u_\alpha\Omega$ *forment un recouvrement de* G.

En effet, si $u_{-\alpha}$ est la section de $\mathrm{P}_{-\alpha}$ appariée à u_α, on a, par 5.7.4 (ii),

$$\mathrm{G} = \Omega \cup u^{-1}_{-\alpha} u_\alpha u^{-1}_{-\alpha}\Omega,$$

d'où

$$\mathrm{G} = u_{-\alpha}\mathrm{G} = u_{-\alpha}\Omega \cup u_\alpha u^{-1}_{-\alpha}\Omega = \Omega \cup u_\alpha\Omega.$$

Corollaire 5.7.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif. Alors* G *est* essentiellement libre *sur* S (Exp. VIII 6.1).

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc), on peut supposer G déployé. **225**
Alors G admet un recouvrement par des ouverts isomorphes à $\mathbb{G}^{\mathrm{N}}_{a,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}^{n}_{m,\mathrm{S}}$ donc essentiellement libres.

Lemme 5.7.9. — *Sous les conditions de* 5.7.4, *soit* α *une racine simple de* R_+ *et* $u_\alpha \in \mathrm{P}^\times_\alpha(\mathrm{S})$. *Pour tout* $v \in \mathrm{P}_{-\alpha}(\mathrm{S})$, *on a*

$$\Omega \cdot v \subset \Omega \cup u_\alpha \cdot \Omega$$

On a à comparer deux ouverts de G, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k. Il faut donc prouver

$$\Omega(k)v \subseteq \Omega(k) \cup u_\alpha\Omega(k).$$

Or

$$\begin{aligned}\Omega(k)v = \mathrm{B}'^u(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{B}^u(k)v &= \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{P}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{P}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k)v \\ &\subseteq \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k)v.\end{aligned}$$

(On utilise la décomposition de 5.6.8). Appliquant maintenant 5.6.8 (iii) et utilisant 5.7.7 pour le groupe Z_α, on obtient

$$\begin{aligned}\Omega(k)v &\subseteq \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)v\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k) \subseteq \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k) \\ &\subseteq \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{P}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{P}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k) \bigcup \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)u_\alpha\mathrm{P}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{P}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k).\end{aligned}$$

Utilisant de nouveau 5.6.8 (iii) (pour R_- au lieu de R_+), on obtient le résultat.

226 ***Proposition 5.7.10***. — *Sous les conditions de* 5.7.4*, choisissons pour chaque racine simple α un $u_\alpha \in \mathrm{P}_\alpha^\times(\mathrm{S})$. Soit* U_1 *le sous-monoïde de* $\mathrm{B}^u(\mathrm{S})$ *engendré par les* u_α *. Les ouverts $u\Omega$, pour $u \in \mathrm{U}_1$, forment un recouvrement de* G.

Encore une fois, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k ; en vertu de 5.7.6, il suffit de prouver que $\bigcup_{u\in\mathrm{U}_1} u\Omega(k)$ est stable par multiplication à droite par $\mathrm{T}(k)$, $\mathrm{P}_\alpha(k)$, $\mathrm{P}_{-\alpha}(k)$ (pour α simple). Dans les deux premiers cas, c'est trivial. Dans le dernier, cela résulte du lemme.

Remarque 5.7.11. — Signalons un cas particulier de 5.7.2. Si $w = s_\alpha$ est la symétrie par rapport à la racine simple α, alors

$$\mathrm{R}_- \bigcap s_\alpha(\mathrm{R}_-) = \mathrm{R}_- - \{-\alpha\}$$

(Exp. XXI 3.3.1), et, dans les notations de 5.6.8, on a donc

$$\mathrm{B}'^u_{s_\alpha} = \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}.$$

Remarque 5.7.12. — En fait, la démonstration de 5.7.10 donne aussitôt l'énoncé suivant : sous les conditions de 5.7.10, soit Γ un sous-monoïde de G(S) ; pour que les ouverts $g\Omega$ ($g \in \Gamma$) forment un recouvrement de G, il faut et il suffit que pour tout $s \in \mathrm{S}$ et toute racine simple α, on ait

$$(u_\alpha)_{\overline{s}}\mathrm{B}'^u(\overline{s}) \subseteq \Gamma \cdot \mathrm{B}'^u(\overline{s}) \cdot \mathrm{T}(\overline{s}) \cdot \mathrm{B}^u(\overline{s}).$$

Remarque 5.7.13. — Par 5.5.5 (iii), raisonnant comme dans 5.7.1, on obtient aussitôt la variante suivante de 5.7.4 : soient $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé, B et B′ deux sous-groupes de Borel de G contenant T ; pour tout $w \in \mathrm{W}$, le faisceau $\mathrm{B}' \cdot \mathrm{Q}_w \cdot \mathrm{B}$
227 est représentable par un sous-préschéma de G ; ces sous-préschémas forment, pour $w \in \mathrm{W}$, une partition de l'ensemble sous-jacent à G. On peut aussi donner l'analogue de 5.7.3 (ii) : il faut poser

$$\mathrm{B}'^u_w = \mathrm{B}'^u \bigcap \mathrm{int}(n_w)\widetilde{\mathrm{B}}^u,$$

où $\widetilde{\mathrm{B}}$ est le sous-groupe de Borel « opposé » à B relativement à T (cf. 5.9.2).

Proposition 5.7.14. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif, et*

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g})$$

sa représentation adjointe. Alors Ker(Ad) = $\underline{\mathrm{Centr}}$(G), (en d'autres termes, *l'homomorphisme canonique déduit de* Ad *par passage au quotient :*

$$\overline{\mathrm{Ad}}: \quad \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g})$$

est un monomorphisme.

On peut supposer G déployé. Choisissons sur $\Gamma_0(\mathrm{R})$ une structure d'ordre total compatible avec la structure de groupe et soit R_+ l'ensemble des racines positives. En vertu de 5.7.4 (ii) et de 4.1.6, il suffit de prouver que si n_w est un représentant de l'élément w de W, si $u \in \mathrm{U(S)}$, $t \in \mathrm{T(S)}$, $v \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S})$, et si $\mathrm{Ad}(n_w vtu) = \mathrm{id}$, alors $w = e$, $v = e$, $u = e$. Pour chaque $m \in \mathrm{R} \cup \{0\}$, posons

$$\mathfrak{g}^{>m} = \coprod_{n>m} \mathfrak{g}^n, \qquad \mathfrak{g}^{<m} = \coprod_{n<m} \mathfrak{g}^n.$$

Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^m)$; écrivons $\mathrm{Ad}(t\,u)\mathrm{X} = \mathrm{Ad}(v^{-1}n_w^{-1})\mathrm{X}$. Or

$$\mathrm{Ad}(t)\,\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X} - m(t)\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{>m}),$$

$$\mathrm{Ad}(v^{-1}n_w^{-1})\mathrm{X} - \mathrm{Ad}(n_w^{-1})\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{<w^{-1}(m)}).$$

Si $w \neq e$, il existe un $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $w^{-1}(\alpha) < \alpha$, et faisant $m = \alpha$, on en tire une contradiction car

$$\mathrm{Ad}(tu)\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{>\alpha}) \bigcap \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{w^{-1}(\alpha)} + \mathfrak{g}^{<w^{-1}(\alpha)}) = 0.$$

On a donc $w = e$, et on peut choisir $n_w = e$; on a alors 228

$$\mathrm{Ad}(v^{-1})\mathrm{X} - \mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{<m} \cap (\mathfrak{g}^m + \mathfrak{g}^{>m})) = 0,$$

d'où $\mathrm{Ad}(v)\mathrm{X} = \mathrm{X}$ pour tout m et tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^m)$, donc $\mathrm{Ad}(v) = \mathrm{id}$. De même $\mathrm{Ad}(u) = \mathrm{id}$. On conclut alors par 5.6.2 bis.

5.8. Schémas associés à un groupe réductif. —

Théorème 5.8.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif. Soit* $\mathscr{H}$ *le foncteur des sous-groupes de type* (R) *de* G *: pour tout* S′ → S, $\mathscr{H}$(S′) *est l'ensemble des sous-groupes de type* (R) *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ (*cf.* 5.2.1). *Alors* $\mathscr{H}$ *est représentable par un* S*-préschéma* quasi-projectif, de présentation finie *sur* S.

En vertu de Exp. XII 7.12, on peut supposer que G est adjoint. Considérons alors le morphisme

$$u : \mathscr{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}(\mathfrak{g})$$

qui associe à chaque sous-groupe de type (R) son algèbre de Lie (qui est un sous-module localement facteur direct de $\mathfrak{g}$ [20]). C'est un monomorphisme par 5.3.3. Il suffit de prouver qu'il est représentable par une immersion de présentation finie, autrement dit de prouver l'assertion suivante : étant donné un sous-module localement facteur direct $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, les S′ → S tels que $\mathfrak{h}_{\mathrm{S}'}$ soit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-préschéma de présentation finie de S. On peut évidemment supposer S noethérien et $\mathfrak{h}$ de rang

[20] N.D.E. : Donner une référence ici. . .

constant r. On doit d'abord écrire que $\mathfrak{h}_{S'}$ est une sous-algèbre de Lie de $G_{S'}$, i.e. que si on considère le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h} \arrow[r, "{[\ ,\ ]}"] & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h}' \arrow[u] \arrow[r, "v"] & \mathfrak{h}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

229 $v_{S'}$ est un isomorphisme. [(21)]

Comme $\mathfrak{h}$ est localement libre, cette condition s'exprime par le fait que $S' \to S$ se factorise par un certain sous-préschéma ouvert de S. On remplace donc S par ce sous-préschéma et on doit maintenant écrire (5.3.1) que si on note $H = \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})$ (qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G), $H_{S'}$ est lisse le long de la section unité. Introduisant l'image réciproque $\mathfrak{n}_{H/G}$ du faisceau conormal $\mathscr{N}_{H/G}$ par le morphisme $e_H : S \to H$, on doit exprimer (SGA 1, II 4.10) que le morphisme canonique

$$w : \mathfrak{n}_{H/G} \longrightarrow \omega^1_{G/S}$$

est universellement injectif sur S' (i.e. que $w_{S'}$ est universellement injectif) et que $\omega^1_{H/S} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$ est localement libre de rang $r = \mathrm{rang}(\mathfrak{h})$.

La première condition est encore équivalente au fait que $S' \to S$ se factorise par un certain sous-préschéma ouvert de S ; remplaçons S par ce sous-préschéma. La seconde condition s'exprime par le fait que $S' \to S$ se factorise par un sous-préschéma Z de S (TDTE IV 3.6). Remplaçant S par Z, il ne nous reste plus qu'à exprimer que, pour tout $s' \in S'$, on a

$$\mathrm{rgred}\, \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})^0)_{s'} = \mathrm{rgred}\, G_{s'},$$

ou, ce qui revient au même, que H_s est de même rang réductif que G_s en tout point s de l'image (ensembliste) de S' dans S. Or cette condition définit un sous-ensemble ouvert de S (Exp. XIX 6.2).

Remarque. — En général, le préschéma $\mathscr{H}$ n'est pas lisse sur S. Il l'est cependant si 6 est inversible sur S, ou s'il existe un nombre premier p tel que $p \cdot 1_S = 0$ (i.e. si S est de caractéristique $p > 0$).

230 ***Corollaire 5.8.2***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G. (On rappelle (5.3.10), que $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G, *lisse sur* S).

Alors le faisceau quotient $G/\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ *est représentable par un* S*-préschéma* quasi-projectif*, lisse* et de présentation finie *sur* S (*qui est en fait un ouvert de* $\mathscr{H}$).

En effet, considérons le morphisme

$$f : G \longrightarrow \mathscr{H},$$

(21) N.D.E. : Détailler ce point…

défini ensemblistement par $f(g) = \mathrm{int}(g)\mathrm{H}$. En vertu de 5.3.9, ce morphisme est lisse et de présentation finie, donc ouvert. Soit $\mathrm{U} = f(\mathrm{G})$ muni de sa structure de sous-préschéma ouvert de $\mathscr{H}$. La morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{U}$ est couvrant et de noyau $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ ce qui prouve que $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est représentable par U.

Corollaire 5.8.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif. Considérons les foncteurs* $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ *définis par*

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') = \{\text{tores maximaux de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}\},$$
$$\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') = \{\text{sous-groupes de Borel de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}\},$$
$$\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') = \{\text{couples de Killing de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \text{ (cf. 5.3.13)}\}.$$

(i) $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ *sont représentables par des* S*-préschémas lisse et de présentation finie, à fibres géométriques intègres, et respectivement* affine, projectif, affine *sur* S*.*

(ii) *Le morphisme canonique* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \to \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \to \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$) *est étale fini surjectif* (*resp. affine lisse surjectif*)*.*

(iii) *Soit* T *un tore maximal de* G (*resp.* B *un sous-groupe de Borel de* G*, resp.* $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{T}$ *un couple de Killing de* G)*. Le morphisme*

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}), \quad \text{resp. } \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$$

défini par 231

$$g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{T}, \qquad \text{resp. } g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{B}, \quad \text{resp. } g \mapsto (\mathrm{int}(g)\mathrm{B}, \mathrm{int}(g)\mathrm{T})$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G}/\mathrm{B} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}), \quad \text{resp. } \mathrm{G}/\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}).$$

On voit d'abord que (iii) résulte du théorème de conjugaison des tores maximaux (resp. sous-groupes de Borel, resp. couples de Killing) et du fait que

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}, \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},$$

tous résultats établis précédemment (5.1.2, 5.3.12, 5.3.14, 5.6.1).

Il s'ensuit d'abord que les morphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{H}, \qquad \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{H}$$

sont représentables, localement pour la topologie étale, par des immersions ouvertes (5.8.2 et 5.12 [(22)], resp. 5.5.5), donc par descente que $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ sont représentables par des ouverts de $\mathscr{H}$. De même $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ est localement (pour la topologie étale) représentable par un préschéma affine sur la base (Exp. IX 2.3), donc représentable par un S-préschéma affine, par descente des schémas affines.

Les assertions de (ii) résultent aussitôt de 5.5.5 (ii) et 5.6.13. Il s'ensuit déjà que $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ est affine sur S (EGA II 6.7.1). Il ne reste donc à prouver que le fait que 232
$\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ est projectif sur S. On sait déjà qu'il est quasi-projectif, reste à prouver qu'il est propre ; or il est à fibres connexes, donc, d'après EGA IV_3 15.7.10, on est ramené à le prouver sur les fibres géométriques ; si S est le spectre d'un corps algébriquement

[(22)] N.D.E. : réf. à corriger

clos, on a $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}/\mathrm{B}$ par (iii) et on conclut par *Bible*, § 6.4, th. 4 ou [**C05**], § 6.5, th. 5.

Remarque 5.8.4. — Sous les conditions de 5.8.3, soit Q un sous-groupe *central* et de type multiplicatif de G. Les morphismes évidents définissent des isomorphismes

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}), \qquad \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}), \qquad \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}).$$

Corollaire 5.8.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-préschéma en groupes de* G*, lisse et de présentation finie sur* S*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour chaque* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *est un* sous-groupe parabolique *de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (i.e. *le préschéma quotient* $\mathrm{G}_{\overline{s}}/\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *est propre sur* $\overline{s}$*, ou encore* $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *contient un groupe de Borel de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$*,* cf. *Bible*, § 6.4, th. 4 ou [**C05**], § 6.5, th. 5).

(ii) *Le faisceau quotient* G/P *est représentable par un* S*-préschéma lisse et projectif sur* S.

De plus, sous ces conditions, P *est fermé dans* G*, à fibres connexes et* $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$.

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Si (i) est vérifié, $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ est connexe et $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{P}_{\overline{s}}) =$
233 $\mathrm{P}(\overline{s})$, comme il résulte aussitôt de la conjugaison des groupes de Borel (pour le second point, cf. *Bible*, § 12.3, lemme 4) ; il s'ensuit que P est de type (R), et que $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$, donc est fermé dans G. Par 5.8.2, $\mathrm{G}/\mathrm{P} = \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ est représentable par un S-préschéma quasi-projectif. Ses fibres sont connexes et propres, il est donc projectif par le raisonnement de 5.8.3.

Remarque 5.8.6. — Les énoncés 5.8.1, 5.8.2, 5.8.5 sont évidemment valables pour un S-groupe de type (RA), ou pour un S-groupe de type (RR) vérifiant 5.1.8.

Remarque 5.8.7. — Par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de G, on a des opérations canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})), \\ \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})), \\ \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})), \end{aligned}$$

qui, dans la situation de 5.8.3. (iii), s'identifient aux opérations canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})), \\ \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}/\mathrm{B}), \\ \mathrm{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}/\mathrm{T}). \end{aligned}$$

On en conclut en particulier que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}))) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}))) \\ &= \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}))) \\ &= \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}). \end{aligned}$$

Il est en effet clair que $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ opère trivialement sur chacun des trois schémas. Réciproquement, le noyau de $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}))$ est « l'intersection des tores maxi- 234
maux de G » au sens de 4.1.7, donc $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ (*loc. cit.*). Pour $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$, on remarque que « l'intersection des sous-groupes de Borel de G » est aussi « l'intersection ses tores maximaux » (voir n° suivant). Pour $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$, on utilise Exp. XII 4.11.

5.9. Propriétés particulières aux sous-groupes de Borel. — La plupart de ces propriétés seront généralisées dans Exp. XXVI aux sous-groupes paraboliques.

Définition 5.9.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, B et B′ deux sous-groupes de Borel de G. On dit que B et B′ sont *en position générale* (ou que B′ est en position générale relativement à B) si $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$ est un tore (nécessairement *maximal*) de G.

Si T est un tore maximal de G contenu dans B et B′, on dit que B et B′ sont *opposés* (relativement à T) si $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}' = \mathrm{T}$.

Proposition 5.9.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G*,* T *un tore maximal de* B*. Il existe un* unique *sous-groupe de Borel* B′ *de* G*, opposé à* B *relativement à* T*.*

Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}\mathrm{R})$ *est un déploiement de* G *par rapport à* T *et si* $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ (5.5.1), *alors* $\mathrm{B}' = \mathrm{B}_{-\mathrm{R}_+}$.

Par descente fidèlement plate, il suffit de prouver la proposition dans cas déployé, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ (5.5.5 (iv)). Alors $\mathrm{B}_{-\mathrm{R}_+}$ est bien opposé à B (4.1.2) ; montrons que c'est le seul sous-groupe de Borel de G contenant T qui est opposé à B. Si B′ est un sous-groupe de Borel de G contenant T, B′ est localement sur S de la forme $\mathrm{B}_{\mathrm{R}'_+}$, où R'_+ 235
est un deuxième système de racines positives de R (5.5.5 (iii)). Si $\mathrm{R}'_+ \neq -\mathrm{R}_+$, il existe $\alpha \in \mathrm{R}'_+ \cap \mathrm{R}_+$, donc tel que $\mathrm{P}_\alpha \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{B}_{\mathrm{R}'_+}$.

Proposition 5.9.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G*.*

(i) *Si* B′ *est un sous-groupe de Borel de* G*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) B′ *est en position générale par rapport à* B (5.9.1).
(b) $\mathrm{B}'^u \cap \mathrm{B}^u = e$.
(b′) $\mathrm{B}'^u \cap \mathrm{B} = e$.
(c) *Le produit dans* G *induit une immersion ouverte* $\mathrm{B}'^u \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B} \to \mathrm{G}$.
(c′) *Le morphisme canonique* $\mathrm{B}'^u \to \mathrm{G}/\mathrm{B}$ *est une immersion ouverte.*

(ii) *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Opp}}(\mathrm{B})$ *:*

$$\mathrm{S}' \longmapsto \begin{Bmatrix} \text{sous-groupes de Borel de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \text{ en} \\ \text{position générale par rapport à } \mathrm{B}_{\mathrm{S}'} \end{Bmatrix}$$

est représentable par un sous-préschéma ouvert de $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ (5.8.3)*. Le morphisme*

$$\underline{\mathrm{Opp}}(\mathrm{B}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{B})$$

défini par $\mathrm{B}' \mapsto \mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$ *est un isomorphisme. En particulier* (5.6.13) *les automorphismes intérieurs de* B^u *munissent* $\underline{\mathrm{Opp}}(\mathrm{B})$ *d'une structure de fibré principal homogène sous* B^u.

236 Examinons d'abord (i). On a (a) $\Rightarrow$ (c), en effet, (c) est local pour la topologie étale ; par 5.5.5 (iv), on se ramène au cas où G est déployé par rapport à $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$ et B de la forme $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$; par 5.9.2, on a alors $\mathrm{B}'^u = \mathrm{U}_{-\mathrm{R}_+}$ et on est ramené à 4.1.2.

On a trivialement (c′) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′) $\Rightarrow$ (b). Il reste donc à prouver (b) $\Rightarrow$ (a). Démontrons d'abord (ii) ; la seconde assertion est une conséquence formelle de 5.9.2, la troisième en résulte aussitôt par 5.6.13 ; démontrons alors la première ; elle est locale pour la topologie étale et on peut donc supposer que B possède un tore maximal T ; soit B'_0 l'opposé à B relativement à T (5.9.2).

D'après qui précède le morphisme $\mathrm{B}^u \to \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ induit par le morphisme canonique $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{B}'_0 \to \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ (5.8.3) induit un isomorphisme $\mathrm{B}^u \to \underline{\mathrm{Opp}}(\mathrm{G})$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^u \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{G}/\mathrm{B}'_0 \arrow[d, "\wr"] \\ \underline{\mathrm{Opp}}(\mathrm{B}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}). \end{tikzcd}$$

Or le morphisme $\mathrm{B}^u \to \mathrm{G}/\mathrm{B}'_0$ est une immersion ouverte (par (i) (a) $\Rightarrow$ (c′)), ce qui achève de prouver (ii). Notons tout de suite le corollaire

Corollaire 5.9.4. — *Soient* G *un* S*-groupe réductif et* B *et* B' *deux sous-groupes de Borel de* G. *Si* $s \in \mathrm{S}$ *est tel que* $\mathrm{B}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{B}'_{\overline{s}}$ *soient en position générale, il existe un ouvert* U *de* S *contenant* s *tel que* B_{U} *et* B'_{U} *soient en position générale.*

Il ne nous reste donc qu'à prouver (b) $\Rightarrow$ (a). En vertu du corollaire précédent, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. On peut
237 supposer G déployé par rapport à un tore maximal T de B. Soit B'_0 le groupe de Borel opposé à B. Les sous-groupes de Borel de G sont conjugués, donc il existe $g \in \mathrm{G}(k)$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{B}'_0 = \mathrm{B}'$. Par le théorème de Bruhat (5.7.4), on peut écrire $g = bnb'$, avec $b \in \mathrm{B}(k)$, $b' \in \mathrm{B}'_0(k)$, $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(k)$. On a donc

$$\mathrm{B}' = \mathrm{int}(b)\,\mathrm{int}(n)\,\mathrm{B}'_0$$

et $\mathrm{B}' \cap \mathrm{B} = \mathrm{int}(b)\big(\mathrm{int}(n)\mathrm{B}'_0 \cap \mathrm{B}\big)$. Si $n \in \mathrm{T}(k)$, $\mathrm{int}(n)\mathrm{B}'^u_0 \cap \mathrm{B}^u \neq e$ (cf. preuve de 5.9.2) ; il en résulte que (b) entraîne $\mathrm{B}' \cap \mathrm{B} = \mathrm{int}(b)(\mathrm{B}'_0 \cap \mathrm{B}) = \mathrm{int}(b)\mathrm{T}$. C.Q.F.D.

Proposition 5.9.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G, B^u *sa partie unipotente. Il existe une suite de sous-groupes de* B *:*

$$\mathrm{U}_0 = \mathrm{B}^u \supseteq \mathrm{U}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{U}_n \supseteq \cdots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Chaque* U_i *est lisse, à fibres connexes,* caractéristique dans B *; les automorphismes intérieurs de* B^u *opèrent trivialement dans les* (*faisceaux*) *quotients* $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$.

(ii) *Pour chaque $i \geqslant 0$, il existe un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre $\mathscr{E}_i$ et un isomorphisme de* S*-faisceaux en groupes*

$$\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathscr{E}_i).$$

(iii) *Pour tout $s \in \mathrm{S}$, $(\mathrm{U}_n)_s = e$ pour $n \geqslant \dim(\mathrm{B}_s^u)$.*

Supposons d'abord qu'il existe un déploiement $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ de G et un système de racines positives R_+ de R tel que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$. On note Δ l'ensemble des racines simples **238** de R_+ ; pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_+$, on note $\mathrm{ord}(\alpha)$ la somme des coefficients de α sur la base Δ de $\Gamma_0(\mathrm{R})$, c'est l'ordre de α relativement à R_+. On a $\mathrm{ord}(\alpha) \leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{R}_+)$. Pour tout $i > 0$, soit $\mathrm{R}^{(i)}$ l'ensemble des racines d'ordre $> i$, c'est un ensemble clos de racines positives, on peut donc construire (5.6.5)

$$\mathrm{U}_i = \mathrm{U}_{\mathrm{R}^{(i)}}.$$

Si $\alpha \in \mathrm{R}_+$ et $\beta \in \mathrm{R}^{(i)}$, $\alpha + \beta \in \mathrm{R}^{(i+1)}$. Il s'ensuit, par 5.5.2, que chaque U_i est un sous-groupe invariant de B et que les automorphismes intérieurs de B^u opèrent trivialement dans $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$. Ce groupe s'identifie d'ailleurs à

$$\prod_{\mathrm{ord}(\alpha)=i+1} \mathrm{P}_\alpha$$

et est donc muni d'une structure vectorielle.

Si B est de la forme $\mathrm{B}_{\mathrm{R}'}$ pour un autre déploiement $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}')$ de G, montrons que les groupes U'_i construits comme ci-dessus à l'aide du nouveau déploiement coïncident avec les U_i et que les structures vectorielles sur les quotients successifs coïncident également. Par 5.6.12, il existe $b \in \mathrm{B}^u(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{T}' = \mathrm{int}(b)\mathrm{T}$; l'assertion à démontrer est locale sur S et on peut donc supposer que l'isomorphisme $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}'$ induit par $\mathrm{int}(b)$ provient par dualité d'un isomorphisme de données radicielles

$$h : (\mathrm{M}', \mathrm{M}'^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*).$$

Il est clair que les racines de R'_+ sont les $\alpha \circ \mathrm{int}(b) = h(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{R}_+$; que les racines simples de R'_+ sont les $\alpha \circ \mathrm{int}(b) = h(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, donc que $\mathrm{ord}(h(\alpha)) = \mathrm{ord}(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathrm{R}_+$. D'autre part, il est clair par transport de structure que les groupes vectoriels $\mathrm{P}'_{h(\alpha)}$ ne sont autres que les $\mathrm{int}(b)\mathrm{P}_\alpha$. On a donc $\mathrm{int}(b)\mathrm{U}_i = \mathrm{U}'_i$, or U_i étant invariant, cela donne $\mathrm{U}_i = \mathrm{U}'_i$.

De même l'isomorphisme de groupes vectoriels **239**

$$\mathrm{int}(b) : \mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}'_i/\mathrm{U}'_{i+1}$$

est l'identité, en vertu de ce qu'on a déjà démontré.

Traitons maintenant le cas général. Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ et pour chaque i un déploiement $(\mathrm{G}_i, \mathrm{T}_i, \mathrm{M}_i, \mathrm{R}_i)$ et un système de racines positives R_{i+} de R_i tel que $\mathrm{B} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_{i+}}$ (5.5.5, (iii)). Pour chaque i, on a donc une famille

$$\mathrm{B}_{\mathrm{S}_i} = \mathrm{U}_{i,0} \supseteq \mathrm{U}_{i,1} \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{U}_{i,j} \supseteq \cdots$$

et des structures vectorielles sur les $\mathrm{U}_{i,j}/\mathrm{U}_{i,j+1}$. Par descente, il suffit de prouver que pour tout couple (i, i') et tout j, on a

$$\mathrm{U}_{i,j} \underset{\mathrm{S}_i}{\times} \mathrm{S}_{ii'} = \mathrm{U}_{i',j} \underset{\mathrm{S}_{i'}}{\times} \mathrm{S}_{ii'}$$

(on note $\mathrm{S}_{ii'} = \mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{i'}$) et que les structures vectorielles sur les quotients

$$(\mathrm{U}_{i,j}/\mathrm{U}_{i,j+1}) \underset{\mathrm{S}_i}{\times} \mathrm{S}_{ii'} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{U}_{i',j}/\mathrm{U}_{i',j+1}) \underset{\mathrm{S}_i}{\times} \mathrm{S}_{ii'}$$

coïncident. Or si $\mathrm{S}_{ii'} = \varnothing$, c'est trivial ; si $\mathrm{S}_{ii'} \neq \varnothing$, alors on est dans la situation étudiée précédemment : $\mathrm{B} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{ii'}$ est défini par le système de racines positives R_{i+} (resp. $\mathrm{R}_{i'+}$) dans le déploiement $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{ii'}}, \mathrm{T}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_{ii'}, \mathrm{M}_i, \mathrm{R}_i)$ (resp. dans le déploiement $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{ii'}}, \mathrm{T}_{i'} \times_{\mathrm{S}_{i'}} \mathrm{S}_{ii'}, \mathrm{M}_{i'}, \mathrm{R}_{i'})$).

Corollaire 5.9.6. — *Si* S *est affine,* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{B}^u) = e$ *: tout fibré principal sous* B^u *possède une section.*

En effet, S se décompose en somme directe de sous-préschémas sur chacun desquels B^u est de dimension relative constante. On peut donc, par (iii), supposer qu'il existe un n tel que $\mathrm{U}_n = e$. Comme, par TDTE I, B.1.1,

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{W}(\mathscr{E}_i)) = 0,$$

on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{B}^u) = 0$.

240 ***Corollaire 5.9.7***. — *Si* S *est affine,* B *possède des tores maximaux. Si* T *est un tore maximal de* B*, on a* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{B})$.

La première assertion résulte aussitôt de 5.9.6 et 5.6.13 ; la seconde s'en déduit de manière standard.

Corollaire 5.9.8. — *Si* G *est un* S*-groupe réductif, le morphisme canonique* (cf. 5.8.3)

$$\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$$

possède des sections au-dessus de tout ouvert affine.

Corollaire 5.9.9. — *Sous les conditions de* 5.9.5*, supposons* S *affine, alors il existe un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module localement libre* $\mathscr{E}$ *tel que* B^u *soit,* comme préschéma*,* S*-isomorphe à* $\mathrm{W}(\mathscr{E})$*.*

Montrons par récurrence sur i que $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i$ est S-isomorphe à $\mathrm{W}(\mathscr{E}_0 \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{i-1})$. C'est clair pour $i = 0$; supposons $i \geqslant 1$. Alors $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i$ est un fibré principal homogène de base $\mathrm{X} = \mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1}$ sous le groupe $(\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i)_{\mathrm{X}}$. Comme $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1}$ est affine, par l'hypothèse de récurrence, et comme $\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i = \mathrm{W}(\mathscr{E}_{i-1})$, ce fibré est trivial. On a donc (au moins) un isomorphisme de S-préschémas

$$\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathscr{E}_{i-1}) = \mathrm{W}(\mathscr{E}_0 \oplus \ldots \oplus \mathscr{E}_{i-1}).$$

On conclut aussitôt par la condition (iii) de 5.9.5.

Corollaire 5.9.10. — *Soit* S *un schéma* semi-local, $\{s_i\}$ *ses points fermés,* B *un sous-groupe de Borel du* S*-groupe réductif* G. *L'application canonique*

$$\mathrm{B}^u(\mathrm{S}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{B}^u(\operatorname{Spec} \kappa(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $\mathrm{S} = \operatorname{Spec}(\mathrm{A})$, $\kappa(s_i) = \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ et si $\mathscr{E}$ est donné par le A-module E, on a

$$\mathrm{B}^u(\mathrm{S}) = \mathrm{E} \otimes \mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}^u(\operatorname{Spec} \kappa(s_i)) = \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i.$$

L'assertion résulte alors aussitôt du fait que $\mathrm{A} \to \prod_i \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ est surjectif. **241**

5.10. Sous-groupes de type (R) à fibres réductives. —

Proposition 5.10.1. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R' *une partie de* R *de type* (R) (5.4.2), $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *le sous-groupe de* G *correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est réductif* (*i.e. à fibres géométriques réductives*).

(ii) *On a* $\mathrm{R}' = -\mathrm{R}'$, *i.e.* R' *est symétrique.*

De plus, sous ces conditions, $(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}')$ *est un déploiement de* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *; pour tout système de racines positives* R_+ *de* R, $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+$ *est un système de racines positives de* R' *et*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}'_+}$$

est un groupe de Borel de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$, *dont la partie unipotente est*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'_+}.$$

On a évidemment (i) $\Rightarrow$ (ii) (il suffit de le vérifier fibre par fibre et R' est un système de racines de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ par rapport à T). Pour prouver (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque par 5.4.3, que

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{T}_\alpha) = \mathrm{Z}_\alpha$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{R}'$ et on applique le critère de Exp. XIX 1.12.

Si R_+ est un système de racines positives de R, $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}_+ \cap \mathrm{R}'$ est évidemment une partie close de R' telle que $\mathrm{R}'_+ \cup -\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}'$ et $\mathrm{R}'_+ \cap -\mathrm{R}'_+ = \varnothing$, donc un système de racines positives de R'. Les deux autres assertions résultent respectivement de 5.6.1 (vi) et 5.6.7 (i).

Corollaire 5.10.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-* **242**
préschéma en groupes réductif tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *aient même rang réductif. Alors* H *est fermé dans* G, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est lisse sur* S, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ *est représentable par un* S*-préschéma fini étale.*

Si T *est un tore maximal de* H *et* B *un groupe de Borel de* G *contenant* T, *alors* $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$ *est un groupe de Borel de* H, *dont la partie unipotente est* $(\mathrm{B} \cap \mathrm{H})^u = \mathrm{B}^u \cap \mathrm{H}$.

Les premières assertions résultent aussitôt de 5.3.10 et 5.3.18, via le fait que les groupes de Weyl de G et de H sont finis (Exp. XIX 2.5). Les autres assertions sont locales pour la topologie étale et se ramènent au cas étudié dans 5.10.1.

Proposition 5.10.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

a) *Si* Q *est un tore de* G*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives. Si* $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{Q}'$ *sont deux tores de* G*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) \supseteq \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}')$.

b) *Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives,* rad(H) (4.3.6) *est un tore de* G. *Si* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}'$ *sont deux sous-groupes de type* (R) *de* G *à fibres réductives,* $\mathrm{rad}(\mathrm{H}) \supseteq \mathrm{rad}(\mathrm{H}')$.

c) *Si* Q *est un tore de* G*, on a*

$$\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) \supseteq \mathrm{Q} \quad et \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}).$$

d) *Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives,*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H})) \supseteq \mathrm{H} \quad et \quad \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H})) = \mathrm{rad}(\mathrm{H}).$$

243 En effet, a) résulte aussitôt de Exp. XIX 2.8. Pour prouver b), il suffit de remarquer que $\mathrm{rad}(\mathrm{H}') \subseteq \mathrm{H}$, car H contient (localement pour (fpqc)) un tore maximal de G, donc de H′. La première assertion de c) (resp. d)) est triviale, la seconde s'ensuit par le raisonnement habituel.

Cette proposition conduit à la définition suivante : [23]

Définition 5.10.4. — Soient S un préschémas, G un S-groupe réductif, H un sous-groupe réductif de type (R) de G

1) On dit que H est un sous-groupe *critique* s'il est le centralisateur de son radical.

2) Soit Q un sous-tore de G. On dit que Q est C-*critique* s'il est le radical de son centralisateur.

Il résulte alors de la proposition 5.10.3 :

Corollaire 5.10.5. — (i) *Pour tout sous-tore* Q *de* G*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est critique.*

(ii) *Pour tout sous-groupe de type* (R) *à fibres réductives* H *de* G*,* rad(H) *est un tore* C*-critique de* G.

(iii) *Les applications*

$$\mathrm{Q} \mapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}), \qquad \mathrm{H} \mapsto \mathrm{rad}(\mathrm{H})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des tores C*-critiques de* G *et celui de ses sous-groupes réductifs de type* (R) *critiques.*

(iv) *Si* Q *est un tore de* G*,* $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$ *est le plus petit tore* C*-critique de* G *contenant* Q.

Si H *est un sous-groupe réductif de type* (R) *de* G*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H}))$ *est le plus petit sous-groupe réductif de type* (R) *critique de* G *contenant* H.

Remarque 5.10.5.1. — 1) Un tore T de G est un sous-groupe critique de G si et seulement si c'est un tore maximal.

2) Dans la suite, « tore critique » signifie « tore C-critique ».

[23] N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit, en introduisant la terminologie « tore C-critique », afin d'éviter des confusions dans des références ultérieures (cf. Exp. XXVI, 3.9). On a aussi détaillé l'énoncé de 5.10.5 et ajouté la remarque 5.10.5.1.

Proposition 5.10.6. — *Soient* (G, T, M, R) *un* S-*groupe déployé,* R' *une partie de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R' *est de type* (R), $H_{R'}$ *est réductif et critique.* **244**

(ii) *Il existe un système de racines simples* Δ *de* R *et une partie* Δ' *de* Δ *telle que* R' *soit l'ensemble des éléments de* R *combinaison linéaire des éléments de* Δ'.

(iii) R' *est clos, symétrique, et tout système de racines simples de* R' *est l'intersection avec* R' *d'un système de racines simples de* R.

En effet, d'après Exp. XXI 3.4.8, (ii) et (iii) sont équivalents et équivalent aussi au fait que R' soit l'intersection de R avec un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $M \otimes \mathbb{Q}$. Or cette dernière condition est entraînée par (i) : si $H_{R'} = \underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$, R' est l'ensemble des éléments de R qui s'annulent sur Q (Exp. II 5.2.3 (ii)). Enfin, cette condition entraîne (i), car $(H_{R'})$ est le tore maximal de $\bigcap_{\alpha \in R'} \mathrm{Ker}(\alpha)$, donc $\underline{\mathrm{Centr}}_G(\mathrm{rad}(H_{R'}))$ n'est autre que $H_{R''}$ où R'' est l'intersection de R avec le sous-espace vectoriel engendré par R'.

5.10.7. — Résumons certains des résultats précédents : soient (G, T, M, R) un S-groupe déployé, Δ un système de racines simples de R, R_+ le système de racines positives correspondant ; choisissons une partie Δ' de Δ, notons R' l'ensemble des éléments de R combinaison linéaire des éléments de Δ' et posons $R'_+ = R' \cap R_+$. Soient $T_{\Delta'}$ le tore maximal de $\bigcap_{\alpha \in \Delta'} \mathrm{Ker}(\alpha)$ et $Z_{\Delta'} = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_{\Delta'})$.

Alors $Z_{\Delta'}$ est un sous-groupe réductif de G, de radical $T_{\Delta'}$; $(Z_{\Delta'}, T, M, R')$ est un S-groupe déployé ; $B_{R_+} \cap Z_{\Delta'}$ est le groupe de Borel de $Z_{\Delta'}$ défini par le système de racines positives R'_+ (ou bien le système de racines simples Δ') et sa partie unipotente est $U_{R_+} \cap Z_{\Delta'} = U_{R'_+}$.

Remarque 5.10.8. — Sous les conditions de 5.10.4, soit Q un tore critique de G, **245** $L = \underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$ son centralisateur. Comme $Q = \mathrm{rad}(L)$, Q est un sous-groupe caractéristique de L ; il s'ensuit aussitôt que

$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(L) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q),$$

donc aussi

$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(L)/L = \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q) = W_G(Q).$$

Par 5.10.2, on en déduit

Proposition 5.10.9. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*groupe réductif,* Q *un tore critique de* G. *Le groupe de Weyl* $W_G(Q)$ *est* (étale) fini *sur* S.

Remarque 5.10.10. — Sous les conditions de 5.10.7, on peut expliciter

$$W_G(T_{\Delta'}) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(Z_{\Delta'})/Z_{\Delta'}.$$

C'est le groupe constant associé au quotient W_1/W_2, où W_1 est le sous-groupe de W formé des éléments qui normalisent le sous-groupe de M engendré par Δ' et W_2 le sous-groupe de W engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta'$.

5.11. Sous-groupes de type (RC). —

Définition 5.11.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Un sous-préschéma en groupes H de G est dit de type (RC) s'il est de type (R), i.e. (5.2.1)
246 vérifie les deux conditions suivantes :

(i) H est lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes ;

(ii) pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ contient un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$;

et s'il vérifie en outre la condition suivante :

(iii) pour tout $s \in \mathrm{S}$ et tout tore maximal T de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$, l'ensemble des racines de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ par rapport à T est un sous-ensemble clos de l'ensemble de toutes les racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à T.

Remarque 5.11.2. — Comme nous l'avons déjà signalé en 5.4.8, la condition (iii) est conséquence des autres lorsque 6 est inversible sur S.

Lemme 5.11.3. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé et* R′ *une partie close de* R. *Soient*

$$\mathrm{R}_1 = \{\alpha \in \mathrm{R}',\ -\alpha \in \mathrm{R}'\} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{R}_2 = \{\alpha \in \mathrm{R}',\ -\alpha \notin \mathrm{R}'\}.$$

Alors R_1 *et* R_2 *sont clos. Considérons les groupes* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1}$ *et* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$ (5.4.7 *et* 5.6.5) *qui sont lisses et à fibres connexes.*

(i) *Le groupe* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$ *est invariant dans* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$, *et* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$ *par* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1}$.

(ii) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1}$ *est réductif,* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$ *est à fibres géométriques unipotentes ; tout sous-groupe invariant lisse et de présentation finie sur* S, *à fibres géométriques connexes et unipotentes de* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est contenu dans* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$, *tout sous-groupe réductif de* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *contenant* T *est contenu dans* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1}$.

(iii) *On a* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1}) = e$.

247 On a d'abord (iii) par 5.6.7 (i). La première assertion de (i) résulte de 5.6.7 (ii). Comme $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_2} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}_1} = e$ par (iii), le produit semi-direct $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_1} \cdot \mathrm{H}_{\mathrm{R}_2}$ est un sous-groupe de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$; mais ce sont deux sous-groupes de type (R) de G, contenant T, et ils ont même algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$; ils coïncident donc par 5.3.5, ce qui achève de prouver (i).

Démontrons maintenant (ii) ; les deux premières assertions ne sont autres que 5.10.1 et 5.6.5. Soit U un sous-préschéma en groupes de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$, lisse et de présentation finie, invariant (donc normalisé par T), à fibres géométriques connexes et unipotentes ; par 5.6.12, on a, localement sur S, $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}''}$, où R″ est une partie de R′ telle que $\mathrm{R}'' \cap -\mathrm{R}'' = \varnothing$. Si $\mathrm{U} \not\subseteq \mathrm{U}_{\mathrm{R}_2}$, alors $\mathrm{R}'' \not\subseteq \mathrm{R}_2$, donc il existe $\alpha \in \mathrm{R}''$ tel que $-\alpha \in \mathrm{R}'$. Alors $\mathrm{Z}_\alpha \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ (5.4.3), donc Z_α normalise U. Mais U contient P_α et Z_α possède une section w telle que $\mathrm{int}(w)\mathrm{P}_\alpha = \mathrm{P}_{-\alpha}$; cela entraîne $-\alpha \in \mathrm{R}''$, contredisant l'hypothèse $\mathrm{R}'' \cap -\mathrm{R}'' = \varnothing$.

Enfin, si L est un sous-groupe réductif de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ contenant T, on a localement sur S, $\mathrm{L} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$, avec R‴ symétrique, donc contenu dans R_1.

Proposition 5.11.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*groupe réductif,* H *un sous-préschéma en groupes de* G *de type* (RC).

(i) H *est* fermé *dans* G, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ *est représentable par un* S*-préschéma en groupes* fini étale.

(ii) H *possède un plus grand sous-préschéma en groupes invariant lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres géométriques connexes et unipotentes ; on dit que c'est le* radical unipotent *de* H *et on le note* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$*. Le faisceau-quotient* $\mathrm{H}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-groupe réductif.*

(iii) *Si* T *est un tore maximal de* H, H *possède un sous-groupe réductif* L *contenant* **248**
T *de type* (RC) *possédant les deux propriétés suivantes :*

(a) *Tout sous-groupe réductif de* H *contenant* T *est contenu dans* L.

(b) H *est le produit semi-direct* $\mathrm{H} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$*, i.e. , le morphisme canonique* $\mathrm{L} \to \mathrm{H}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$ *est un isomorphisme.*

De plus, L *est l'unique sous-groupe réductif de* H*, contenant* T *et vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions précédentes. Enfin, on a les relations suivantes :*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}, \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) = \mathrm{W}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}),$$

en particulier $\mathrm{W}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T})$ *est* fini *sur* S.

Démonstration. Notons d'abord que (i) est local pour la topologie étale. Donc, d'après le corollaire 5.3.18, (i) est une conséquence de la dernière assertion de (iii).

Les assertions de (ii) sont locales pour la topologie étale. On peut donc supposer être dans la situation de 5.11.3, où on conclut aussitôt par (i) et (ii).

En vertu des assertions d'unicité qui y sont contenues, (iii) est également local pour la topologie étale et on peut encore se ramener à la situation de 5.11.3, où les propriétés (a) et (b) ont été vérifiées. L'unicité d'un L vérifiant (a) est triviale ; l'unicité d'un L vérifiant (b) est évidente, vu (a). La relation $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$ n'est autre que 5.11.3 (iii) ; si une section de H normalise T, alors elle normalise L, par unicité de L, donc est une section de L par ce qu'on vient de démontrer, ce qui prouve la deuxième relation ; la troisième est alors triviale.

Proposition 5.11.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* $\mathscr{H}_c$ *le foncteur* **249**
des sous-groupes de type (RC) *de* G*, qui est un sous-foncteur du foncteur* $\mathscr{H}$ *de* 5.8.1.

(i) $\mathscr{H}_c$ *est représentable par un sous-préschéma ouvert de* $\mathscr{H}$*, lisse, quasi-projectif et de présentation finie sur* S.

(ii) *Il existe un* S*-préschéma fini étale* $\mathcal{C}\ell_c$ *et un morphisme*

$$c\ell : \mathscr{H}_c \longrightarrow \mathcal{C}\ell_c,$$

lisse, quasi-projectif, de présentation finie, surjectif et à fibres géométriques connexes, ayant la propriété suivante :

Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathscr{H}_c(\mathrm{S}')$, $c\ell(\mathrm{H}) = c\ell(\mathrm{H}')$ *si et seulement si* H *et* H′ *sont conjugués dans* G *localement pour la topologie étale* (ou, ce qui revient au même d'après 5.3.11*, si pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{H}'_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{G}(\overline{s})$).

(iii) $\mathcal{C}\ell_c$ *et* $c\ell$ *sont déterminés* (*à un isomorphisme unique près*) *par les conditions précédentes.*

(iv) *Si* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *est un déploiement de* G, *soit* E *l'ensemble des classes de conjugaison modulo* W *de parties closes de* R *; alors il existe un isomorphisme* $\mathcal{C}\ell_c \xrightarrow{\sim} \mathrm{E_S}$ *tel que, pour toute partie close* R' *de* R, $c\ell(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'})$ *corresponde à l'image canonique de* R' *dans* $\mathrm{E_S}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc.const.}}(\mathrm{S}, \mathrm{E})$.

Il est d'abord clair que $\mathscr{H}_c$ est un faisceau pour la topologie étale et que (ii) entraîne que $\mathcal{C}\ell_c$ n'est autre que le faisceau-quotient de $\mathscr{H}_c$ par la relation d'équivalence définie par la conjugaison.

Cela entraîne d'abord (iii), ainsi que le fait qu'il suffit de vérifier (i) et (ii) localement pour la topologie étale. On se ramène donc à la situation de (iv) ; construisons d'abord un morphisme

$$f : \mathscr{H}_c \longrightarrow \mathrm{E_S}.$$

250 Il suffit de construire une application $\mathscr{H}_c(\mathrm{S}) \to \mathrm{E_S}(\mathrm{S})$ fonctorielle en S ; soit donc H un sous-groupe de type (RC) de G ; comme H possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et comme les tores maximaux de G sont conjugués localement pour la topologie étale, il existe une famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ et pour chaque i un $g_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ et une partie close R_i de R tels que $\mathrm{int}(g_i)(\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i) = \mathrm{H}_{\mathrm{R}_i} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$; chaque R_i définit une section η_i de $\mathrm{E}_{\mathrm{S}_i}$ i.e. un élément de $\mathrm{E_S}(\mathrm{S}_i)$; il suffit maintenant de prouver que la famille (η_i) provient d'une section $\eta = f(\mathrm{H})$ de $\mathrm{E_S}$ sur S, et que celle-ci ne dépend que de H.

Pour ce faire, on est ramené à prouver que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ sont conjugués localement pour la topologie étale si et seulement si R' et R'' sont conjugués par un élément du groupe de Weyl W, ce qui est trivial.

Pour tout $\eta \in \mathrm{E}$, il existe un $\mathrm{H}_0 \in \mathscr{H}_c(\mathrm{S})$ tel que $f(\mathrm{H}_0) = \eta$: il suffit de prendre $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ où R' est une partie close de R dont l'image dans E est η. Si $\mathrm{H} \in \mathscr{H}_0(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, H est conjugué à H_0 localement pour la topologie étale si et seulement si $f(\mathrm{H}) = \eta$ (comme on le voit aussitôt par l'argument précédent), ce qui montre que $f^{-1}(\eta)$ s'identifie au quotient $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_0)$, qui par 5.8.2 est un ouvert de $\mathscr{H}$, lisse, quasi-projectif de présentation finie sur S, à fibres connexes et non vides. Comme $\mathrm{E_S}$ est la somme des sous-préschémas ouverts images des sections correspondants aux $\eta \in \mathrm{E}$, $\mathscr{H}_c$ s'identifie à la somme des $f^{-1}(\eta)$, $\eta \in \mathrm{E}$, ce qui prouve (i) et (ii). Enfin (iv) est vérifié par construction.

Corollaire 5.11.6. — *Si* $u \in \mathcal{C}\ell_c(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $c\ell^{-1}(u)$ *est un* S'*-préschéma lisse quasi-*
251 *projectif de présentation finie à fibres connexes non vides ; c'est un ouvert de* $\mathscr{H}_c$ *et un préschéma « homogène » sous* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *(par automorphismes intérieurs). En particulier, si* $\mathrm{H} \in c\ell^{-1}(u)(\mathrm{S}')$, *le morphisme* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to (\mathscr{H}_c)_{\mathrm{S}'}$ *défini par* $g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{H}$ *identifie* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H})$ *à* $c\ell^{-1}(u)$.

Exemples 5.11.7. — En particulier, on a deux sections canoniques u_t, u_b de $\mathcal{C}\ell_c$ correspondant respectivement aux tores maximaux ($\mathrm{R}' = \varnothing$) et aux sous-groupes de Borel (R' = système de racines positives). Les S-préschémas $c\ell^{-1}(u_t)$ et $c\ell^{-1}(u_b)$ ne sont autres que les S-préschémas $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ introduits en 5.8.3. Nous verrons dans Exp. XXVI d'autres exemples.

Remarque 5.11.8. — On peut construire un S-préschéma $\mathcal{C}\ell$, de présentation finie et non ramifié et un morphisme $\mathscr{H} \to \mathcal{C}\ell$ lisse et surjectif, à fibres géométriques connexes jouissant des propriétés analogues à 5.11.5 (ii) et (iii).

6. Le groupe dérivé

6.1. Préliminaires. — Dans ce numéro, on se fixe un préschéma S, un S-groupe déployé $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$, un système de racines positives R_+ de R, et on note

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}, \qquad \mathrm{B}^- = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_-}, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{B}^u, \qquad \mathrm{U}^- = (\mathrm{B}^-)^u.$$
$$\Omega = \Omega_{\mathrm{R}_+} = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}.$$

6.1.1. — On note T' le sous-tore de T « image de la famille α^*, $\alpha \in \mathrm{R}$ » ; autrement dit T' est l'image du morphisme de groupes

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

défini par $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}} \mapsto \prod_{\alpha\in\mathrm{R}} \alpha^*(z_\alpha)$. On voit aussitôt que si Δ désigne l'ensemble des 252
racines simples de R_+, le morphisme

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}^{\Delta} \longrightarrow \mathrm{T}'$$

défini de la même manière est surjectif et de noyau fini. Si on identifie T à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, alors T' s'identifie à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}/\mathrm{N})$, où

$$\mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$$

(on note $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$ dans la dualité entre V et V^*).

Lemme 6.1.2. — *Le morphisme défini par le produit dans* T

$$\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}' \longrightarrow \mathrm{T}$$

est une isogénie.

En effet, le morphisme canonique $\mathrm{rad}(\mathrm{T}) \to \mathrm{T}/\mathrm{T}'$ provient par dualité du morphisme de groupes commutatifs

$$\mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp} \longrightarrow \mathrm{M}/\mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}),$$

que l'on voit aussitôt être injectif de conoyau fini (cf. Exp. XXI, 6.3.).

Définition 6.1.3. — On pose $\Omega' = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}$; c'est un sous-préschéma fermé de $\Omega = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$.

Lemme 6.1.4. — *Soient α une racine simple et $w_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ relevant s_α. On a*

$$\mathrm{int}(w_\alpha)\Omega' \cap \Omega \subseteq \Omega'.$$

Il nous suffit de prouver que si $g \in \Omega'(\mathrm{S})$ et si $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega'(\mathrm{S})$. Par 5.6.8, écrivons

$$g = a \exp_{-\alpha}(\mathrm{Y})\, t \exp_\alpha(\mathrm{X})\, b,$$

avec $a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S})$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$, $t \in \mathrm{T}'(\mathrm{S})$, $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})$, $b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S})$. On a alors 253

$$\mathrm{int}(w_\alpha)g = \mathrm{int}(w_\alpha)a \cdot \mathrm{int}(w_\alpha)\big(\exp(\mathrm{Y})t\exp(\mathrm{X})\big) \cdot \mathrm{int}(w_\alpha)b.$$

En vertu de 5.6.8 (iv), on a

$$\mathrm{int}(w_\alpha)a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}).$$

Il en résulte les équivalences suivantes (en posant $h = \exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X})$) :

$$\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S}) \iff \mathrm{int}(w_\alpha)h \in \Omega(\mathrm{S})$$
$$\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega'(\mathrm{S}) \iff \mathrm{int}(w_\alpha)h \in \Omega'(\mathrm{S}).$$

On est donc ramené au cas où $g = h$. Comme on a (4.1.12)

$$\mathrm{Z}_\alpha \cap \Omega = \mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha, \qquad \mathrm{Z}_\alpha \cap \Omega' = \mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{P}_\alpha,$$

on est ramené à prouver l'assertion suivante :

$$\mathrm{int}(w_\alpha)h \in (\mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{P}_\alpha)(\mathrm{S}) \Longrightarrow \mathrm{int}(w_\alpha)h \in (\mathrm{P}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{P}_\alpha)(\mathrm{S}).$$

Or cette dernière résulte aussitôt de Exp. XX 3.12, qui montre que la composante sur T de $\mathrm{int}(w_\alpha)h$ est de la forme $t \cdot \alpha^*(z) \in \mathrm{T}'(\mathrm{S})$.

Lemme 6.1.5. — *Pour tout* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$*, il existe un ouvert* V_w *de* G*, contenant la section unité, tel que*

$$\mathrm{int}(w)\Omega' \cap \mathrm{V}_w \subseteq \Omega'.$$

Choisissons pour chaque racine simple α un $n_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ relevant s_α. Pour tout point $s \in \mathrm{S}$, il existe un ouvert U de S contenant s, un $t \in \mathrm{T}(\mathrm{U})$ et sur U une relation

$$w = n_{\alpha_1} \cdots n_{\alpha_p} t, \qquad \text{avec les } \alpha_i \text{ simples.}$$

254 On peut évidemment se contenter de faire la démonstration pour $\mathrm{U} = \mathrm{S}$; elle se fait par récurrence sur p. Si $p = 0$, alors $w \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ et on prend $\mathrm{V}_w = \mathrm{G}$; supposons donc $w = n_r \cdot w'$, w' vérifiant la conclusion du lemme ; il existe donc un ouvert $\mathrm{V}_{w'}$ de G, contenant la section unité, tel que $\mathrm{int}(w')\Omega' \cap \mathrm{V}_{w'} \subseteq \Omega'$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(w)\Omega' \cap \mathrm{int}(n_r)\mathrm{V}_{w'} \cap \Omega = \mathrm{int}(n_r)\big(\mathrm{int}(w')\Omega' \cap \mathrm{V}_{w'}\big) \cap \Omega \\ = \mathrm{int}(n_r)\Omega' \cap \Omega \subseteq \Omega',\end{aligned}$$

par 6.1.4. On prend alors $\mathrm{V}_w = \mathrm{int}(n_r)\mathrm{V}_{w'} \cap \Omega$ et on a terminé.

Lemme 6.1.6. — *Il existe un ouvert* V_0 *de* G*, contenant la section unité, tel que pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, on ait*

$$\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') \cap \mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subset \Omega'(\mathrm{S}').$$

Soit en effet n_0 un élément de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ relevant la symétrie w_0 du groupe de Weyl, [24] c'est-à-dire tel que $\mathrm{int}(n_0)\mathrm{U} = \mathrm{U}^-$ (cf. Exp. XXI 3.6.14) ; alors $n_0^2 \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$. Montrons que l'ouvert $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}_{n_0}$ de 6.1.5 répond à la question. En effet

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') &= \mathrm{int}(n_0)\big(\mathrm{int}(n_0)^{-1}\mathrm{U}(\mathrm{S}')\cdot \mathrm{int}(n_0)^{-1}\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\big)\\ &= \mathrm{int}(n_0)\big(\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\cdot\mathrm{U}(\mathrm{S}')\big) \subseteq \mathrm{int}(n_0)\Omega'(\mathrm{S}').\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\cap \mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subseteq \mathrm{int}(n_0)\Omega'(\mathrm{S}')\cap\mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subseteq \Omega'(\mathrm{S}').$$

[25]

Lemme 6.1.7. — *Considérons le morphisme* **255**

$$f : \Omega = \mathrm{U}^-\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T}/\mathrm{T}'$$

composé de la seconde projection et du morphisme canonique de T *dans* T/T'*. Alors* f *est « génériquement multiplicatif » : il existe un ouvert* V *de* $\Omega\times_{\mathrm{S}}\Omega$*, contenant la section unité* (*et donc relativement schématiquement dense,* Exp. XVIII 1.3) *tel que pour tout* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ *et tout* $(x,y)\in\mathrm{V}(\mathrm{S}')$*, on ait* $xy\in\Omega(\mathrm{S}')$ *et* $f(xy)=f(x)f(y)$*.*

Soient en effet x et y deux sections de Ω sur S'. Écrivons

$$\begin{cases} x = utv\\ y = u't'v'\end{cases}\qquad \begin{cases} u,u'\in\mathrm{U}^-(\mathrm{S}'),\quad t,t'\in\mathrm{T}(\mathrm{S}'),\\ v,v'\in\mathrm{U}(\mathrm{S}').\end{cases}$$

Soit V_0 l'ouvert de 6.1.6 et V l'ouvert de $\Omega\times_{\mathrm{S}}\Omega$ défini par « $vu'\in\mathrm{V}_0(\mathrm{S}')$ » (c'est l'image réciproque de V_0 par le morphisme $\Omega\times_{\mathrm{S}}\Omega$ qui s'écrit ensemblistement $(x,y)\mapsto vu'$). Alors V répond à la question. En effet, pour $(x,y)\in\mathrm{V}(\mathrm{S}')$, on a

$$xy = (utv)(u't'v') = (ut)(vu')(t'v').$$

Mais $vu'\in\Omega'(\mathrm{S}')$, d'où

$$xy\in\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\,t\,\Omega'(\mathrm{S}')\,t'\,\mathrm{U}(\mathrm{S}')\subseteq\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\,tt'\,\mathrm{T}'(\mathrm{S}')\mathrm{U}(\mathrm{S}'),$$

ce qui montre que $xy\in\Omega(\mathrm{S}')$ et que

$$f(xy) = f(tt') = f(t)f(t') = f(x)f(y).$$

Proposition 6.1.8. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{T}/\mathrm{T}'$$

induisant sur T *la projection canonique. Le noyau* $\mathrm{Ker}\, f$ *de* f *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G lisse *sur* S *et* à fibres connexes. *Tout morphisme de groupes* **256**
de G *dans un préfaisceau en groupes commutatifs sur* S*, séparé pour* (fppf)*, s'annule sur* $\mathrm{Ker}\, f$*.*

---

[24] N.D.E. : renvoyer à la définition de w_0…

[25] N.D.E. : La page qui suit ne figure pas sur le scan de SGA3, vérifier l'original…

La première assertion résulte aussitôt de 4.1.11. On a immédiatement $\operatorname{Ker} f \cap \Omega = \Omega'$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f$ est lisse sur S. Tout morphisme g de G dans un préschéma en groupes commutatif séparé s'annule sur U et U^-, par 5.6.9 (ii). Il s'annule donc aussi sur T′ par Exp. XX 2.7, donc sur Ω'. Prenant les notations de 5.7.10, on voit que $\mathrm{U}_1 \subseteq \operatorname{Ker} f(\mathrm{S})$, ce qui montre que

$$\operatorname{Ker} f = \bigcup_{u \in \mathrm{U}_1} u\Omega',$$

donc que $\operatorname{Ker} f$ est à fibres connexes et que tout g comme ci-dessus s'annule sur $\operatorname{Ker} f$.

6.2. Groupe dérivé d'un groupe réductif. —

Théorème 6.2.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ *est représentable par un* S*-groupe constant tordu, dont le type en* $s \in \mathrm{S}$ *est* $\mathbb{Z}^{\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_s) - \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_s)}$.

(ii) *Notons* $\mathrm{corad}(\mathrm{G}) = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}))$, *qui est donc un* S*-tore. Le morphisme de bidualité*

$$f_0 : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad}(\mathrm{G})$$

(Exp. VIII 1) *est lisse et surjectif.*

(iii) *Le morphisme composé*

$$\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad}(\mathrm{G})$$

est une isogénie.

257 (iv) *Le noyau de* f_0*, noté*

$$\mathrm{dér}(\mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(f_0)$$

est un sous-préschéma en groupes fermé de G*, semi-simple sur* S*, que l'on appelle le groupe* dérivé *de* G*. Si* G *est semi-simple,* $\mathrm{dér}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$.

(v) *Tout morphisme de groupes de* G *dans un* S*-préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour* (fppf)*, s'annule sur* dér(G) *et se factorise donc par* f_0.

Démonstration. Toutes les assertions du théorème sont locales pour la topologie étale ; on peut donc se ramener au cas où G est déployé sur S. Considérons alors le morphisme f de 6.1.8. Par la dernière assertion de 6.1.8, on a aussitôt un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}/\mathrm{T}', \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}),$$

ce qui démontre (i), puis (ii) et donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{corad}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathrm{T}/\mathrm{T}'. \end{tikzcd}$$

On a alors (v) par 6.1.8, (iii) par 6.1.2. On a aussi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_0)$, ce qui par 6.1.8 entraîne que dér(G) est lisse sur S et à fibres connexes ; il reste à vérifier que ses fibres sont semi-simples ; or elles sont réductives par Exp. XIX 1.7, comme sous-groupes invariants de groupes réductifs. Par (iii), $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{dér}(G)$ est fini, ce qui entraîne bien que les fibres de $\mathrm{dér}(G)$ sont semi-simples.

Remarque 6.2.2. — a) Par construction, dans le cas où G est déployé, $\mathrm{dér}(G)$ est le sous-faisceau (fppf) de G engendré par les P_α, $\alpha \in R$. (Il suffit même de prendre les P_α, $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$, où Δ est une base de R). 258

b) Par (v), $\mathrm{dér}(G)$ est bien le faisceau (fppf) des commutateurs de G (et même le préfaisceau séparé (fppf)...). [26]

c) Lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, $\mathrm{dér}(G)(k)$ est le groupe des commutateurs de $G(k)$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$).

6.2.3. — Considérons maintenant les deux suites exactes

$$e \longrightarrow \mathrm{rad}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{ss}(G) \longrightarrow e,$$
$$e \longrightarrow \mathrm{dér}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \longrightarrow e.$$

Comme $\mathrm{rad}(G)$ est central dans G, le produit dans G définit un morphisme de groupes

$$u : \mathrm{rad}(G) \underset{S}{\times} \mathrm{dér}(G) \longrightarrow G$$

qui est couvrant en vertu de 6.2.1 (iii), donc surjectif, donc plat (Exp. VI [27]). Son noyau est isomorphe à $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{dér}(G)$, qui est aussi le noyau de $\mathrm{rad}(G) \to \mathrm{corad}(G)$, donc est un sous-groupe fini de type multiplicatif de $\mathrm{rad}(G)$.

On raisonne de même pour le morphisme

$$G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \underset{S}{\times} \mathrm{ss}(G),$$

dont le noyau est $\mathrm{dér}(G) \cap \mathrm{rad}(G)$. On a donc la

Proposition 6.2.4. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. Les morphismes*

$$\mathrm{rad}(G) \underset{S}{\times} \mathrm{dér}(G) \longrightarrow G, \qquad G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \underset{S}{\times} \mathrm{ss}(G), \qquad \mathrm{rad}(G) \longrightarrow \mathrm{corad}(G)$$

sont des isogénies centrales, leurs noyaux sont isomorphes. 259

Corollaire 6.2.5. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est le produit d'un groupe semi-simple et d'un tore.*

(ii) $\mathrm{rad}(G) \times_S \mathrm{dér}(G) \xrightarrow{\sim} G$.

(iii) $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad}(G) \times_S \mathrm{ss}(G)$.

(iv) $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{dér}(G) = e$.

[26] N.D.E. : Faire référence à $\mathrm{VI_B}$?
[27] N.D.E. : à préciser...

6.2.6. — Revenons provisoirement au cas d'un groupe déployé. Gardons les notations de 6.1. Posons $\mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$. On a donc $\mathrm{T}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}/\mathrm{N})$. On a vu que $\mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}$ était un voisinage ouvert de la section unité de dér(G). On a donc

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})/\mathrm{S}) = \mathfrak{t}' \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Comme les caractères induits sur T' par les $\alpha \in \mathrm{R}$ sont non nuls et distincts (cf. Exp. XXI 1.2.5 – on a d'ailleurs déjà utilisé ce fait en 6.1.2), R est un système de racines de G par rapport à T. Il est alors immédiat (car $\mathrm{P}_{\alpha} \subseteq \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$) que les morphismes exp de dér(G) « sont » ceux de G et de même pour les coracines.

Il en résulte :

Proposition 6.2.7. — *Dans les notations précédentes,* $(\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}), \mathrm{T}', \mathrm{M}/\mathrm{N}, \mathrm{R})$ *est un groupe déployé de donnée radicielle* $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathscr{R}(\mathrm{G}))$*. Le morphisme canonique* $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) \to \mathrm{G}$ *donne par fonctorialité le morphisme canonique de données radicielles* $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \to \mathrm{d\acute{e}r}(\mathscr{R}(\mathrm{G}))$ *de* Exp. XXI 6.5.

N. B. Le lecteur pourra à titre d'exercice construire le diagramme de groupes dé-
260 ployés correspondant aux trois colonnes de gauche du diagramme de données radicielles de Exp. XXI 6.5.7.

Proposition 6.2.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* dér(G) *son groupe dérivé.*

(i) *Pour tout tore maximal* T *de* G*,* $\mathrm{T} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$ *est un tore maximal de* dér(G)*. Pour tout tore maximal* T' *de* dér(G)*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}') = \mathrm{rad}(\mathrm{G})\,\mathrm{T}'$ *est un tore maximal de* G*. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre tores maximaux de* G *et de* dér(G)*.*

(ii) *Pour tout sous-groupe de Borel* B *de* G*,* $\mathrm{B} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$ *est un sous-groupe de Borel* B' *de* dér(G)*. On a* $\mathrm{B}'^{u} = \mathrm{B}^{u}$*. Pour tout sous-groupe de Borel* B' *de* dér(G)*,* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}') = \mathrm{rad}(\mathrm{G})\,\mathrm{B}'$ *est un sous-groupe de Borel de* G*. Les applications précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre sous-groupes de Borel de* G *et de* dér(G)*.*

Par le théorème de conjugaison locale des tores maximaux et la construction du groupe dérivé, la seule assertion qui reste à prouver dans (i) est la suivante : si T est un tore maximal de G, alors

$$\mathrm{T} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})) \cdot \mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})).$$

La première égalité est triviale (car on se ramène au cas déployé) ; la seconde en résulte aussitôt, car rad(G) est central dans G, donc $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}))$. On raisonne de même pour (ii).

261
6.3. Sous-groupes à quotients commutatifs. —

6.3.1. — Soit G un S-groupe réductif. Si H est un sous-faisceau en groupes de G, les conditions suivantes sont équivalentes :

– H contient $\mathrm{dér}(G)$.

– H est distingué et G/H est commutatif.

Dans ce cas, le morphisme canonique $f_0 : G \to \mathrm{corad}(G)$ envoie H sur un sous-faisceau $f_0(H)$ de $\mathrm{corad}(G)$; on a

$$\begin{aligned} G/H &\simeq \mathrm{corad}(G)/f_0(H), & H/\mathrm{dér}(H) &\simeq f_0(H),\\ \mathrm{dér}(G) &= \mathrm{dér}(H), & H &= f_0^{-1}(f_0(H)). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{dér}(G)$ est lisse sur S et à fibres connexes, $H \mapsto f_0(H)$ établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes fermés (resp. rétrocompacts) de G, contenant $\mathrm{dér}(G)$, lisses sur S et à fibres connexes et sous-préschémas en groupes fermés (resp. rétrocompacts) de $\mathrm{corad}(G)$, lisses sur S et à fibres connexes. Or $\mathrm{corad}(G)$ est un tore, donc tout sous-préschéma en groupes lisse, à fibres connexes et rétrocompact de $\mathrm{corad}(G)$ en est un sous-tore (Exp. X 8.2), donc est fermé dans $\mathrm{corad}(G)$.

6.3.2. — Si H est un sous-préschéma en groupes fermé de G, lisse sur S, à fibres connexes et distingué dans G, alors H est réductif. Si de plus $H \supseteq \mathrm{dér}(G)$, alors $\mathrm{dér}(H) = \mathrm{dér}(G)$ et $f_0(H)$ s'identifie à $\mathrm{corad}(H)$. On a donc démontré la

Proposition 6.3.3. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. Tout sous-préschéma en groupes* H *de* G*, distingué dans* G*, à quotient commutatif* (*i.e. contenant* $\mathrm{dér}(G)$)*, lisse sur* S*, à* 262
fibres connexes et rétrocompact dans G *est fermé et réductif. On a* $\mathrm{dér}(H) = \mathrm{dér}(G)$, $f_0(H)$ *s'identifie à* $\mathrm{corad}(H)$ *; on a*

$$G/H \simeq \mathrm{corad}(G)/\mathrm{corad}(H), \qquad H = (H \cap \mathrm{rad}(G)) \cdot \mathrm{dér}(G).$$

De plus, $H \mapsto f_0(H)$ *définit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes* H *de* G *possédant les propriétés précédentes et l'ensemble des sous-tores de* $\mathrm{corad}(H)$.

Par une nouvelle application du théorème d'isomorphisme de Noether, on en déduit la

Proposition 6.3.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Pour tout sous-groupe* H *de* G *comme ci-dessus,* $T \cap H$ *est un tore maximal de* G *et on a*

$$G/H \simeq T/T \cap H, \qquad H = (T \cap H) \cdot \mathrm{dér}(G).$$

De plus, $H \mapsto T \cap H$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes* H *de* G *comme ci-dessus et l'ensemble des sous-tores de* T *contenant* $T \cap \mathrm{dér}(G)$.