EXPOSÉ V

CONSTRUCTION DE PRÉSCHÉMAS QUOTIENTS

par P. Gabriel

L'objet de cet exposé est de démontrer les théorèmes énoncés dans TDTE III [1]. Si **251**
X et T sont deux objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ nous écrivons X(T) au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$. De même, si $\varphi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ (resp. T) est une flèche (resp. un objet) de $\mathscr{C}$, $\varphi(\mathrm{T})$ désigne l'application $g \mapsto \varphi \circ g$ de Y(T) dans X(T) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi\circ g"] & \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{T}(\varphi)$ désigne l'application $g \mapsto g \circ \varphi$ de T(X) vers T(Y) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "g\circ\varphi"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "g"] \\ & \mathrm{T}. \end{tikzcd}$$

Enfin, si P est un préschéma, on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'ensemble sous-jacent à P.

Exceptionnellement, nous ne suivons pas dans le présent exposé la convention énoncée dans IV 4.6.15 sur la notation des quotients (*loc. cit.* haut de la page 227 de l'original) car nous désirons donner ici une construction de quotients qui s'applique également à des « pré-relations d'équivalence » [2] qui ne sont pas des relations d'équivalence.

[0] version 1.0 du 18/1/09 : Th. 7.1 à reprendre...

[1] N.D.E. : à savoir, les théorèmes 5.1, 5.3, 6.1, 6.2 et 7.2 de TDTE III. Les deux premiers (resp. les deux suivants) correspondent au théorème 4.1 (resp. aux théorèmes 7.1 et 8.1) de cet exposé. Le théorème 7.2 de TDTE III est démontré dans l'Exp. $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 3.3.

[2] N.D.E. : c.-à-d., à des *groupoïdes* de base X, cf. la terminologie à la fin de la section 1. Lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des préschémas, le quotient $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ d'un groupoïde X_* de base X existe sous certaines hypothèses (cf. 4.1, 6.1, 7.1) ; si, de plus, X_* est une relation d'équivalence, p est, sous les mêmes hypothèses, fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme universel, cf. *loc. cit.*

1. $\mathscr{C}$-groupoïdes

a) $\mathscr{C}$ est une catégorie où les produits et produits fibrés existent. Rappelons d'abord qu'un diagramme

$$\mathrm{X}_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0 \xrightarrow{p} \mathrm{Y}$$

de $\mathscr{C}$ est dit *exact* si $pd_0 = pd_1$ et si, pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$, $\mathrm{T}(p)$ est une bijection de $\mathrm{T}(\mathrm{Y})$ sur la partie de $\mathrm{T}(\mathrm{X}_0)$ formée des flèches $f : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{T}$ telles que $fd_0 = fd_1$. On dit aussi que (Y, p) est le *conoyau* de (d_0, d_1) et on écrit

$$(\mathrm{Y}, p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1).$$

252 **b)** Soit $\mathscr{C}$ la catégorie(**Esp. An**) des espaces annelés. Dans ce cas, il existe toujours un conoyau (Y, p), dont on peut donner la description suivante : l'espace topologique sous-jacent à Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points $d_0(x)$ et $d_1(x)$ et en munissant Y de la topologie quotient. L'application canonique $\pi : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ et d_0, d_1 induisent alors une double-flèche de faisceaux d'anneaux sur Y :

$$\pi_*(\mathscr{O}_0) \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \pi_*(d_{0*}\mathscr{O}_1) = \pi_*(d_{1*}\mathscr{O}_1),$$

où $\mathscr{O}_i$ est le faisceau structural de X_i. On choisit pour faisceau d'anneaux sur Y le sous-faisceau de $\pi_*(\mathscr{O}_0)$ dont les sections s sont telles que $\delta_0(s) = \delta_1(s)$. La flèche p est définie de façon évidente.

(3) Soit $\mathrm{X}_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0$ un diagramme dans (**Esp. An**) et soit (Y, p) son conoyau. On dit qu'un ouvert U de X_0 est *saturé* si $\mathrm{U} \supseteq d_0 d_1^{-1}(\mathrm{U})$, ou, ce qui revient au même, si $\mathrm{U} = p^{-1}(p(\mathrm{U}))$. Dans ce cas, comme Y est muni de la topologie quotient, $p(\mathrm{U})$ est un ouvert de Y.

Lemme 1.1. — *Soient* U *un ouvert saturé de* X *et* $\mathrm{V} = p(\mathrm{U})$. *Si l'on désigne par* U_1 *l'ouvert* $d_0^{-1}(\mathrm{U}) = d_1^{-1}(\mathrm{U})$ *de* X_1, *et par* $\widetilde{d}_0$, $\widetilde{d}_1$, *et* $\widetilde{p}$ *les restrictions de* d_0, d_1 *à* U_1, *et de* p *à* U, *alors* $(\mathrm{V}, \widetilde{p})$ *est un conoyau dans* (**Esp. An**) *de :* (4)

$$\mathrm{U}_1 \overset{\widetilde{d}_1}{\underset{\widetilde{d}_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{U} \xrightarrow{\widetilde{p}} \mathrm{V}.$$

La vérification est facile.

(3) N.D.E. : On a explicité les lemmes qui suivent ; ils sont utilisés à plusieurs reprises dans les sections 5 à 9.

(4) N.D.E. : Ceci n'est pas le cas dans (**Sch**). Soient, par exemple, $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, $d_1 : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{A}^2_{\mathrm{S}} \to \mathbb{A}^2_{\mathrm{S}}$ l'action de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ par homothéties sur $\mathbb{A}^2_{\mathrm{S}}$, et d_0 la projection sur le second facteur. Alors le conoyau de (d_0, d_1) dans (**Sch**) est S, tandis que si l'on se restreint à l'ouvert saturé U égal à $\mathbb{A}^2_{\mathrm{S}}$ privé du point $(0, 0)$, le conoyau dans (**Sch**) et dans (**Esp. An**) est l'espace projectif $\mathbb{P}^1_{\mathrm{S}}$.

Lemme 1.2. — *Soit* $\mathrm{X}_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0$ *un diagramme dans* (**Sch**) *et soit* (Y, p) *son conoyau dans* (**Esp. An**).

(i) *Si* Y *est un préschéma et* p *un morphisme de préschémas, alors* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* (**Sch**).

(ii) *Supposons que tout point de* X_0 *possède un voisinage ouvert* saturé U *tel que, notant* $\widetilde{d_0}$ *et* $\widetilde{d_1}$ *les restrictions de* d_0 *et* d_1 *à* $d_0^{-1}(\mathrm{U}) = d_1^{-1}(\mathrm{U})$, *et* (Q, q) *le conoyau de* $(\widetilde{d_0}, \widetilde{d_1})$ *dans* (**Esp. An**), Q *soit un préschéma et* q *un morphisme de préschémas. Alors* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* (**Sch**).

(i) est démontré au § 4.c ; la démonstration étant courte, répétons-la ici. Soit $f : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Z}$ un morphisme de préschémas tel que $fd_0 = fd_1$. Par hypothèse, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ et un seul tel que $f = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in \mathrm{Y}$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{r(y)} \to \mathscr{O}_y$ induit par r est local. Cela résulte de ce que p est surjectif, donc y de la forme $p(x)$, et de ce que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{f(x)} \to \mathscr{O}_x$ induit par f est local.

(ii) résulte de (i) et du lemme précédent.

c) Dans cet exposé, nous étudions l'existence de $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$ lorsque la double flèche (d_0, d_1) se trouve insérée dans un contexte plus riche ; de façon précise, désignons par $\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_1 \times_{d_1, d_0} \mathrm{X}_1$ le produit fibré du diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1"'] \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

par d'_0 et d'_2 les deux projections canoniques de X_2 sur X_1 ; on a donc par définition un *carré cartésien*

$$(0) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "d'_2"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1"'] \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} \quad .$$

De plus, donnons nous une troisième flèche $d'_1 : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_1$; nous disons que **253**
$(d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}_0, d'_1)$ est un $\mathscr{C}$*-groupoïde* si pour tout objet T de $\mathscr{C}$, $\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ est l'ensemble des flèches d'un groupoïde $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$ dont l'ensemble des objets est $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$, l'application source $d_1(\mathrm{T})$, l'application but $d_0(\mathrm{T})$ et dont l'application composition est $d'_1(\mathrm{T})$ (on identifie comme d'habitude $(\mathrm{X}_1 \times_{d_1, d_0} \mathrm{X}_1)(\mathrm{T})$ à $\mathrm{X}_1(\mathrm{T}) \times_{d_1(\mathrm{T}), d_0(\mathrm{T})} \mathrm{X}_1(\mathrm{T})$;

on rappelle aussi qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles). [5]

Si φ est une flèche du groupoïde $X_*(T)$, l'application $f \mapsto \varphi \circ f$ est une bijection de l'ensemble des flèches f dont le but coïncide avec la source de φ sur l'ensemble des flèches ayant même but que φ. On voit facilement qu'on peut traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ {\scriptstyle d'_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d_0} \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \end{array}$$

est cartésien.

De même, l'application $g \mapsto g \circ \varphi$ est une bijection de l'ensemble des flèches g de $X_*(T)$ qui ont pour source le but de φ sur l'ensemble des flèches qui ont même source que φ. On peut encore traduire ce fait en disant que *le carré*

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \\ {\scriptstyle d'_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d_1} \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \end{array}$$

est cartésien.

254 D'autre part soit $s : X_0 \to X_1$ l'unique flèche de $\mathscr{C}$ telle que, pour tout T, $s(T) : X_0(T) \to X_1(T)$ associe à tout objet de $X_*(T)$ la flèche identique de cet objet [6]. La flèche s satisfait aux égalités

$$(3) \qquad d_1 s = \mathrm{id}_{X_0},$$

$$\text{et} \qquad (3\,\text{bis}) \qquad d_0 s = \mathrm{id}_{X_0}.$$

Enfin, l'associativité des applications de composition $d'_1(T)$ se traduit par la commutativité du diagramme

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1 \times X_1} & X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \\ {\scriptstyle X_1 \times d'_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d'_1} \\ X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 & \xrightarrow{d'_1} & X_1 \end{array} \quad .$$

(5) N.D.E. : Donc, dans ce cas, $X_2(T)$ est l'ensemble de couples (f_2, f_1) de flèches composables, c.-à-d., telles que $d_0(f_1) = d_1(f_2)$, et d'_0, d'_1 et d'_2 envoient (f_2, f_1) sur $f_2, f_2 \circ f_1, f_1$ respectivement.

(6) N.D.E. : $T \mapsto s(T)$ définit un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{X_0}, \mathbf{h}_{X_1})$, et ce dernier égale $\mathrm{Hom}(X_0, X_1)$, d'après le lemme de Yoneda.

Réciproquement, les conditions (1), (2) et (4) et l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) impliquent que $(\mathrm{X}_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0, d_1')$ est un $\mathscr{C}$-groupoïde. La condition (3) est bénigne ; elle assure simplement que l'application $d_1(\mathrm{T}) : \mathrm{X}_1(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ est surjective pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$. Dans la suite de cet exposé, nous nous servons surtout des carrés cartésiens (0), (1) et (2) que nous résumons dans le diagramme

$$\text{(0,1,2)} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left, "d_1'"] \arrow[r, shift right, "d_0'"'] \arrow[d, "d_2'"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathrm{X}_0 \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 & \end{tikzcd} .$$

Dans ce diagramme les deux carrés de gauche (i.e. les carrés (0) et (2)) sont carté- **255**
siens ; la première ligne est exacte et X_2 s'identifie au produit fibré $\mathrm{X}_1 \times_{d_0, d_0} \mathrm{X}_1$.

Nous n'utilisons l'associativité que de façon détournée, par exemple pour assurer l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) et (3 bis), ou bien pour assurer l'existence d'une flèche

$$(\dagger) \qquad \sigma : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_1 \quad \text{telle que} \quad d_0\sigma = d_1 \text{ et } d_1\sigma = d_0$$

(on choisit σ de telle manière que $\sigma(\mathrm{T}) : \mathrm{X}_1(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ envoie toute flèche de $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$ sur la flèche inverse) [(7)].

Par abus de langage il nous arrivera d'appeler $\mathscr{C}$-groupoïde un diagramme

$$\mathrm{X}_2 \overset{d_0', d_1', d_2'}{\Rrightarrow} \mathrm{X}_1 \overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows} \mathrm{X}_0$$

tel que (0), (1) et (2) soient cartésiens, que (4) soit commutatif et qu'il existe s satisfaisant à (3). L'objet X_2 pourra donc être « un » produit fibré de $(*)$ sans être « le » produit fibré de $(*)$ [(8)].

Terminologie. Au lieu du $\mathscr{C}$-groupoïde X_*, nous parlerons aussi du *groupoïde* X_* *de base* X_0, ou de *la prérelation d'équivalence* X_* *dans* X_0.

2. Exemples de $\mathscr{C}$-groupoïdes

a) Soient X un objet de $\mathscr{C}$ et G un $\mathscr{C}$-groupe opérant à gauche sur X. Nous désignons par $d_0 : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la flèche définissant l'opération de G sur X, par $d_1 : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la projection du produit sur le deuxième facteur, par $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$

[(7)]N.D.E. : Il résulte du lemme de Yoneda que σ est un automorphisme involutif de X_1 ; ceci sera utilisé, par exemple, dans 3.e) et dans le théorème 4.1.

[(8)]N.D.E. : voir l'exemple 2.a) qui suit.

la flèche définissant la structure de $\mathscr{C}$-groupe de G, enfin par $\mathrm{pr}_{2,3}$ la projection de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{X} = \mathrm{G}\times(\mathrm{G}\times\mathrm{X})$ sur le deuxième facteur. Alors

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{X} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"] \arrow[r, "\mu\times\mathrm{X}" description] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{G}\times d_0"'] & \mathrm{G}\times\mathrm{X} \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

256 est un $\mathscr{C}$-groupoïde.

b) Soit $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0$ un *couple d'équivalence*, c.-à-d., si $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0\times\mathrm{X}_0$ est la flèche de composantes d_0 et d_1, nous supposons que $(d_0 \boxtimes d_1)(\mathrm{T})$ est, pour tout objet T de $\mathscr{C}$, une bijection de $\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ sur le graphe d'une relation d'équivalence de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$. L'ensemble $\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ s'identifie par conséquent à l'ensemble des couples (x, y) formés d'éléments de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ tels que $x \sim y$; de même, l'ensemble $\mathrm{X}_2(\mathrm{T}) = (\mathrm{X}_1 \times_{d_1,d_0} \mathrm{X}_1)(\mathrm{T})$ s'identifie à l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Il y a donc une et une seule flèche $d_1' : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_1$ rendant commutatifs les carrés (1) et (2) : $d_1'(\mathrm{T})$ doit envoyer $(x, y, z) \in \mathrm{X}_2(\mathrm{T})$ sur $(x, z) \in \mathrm{X}_1(\mathrm{T})$. Pour ce choix de d_1', $(d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}_0, d_1')$ est un $\mathscr{C}$-groupoïde.

Réciproquement, considérons un $\mathscr{C}$-groupoïde X_* tel que $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0\times\mathrm{X}_0$ soit un *monomorphisme*. Alors (d_0, d_1) est un couple d'équivalence et X_* peut être reconstruit à partir de (d_0, d_1) comme cela est expliqué quelques lignes plus haut. [(9)]

c) Si $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une flèche quelconque de $\mathscr{C}$ et si pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $\mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X}$ sur X, alors $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) : \mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$ est un couple d'équivalence. On dit que p est un *épimorphisme effectif* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X} \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

est exact, c'est-à-dire si $(\mathrm{Y}, p) = \mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$.

Soit par exemple S un préschéma noethérien et soit $\mathscr{C}$ la catégorie des préschémas finis au-dessus de S. Montrons qu'un épimorphisme de $\mathscr{C}$ n'est pas forcément effectif :
257 on choisit S égal à $\mathrm{Spec}\, k[\mathrm{T}^3, \mathrm{T}^5]$, où k est un corps commutatif, Y égal à S et X égal à $\mathrm{Spec}\, k[\mathrm{T}]$. Si i est l'inclusion de $\mathrm{B} = k[\mathrm{T}^3, \mathrm{T}^5]$ dans $\mathrm{A} = k[\mathrm{T}]$, p est choisi égal à $\mathrm{Spec}\, i$. Dans ce cas $\mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X}$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A})$ et $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ à $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}'$, où B' est le sous-anneau de A formé des a tels que $a\otimes_{\mathrm{B}} 1 = 1\otimes_{\mathrm{B}} a$. Or

$$\mathrm{T}^7\otimes_{\mathrm{B}} 1 = (\mathrm{T}^2\mathrm{T}^5)\otimes_{\mathrm{B}} 1 = \mathrm{T}^2\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^5 = \mathrm{T}^2\otimes_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}^3\mathrm{T}^2) = \mathrm{T}^5\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^2 = 1\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^7.$$

Donc T^7 appartient à B', n'appartient pas à B et $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}'$ est distinct de $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}$, d'où le contre-exemple. [(10)]

(9) N.D.E. : En particulier, si G est un $\mathscr{C}$-groupe opérant à gauche sur un objet X de $\mathscr{C}$ et si X_* est le $\mathscr{C}$-groupoïde défini en a), alors (d_0, d_1) est un couple d'équivalence si et seulement si G opère *librement* sur X, cf. Exp. III, 3.2.1.

(10) N.D.E. : Le même argument s'applique pour $\mathrm{B} = k[\mathrm{T}^3, \mathrm{T}^4]$ et $\mathrm{T}^5\otimes_{\mathrm{B}} 1$; plus généralement, pour $\mathrm{B} = k[\mathrm{T}^n, \mathrm{T}^{n+r}]$ et l'élément $\mathrm{T}^{n+2r}\otimes_{\mathrm{B}} 1$, pourvu que n ne divise pas $2r$.

3. Quelques sorites sur les $\mathscr{C}$-groupoïdes

Voici pêle-mêle quelques remarques utilisées dans la suite :

a) Soient

$$X_2 \overset{d'_0,d'_1,d'_2}{\rightrightarrows} X_1 \overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows} X_0$$

un $\mathscr{C}$-groupoïde et $f_0 : Y_0 \to X_0$ une flèche de $\mathscr{C}$. Nous allons définir un $\mathscr{C}$-groupoïde de base Y_0

$$Y_2 \overset{e'_0,e'_1,e'_2}{\rightrightarrows} Y_1 \overset{e_0,e_1}{\rightrightarrows} Y_0$$

qu'on dira *induit par* X_* *et* f_0. On dira aussi que Y_* est *l'image réciproque de* X_* *par le changement de base* f_0.

Nous choisissons pour Y_1 le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[d, "d_0 \boxtimes d_1"] \\ Y_0 \times Y_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

pour e_0 et e_1 les flèches composées de la flèche canonique $Y_1 \to Y_0 \times Y_0$ et des première et deuxième projections de $Y_0 \times Y_0$. Le morphisme $Y_1 \to Y_0 \times Y_0$ est alors $e_0 \boxtimes e_1$, et l'on a $f_0 \circ e_i = d_i \circ f_1$ pour $i = 0, 1$, où l'on a noté f_1 la projection de Y_1 sur X_1. 258

On pose $Y_2 = Y_1 \times_{e_0,e_1} Y_1$, cf. 1.c). On peut dire que le couple (e_0, e_1) est défini de telle façon que, pour tout $T \in \mathscr{C}$, et pour tout couple (y, x) d'éléments de $Y_0(T)$, il y ait une certaine correspondance biunivoque $\psi \mapsto {}_y\psi_x$ entre les flèches ψ de $X_*(T)$ de source $f_0(x)$, de but $f_0(y)$ et les flèches ${}_y\psi_x$ de $Y_*(T)$ de source x et de but y. On détermine donc $e'_1 : Y_2 \to Y_1$ en définissant pour tout $T \in \mathscr{C}$ la composition des flèches de $Y_*(T)$ à l'aide de la formule

$${}_z\psi_y \circ {}_y\varphi_x = {}_z(\psi \circ \varphi)_x.$$

Il est clair que cette définition fait de chaque $Y_*(T)$ un groupoïde.

b) Connaissant le $\mathscr{C}$-groupoïde X_* et le changement de base $f_0 : Y_0 \to X_0$, on peut reconstruire le couple $(e_0, e_1) : Y_1 \rightrightarrows Y_0$ d'une autre manière : [11] construisons $Y_0 \times_{X_0} X_1$, pr_1 et pr_2 de telle façon que le carré

$$\begin{tikzcd} Y_0 \times_{X_0} X_1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X_1 \arrow[d, "d_0"] \\ Y_0 \arrow[r, "f_0"] & X_0 \end{tikzcd}$$

[11] N.D.E. : ce second point de vue sera utilisé en 3.f).

soit cartésien. On vérifie alors sans peine par réduction au cas ensembliste qu'on a le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_1 \arrow[r, "e_0 \boxtimes f_1"] \arrow[d, "e_1"'] & \mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1 \circ \mathrm{pr}_2"] \\ \mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

où f_1 désigne la projection canonique de $\mathrm{Y}_1 = (\mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0) \times_{(\mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0)} \mathrm{X}_1$ sur X_1.

259 **c)** Nous allons donner deux exemples d'image réciproque d'un $\mathscr{C}$-groupoïde. Prenons Y_0 égal à X_1, f_0 égal à d_0. Pour tout objet T de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Y}_1(\mathrm{T})$ s'identifie alors à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\varphi"] & d \\ a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$. La source d'un tel diagramme est la flèche f, le but est la flèche g. Ces diagrammes se composent de façon évidente.

Posons maintenant $\mathrm{Y}'_0 = \mathrm{X}_1$, $f'_0 = d_1$ (nous ajoutons les primes [12] pour éviter toute confusion avec l'exemple précédent). Dans ce cas, $\mathrm{Y}'_1(\mathrm{T})$ s'identifie pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$ à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} b & d \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\psi"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

du groupoïde $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$. La source d'un tel diagramme est f, le but est g ; la composition de ces diagrammes est évidente.

Ceci dit, il est clair que l'application identique de $\mathrm{Y}_0(\mathrm{T})$ et l'application

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\varphi"] & d \\ a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} b & d \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g^{-1}\varphi f"] & c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{Y}_1(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Y}'_1(\mathrm{T})$ définissent un isomorphisme du groupoïde $\mathrm{Y}_*(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Y}'_*(\mathrm{T})$. De plus, cet isomorphisme dépend fonctoriellement de T de sorte que *les $\mathscr{C}$-groupoïdes Y_* et Y'_* sont isomorphes.* [13]

[12] N.D.E. : « accents » dans l'original.

[13] N.D.E. : Ceci jouera un rôle crucial dans la démonstration du lemme 6.1.

d) ***Proposition 3.1***. — *Nous conservons les notations de* a) *et nous supposons que* 260
f_0 *est un épimorphisme effectif et universel. Alors,* $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$ *existe si et seulement si* $\mathrm{Coker}(e_0, e_1)$ *existe.* [14] *De plus, dans ce cas* f_0 *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Coker}(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(e_0, e_1).$$

Rappelons d'abord qu'un épimorphisme $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ est dit universel si, pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Y}_0 \arrow[d, "f_0"'] \\ \mathrm{X}' \arrow[r] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

f' est un épimorphisme. Ceci étant, désignons par $\mathrm{C}(d_0, d_1)$ le foncteur covariant de $\mathscr{C}$ dans les ensembles qui associe à tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$ le noyau du couple $\mathrm{T}(d_0)$, $\mathrm{T}(d_1)$: $\mathrm{T}(\mathrm{X}_0) \rightrightarrows \mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$. Définissons de même $\mathrm{C}(e_0, e_1)$. Pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(d_0, d_1)(\mathrm{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}(f)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{X}_0) \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}(d_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{T}(d_0)"'] \arrow[d, "\mathrm{T}(f_0)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) \arrow[d, "\mathrm{T}(f_1)"'] \\ \mathrm{C}(e_0, e_1)(\mathrm{T}) \arrow[r] & \mathrm{T}(\mathrm{Y}_0) \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}(e_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{T}(e_0)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{Y}_1) \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\mathrm{T}(f)$ est l'injection induite par l'injection $\mathrm{T}(f_0)$. Si nous montrons que $\mathrm{T}(f)$ est une surjection pour tout T, on aura un isomorphisme fonctoriel $f : \mathrm{C}(d_0, d_1) \to \mathrm{C}(e_0, e_1)$ de sorte que la représentabilité de l'un de ces foncteurs équivaudra à celle de l'autre ; ceci prouvera notre proposition.

Pour prouver la surjectivité de $\mathrm{T}(f)$, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "e_0"'] \arrow[d, shift left, "e_1"] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ \mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{Y}_0 \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

où Δ est la section de $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0$ définie par le morphisme $s \circ f_0 \circ \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_1$, 261
la flèche $s : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_1$ satisfaisant aux égalités (3) et (3 bis) du paragraphe 1. Si la flèche $g : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{T}$ est telle que $g \circ e_0 = g \circ e_1$, on a $g \circ e_0 \circ \Delta = g \circ e_1 \circ \Delta$, donc $g \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$. Comme f_0 est un épimorphisme effectif, g est composé de f_0 et

[14] N.D.E. : On a modifié l'original pour mettre en évidence l'isomorphisme ci-dessous.

d'une flèche $h : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{T}$, c'est-à-dire qu'on a $g = \mathrm{T}(f_0)(h)$. Il reste à montrer que h appartient à $\mathrm{C}(d_0, d_1)(\mathrm{T})$, c'est-à-dire satisfait à l'égalité $hd_0 = hd_1$; or on a

$$hd_0f_1 = hf_0e_0 = ge_0 = ge_1 = hf_0e_1 = hd_1f_1,$$

d'où l'égalité cherchée grâce au fait que f_1 est un épimorphisme (car f_0 est un épimorphisme universel).

e) Considérons maintenant un préschéma S et choisissons $\mathscr{C}$ égal à $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. La donnée d'un $\mathscr{C}$-groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_0"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

permet de définir *une relation d'équivalence dans l'ensemble* $\underline{\mathrm{X}_0}$ sous-jacent au préschéma X_0 : si x, $y \in \underline{\mathrm{X}_0}$, on écrira $x \sim y$ lorsqu'il existe $z \in \underline{\mathrm{X}_1}$ tel que $x = d_1z$ et $y = d_0z$. La réflexivité et la symétrie de cette relation sont évidentes [(15)] ; prouvons la transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$, il existe u, $v \in \underline{\mathrm{X}_1}$ tels que $x = d_1u$,
262 $y = d_0u$, $y = d_1v$, $z = d_0v$. Il s'ensuit que (v, u) appartient au produit fibré ensembliste $\underline{\mathrm{X}_1} \times_{\underline{d_1}, \underline{d_0}} \underline{\mathrm{X}_1}$. Comme l'application canonique $\underline{\mathrm{X}_1 \times_{d_1, d_0} \mathrm{X}_1} \to \underline{\mathrm{X}_1} \times_{\underline{d_1}, \underline{d_0}} \underline{\mathrm{X}_1}$ de l'ensemble sous-jacent au produit fibré dans le produit fibré des ensembles sous-jacents est surjective, (v, u) est l'image d'un certain $w \in \underline{\mathrm{X}_2}$. On a alors $x = d_1d'_1w$ et $z = d_0d'_1w$, d'où $x \sim z$.

f) Conservons les notations de a) et b), $\mathscr{C}$ étant toujours égal à $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. Si x, y sont des points de $\underline{\mathrm{Y}_0}$, nous allons voir qu'on a $x \sim y$ si et seulement si $f_0(x) \sim f_0(y)$ (l'image réciproque de la relation d'équivalence définie par un groupoïde est la relation d'équivalence définie par l'image réciproque du groupoïde).

En effet, supposons $x \sim y$. Il existe donc $z \in \underline{\mathrm{Y}_1}$ tel que $x = e_1(z)$ et $y = e_0(z)$. Comme $f_0 \circ e_i = f_1 \circ d_i$ pour $i = 0, 1$, on a alors $f_0(x) = d_1f_1(z)$ et $f_0(y) = d_0f_1(z)$, d'où $f_0(x) \sim f_0(y)$.

Réciproquement, supposons $f_0(x) \sim f_0(y)$ et soit $z \in \underline{\mathrm{X}_1}$ tel que $f_0(y) = d_1(z)$ et $f_0(x) = d_0(z)$. Utilisant la construction et les notations de b), il y a alors un point t de $\underline{\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1}$ tel que $\mathrm{pr}_1(t) = x$ et $\mathrm{pr}_2(t) = z$. De même, comme $f_0(y) = d_1\mathrm{pr}_2(t)$, il y a un $s \in \underline{\mathrm{Y}_1}$ tel que $y = e_1(s)$ et $(e_0 \boxtimes f_1)(s) = t$. On a alors $e_0(s) = \mathrm{pr}_1(e_0 \boxtimes f_1)(s) = \mathrm{pr}_1(t) = x$. D'où $x \sim y$.

(15) N.D.E. : La réflexivité résulte de l'existence de $s : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_1$ qui est une section de d_0 et de d_1, la symétrie résulte de l'existence de l'involution σ de X_1 qui « échange d_0 et d_1 », c.-à-d., qui vérifie $d_0\sigma = d_1$ et $d_1\sigma = d_0$, cf. § 1, (3), (3 bis) et (†).

4. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (démonstration d'un cas particulier)

Théorème 4.1. — *On considère un* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$*-groupoïde :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_0"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes : [(16)] **263**

a) d_1 *est* fini localement libre*,*

b) pour tout $x \in \mathrm{X}_0$, l'ensemble $d_0 d_1^{-1}(x)$ est contenu dans un ouvert affine de X_0. [(17)] *Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(ii) p *est entier et ouvert, et* Y *est affine si* X_0 *est affine.* [(18)]

(iii) *Le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un* couple d'équivalence*,* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *est un isomorphisme* [(19)] *et* $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ *est fini localement libre.* [(20)] *De plus,* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des* faisceaux *pour la topologie* (fppf) *et, pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$*,* Y' *est le conoyau du groupoïde* $\mathrm{X}_* \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *déduit de* X_* *par le changement de base* $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}_0$*.*

En particulier, pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*,* $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est le conoyau du* S'*-groupoïde* $\mathrm{X}'_* = \mathrm{X}_* \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*. Donc, dans ce cas, «* la formation du quotient commute au changement de base *».*

Il résulte évidemment de (i) que l'espace topologique sous-jacent à Y est le quotient de l'espace topologique sous-jacent à X_0 par la relation d'équivalence définie par le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde X_*.

Nous allons d'abord prouver ce théorème lorsque X_0 est *affine* et que d_1 est localement libre *de rang constant* n. Nous verrons ensuite comment on peut se ramener à ce cas particulier.

Dans le cas où nous nous sommes placés, X_0, X_1 et X_2 sont affines. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$\mathrm{X}_i = \operatorname{Spec} \mathrm{A}_i \quad , \quad d_j = \operatorname{Spec} \delta_j \quad \text{et} \quad d'_k = \operatorname{Spec} \delta'_k,$$

(16) N.D.E. : Comme $d_0 = d_1 \sigma$, où σ est un automorphisme involutif de X_1, ces deux conditions sont symétriques en d_1 et d_0 ; de plus, on a $d_0 d_1^{-1}(x) = d_1 d_0^{-1}(x)$.

(17) N.D.E. : On ne peut omettre l'hypothèse b). En effet, H. Hironaka a donné un exemple d'une action du groupe fini $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur une $\mathbb{C}$-variété *propre* X_0, telle que le quotient X_0/G soit un espace algébrique qui n'est pas un préschéma ([**Hi62**], voir aussi [**Mum65**, Chap. 4, § 3]).

(18) N.D.E. : On a ajouté que p est *ouvert*, en reprenant la démonstration analogue donnée en 6.1.

(19) N.D.E. : Noter que, dans ce cas, $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ est donc une *immersion* (EGA I, 5.3.10) ; voir aussi VIB, 9.2.1.

(20) N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [**Ray67a**, th. 1 (iii)] et la démonstration donnée plus loin, à la fin de la section 5.

les A_i étant des anneaux commutatifs, les δ_j, δ'_k des homomorphismes d'anneaux. On peut alors remplacer le diagramme $(0,1,2)$ par le suivant

$$
(0,1,2)^* \qquad
\begin{tikzcd}
A_2 & A_1 \arrow[l, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta'_0"] & A_0 \arrow[l, "\delta_0"'] \\
A_1 \arrow[u, "\delta'_2"] & A_0 \arrow[l, shift right, "\delta_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta_0"] \arrow[u, "\delta_1"']
\end{tikzcd}
$$

où les deux carrés de gauche sont cocartésiens.

264 Désignons par B le sous-anneau de A_0 formé des $a \in A_0$ tels que $\delta_0(a) = \delta_1(a)$.

a) A_0 *est entier sur* B :

Si a appartient à A_0, soit

$$P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

le polynôme caractéristique de $\delta_0(a)$ lorsqu'on considère A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 (Bourbaki, *Alg.* VIII, § 12). Comme les carrés de gauche de $(0,1,2)^*$ sont cocartésiens, on a

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) = P_{\delta'_2}(T, \delta'_0\delta_0(a))$$
$$\text{et} \qquad \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) = P_{\delta'_2}(T, \delta'_1\delta_0(a)).$$

Comme $\delta'_0\delta_0 = \delta'_1\delta_0$, on a

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a))) = \delta_1(P_{\delta_1}(T, \delta_0(a)))$$

c'est-à-dire $\delta_0(\sigma_i) = \delta_1(\sigma_i)$ pour tout i. Hamilton-Cayley nous enseigne d'autre part qu'on a

$$\delta_0(a)^n - \delta_1(\sigma_1)\delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_1(\sigma_n) = 0.$$

Comme $\delta_1(\sigma_i)$ est égal à $\delta_0(\sigma_i)$, on a aussi

$$\delta_0(a)^n - \delta_0(\sigma_1)\delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_0(\sigma_n) = 0,$$

d'où

$$a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0,$$

265 car il existe un homomorphisme $\tau : A_1 \to A_0$ tel que $\tau\delta_0 = \mathrm{id}_{A_0}$, donc δ_0 est injectif. Il s'ensuit que A_0 est entier sur B.

b) Considérons maintenant deux idéaux premiers x et y de A_0. Nous allons montrer que *l'égalité* $x \cap B = y \cap B$ *entraîne l'existence d'un idéal premier* z *de* A_1 *tel que* $x = d_0(z)$ *et* $y = d_1(z)$.

En effet, si l'assertion n'était pas vraie, x serait distinct de $\delta_0^{-1}(t)$ pour tout idéal premier t de A_1 tel que $\delta_1^{-1}(t) = y$. Pour un tel t on aurait $\delta_0^{-1}(t) \cap B = \delta_1^{-1}(t) \cap B = y \cap B = x \cap B$, d'où il résulterait grâce à Cohen-Seidenberg que x ne serait contenu dans aucun $\delta_0^{-1}(t)$; il y aurait donc un $a \in x$ qui n'appartiendrait à aucun $\delta_0^{-1}(t)$ (car il y a au plus n idéaux premiers t de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(t) = y$). Par conséquent, $\delta_0(a)$ n'appartiendrait à aucun de ces t de sorte que la norme $N_{\delta_1}(\delta_0(a))$ n'appartiendrait pas à y (on calcule cette norme en considérant A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 ; on a $N_{\delta_1}(\delta_0(a)) = \sigma_n$ avec les notations de a)). Or cette norme appartiendrait à $B \cap x = B \cap y$, d'où la contradiction.

c) *Démonstration de* (i) :

Posons $Y = \operatorname{Spec} B$ et $p = \operatorname{Spec} i$, où i est l'inclusion de B dans A_0. D'après a), le morphisme $p : X_0 \to Y$ est *surjectif*. Nous allons d'abord montrer que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés : il résulte en effet de b) que l'ensemble sous-jacent à Spec B est obtenu à partir de l'ensemble sous-jacent à X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_1 z = y$, $d_0 z = x$. De plus, comme i est entier, $p = \operatorname{Spec} i$ est fermé de sorte que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_0. Il en résulte que p est *ouvert*. En effet, soit U' un ouvert quelconque de X_0 ; comme d_1 est surjectif et fini localement libre, donc fidèlement plat et de présentation finie, et donc ouvert, alors le saturé $U = d_1(d_0^{-1}(U'))$ de U' pour la relation d'équivalence définie par X_* est ouvert. Alors $p(U') = p(U)$ est ouvert, puisque Y est muni de la topologie quotient.

Il résulte enfin du choix de B et du fait que p, d_0 et d_1 sont affines, que la suite canonique de faisceaux d'anneaux 266

$$\mathscr{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{X_0}) \underset{p_*(\delta_0)}{\overset{p_*(\delta_1)}{\rightrightarrows}} p_*(d_{0_*}(\mathscr{O}_{X_1})) = p_*(d_{1_*}(\mathscr{O}_{X_1}))$$

est exacte. C.Q.F.D.

Il reste à montrer que (Y, p) est aussi le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie des préschémas (plus généralement dans celle des espaces annelés en anneaux locaux). Soit donc $q : X_0 \to Z$ un morphisme de préschémas tel que $qd_0 = qd_1$. D'après ce qui précède, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : Y \to Z$ et un seul tel que $q = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{r(y)} \to \mathscr{O}_y$ induit par r est local. Cela résulte de ce que p est surjectif, donc y de la forme $p(x)$, et de ce que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{q(x)} \to \mathscr{O}_x$ induit par q est local.

d) *Démonstration de* (ii) : Résulte de a) et c).

e) *Démonstration de* (iii) :

Lemme 4.1.1. — [(21)] *Soient* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local, k son corps résiduel, et* K *une extension du corps k. Alors, il existe une* A*-algèbre locale et plate* B *telle que* $B/\mathfrak{m}B$ *soit k-isomorphe à* K *; de plus, on peut choisir* B *finie et libre sur* A *si* K *est de degré fini sur k.*

Ceci est démontré dans EGA 0_{III}, 10.3.1, où il est de plus montré qu'on peut choisir B noethérien si A l'est. Pour la commodité du lecteur, indiquons la démonstration.

Posons $A' = A[T]$, où T est une indéterminée. Si $K = k(T)$, soient $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A'$ et $B = A'_{\mathfrak{p}}$. Alors $B/\mathfrak{m}B \cong k[T]_{(0)} = k(T)$, et B est plat sur A' qui est un A-module libre, donc B est plat sur A.

(21) N.D.E. : On a inséré ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans cet exposé et dans des exposés ultérieurs (VI_A, VI_B). Il figurait comme Lemme VI_B, 4.5.1 dans l'édition originelle de SGAD (1965).

Si $\mathrm{K} = k(t) = k[t]$, où t est algébrique sur k, posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}'/(\mathrm{F})$, où $\mathrm{F} \in \mathrm{A}'$ est un polynôme unitaire dont l'image dans $k[\mathrm{T}]$ est le polynôme minimal f de t sur k. Alors B est un A-module libre, de rang fini $\deg(\mathrm{F}) = \deg(f)$. En particulier, B est entier sur A, donc tout idéal maximal de B contient $\mathfrak{m}$. Comme $\mathrm{B}/\mathfrak{m}\mathrm{B} \cong k[\mathrm{T}]/(f) \cong \mathrm{K}$, il en résulte que B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{B}$. Ceci montre déjà que si $[\mathrm{K} : k] < \infty$, on peut choisir B finie et libre sur A.

Dans le cas général, soit $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système de générateurs de K sur k, et munissons I d'un bon ordre (c.-à-d., un ordre total $\leqslant$ tel que toute partie non vide de I possède un plus petit élément). Pour tout $i \in \mathrm{I}$, notons k_i (resp. $k_{<i}$) le sous-corps de K engendré par les t_j, pour $j \leqslant i$ (resp. $j < i$). Quitte à rajouter un élément, on peut supposer que I possède un plus grand élément ξ, de sorte que $\mathrm{K} = k_\xi$. Considérons le sous-ensemble J de I formé des indices i tels qu'il existe un système inductif $(\mathrm{A}_j)_{j\leqslant i}$ de A-algèbres locales et plates, telles que $\mathrm{A}_j/\mathfrak{m}\mathrm{A}_j \cong k_j$ et que A_j soit plate sur A_ℓ pour tout $\ell < j$. Supposons $\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}$ non-vide ; soit i son plus petit élément et soit $\mathrm{A}' = \varinjlim_{j<i} \mathrm{A}_j$. Puisque le produit tensoriel commute à la limite inductive, A' est plate sur A et sur chaque A_j, pour $j < i$, et l'on a $\mathrm{A}'/\mathfrak{m}\mathrm{A}' \cong \mathrm{A}' \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}) \cong k_{<i}$. De plus, A' est locale, d'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{A}'$. En effet, si $x = f_j(x_j)$ est non-inversible, alors x_j n'est pas inversible, donc appartient à l'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{A}_j$ de A_j, d'où $x \in \mathfrak{m}\mathrm{A}'$. Il résulte alors du cas monogène, traité plus haut, qu'il existe une A'-algèbre locale et plate A_i, telle que $\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}\mathrm{A}_i \cong k_{<i}(t_i) = k_i$; alors A_i est plate sur chaque A_j, pour $j < i$, et donc $i \in \mathrm{J}$, contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que $\mathrm{J} = \mathrm{I}$, et donc A_ξ répond à la question. Le lemme 4.1.1 est démontré.

Démontrons maintenant 4.1 (iii). Rappelons qu'on désigne par $\underline{\mathrm{P}}$ l'ensemble sous-jacent à un préschéma P, par $\underline{d} : \underline{\mathrm{P}} \to \underline{\mathrm{Q}}$ l'application induite par un morphisme $d : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$. On peut alors traduire b) en disant que l'application

$$\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1 : \underline{\mathrm{X}_1} \longrightarrow \underline{\mathrm{X}_0} \underset{\underline{\mathrm{Y}}}{\times} \underline{\mathrm{X}_0}$$

de composantes $\underline{d}_0$ et $\underline{d}_1$ est surjective ; or cette application se factorise comme suit

$$\underline{\mathrm{X}_1} \xrightarrow{\ d_0\boxtimes d_1\ } \underline{\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}_0} \xrightarrow{\ q\ } \underline{\mathrm{X}_0} \underset{\underline{\mathrm{Y}}}{\times} \underline{\mathrm{X}_0},$$

q étant l'application canonique ; l'image de $d_0 \boxtimes d_1$ contient donc tous les points v
267 de $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ tels que $\{v\} = q^{-1}(q(v))$. Cette dernière condition [22] sera réalisée en particulier si v est *rationnel au-dessus de* Y, c'est-à-dire si le corps résiduel $\kappa(v)$ de v s'identifie au corps résiduel $\kappa(w)$ de l'image w de v dans Y.

Si $v \in \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ n'est pas rationnel au-dessus de Y, soit toujours w l'image de v dans Y. D'après le lemme 4.1.1, il existe un anneau local C de radical $\mathfrak{m}$ et un homomorphisme local et plat $f : \mathscr{O}_w \to \mathrm{C}$ tel que $\mathrm{C}/\mathfrak{m}$ soit isomorphe à $\kappa(v)$ comme $\kappa(w)$-algèbre. Si on pose $\mathrm{Y}' = \operatorname{Spec}\mathrm{C}$ et si $\pi : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est le morphisme induit par f, il est clair que la projection canonique de $(\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0) \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ dans $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ envoie

[22] N.D.E. : Noter la permutation des pages dans le Lecture Notes 151, l'ordre réel est 265-266-268-269-267-270-271.

sur v un point v' de $(X_0 \times_Y X_0) \times_Y Y'$ qui est rationnel au-dessus de Y'. Comme

$$(X_0 \underset{Y}{\times} X_0) \underset{Y}{\times} Y' \cong (X_0 \underset{Y}{\times} Y') \underset{Y'}{\times} (X_0 \underset{Y}{\times} Y'),$$

et comme les hypothèses du théorème 4.1 et les résultats précédents, en particulier le point b), restent valables après le changement de base $\pi : Y' \to Y$, alors v' est l'image d'un élément $u' \in X_1 \times_Y Y'$ par le morphisme déduit de $d_0 \boxtimes d_1$ par changement de base. Si u est l'image de u' dans X_1, on a bien $v = (d_0 \boxtimes d_1)(u)$. C.Q.F.D.

f) *Démonstration de* (iv) : [(23)]

Lemme 4.1.2. — *Si un* monomorphisme *de préschémas* $f : T \to Z$ *est un morphisme* fini*, c'est une* immersion fermée.

En effet, en recouvrant Z par des ouverts affines Z_i, et en remplaçant f par les morphismes induits $f^{-1}(Z_i) \to Z_i$, on se ramène (f étant fini, donc affine) au cas où $Z = \operatorname{Spec} B$ et $T = \operatorname{Spec} A$. Comme f est un monomorphisme, le morphisme diagonal $T \to T \times_Z T$ est un isomorphisme (EGA I, 5.3.8), i.e. $A \otimes_B A \to A$ est un isomorphisme. Par conséquent, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, on a un isomorphisme

$$(A/\mathfrak{m}A) \otimes_k (A/\mathfrak{m}A) \cong (A/\mathfrak{m}A)$$

où l'on a posé $k = B/\mathfrak{m}$. Comme A est fini sur B, $A/\mathfrak{m}A$ est un k-espace vectoriel de dimension finie d, et l'isomorphisme ci-dessus entraîne que $d = 0$ ou 1, de sorte que le morphisme $k = B/\mathfrak{m} \to A/\mathfrak{m}A$ est surjectif. Donc, d'après le lemme de Nakayama (A étant fini sur B), le morphisme $B_\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}$ est surjectif. Il en résulte que le morphisme de B-modules $B \to A$ est surjectif (puisque son conoyau C vérifie $C_\mathfrak{m} = 0$, pour tout $\mathfrak{m}$, donc est nul). Ceci prouve le lemme.

Démontrons maintenant (iv). Par hypothèse, $X_0 = \operatorname{Spec} A_0$, $X_1 = \operatorname{Spec} A_1$, et, pour $i = 0, 1$, le morphisme $\delta_i : A_0 \to A_1$ fait de A_1 un A_0-module de type fini ; donc, a fortiori, le morphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ est fini.

On suppose de plus que $d = d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ est un monomorphisme ; donc, d'après le lemme précédent, le morphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ est surjectif.

On va montrer que c'est un *isomorphisme* (on prouvera en chemin que $p : X_0 \to Y$ est fini et localement libre). Il suffit de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, l'homomorphisme $(A_0)_\mathfrak{p} \otimes_{B_\mathfrak{p}} (A_0)_\mathfrak{p} \to (A_1)_\mathfrak{p}$ de composantes $\delta_{0\mathfrak{p}}$ et $\delta_{1\mathfrak{p}}$ est bijectif. Autrement dit, il est loisible de supposer B local. Il résulte alors de b) que $(A_0)_\mathfrak{p}$ est semi-local ; en effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $(A_0)_\mathfrak{p}$, les autres idéaux maximaux sont de la forme $\delta_0^{-1}(\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$ parcourt les idéaux premiers de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$; l'assertion résulte donc de ce qu'il y a au plus $n = [A_1 : A_0]$ tels idéaux premiers $\mathfrak{n}$. Quitte à faire un changement de base fidèlement plat [(24)], on peut aussi supposer que le corps résiduel de B est infini de sorte qu'on peut utiliser le lemme suivant :

(23) N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, tiré de [**DG70**], I, § 5, Prop. 1.5 (voir aussi la démonstration de EGA IV_3, 8.11.5), utilisé de façon implicite dans l'original, et de façon explicite dans [**DG70**], III, § 2, 4.6. Il est de plus utile dans le th. 7.1 plus loin.

(24) N.D.E. : cf. Lemme 4.1.1.

Lemme 4.2. — *Soient* B *un anneau local de corps résiduel infini,* A *un anneau semi-*
268 *local et* $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *un homomorphisme qui envoie l'idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B *dans le radical* $\mathfrak{r}$ *de* A. *Soient* M *un* A*-module libre de rang* n *et* N *un* B*-sous-module de* M *qui engendre* M *en tant que* A*-module. Alors* N *contient une base de* M *sur* A.

On rappelle en effet qu'une suite $m_1, \ldots, m_n$ d'éléments de M est une A-base de M si et seulement si les images canoniques de $m_1, \ldots, m_n$ dans $\mathrm{M}/\mathfrak{r}\mathrm{M}$ forment une base de $\mathrm{M}/\mathfrak{r}\mathrm{M}$ sur $\mathrm{A}/\mathfrak{r}$. On peut donc remplacer M par $\mathrm{M}/\mathfrak{r}\mathrm{M}$, N par $\mathrm{N}/(\mathrm{N} \cap \mathfrak{r}\mathrm{M})$, A par $\mathrm{A}/\mathfrak{r}$ et B par $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Dans ce cas le lemme est facile (si A est un produit de corps $\mathrm{K}_1 \times \cdots \times \mathrm{K}_r$, on peut identifier M au module $\mathrm{K}_1^n \times \cdots \times \mathrm{K}_r^n$; si x_j est alors un élément de N dont la j-ième composante dans $\mathrm{K}_1^n \times \cdots \times \mathrm{K}_r^n$ n'est pas nulle, montrer qu'une certaine combinaison linéaire x des x_j à coefficients dans B a toutes ses composantes non nulles ; remplacer ensuite M par $\mathrm{M}/\mathrm{A}x$ et procéder par récurrence sur n).

Nous appliquons le lemme précédent dans la situation suivante : B = B, A = A_0, i est l'inclusion de B dans A_0, M = A_1 considéré comme A_0-module au moyen de l'homomorphisme δ_1, N = $\delta_0(\mathrm{A}_0)$. En effet, comme $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ est une immersion fermée, l'homomorphisme $\mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1$ de composantes δ_0 et δ_1 est surjectif ; cela signifie justement que $\delta_0(\mathrm{A}_0)$ engendre le A_0-module A_1.

Soient donc $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A_0 tels que $\delta_0(a_1), \ldots, \delta_0(a_n)$ forment une base de A_1 sur A_0. Si nous montrons que $a_1, \ldots, a_n$ est une base de A_0 sur B, il s'ensuivra que l'homomorphisme $\mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1$ applique la base $(1 \otimes a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sur la base $(\delta_0(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, donc est bijectif. Par conséquent, si $\varepsilon : \mathbb{Z}^n \to \mathrm{A}_0$ est l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie la base naturelle de $\mathbb{Z}^n$ sur $a_1, \ldots, a_n$, il suffit de prouver que l'application $\mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{A}_0$ de composantes i et ε est bijective. Or le diagramme $(0, 1, 2)^*$ considéré au début de cette preuve, induit le diagramme
269 commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta'_0"'] & \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\delta_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[u, "u_2"] & \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[l, shift right, "\delta_1 \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[l, shift left, "\delta_0 \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[u, "u_1", "\cong"'] & \mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[l, "i \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[u, "u_0"]
\end{tikzcd} ,
$$

où u_0, u_1 et u_2 ont pour composantes respectivement i et ε, δ_1 et $\delta_0\varepsilon$, δ'_2 et $\delta'_0\delta_0\varepsilon$. Nous savons que u_1 est un isomorphisme. Comme les deux carrés de gauche de $(0, 1, 2)^*$ sont cocartésiens, u_2 est bijectif. Or les deux lignes horizontales de notre diagramme sont exactes ; donc u_0 est bijectif. [25] Ceci montre que A_0 est un B-module localement libre de rang n, et, d'après les réductions précédentes, ceci entraîne que $\delta_0 \otimes \delta_1 : \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1$ est un isomorphisme. Ceci achève la preuve du théorème 4.1 dans le cas particulier considéré (X_0 affine et d_1 localement libre de rang constant n).

[25] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

5. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (cas général)

a) Soit $U^{(n)}$ le plus grand ouvert de X_0 au-dessus duquel d_1 est fini localement libre de rang n. On sait que X_0 est la somme directe des $U^{(n)}$. Il résulte d'autre part des deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_0"'] & X_0 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_1"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

que les images réciproques de $U^{(n)}$ par d_0 et d_1 coïncident toutes les deux avec le plus grand ouvert de X_1 au-dessus duquel d'_2 est localement libre de rang n [(26)] ; on a donc $d_0^{-1}(U^{(n)}) = d_1^{-1}(U^{(n)})$ de sorte que le groupoïde X_* est la somme directe des groupoïdes $X_*^{(n)}$ induits par X_* sur les ouverts et fermés $U^{(n)}$. Il suffit par conséquent, comme on le voit aisément, de prouver le théorème 4.1 pour chacun des $X_*^{(n)}$: *on est ramené au cas où d_1 est fini localement libre de rang n.*

b) *Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre théorème dans le cas* **270**
général.

D'après a) on peut supposer que d_1 est localement libre de rang n. Soit alors (Y, p) un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement de la fin du paragraphe 4.c) montre qu'il suffit pour démontrer 4.1 (i) de prouver que Y est un préschéma et $p : X_0 \to Y$ un morphisme de préschémas. D'après le lemme 1.2, la question est locale sur Y : soit $y \in Y$ et soit $x \in X_0$ tel que $p(x) = y$; si x possède un voisinage ouvert affine et saturé U, $p(U)$ sera un ouvert affine de Y d'après le § 4 et $p|_U$ sera un morphisme de préschémas. Il suffit donc de prouver que tout $x \in X_0$ possède un voisinage ouvert affine et saturé U. Voici comment on procède (la démonstration est tirée de SGA 1, VIII, cor. 7.6).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] d_1(d_0^{-1}(x)) \subseteq & U = (V_f)' \subseteq & V_f \subseteq & V' \subseteq & V \subseteq & X_0 \\ & & \text{ouvert affine spécial de V} \arrow[u] & & \text{ouvert affine} \arrow[u] & \\ & \text{plus grand ouvert saturé de } V_f \arrow[uu] & & \text{plus grand ouvert saturé de V} \arrow[uu] & & \end{tikzcd}$$

(26) N.D.E. : en effet, comme d_0 (resp. d_1) est surjectif, plat et fini, donc fidèlement plat et affine, alors d'_2 est de rang n au-dessus d'un voisinage d'un point x de X_1 si et seulement si d_1 est de rang n au-dessus d'un voisinage de $d_0(x)$ (resp. $d_1(x)$).

D'après la condition b) de 4.1, il existe un ouvert affine V de X_0 contenant $d_1(d_0^{-1}(x))$ [27] ; si $F = X_0 \setminus V$, $d_1(d_0^{-1}(F))$ est fermé car d_1 est entier et $V' = X_0 \setminus d_1(d_0^{-1}(F))$ est le plus grand ouvert saturé contenu dans V. Comme V' est un voisinage de l'ensemble fini $d_1(d_0^{-1}(x))$, il existe une section f du faisceau structural de V qui s'annule sur $V \setminus V'$ et est telle que $d_1(d_0^{-1}(x))$ soit contenu dans l'ouvert V_f de V formé des points où f ne s'annule pas. Nous allons voir que le plus grand ouvert saturé $(V_f)'$ de V_f est affine, donc répond à la question.

Soit en effet $Z(f) = V' \setminus V_f$. Alors $d_0^{-1}(Z(f))$ est l'ensemble des points de $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ où s'annule l'image $d_0^*(f)$ de f par l'application induite par d_0. D'autre part, comme d_1 induit un morphisme localement libre de rang n de $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V')$ sur
271 V', $d_1(d_0^{-1}(Z(f)))$ est l'ensemble des points où s'annule la norme N de $d_0^*(f)$ pour le morphisme d_1. Il s'ensuit que $(V_f)'$ est l'ensemble des points de V_f où N ne s'annule pas ; par conséquent, $(V_f)'$ est affine.

Ceci prouve 4.1 (i) ; les assertions (ii), (iii), et la première partie de (iv) sont alors claires. Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [**Ray67a**, th. 1 (iii)]).

Par hypothèse, le groupoïde X_* provient d'une relation d'équivalence $i : R \to X_0 \times X_0$ (i étant donc une immersion, cf. N.D.E. (19)), et on a établi que R est *effective* (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que $p : X_0 \to Y = X_0/R$ est un morphisme surjectif et fini localement libre donc, en particulier, fidèlement plat et de présentation finie. Par conséquent, notant (M) la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie, R est (M)-effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3, (Y, p) représente le faisceau quotient de X_0 par R pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

Corollaire 5.1. — [28] *On conserve les hypothèses et notations de* 4.1. *Soient* Y' *un ouvert de* Y *et* $U = p^{-1}(Y')$. *Notons* $\widetilde{p} : U \to Y'$ *la restriction de* p *à* U, *et* $\widetilde{d}_0$ *et* $\widetilde{d}_1$ *les restrictions de* d_0 *et* d_1 *à* $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$. *Alors* $(Y', \widetilde{p})$ *est un conoyau de* $(\widetilde{d}_0, \widetilde{d}_1)$ *dans* (**Esp. An**) *et dans* (**Sch**).

La première assertion découle du lemme 1.1, la seconde du lemme 1.2 et du fait que $p : X \to Y$ étant un morphisme de préschémas, il en est de même de sa restriction $\widetilde{p} : U \to Y'$.

6. Passage au quotient lorsqu'il existe une quasi-section

Nous allons maintenant prouver un *lemme de caractère technique* qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes que nous avons en vue. Soient S un préschéma et

$$X_2 \overset{d'_0, d'_1, d'_2}{\rightrightarrows\!\!\to} X_1 \overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows} X_0$$

[27] N.D.E. : on a $d_1(d_0^{-1}(x)) = d_0(d_1^{-1}(x))$, cf. la N.D.E. (16) dans le théorème 4.1.

[28] N.D.E. : On a explicité ce corollaire, utilisé dans la preuve du lemme 6.1.

un ($\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}$)-groupoïde. Nous appellerons *quasi-section du groupoïde* X_*, tout sous-préschéma U de X_0 tel qu'on ait (1) et (2) :

(1) La restriction v de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{U})$ est un *morphisme fini, localement libre et surjectif* de $d_0^{-1}(\mathrm{U})$ sur X_0.

(2) Toute partie E de U formée de points deux à deux équivalents pour la relation d'équivalence définie par X_* (§ 3.e)) est contenue dans un ouvert affine de U. [29]

Si U est une quasi-section de X_*, le ($\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}$)-groupoïde

$$\mathrm{U}_2 \overset{u'_0, u'_1, u'_2}{\rightrightarrows\!\!\to} \mathrm{U}_1 \overset{u_0, u_1}{\rightrightarrows} \mathrm{U}$$

induit par X_* et l'inclusion de U dans X_0 (cf. § 3.a)) vérifie les hypothèses du théorème 272
4.1. Posons en effet $\mathrm{V} = d_0^{-1}(\mathrm{U})$ et soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$\mathrm{X}_0 \xleftarrow{\ v\ } \mathrm{V} \xrightarrow{\ u\ } \mathrm{U}.$$

D'après le paragraphe 3.b), on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}_1 \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & \mathrm{V} \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{U} \arrow[r, "\text{inclusion}"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

donc u_1 est surjectif et fini localement libre d'après (1). Avec (2), la condition (1) assure donc que le groupoïde U_* vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En particulier $\mathrm{Coker}(u_0, u_1)$ existe dans ($\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}$). De plus, d_0 possède une section de sorte que u est un épimorphisme effectif universel (cf. III.1.12) ; il s'ensuit, d'après la proposition 3.1, que $\mathrm{Coker}(u_0, u_1)$ coïncide avec le conoyau $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$ du groupoïde V_* :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1"] \arrow[r, shift right=2, "v'_0"'] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

image réciproque de U_* par le changement de base $u : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$, c'est-à-dire aussi image réciproque de X_* par le changement de base :

$$\mathrm{V} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{X}_1 \xrightarrow{\ d_0\ } \mathrm{X}_0 \qquad .$$

[29] N.D.E. : Si $x, y \in \mathrm{E}$, il existe $z \in \mathrm{X}_1$ tel que $d_1(x) = x$ et $d_0(z) = y$, c.-à-d., z appartient à l'ensemble $v^{-1}(x)$, qui est fini d'après (1). Donc E est contenu dans l'ensemble fini $d_0(v^{-1}(x)) = d_0 d_1^{-1}(x) \cap \mathrm{U}$.

[30] D'après le paragraphe 3.c), V_* est isomorphe au groupoïde V'_*, image réciproque de X_* par le changement de base :

$$v : \qquad V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \qquad ,$$

et donc V'_* admet un conoyau dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$. Or, étant plat, surjectif et fini, $v : V \to X_0$ est fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme effectif universel, d'après III.6.3.2. Par conséquent, d'après la proposition 3.1, le groupoïde X_* admet un conoyau
273 $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$ dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$. Nous avons donc prouvé la première assertion du lemme suivant :

Lemme 6.1. — *Supposons que le* $(\mathbf{Sch}_{/S})$*-groupoïde* X_* *possède une quasi-section. Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(i′) p *est surjectif, et est ouvert* (*resp. universellement fermé*) *si* d_0 *l'est.*

(ii) *Supposons* S localement noethérien *et* X_0 localement de type fini (*resp.* de type fini) *sur* S. *Alors* p *et* $Y \to S$ *sont* localement de présentation finie (*resp.* de présentation finie).

(iii) *Le morphisme* $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *est un isomorphisme. De plus, si* $d_0 : X_1 \to X_0$ *est plat,* p *est fidèlement plat.*

Avant de prouver la deuxième assertion de (i), nous allons démontrer (i′), (ii) et (iii).

a) *Démonstration de* (i′) et (ii) :

Nous venons de voir que (Y, p) s'identifie à $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$ et $\mathrm{Coker}(u_0, u_1)$. Soient donc q et r les épimorphismes canoniques de U et V dans Y :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[dr, "p"'] & V \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & U \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad .$$

Par hypothèse, v est surjectif et fini localement libre, donc ouvert. D'autre part, si $d_0 : X_1 \to X_0$ est ouvert (resp. universellement fermé), alors u, qui en est déduit par
274 changement de base, l'est aussi. Comme, d'après le théorème 4.1, q est surjectif, entier, et ouvert, alors r est surjectif, et ouvert (resp. universellement fermé) si d_0 l'est. Il en est donc de même pour p, puisque v est surjectif. Ceci prouve (i′).

[30] N.D.E. : On a modifié légèrement la suite ; en particulier, dans le lemme 6.1, on a déplacé en (iv) l'hypothèse additionnelle que d_0 soit plat, et l'on a séparé (ii) en : (i′) + (ii), et ajouté la deuxième assertion de (i′).

Supposons maintenant S localement noethérien et X_0 localement de type fini au-dessus de S, de sorte que X_0 est localement noethérien.

Montrons que Y est localement de présentation finie au-dessus de S. Soient $S' = \operatorname{Spec} R$ un ouvert affine de S, $Y' = \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine de Y se projetant dans S' et $U' = \operatorname{Spec} A$ l'image réciproque de Y' dans U. Comme R est noethérien, il suffit de montrer que B est une R-algèbre de type fini ; or, d'après les paragraphes 4 et 5, B est contenu dans A qui est une R-algèbre de type fini ; l'assertion résulte donc de ce que R est noethérien et A entier sur B.

Enfin, comme $X_0 \to S$ est localement de type fini, p l'est aussi (EGA I, 6.6.6), donc p est localement de présentation finie puisque Y est localement noethérien.

Reste à montrer la dernière assertion de (ii). Supposons de plus X_0 de type fini sur S. Alors, comme p est surjectif, Y est de plus quasi-compact sur S, donc de type fini sur S. Comme S est localement noethérien, alors $X_0 \to S$ et $Y \to S$ sont de présentation finie, et donc $p : X_0 \to Y$ l'est aussi (EGA IV_1, 1.6.2 (v)).

b) *Démonstration de* (iii) :

Comme le groupoïde V_* de base V est isomorphe à la fois à l'image réciproque de U_* par le changement de base u et à l'image réciproque de X_* par le changement de base v, on a un double carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "d_0 \boxtimes d_1"'] & V_1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "v_0 \boxtimes v_1"'] & U_1 \arrow[d, "u_0 \boxtimes u_1"'] \\
X_0 \times_Y X_0 & V \times_Y V \arrow[l, "v \times v"'] \arrow[r, "u \times u"] & U \times_Y U
\end{tikzcd} .$$

Comme $u_0 \boxtimes u_1$ est surjectif, il en va de même pour $v_0 \boxtimes v_1$. Comme $v \times v$ est surjectif, il en va de même pour le morphisme composé $V_1 \to X_0 \times_Y X_0$, donc pour $d_0 \boxtimes d_1$. 275

c) *Démonstration de* (i) :

Il reste à prouver que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Nous montrons d'abord que Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$. En effet p est surjectif et on a $pd_0 = pd_1$; en outre, si $p(x) = p(y)$, il y a un point z' de $X_0 \times_Y X_0$ dont la première projection est x, la deuxième y. Si z est un point de X_1 tel que $(d_0 \boxtimes d_1)(z) = z'$, on a bien $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$.

D'autre part, si W est un ouvert saturé de X_0, $W \cap U$ est un ouvert saturé de U ; d'après 4.1, $q(W \cap U)$ est un ouvert de Y. Comme $q(W \cap U)$ n'est autre que $p(W)$, on voit que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_0.

Il reste à démontrer que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathscr{O}_Y \to p_*(\mathscr{O}_{X_0}) \rightrightarrows p_* d_{0*}(\mathscr{O}_{X_1}) = p_* d_{1*}(\mathscr{O}_{X_1})$$

est exacte.

Soit donc Y' un ouvert de Y et posons $U' = q^{-1}(Y')$, $X'_0 = p^{-1}(Y')$, etc. [31] Alors, U' est un ouvert de U saturé pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde U_*, et il résulte du corollaire 5.1 que Y' est le conoyau, dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$ et dans $(\mathbf{Esp.An})$, du groupoïde induit par U_* sur U'. De même, X'_0 est un ouvert de X_0 saturé pour la relation d'équivalence définie par X_* et on le diagramme commutatif suivant, où les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[d] & V' = d_0^{-1}(U') \arrow[l, "\widetilde{d}_1"'] \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ X_0 & V = d_0^{-1}(U) \arrow[l, "d_1"'] \arrow[r, "d_0"] & U' \end{tikzcd} \quad .$$

Alors, $\widetilde{d}_1$ est surjectif, et fini localement libre. D'autre part, soit $x \in U'$. Comme U est une quasi-section, l'ensemble $E := d_0 d_1^{-1}(x) \cap U$ est fini et contenu dans un ouvert affine W de U. Alors $E' = E \cap U'$ est un ensemble fini, contenu dans l'ouvert quasi-affine $W \cap U'$. Par conséquent, il existe un ouvert affine W' de $W \cap U'$ contenant E'. Ceci montre que U' est une quasi-section du groupoïde X'_* induit par X_* sur X'_0. La première assertion de (i), appliquée à X'_* et U', montre alors que Y' est le conoyau *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$ de X'_*.

En particulier, pour tout S-préschéma T, on a la suite exacte

$$T(Y') \xrightarrow{T(p|_{X'_0})} T(X'_0) \underset{T(d_0|_{X'_1})}{\overset{T(d_1|_{X'_1})}{\rightrightarrows}} T(X'_1).$$

276 Or, si T est la « droite affine » $\mathbb{G}_{a,S}$ (I.4.3), cette suite s'identifie à la suite :

$$\Gamma(Y', \mathscr{O}_Y) \to \Gamma(p^{-1}(Y'), \mathscr{O}_{X_0}) \underset{\delta_0}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \Gamma(d_0^{-1}p^{-1}(Y'), \mathscr{O}_{X_1}) = \Gamma(d_1^{-1}p^{-1}(Y'), \mathscr{O}_{X_1})$$

qui est donc exacte pour tout ouvert Y'. Ceci achève la preuve de 6.1 (i).

d) *Démonstration de* (iv) :

Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, il en va de même pour (u_0, u_1). Il s'ensuit que $u_0 \boxtimes u_1 : U_1 \to U \times_Y U$ est un isomorphisme (théorème 4.1), donc aussi $v_0 \boxtimes v_1$ (confer les carrés cartésiens de b)) ; comme $v \times v$ est fidèlement plat et quasi-compact, $d_0 \boxtimes d_1$ est un isomorphisme (SGA 1, VIII 5.4).

De plus, si d_0 est plat, u l'est aussi. Or q est plat, d'après le théorème 4.1, donc r l'est aussi. Comme v est fidèlement plat, alors p est plat, et donc fidèlement plat puisque surjectif.

[31] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, en particulier le fait que U' soit une quasi-section du groupoïde induit sur X'_0.

7. Quotient par une prérelation d'équivalence propre et plate

Théorème 7.1. — [32] *Soient* S *un préschéma* localement noethérien *et*

$$\mathrm{X}_2 \;\substack{\xrightarrow{d'_2} \\ \xrightarrow{d'_1} \\ \xrightarrow[d'_0]{}}\; \mathrm{X}_1 \;\substack{\xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow[d_0]{}}\; \mathrm{X}_0$$

un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$*-groupoïde tel que* d_1 *soit* propre et plat*, que* X_0 *soit* quasi-projectif *sur* S [33] *et que le morphisme* $d : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *soit* quasi-fini. *Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(ii) p *est surjectif, ouvert, et propre, et* p *et* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *sont de présentation finie.* [34] **277**

(iii) *Le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *est un isomorphisme* [35] *et* p *est fidèlement plat.* [36] *De plus,* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des* faisceaux *pour la topologie* (fppf) *et, pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$*,* Y' *est le conoyau du groupoïde* $\mathrm{X}_* \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *déduit de* X_* *par le changement de base* $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}_0$.

En particulier, pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*,* $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est le conoyau du* S'*-groupoïde* $\mathrm{X}'_* = \mathrm{X}_* \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*. Donc, dans ce cas, «* la formation du quotient commute au changement de base *».*

Soit (Y, p) le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le lemme 1.2 montre que, pour prouver (i), il suffit de démontrer que tout point z de X_0 possède un voisinage ouvert saturé U_z tel que, notant $\widetilde{d}_0$ et $\widetilde{d}_1$ les restrictions de d_0

---

[32] N.D.E. : Signalons ici l'article de S. Keel et S. Mori ([**KM97**]), où est établi le théorème suivant. Soient X un espace algébrique de type fini sur une base localement noethérienne S et $j : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ un groupoïde *plat* dont le stabilisateur $j^{-1}(\Delta_{\mathrm{X}})$ est *fini* sur X ; il existe alors un espace algébrique qui est un quotient géométrique de X par R et un quotient catégorique uniforme ; de plus, si j est séparé, ce quotient est séparé. En particulier, si un S-schéma en groupes G *plat* agit *proprement* sur X, avec stabilisateur fini (i.e. le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ est propre et le stabilisateur de la diagonale est fini sur X), alors il existe un quotient géométrique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{G}$. Dans le cas d'un S-schéma en groupes réductifs G, il s'agit d'un résultat de J. Kollár ([**Ko97**]).

[33] N.D.E. : Cette hypothèse sur X_0 est nécessaire, cf. la N.D.E. (17) dans le Th. 4.1.

[34] N.D.E. : Peut-on ajouter que Y est *séparé* sur S ? Dans TDTE III, Th. 6.1, il est indiqué que Y est *quasi-projectif*, au moins si S est noethérien.

[35] N.D.E. : Dans ce cas, $d : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ est une *immersion fermée* et Y est *séparé* sur S. En effet, d_1 est propre et X_0 séparé sur S, donc d est propre. D'autre part, d est quasi-fini donc de type fini, et X_0 localement noethérien, donc d est de présentation finie. Ainsi, d est un monomorphisme propre de présentation finie, donc, d'après EGA IV_3, 8.11.5, c'est une immersion fermée. Par conséquent, d'après VIB, 9.2.1, Y est séparé sur S.

[36] N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [**Ray67a**, th. 1 (iii)] et la fin de la démonstration du théorème. Signalons aussi qu'une *autre* démonstration du th. 7.1 (dans le cas d'une relation d'équivalence), basée sur l'existence des *schémas de Hilbert*, est donnée dans [**BLR90**], Ch. 8, Th. 12 ; il y est de plus montré que Y est *quasi-projectif* sur S.

et d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{U}_z) = d_1^{-1}(\mathrm{U}_z)$, et (Q, q) le conoyau de $(\widetilde{d}_0, \widetilde{d}_1)$ dans $(\mathbf{Esp.An})$, Q soit un préschéma et q un morphisme de préschémas.

D'après le lemme 6.1 (i), il suffit donc de montrer que tout point z de X_0 possède un voisinage ouvert saturé U_z tel que le groupoïde induit sur U_z par X_* possède une quasi-section. On peut même supposer que z est fermé dans la fibre de z au-dessus de S (nous dirons que z est *fermé relativement à* S) (37). L'existence de U_z résulte alors des lemmes qui suivent :

Lemme 7.2. — *Soient* T *un schéma affine* noethérien*,* X*,* Y*, et* Z *des* T*-préschémas* de type fini*,* X *étant* quasi-projectif *sur* T*, et*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, dashed] \\ \mathrm{Z} \arrow[r, dashed] & \mathrm{T} \end{tikzcd}$$

un diagramme de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{T}})$*. Soit d'autre part* z *un point de* $\mathrm{Z} \cap v(\mathrm{Y})$ *qui est fermé relativement à* T *et tel que* v *soit plat aux points de* $v^{-1}(z)$*. Alors, il existe un sous-préschéma fermé* F *de* X *tel que* $u(u^{-1}(\mathrm{F}) \cap v^{-1}(z))$ *soit* fini *non vide et que la restriction de* v *à* $u^{-1}(\mathrm{F})$ *soit plate aux points de* $v^{-1}(z)$*.*

Soit $\mathrm{T} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Il est loisible de supposer X de la forme $\operatorname{Proj} \mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est l'algèbre symétrique d'un A-module de type fini E.

278 Si $u(v^{-1}(z))$ est fini, on peut choisir F égal à X. Sinon, nous désignons par $y_1, \ldots, y_n$ les points de la fibre $v^{-1}(z)$ *associés* au faisceau structural $\mathscr{O}_{v^{-1}}(z)$ de $v^{-1}(z)$ (les y_i sont donc tels que, si $\mathscr{O}_i$ désigne l'anneau local de $v^{-1}(z)$ au point y_i, l'idéal maximal de $\mathscr{O}_i$ soit formé de diviseurs de 0). Si t est l'image de z dans T, $u(v^{-1}(z))$ est une partie constructible infinie de la fibre de t dans X. Il existe donc un point x fermé dans cette fibre, appartenant à $u(v^{-1}z)$ et distinct de $u(y_1), \ldots, u(y_n)$. Alors $\mathrm{X} \setminus \overline{\{x\}}$ est un voisinage ouvert de $u(y_1), \ldots, u(y_n)$, donc contient un voisinage ouvert de la forme $\mathrm{D}_+(f)$, où f est un élément homogène de degré d de $\mathscr{S}$ (les notations sont celles de EGA II, § 2.3).

Par conséquent, le sous-préschéma fermé $\mathrm{X}_1 = \mathrm{V}_+(f)$ défini par f contient x et évite les points $u(y_1), \ldots, u(y_n)$. Il s'ensuit évidemment que l'image réciproque $\mathrm{Y}_1 = u^{-1}(\mathrm{V}_+(f))$ de ce sous-préschéma est distincte de Y et rencontre $v^{-1}(z)$. Nous allons même montrer que la restriction v_1 de v à Y_1 est plate aux points de $v^{-1}(z)$; si $u(v_1^{-1}(z))$ est fini, on n'aura donc qu'à choisir F égal à X_1 ; sinon, on répètera l'argument qu'on vient de développer en remplaçant Y par Y_1, v par v_1, u par le morphisme u_1 induit dans Y_1 par u ; on obtiendra de cette façon une suite décroissante $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \ldots$ de sous-préschémas fermés de X ; comme une telle suite s'arrête, $u(u^{-1}(\mathrm{X}_n) \cap v^{-1}(z))$ sera fini non vide pour un certain n et on choisira F égal à X_n.

Il reste donc à montrer que v_1 est plat aux points de $v^{-1}(z)$; soient donc y un point de Y_1 au-dessus de z, $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de y dans Y, $\overline{\mathscr{O}}_y$ l'anneau local de y

(37) N.D.E. : En effet, si l'on a construit un tel voisinage ouvert U_z pour tout point z fermé relativement à S, alors la réunion de ces U_z recouvre X_0, car chaque fibre au-dessus de S du fermé complémentaire est un préschéma noethérien sans points fermés, donc vide.

dans $v^{-1}(z)$, $\mathscr{O}_{v(y)}$ l'anneau local de $v(y)$ dans Z. Si $g \in \mathscr{S}_1$ est tel que $\mathrm{D}_+(g)$ soit un voisinage de $u(y)$ dans X, soient φ l'image de f/g^d dans $\mathscr{O}_y$ et $\overline{\varphi}$ l'image de f/g^d dans $\overline{\mathscr{O}}_y$. Il résulte alors de la construction de f que $\overline{\varphi}$ ne divise pas 0 dans $\overline{\mathscr{O}}_y$; comme $\mathscr{O}_y$ est plat sur $\mathscr{O}_z$, φ ne divise pas 0 dans $\mathscr{O}_y$ et $\mathscr{O}_y/\mathscr{O}_y\varphi$ est plat sur $\mathscr{O}_z$ (SGA 1, IV.5.7). Or $\mathscr{O}_y/\mathscr{O}_y\varphi$ n'est autre que l'anneau local de y dans Y_1.

Lemme 7.3. — *Nous conservons les notations et les hypothèses de* 7.1. *Tout point z* 279
de X_0 *qui est fermé relativement à* S *possède alors un voisinage ouvert saturé* U_z *tel que le groupoïde induit par* X_* *sur* U_z *possède une quasi-section.*

L'énoncé étant local sur S, on peut supposer S affine noethérien et appliquer le lemme précédent au diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \mathrm{X}_0 \arrow[d, dashed] \\
\mathrm{X}_0 \arrow[r, dashed] & \mathrm{S}
\end{tikzcd}$$

de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. Soit donc F un sous-préschéma fermé de X_0 tel que $d_0(d_0^{-1}(\mathrm{F}) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini non vide et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{F})$ soit plate aux points de $d_1^{-1}(z)$. Notons F_1 et F_2 les images réciproques de F par d_0 et par $d_0 d_0' = d_0 d_1'$, et notons $\widetilde{d}_0$, $\widetilde{d}_1$, etc., les morphismes induits par d_0, d_1, etc. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_2 \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}'_1"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{d}'_0"'] \arrow[d, "\widetilde{d}'_2"'] & \mathrm{F}_1 \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d, "\widetilde{d}_1"'] & \mathrm{F} \arrow[d, dashed, "\widetilde{q}"] \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \arrow[r, dashed, "q"] & \mathrm{S}
\end{tikzcd} \quad ,$$

où les deux carrés de gauche sont cartésiens et la première ligne exacte (confer (0,1,2), § 1), et où q et $\widetilde{q}$ désignent les morphismes structuraux.

Montrons d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de F_1 au-dessus de z. [38] Soit en effet s l'image de z dans S ; comme F est de type fini sur S, la fibre $\widetilde{q}^{-1}(s)$ est un préschéma noethérien. D'autre part, comme $\widetilde{d}_0$ est propre, $\widetilde{d}_0(\widetilde{d}_1^{-1}(z))$ est un sous-préschéma *fermé* de $\widetilde{q}^{-1}(s)$, formé d'un nombre fini de points. Par conséquent (cf. EGA I, 6.2.2), les points de cet ensemble sont fermés dans $\widetilde{q}^{-1}(s)$ et aussi (puisque F est fermé dans X_0) dans la fibre $q^{-1}(s)$ de s dans X_0. Soit y un de ces points ; comme la fibre $q^{-1}(s)$ est de type fini sur $\kappa(s)$, elle contient des voisinages ouverts affines Spec B et Spec C de y et z, respectivement, où B et C sont des $\kappa(s)$-algèbres de type fini. Alors y et z correspondent à des idéaux maximaux $\mathfrak{p} \subset \mathrm{B}$ et $\mathfrak{q} \subset \mathrm{C}$, les corps $\mathrm{B}/\mathfrak{p}$ et $\mathrm{C}/\mathfrak{q}$ sont de degré fini sur $\kappa(s)$, et donc $(\mathrm{B}/\mathfrak{p}) \otimes_{\kappa(s)} (\mathrm{C}/\mathfrak{q})$ est une $\kappa(s)$-algèbre de dimension finie, dont les idéaux maximaux correspondent exactement aux points

[38] N.D.E. : On ajouté des détails, et mis en évidence le rôle de l'hypothèse de *propreté* de d_0 et d_1 dans le théorème 7.1. (On pourra comparer avec l'énoncé et la démonstration du théorème 8.1, où cette hypothèse de propreté est omise.)

de $X_0 \times_S X_0$ dont la deuxième (resp. première) projection est z (resp. y). Il n'y a donc
280 qu'un nombre fini de points u de $X_0 \times_S X_0$ dont la deuxième projection est z et dont la première projection appartient à $\widetilde{d}_0(\widetilde{d}_1^{-1}(z))$. Enfin, comme $X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est à fibres finies, un tel point u provient d'un nombre fini de points de X_1, d'où l'assertion cherchée.

Le morphisme $\widetilde{d}_1$ est donc quasi-fini et plat aux points de F_1 au-dessus de z. Comme $\widetilde{d}_1$ est de type fini, alors, d'après SGA 1, IV.6.10 et EGA III, 4.4.10 [(39)], l'ensemble Φ des points de F_1 où $\widetilde{d}_1$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini, est fermé dans F_1, donc dans X_1 (puisque F_1 est fermé dans X_1). Comme d_1 est propre, $\widetilde{d}_1(\Phi)$ est fermé, et il ne contient pas z, d'après ce qui précède. Posons $W = \widetilde{d}_1(F_1) \setminus \widetilde{d}_1(\Phi)$. Alors, la restriction de $\widetilde{d}_1$ à $\widetilde{d}_1^{-1}(W)$ est [(40)] de présentation finie (vu les hypothèses noethériennes), plate, propre et quasi-finie, donc finie, localement libre, et ouverte, d'après EGA III, 4.4.2, et EGA IV_2, 2.1.12 et 2.4.6. Par conséquent, $\widetilde{d}_1(F_1)$ est un *voisinage* de z, et W est le plus grand ouvert de X_0 contenu dans $\widetilde{d}_1(F_1)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini.

Nous allons voir dans le lemme 7.4 que les images réciproques de Φ par $\widetilde{d}'_1$ et $\widetilde{d}'_0$ s'identifient toutes les deux à l'ensemble des points de F_2 où $\widetilde{d}'_2$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini. Il s'ensuit que $d_0^{-1}(W) = \widetilde{d}'_2(F_2) \setminus \widetilde{d}'_2(\widetilde{d}'^{-1}_0\Phi)$ coïncide avec $d_1^{-1}(W) = \widetilde{d}'_2(F_2) \setminus \widetilde{d}'_2(\widetilde{d}'^{-1}_1\Phi)$, c'est-à-dire que W est saturé. Par conséquent, si on pose $W_1 = \widetilde{d}_1^{-1}(W)$, l'égalité $d_0^{-1}(W) = d_1^{-1}(W)$ entraîne $\widetilde{d}'^{-1}_2 d_0^{-1}(W) = \widetilde{d}'^{-1}_2 d_1^{-1}(W)$ c'est-à-dire $\widetilde{d}'^{-1}_0(W_1) = \widetilde{d}'^{-1}_1(W_1)$. Comme $\widetilde{d}_0$ est fidèlement plat et quasi-compact (car d_0 est, comme d_1, surjectif, propre et plat), et que le carré

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{\widetilde{d}'_1} & F_1 \\ {\scriptstyle \widetilde{d}'_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{d}_0} \\ F_1 & \xrightarrow{\widetilde{d}_0} & F \end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que W_1 est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(U)$, où U est un ouvert de F (SGA 1, VIII.4.4). Cet ouvert U de F est une quasi-section pour le groupoïde de base W induit par X_*. On peut donc choisir U_z égal à W.

Il nous reste donc à énoncer le lemme 7.4 dont la démonstration est classique :

281 ***Lemme 7.4***. — *Considérons un carré cartésien de préschémas*

---

(39) N.D.E. : Si $f : X \to Y$ est un morphisme *localement de type fini*, l'ensemble des $x \in X$ isolés dans leur fibre $f^{-1}(f(x))$ est *ouvert* dans X : dans EGA III, 4.4.10, ceci est déduit, pour Y localement noethérien, du « Main Theorem » de Zariski, d'autre part, pour Y arbitraire, cela découle du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3 et 13.1.4). Par conséquent, f est *quasi-fini* en x si et seulement si f est de *type fini* en x et x isolé dans $f^{-}1(f(x))$; ceci sera utilisé plus loin, cf. la N.D.E. (41).

(40) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d'"'] & \mathrm{F}_1 \arrow[d, "d"] \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, "u"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

et soit x un point de F_2*.*

(i) *Si u est plat, d' est plat en x si et seulement si d est plat en $v(x)$.*

(ii) *Si d est localement de type fini, d' est quasi-fini en x si et seulement si d est quasi-fini en $v(x)$.* (41)

Nous avons donc prouvé qu'il existe un recouvrement de X_0 par des ouverts saturés W tels que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section. (42)

D'après le lemme 6.1 et les réductions énoncées après le théorème 7.1, ceci entraîne les assertions (i) et (iii) du théorème 7.1, et le fait que p soit surjectif et ouvert, et que p et $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ soient *localement* de présentation finie. De plus, comme $\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ est quasi-projectif, donc séparé et de type fini, alors p est séparé et la démonstration du point (ii) du lemme 6.1 montre que p et $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont de présentation finie.

Pour montrer que p est propre, il reste donc à montrer qu'il est universellement fermé. Comme l'assertion est locale sur Y, on peut se placer sur un ouvert saturé W tel que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section U (puisque X_0 est recouvert par de tels ouverts). Reprenant les notations de 6.a), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W} \arrow[dr, "p"'] & \mathrm{V} \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & \mathrm{U} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathrm{Z} & \end{tikzcd},$$

où Z est un ouvert de Y, toutes les flèches sont surjectives, et q est entier. De plus, par hypothèse, $d_0 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0$ est propre, donc u, qui en est déduit par changement de base, l'est aussi. Par conséquent, r est universellement fermé, et donc p aussi, puisque v est surjectif. Ceci achève la démonstration de 7.1 (ii).

Les assertions à prouver dans 7.1 (iv) sont locales en Y ; comme X_0 est recouvert par les ouverts saturés U_z, il suffit de vérifier ces assertions en remplaçant X et Y par U_z et $\mathrm{V} = p(\mathrm{U}_z)$. Comme on l'a déjà vu au début de la démonstration de 7.1, il

(41) N.D.E. : Les conditions sont suffisantes, par changement de base (cf. EGA II, 6.2.4 (iii) et EGA IV_2, 2.1.4). Réciproquement, posons $y = d'(x)$ et $z = u(y) = d(v(x))$, et supposons *d' plat en x* et u (donc aussi v) *plat*. Alors $\mathscr{O}_{v(x)} \to \mathscr{O}_x$ est fidèlement plat, ainsi que $\mathscr{O}_z \to \mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$. Par conséquent, $\mathscr{O}_z \to \mathscr{O}_{v(x)}$ est fidèlement plat (cf. EGA IV_2, 2.2.11 (iv)). Enfin, supposons *d localement de type fini* et *d' quasi-fini en x*. Alors $v(x)$ est isolé dans sa fibre $d^{-1}(z)$, puisque x l'est dans sa fibre $d'^{-1}(y) = d^{-1}(z) \otimes_{\kappa(z)} \kappa(y)$. Donc, d'après le théorème de semi-continuité de Chevalley, il existe un voisinage ouvert de $v(x)$ dont tout point est isolé dans sa fibre (EGA IV_3, 13.1.3 et 13.1.4), de sorte que d est quasi-fini en $v(x)$.

(42) N.D.E. : On a modifié la suite, en tirant profit des ajouts faits dans le lemme 6.1.

résulte des lemmes 1.1, 1.2, et 6.1 (i), que $(\mathrm{V}_z, p|_{\mathrm{U}_z})$ est le conoyau dans (**Sch**) et dans (**Esp. An**) du groupoïde induit par X_* sur U_z. Or, l'hypothèse que $d = (d_0, d_1)$ soit un monomorphisme est préservée par le changement de base $\mathrm{U}_z \to \mathrm{X}_0$. Par conséquent, les deux premières assertions de 7.1 (iv) résultent de 6.1 (iv).

Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [**Ray67a**, th. 1 (iii)]). Par hypothèse, le groupoïde X_* provient d'une relation d'équivalence $\mathrm{R} \to \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$, et on a établi que R est *effective* (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y} = \mathrm{X}_0/\mathrm{R}$ est fidèlement plat et de présentation finie. Par conséquent, notant (M) la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie, R est (M)-effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3, (Y, p) représente le faisceau quotient de X_0 par R pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

8. Passage au quotient par une prérelation d'équivalence plate non nécessairement propre

Théorème 8.1. — [43] *Soient* S *un préschéma* noethérien *et*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_0"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$*-groupoïde tel que* d_1 *soit* plat *et* de type fini*, que* X_0 *soit de* type fini *sur*
282 S *et que le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *soit* quasi-fini.

Il existe alors un ouvert W *de* X_0 *dense, saturé et satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) *Si* $\mathrm{W}_2 \xrightarrow{w'_i} \mathrm{W}_1 \xrightarrow{w_j} \mathrm{W}$ *est le groupoïde induit par* X_* *sur* W*,* (w_0, w_1) *possède un conoyau* (V, p) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *; de plus,* (V, p) *est un conoyau de* (w_0, w_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(ii) p *est surjectif et ouvert.*

(ii′) p *et* $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ *sont de présentation finie.*

(iii) *Le morphisme* $\mathrm{W}_1 \to \mathrm{W} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{W}$ *de composantes* w_0 *et* w_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $\mathrm{W}_1 \to \mathrm{W} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{W}$ *est un isomorphisme et* p *est fidèlement plat.*

---

[43] N.D.E. : Il existe un *plus grand* ouvert W de X_0 satisfaisant les conclusions du théorème. En effet, soient W un ouvert comme dans le théorème et $\mathrm{W}^\sharp$ un ouvert dense et saturé contenu dans W. Puisque p est ouvert, $\mathrm{V}^\sharp = p(\mathrm{W}^\sharp)$ est un ouvert de V, et $\mathrm{W}^\sharp = p^{-1}(\mathrm{V}^\sharp)$, puisque $\mathrm{W}^\sharp$ est saturé. D'après le lemme 1.1, $\mathrm{V}^\sharp$ est un conoyau pour le groupoïde induit sur $\mathrm{W}^\sharp$. Ainsi on peut recoller suivant leur intersection $\mathrm{W}^\sharp$ deux ouverts W et W′ vérifiant les conclusions du théorème, et les conditions (i), (ii), (iii), (iv), ainsi que le fait que p et $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ soient localement de présentation finie, sont préservés. La conclusion (ii′) découle, comme dans la démonstration de 6.1 (ii), de l'hypothèse que X_0 soit de type fini sur S noethérien.

Par ailleurs, les lemmes 1.1 et 1.2 montrent aussi que la réunion de tous les ouverts saturés U de X_0 tels que l'ouvert $p(\mathrm{U})$ de Y soit un préschéma et que $p|_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to p(\mathrm{U})$ soit un morphisme de préschémas, est le plus grand ouvert saturé Ω de X_0 vérifiant la condition (i) de 8.1. Le théorème

Nous allons montrer qu'on peut choisir W de telle façon que le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde W_* induit par X_* possède une quasi-section (confer § 7). Le théorème 8.1 résultera alors du lemme 6.1.

Admettons provisoirement que, pour tout point $z \in \mathrm{X}_0$ fermé relativement à S (confer § 7), il existe un ouvert saturé W_z, qui possède une quasi-section et rencontre toutes les composantes irréductibles de X_0 passant par z. Alors l'extérieur $\mathrm{X}_0 \setminus \overline{\mathrm{W}}_z$ de W_z dans X_0 est saturé (car le saturé $d_1(d_0^{-1}(\mathrm{X}_0 \setminus \overline{\mathrm{W}}_z))$ de cet extérieur est ouvert et ne rencontre pas W_z). Si cet extérieur n'est pas vide, on peut y choisir un point z' fermé relativement à S et associer à z' un ouvert $\mathrm{W}_{z'}$ comme ci-dessus ; on peut d'ailleurs supposer $\mathrm{W}_{z'}$ contenu dans $\mathrm{X}_0 \setminus \overline{\mathrm{W}}_z$; alors W_z et $\mathrm{W}_{z'}$ sont disjoints et le groupoïde induit par X_* sur $\mathrm{W}_z \cup \mathrm{W}_{z'}$ possède une quasi-section. Le processus doit s'arrêter parce que X_0 n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Il reste donc à construire W_z.

Pour cela il est loisible de supposer S affine ; dans ce cas, soient y un point de X_1 tel que $d_1 y = z$, X un ouvert affine de X_0 contenant $d_0 y$, Y l'image réciproque de X dans X_1 par d_0, enfin $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_0$ les morphismes induits par d_0 **283**
et d_1. Comme X est affine, donc quasi-projectif, on peut appliquer le lemme 7.2 : il y a donc un sous-préschéma F de X_0 tel que $d_0^{-1}(\mathrm{F}) \cap d_1^{-1}(z)$ soit non vide, que $d_0(d_0^{-1}(\mathrm{F}) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{F})$ soit plate aux points de $v^{-1}(z)$. Ce fait nous permet de reprendre les notations du lemme 7.3 en désignant par F_1 et F_2 les images réciproques de F dans X_1 et X_2, etc.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_2 \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}'_1"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{d}'_0"'] \arrow[d, "\widetilde{d}'_2"'] & \mathrm{F}_1 \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d, "\widetilde{d}_1"'] & \mathrm{F} \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd}$$
.

8.1 montre que Ω contient un ouvert W dense, mais il n'est pas immédiat que Ω vérifie les propriétés (ii) à (iv).

À ce sujet, le lecteur pourra consulter [**Ray67a**], [**Ray67b**], et l'appendice I de [**An73**], qui donnent des résultats plus précis, et étudient la question de la représentabilité du S-*faisceau* quotient (fppf) $\widetilde{\mathrm{X}/\mathrm{R}}$ (où l'on a noté R le groupoïde X_* de base $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$), tout ceci sous des hypothèses plus faibles (S un préschéma arbitraire, X un préschéma localement de type fini sur S, et R un S-groupoïde de base X tel que d_0 (et donc d_1) soit plat et de présentation finie). Citons en particulier les résultats suivants. Si $\widetilde{\mathrm{X}/\mathrm{R}}$ est représentable par un S-préschéma Y, alors Y est aussi le conoyau dans la catégorie (**Esp. An**). La réciproque est en général fausse (cf. l'exemple 0.4 de [**Mum65**], Chap. 0, § 3, cité dans [**Ray67a**], Rem. 1), mais est vraie si $d = (d_0, d_1)$ est une immersion. Sous cette hypothèse, le morphisme $p : \Omega \to \mathrm{Z} := \Omega/\mathrm{R}_\Omega$ est fidèlement plat et de présentation finie ; si de plus S est localement noethérien, alors un point x de codimension 1 dans X appartient à Ω si et seulement si le graphe du groupoïde induit sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$ est fermé. Pour tout ceci, voir [**Ray67a**], Prop. 1, [**Ray67b**], Prop. 1 et Théorèmes 2, 1 et 4, et [**An73**], Théorèmes 5 et 6 pages 66–67, et Prop. 3.3.1 page 49. (Voir aussi, dans le cas d'une action d'un groupe algébrique sur un corps k algébriquement clos, l'article [**DR81**].)

On montre alors comme en 7.3 que $\widetilde{d}_1$ est quasi-fini aux points de $\widetilde{d}_1^{-1}(z)$ de sorte qu'il est naturel de considérer l'ouvert F'_1 de F_1 formé des points où $\widetilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini. D'après 7.4, les deux images réciproques de F'_1 par $\widetilde{d}'_1$ et $\widetilde{d}'_0$ sont formées des points de F_2 où $\widetilde{d}'_2$ est plat et quasi-fini, de sorte que ces deux images réciproques coïncident et que F'_1 est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(\mathrm{F}')$, où F' est un ouvert de F (SGA 1, VIII.4.4). Quitte à remplacer F par F', on peut donc supposer que $\widetilde{d}_1$ est quasi-fini et plat. Dans ce cas, nous désignons par W_z le plus grand ouvert de $\widetilde{d}_1(\mathrm{F}_1)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est *fini* et plat.

Cet ouvert W_z ne contient pas nécessairement z, mais il contient les points génériques des composantes irréductibles de X_0 passant par z [(44)]. Comme d_0 (resp. d_1) est fidèlement plat et de présentation finie (donc ouvert), il résulte alors de SGA 1, VIII.5.7, que $d_0^{-1}(\mathrm{W}_z)$ et $d_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ coïncident tous les deux avec le plus grand ouvert de $\widetilde{d}'_2(\mathrm{F}_2)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}'_2$ est fini et plat. On voit par conséquent comme en 7.3 que les deux images réciproques de $\widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ par $\widetilde{d}'_0$ et $\widetilde{d}'_1$ coïncident, donc que $\widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(\mathrm{U})$ où U est un ouvert de F qui est une quasi-section pour le groupoïde induit par X_* sur W_z.

9. Élimination des hypothèses noethériennes dans le théorème 7.1

284

a) Reprenons les notations et les hypothèses du lemme 6.1 et soit $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un changement de base arbitraire. Désignons par $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ le morphisme de S'-préschémas déduit par l'extension π de la base d'un morphisme de S-préschémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Avec cette convention, $p' : \mathrm{X}'_0 \to \mathrm{Y}'$ est surjectif ainsi que le morphisme $\mathrm{X}'_1 \to \mathrm{X}'_0 \times_{\mathrm{Y}'} \mathrm{X}'_0$ de composantes d'_0 et d'_1. L'ensemble sous-jacent à Y' s'identifie donc au quotient de l'ensemble sous-jacent à X'_0 par la relation d'équivalence définie dans X'_0 par le S'-groupoïde X'_*. De plus, $q' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y}'$ est entier surjectif de sorte que la topologie de Y' est la topologie quotient de celle de U', donc aussi de celle de X'_0 (confer la preuve du § 6.c).

D'un autre côté, il est clair que U' est une quasi-section du S'-groupoïde X'_* auquel on peut donc appliquer le lemme 6.1. En particulier, X'_* possède un conoyau (Y_1, p_1) et l'espace topologique sous-jacent à Y_1 s'obtient à partir de l'espace topologique sous-jacent à X'_0 en identifiant les points équivalents pour la relation définie par X'_*. Il s'ensuit que le morphisme canonique $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ est un homéomorphisme ; je dis même que $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ *est un homéomorphisme universel* : en effet, si S'' est au-dessus de S' soit Y_2 le conoyau de $(d_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'', d_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'')$. D'après ce qui précède, appliqué aux changements de base $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$,

$$\mathrm{Y}_2 \longrightarrow \mathrm{Y}_1 \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{S}'' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}_2 \longrightarrow \mathrm{Y} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'' \simeq \mathrm{Y}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{S}''$$

sont des homéomorphismes de sorte qu'il en va de même pour $\mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}'' \to \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}''$.

---

(44) N.D.E. : En effet, soit η un tel point générique. Les hypothèses entraînent que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0,\eta}$ est un anneau local artinien, et $\mathscr{O}_{\mathrm{F}_1,\eta}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0,\eta}$-module de type fini. Donc, d'après SGA 1, VIII.6.5, il existe un voisinage ouvert de η au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est fini.

b) Des remarques analogues s'appliquent évidemment au cas où le groupoïde X_* possède « localement » des quasi-sections (confer la démonstration du théorème 7.1).

[45] Par exemple, on a le théorème suivant : **285**

Théorème 7.1.bis. — *Soient* S *un préschéma arbitraire et* $X_2 \overset{d'_j}{\longrightarrow} X_1 \overset{d_i}{\longrightarrow} X_0$ *un* $(\mathbf{Sch}_{/S})$*-groupoïde tel que :* X_0 *soit* de présentation finie *et* quasi-projectif *sur* S*,* d_1 de présentation finie, propre *et* plat*, le morphisme* $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \to X_0 \times_S X_0$ quasi-fini. *Alors :*

(1) *Tout point* x *de* X_0 *a un voisinage ouvert* W *qui est saturé et tel que le groupoïde induit par* X_* *dans* W *possède une quasi-section.*

(2) *Soit* (Y, p) *le conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés. Alors* Y *est un préschéma,* p *un morphisme de préschémas, et* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$*.*

(3) p *est surjectif, ouvert et universellement fermé.*

(4) *Le morphisme* $d : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(5) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence, alors :*

(a) $d : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *est un isomorphisme et* p *est fidèlement plat.*

(b) p *et* $Y \to S$ *sont de présentation finie, et* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des faisceaux pour la topologie* (fppf)*.*

Démonstration. Pour (1), la question est locale sur S de sorte qu'on peut supposer $S = \operatorname{Spec} B$ affine. Il existe alors un anneau A de type fini sur $\mathbb{Z}$, un morphisme $S \to T = \operatorname{Spec} A$ et un $(\mathbf{Sch}_{/T})$-groupoïde Z_* tel que X_* s'identifie à $Z_* \times_T S$ (cf. EGA IV_3, 8.8.3, appliqué à $S_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $S_i = \operatorname{Spec} A_i$, les A_i parcourant les sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de B). De plus, on peut supposer que Z_* vérifie les conditions du théorème 7.1 (cf. EGA IV_3, 8.10.5). Par conséquent, Z_* possède « localement » des quasi-sections.

Il en est donc de même pour X_*, d'après a), et les assertions (2), (3), (4) et (5) (a) découlent de 6.1, comme dans la démonstration de 7.1.

c) Montrons que $Y \to S$ est de présentation finie. [46] Par hypothèse, $(d_0^{X_*}, d_1^{X_*})$ est un couple d'équivalence, c.-à-d., $d^{X_*} : X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est un monomorphisme. D'après EGA IV_3, 8.10.5, on peut supposer, quitte à agrandir A, que $d^{Z_*} : Z_1 \to Z_0 \times_T Z_0$ est un monomorphisme. Comme $T = \operatorname{Spec} A$, avec A noethérien, il résulte alors du théorème 7.1 que le groupoïde Z_* possède un conoyau (Q, q) dans $(\mathbf{Sch}_{/T})$, que q et $Q \to T$ sont de présentation finie, et de plus que $q : Z_0 \to Q$ est fidèlement plat et que d^{Z_*} induit un isomorphisme $Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_0 \times_Q Z_0$. Posons $Q_S = Q \times_T S$.

Comme $X_i \cong Z_i \times_T S$, on obtient donc un isomorphisme :

$$d^Z_* \underset{T}{\times} S : X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \underset{Q_S}{\times} X_0.$$

[45] N.D.E. : On a détaillé la suite, pour mettre en évidence le théorème 7.1.bis ci-dessous.

[46] N.D.E. : L'original énonce que ceci découle de proposition 9.1 qui suit. Nous n'avons pas été en mesure de reconstruire cet argument. La démonstration qui suit nous a été signalée par O. Gabber.

Notons ϕ son inverse, et soit π le morphisme canonique

$$\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}_0 \longrightarrow \mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Q}_\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}_0.$$

Alors $\phi \circ \pi$ est l'inverse de $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_0 \times_\mathrm{Y} \mathrm{X}_0$. Il en résulte que la relation d'équivalence définie par X_*, c.-à-d., le monomorphisme

$$\mathrm{X}_1 \xrightarrow[\sim]{d_0\boxtimes d_1} \mathrm{X}_0 \times_\mathrm{Y} \mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}_0 \times_\mathrm{S} \mathrm{X}_0$$

s'identifie à la relation d'équivalence $\mathscr{R}(q_\mathrm{S})$ définie par le morphisme $q_\mathrm{S} : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Q}_\mathrm{S}$. Comme ce dernier est fidèlement plat et de présentation finie, donc un épimorphisme effectif universel, $\mathscr{R}(q_\mathrm{S})$ a pour quotient Q_S (cf. IV.3.3.2). Par suite, $\mathrm{Y} \cong \mathrm{Q} \times_\mathrm{T} \mathrm{S}$, donc $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ et p sont de présentation finie. De plus, d'après IV.6.3.3, (Y, p) est aussi un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf).

Proposition 9.1. — *Considérons des morphismes de préschémas*

$$\mathrm{X}_0 \xrightarrow{p} \mathrm{Y} \xrightarrow{q} \mathrm{S}$$

tels que qp soit de type fini (resp. de présentation finie) et p fidèlement plat de présentation finie. Alors q est de type fini (resp. de présentation finie)[(*)].

Comme p est surjectif et qp quasi-compact, q est quasi-compact. Donc on peut supposer S, Y et X_0 affines d'anneaux A, B, C. On a $\mathrm{B} = \varinjlim \mathrm{B}_i$, où les B_i parcourent les sous-A-algèbres de type fini de B. Comme C est de présentation finie sur B, il existe un indice i_0, une B_{i_0}-algèbre de présentation finie C_{i_0} et un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_{i_0} \otimes_{\mathrm{B}_{i_0}} \mathrm{B}$; si on pose $\mathrm{C}_i = \mathrm{C}_{i_0} \otimes_{\mathrm{B}_{i_0}} \mathrm{B}_i$ pour $i \geqslant i_0$, on a donc $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_i \otimes_{\mathrm{B}_i} \mathrm{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r] & \mathrm{C} \\ \mathrm{B}_i \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{C}_i \arrow[u] \\ \mathrm{A} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Comme C est fidèlement plat sur B, on tire de EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 (vi) l'existence
286 d'un $i_1 \geqslant i_0$ tel que C_{i_1} soit fidèlement plat sur B_{i_1} ; par conséquent C_i est fidèlement plat sur B_i pour $i \geqslant i_1$. Pour $i \geqslant i_1$, l'application canonique $\mathrm{C}_i \to \mathrm{C}$ est alors injective, car déduite de $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}$ par extension fidèlement plate de la base.

Si C est de type fini sur A, il s'ensuit qu'il existe un indice $j \geqslant i_1$ tel que $\mathrm{C}_j = \mathrm{C}$ d'où $\mathrm{B}_j = \mathrm{B}$, puisque C_j est fidèlement plat sur B_j. Par conséquent, B est de type fini sur A.

Supposons maintenant C de présentation finie sur A. D'après ce qui précède, B est de type fini sur A, donc de la forme $\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{I}$ où $\overline{\mathrm{B}}$ est une algèbre de polynômes sur A à un nombre fini d'indéterminées, et I un idéal de $\overline{\mathrm{B}}$. Alors I est réunion de ses

[(*)]Cf. EGA IV_4, 17.7.5 pour un résultat plus général.

sous-idéaux de type fini I_α ; d'où l'égalité $B = \varinjlim B_\alpha$ avec $B_\alpha = \overline{B}/I_\alpha$. Procédant comme plus haut, il existe un indice α_0, une B_{α_0}-algèbre de présentation finie C_{α_0} et un isomorphisme $C \simeq C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B$. Pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, on pose encore $C_\alpha = C_{\alpha_0} \otimes_{B_{\alpha_0}} B_\alpha$ de telle sorte qu'on a $C \simeq C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$ pour $\alpha \geqslant \alpha_0$. Toujours d'après EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 (vi), on conclut comme plus haut que C_α est fidèlement plat sur B_α pour α assez grand. Dans ce cas, le noyau de l'application $C_\alpha \to C$ (resp. $C_\alpha \to C_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$) s'identifie à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ (resp. à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$).

Comme C_α et C sont de présentation finie sur A et que $C_\alpha \to C$ est surjectif, $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ est un idéal de type fini [47] et est réunion des idéaux $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$. On a donc $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ pour β assez grand, d'où aussi $I_\beta = I$ (car C_α est fidèlement plat sur B_α) ; donc B est de présentation finie sur A.

10. Complément : quotients par un préschéma en groupes

Le but de cette section, rédigée suivant des indications de M. Raynaud, est d'appliquer les théorèmes précédents au cas d'une action d'un schéma en groupes. Pour la commodité du lecteur, on a reproduit dans les numéros 10.1.1 à 10.1.3 ci-dessous les énoncés 2.1 à 2.3 de l'Exp. XVI.

10.1. Théorèmes de représentabilité des quotients. — « Rappelons » d'abord le résultat suivant :

Théorème 10.1.1. — *Soient* S *un préschéma,* X *et* Y *deux* S*-préschémas,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme. On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

α) *Le morphisme f est localement de présentation finie.*

β) *Le préschéma* S *est localement noethérien et* X *est localement de type fini sur* S.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Il existe un* S*-préschéma* X′ *et une factorisation de f :*

$$f : X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{f''} Y,$$

où f' est un S*-morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie et f'' est un* monomorphisme.

ii) *La* (*première*) *projection :*

$$p_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$$

est un morphisme plat.

De plus, si les conditions précédentes sont réalisées, (X', f') *est un quotient de* X *par la relation d'équivalence définie par f* (*pour la topologie* fpqc)*, de sorte que la factorisation $f = f'' \circ f'$ de* i) *est unique à isomorphisme près.*

Le cas Y localement noethérien, X de type fini sur Y, est traité dans [**Mur65**], cor. 2 du th. 2. Nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas.

Faisons d'abord quelques remarques :

[47] N.D.E. : cf. EGA IV_1, 1.4.4.

a) L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. En effet, la première projection :

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

se factorise à travers $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$:

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{p_1} \mathrm{X}$$

Le morphisme u est un isomorphisme, puisque f'' est un monomorphisme, et p_1' est plat, puisque f' est plat, donc p_1 est plat.

b) Les assertions de 10.1.1 sont locales sur Y (donc sont locales sur S) ; elles sont aussi locales sur X, comme il résulte facilement du fait qu'un morphisme plat et localement de présentation finie est ouvert (EGA IV_3, 11.3.1).

c) Sous les hypothèses de 10.1.1 α), vu ce qui précède, nous sommes ramenés au cas où X et Y sont affines et f de présentation finie. Quitte à remplacer S par Y, on peut supposer X et Y de présentation finie sur S. On se ramène alors au cas S noethérien grâce à EGA IV_3, 11.2.6.

d) Sous les hypothèses de 10.1.1 β), on peut supposer S, X, Y affines, S noethérien et X de type fini sur S. Considérons Y comme limite projective filtrante de schémas affines Y_i de type fini sur S. Les schémas $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X}$ forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, dont la limite projective est $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est noethérien, on a $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ pour i assez grand, de sorte que $f_i : \mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_i$ satisfait aux hypothèses de 10.1.1 ii) s'il en est ainsi de f. Comme la relation d'équivalence définie par f sur X coïncide avec celle définie par f_i, il est clair qu'il suffit de prouver ii) $\Rightarrow$ i) pour f_i, ce qui nous ramène au cas où Y est de type fini sur S.

Application aux préschémas en groupes. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes localement de présentation finie sur S, qui opère (à gauche) sur un S-préschéma X. Si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ possède une section ξ, on rappelle que le stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\xi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes de G (cf. I, 2.3.3).

Théorème 10.1.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, qui opère sur un* S*-préschéma* X.

On suppose que $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *possède une section* ξ*, telle que le stabilisateur* H *de* ξ *dans* G *soit* plat sur S. *Si l'une des hypothèses ci-dessous est vérifiée :*

a) X *est localement de type fini sur* S*,*

b) S *est localement noethérien,*

alors le faisceau (fppf) *quotient* G/H *est représentable par un* S*-préschéma, localement de présentation finie sur* S*, et le* S*-morphisme :*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}, \qquad g \mapsto g \cdot \xi$$

se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{G/H} \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

où p *est la projection canonique, qui est un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie, et* i *est un monomorphisme.*

Démonstration. Le morphisme f fait de G un X-préschéma. Par définition du stabilisateur de ξ, le morphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{G}, \qquad (g,h) \mapsto (g, gh)$$

est un isomorphisme. Comme H est plat sur S, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est plat sur G, donc la première projection $p_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme plat. Par ailleurs, si X est localement de type fini sur S, f est localement de présentation finie (EGA IV_1, 1.4.3 (v)) et sinon, S est supposé localement noethérien. Il suffit alors d'appliquer 10.1.1 au morphisme f. Il reste à voir que G/H est localement de présentation finie sur S, mais cela résulte immédiatement de V, 9.1.

Corollaire 10.1.3. — *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-préschémas en groupes. On suppose* G *localement de présentation finie sur* S *et que, ou bien* H *est localement de type fini sur* S*, ou bien* S *est localement noethérien.*

Alors, si $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est* plat *sur* S*, le groupe quotient* G/K *est représentable par un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, et* u *se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{H} \\ & \mathrm{G}/\mathrm{K} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p *est la projection canonique et* i *un monomorphisme.*

Démonstration : on applique 10.1.2 en prenant X = H et pour ξ la section unité de H.

10.2. Stabilisateur de la diagonale.— Soient S un préschéma *noethérien*, X un S-préschéma de *type fini*, et G un S-préschéma en groupes *plat* et de *type fini*, agissant à gauche sur X, i.e. on a une S-action $d_0 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Notons $d_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la projection sur le second facteur. Suivant le § 2.a), on dispose du groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"] \arrow[r, "\mu\times\mathrm{X}" description] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{G}\times d_0"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

dont on rappelle que le conoyau, s'il existe, est noté $\mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$.

Définition 10.2.1. — On désigne par $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ le *stabilisateur de la section diagonale*, i.e. le X-préschéma défini par le produit cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, "(d_0, d_1)"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \end{tikzcd} \quad .$$

Alors F est un sous-préschéma en groupes de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est de type fini sur S noethérien, donc noethérien, F est de type fini sur S et sur X (EGA I, 6.3.5 et 6.3.6). En outre, si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est *séparé*, F est un sous-X-préschéma en groupes *fermé* de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$.

On rappelle que l'on dit que G *opère librement* sur X si le morphisme

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{(d_0,d_1)} \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

est un monomorphisme (cf. Exp. III, 3.2.1). Il revient au même de dire que F est le schéma en groupes trivial de base X.

10.3. Cas où F est quasi-fini sur X. — Comme F est de type fini sur X, il est quasi-fini sur X si et seulement si les fixateurs des points géométriques de X sont finis.

Théorème 10.3.1. — [48] *Sous les hypothèses de* 10.2, *on suppose que* F *est* quasi-fini *sur* X. *Alors il existe un ouvert* U *de* X, *dense et* G*-saturé, qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$, *le conoyau* $\mathrm{V} = \mathrm{G}\backslash\mathrm{U}$ *existe ; de plus, le schéma* V *est un quotient dans la catégorie des espaces annelés.*

(ii) $p : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est surjectif, ouvert, et de présentation finie.*

(iii) V *est de présentation finie sur* S.

(iv) *Le morphisme* $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{U}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, *est surjectif.*

(v) *Supposons de plus que* G *opère* librement *sur* X. *Alors* $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est un* G*-torseur* (*à gauche*) *localement trivial pour la topologie* (fppf). *En particulier,* $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est fidèlement plat.* [49]

Démonstration. On a supposé que le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, est quasi-fini. Le théorème 8.1 s'applique donc au groupoïde défini par (X, G). Ainsi il existe un ouvert dense saturé $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ tel que le quotient $\mathrm{G}\backslash\mathrm{U}$ existe ; il satisfait les propriétés (i), (ii), (iii).

Pour établir (iv), on se souvient que G opère librement sur X si et seulement si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence (III.3.2.1). Dans ce cas, le théorème 8.1 (iv) montre que le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{U}$ est un isomorphisme et que p est fidèlement plat et de présentation finie. Ainsi, U est un G-torseur de base V, localement trivial pour la topologie (fppf).

10.4. Cas où F plat sur X. — On note

$$d = (d_0, d_1) : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

le morphisme $d(g, x) = (gx, x)$. Rappelons que le graphe faisceautique $\widetilde{\Gamma}$ de la relation d'équivalence associée à (X, G) est le sous-S-faisceau (fppf) de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ image de (d_0, d_1). C'est le faisceau (fppf) associé au foncteur graphe :

$$\mathrm{T} \mapsto \Gamma(\mathrm{T}) = \{(x_0, x_1) \in \mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}(\mathrm{T}) \mid x_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{T})x_1\}.$$

---

[48] N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert U de X satisfaisant les conclusions du théorème, cf. la N.D.E. (43).

[49] N.D.E. : Si l'on suppose de plus que G est un S-schéma en groupes réductifs et que l'action (libre) de G sur X est linéarisable, on sait alors que $\mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$ est représentable et que $\mathrm{X} \to \mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$ est un G-torseur (à gauche). Ceci découle de résultats de Raynaud et Seshadri et se trouve dans l'article [**CTS79**] (proposition 6.11).

Posons $G_X = G \times_S X$. Pour tout S-préschéma T, on a une application surjective
$$G_X(T) \longrightarrow \Gamma(T), \qquad (g, x) \mapsto (gx, x),$$
qui induit une application bijective
$$\phi(T) : G_X(T)/F(T) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T);$$
en effet, si $(g, x), (g', x') \in G_X(T)$ vérifient $(gx, x) = (g'x', x')$, alors $x' = x$ et $g^{-1}g'x = x$, donc $(g^{-1}g'x, x) \in F(T)$ et (g, x) et (g', x) ont même image dans $G_X(T)/F_X(T)$.

Par définition (cf. IV, 4.4.1 (ii) ou preuve de 5.2.1), le *faisceau-quotient* G_X/F est le faisceau (fppf) associé au préfaisceau
$$T \longmapsto G_X(T)/F(T) \cong \Gamma(T).$$
On a donc un isomorphisme de faisceaux $\phi : G_X/F \to \widetilde{\Gamma}$.

Théorème 10.4.1. — [50] *Sous les hypothèses de* 10.2, *on a :*

a) $\widetilde{\Gamma}$ *est représentable si et seulement si* F *est plat sur* X.

b) *On suppose que* F *est plat sur* X. *Alors les morphismes induits par* d_1 *et* d_0 *:*
$$G_X/F \underset{\overline{d}_0}{\overset{\overline{d}_1}{\rightrightarrows}} X$$
sont fidèlement plats et de présentation finie.

Démonstration de a) : Supposons le faisceau (fppf) G_X/F représentable par un X-schéma Y. Alors, d'après IV.6.3.3, $p : G_X \to Y$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, et le second carré du diagramme ci-dessous est cartésien :
$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & F \times_X G_X & \longrightarrow & G_X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{e_X} & G_X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$
le premier carré étant obtenu par changement de base par la section unité $e_X : X \to G_X$. Comme p est fidèlement plat et localement de présentation finie, il en est de même de $F \to X$.

Réciproquement, supposons F plat sur X. Posons $X^2 = X \times_S X$. Le morphisme $d : G_X \to X^2$ permet de former le produit fibré :
$$\begin{array}{ccc} G_X \times_{X^2} G_X & \longrightarrow & G_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_X & \longrightarrow & X^2 \end{array} \quad .$$

[50] N.D.E. : C'est le point (2) du théorème 3 de [**Ray67b**]. Dans cette Note est esquissée une autre démonstration du th. 10.1.1 ; ceci sera développé ailleurs.

Alors le morphisme $G_X \times_{X^2} G_X \to X^2$ est un $F \times_X X^2$-torseur sur X^2, et est donc plat et de type fini (car F l'est). D'après le théorème 10.1.1, le morphisme d se factorise de façon unique :

$$G_X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\tau} X \underset{S}{\times} X,$$

où ψ est fidèlement plat (de type fini) et τ est un monomorphisme de préschémas.

Par suite, le morphisme de faisceaux $\psi : G_X \to Y$ est donc F-invariant et il vient un morphisme de faisceaux $\overline{\psi} : G_X/F \to Y$. Par ailleurs, vu que ψ est fidèlement plat (de type fini), le monomorphisme de faiceaux τ se factorise par le faisceau image de d, c'est-à-dire $\widetilde{\Gamma}$. L'isomorphisme de faisceaux $G_X/F \cong \widetilde{\Gamma}$ se factorise donc par le monomorphisme $Y \to \widetilde{\Gamma}$. On conclut que Y représente G_X/F.

Démonstration de b) : On suppose F plat sur X. Alors, d'après a) et sa preuve, G_X/F est représentable, et le morphisme $p : G_X \to G_X/F$ est fidèlement plat et de présentation finie. D'autre part, les morphismes $d_i : G_X \to X$ $(i = 0, 1)$ sont fidèlement plats et de présentation finie par hypothèse. Comme $d_i = \overline{d}_i \circ p$, il résulte de EGA IV_2, 2.2.13 (iii) et EGA IV_3, 11.3.16, que $\overline{d}_i$ est fidèlement plat et de présentation finie.

Théorème 10.4.2. — [51] *Sous les hypothèses de* 10.2, *supposons* F plat *sur* X. *Alors il existe un ouvert dense saturé* U *de* X *tel que le quotient* (fppf) $V = G\backslash U$ *soit un* S-*schéma de type fini et* $U \to V$ *soit fidèlement plat et de présentation finie.*

Démonstration. Le théorème 10.4.1 montre que $G_X/F \cong \widetilde{\Gamma}$ est représentable. Alors le faisceau (fppf) $G\backslash X$ s'identifie au faisceau quotient de

$$G_X/F \overset{\overline{d}_1}{\underset{\overline{d}_0}{\rightrightarrows}} X.$$

D'après ce qui précède, $\overline{d}_i : G_X/F \to X$ est fidèlement plat et de présentation finie $(i = 0, 1)$, et le morphisme

$$G_X/F \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Gamma} \hookrightarrow X \times_S X$$

est un monomorphisme, c.-à-d., $(\overline{d}_0, \overline{d}_1)$ est un couple d'équivalence. Par conséquent, le théorème 8.1 s'applique. Il existe donc un ouvert U de X, dense et saturé, tel que le quotient (fppf) $V = G\backslash U$ soit un S-schéma de type fini, et $U \to V$ soit fidèlement plat et de présentation finie.

Compte-tenu du théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.3), on obtient le

Corollaire 10.4.3. — *Sous les hypothèses de* 10.2, *supposons* X réduit. *Alors il existe un ouvert dense saturé* U *de* X *tel que le quotient* (fppf) $G\backslash U$ *soit un* S-*schéma de type fini et* $U \to G\backslash U$ *soit fidèlement plat et de présentation finie.*

---

[51] N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert U de X satisfaisant les conclusions du théorème ; en outre, un point $x \in X$ de codimension 1 dans X appartient à U si et seulement si le morphisme $(G_X/F) \times_X \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ est une immersion fermée, cf. la N.D.E. (43).

Bibliographie

[52]

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Springer-Verlag, 1990.

[CTS79] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105-134.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[DR81] J. Dixmier, M. Raynaud, *Sur le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique*, pp. 327-344 *in* : Mathematical Analysis and Applications (L. Schwartz 65th birthday, éd. L. Nachbin), Adv. Math. Suppl. Stud., Vol. 7A, 1981.

[Hi62] H. Hironaka, *An example of a non-Kählerian complex analytic deformation of Kählerian complex structures*, Ann. of Math. **75** (1962), n°1, 190-208.

[KM97] S. Keel, S. Mori, *Quotient by groupoids*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 193-213.

[Ko97] J. Kollár, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 33-79.

[Mum65] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965 ; 2ème (resp. 3ème) éd. avec J. Fogarty (resp. et F. Kirwan), 1982 (resp. 1994).

[Mur65] J. P. Murre, *Representation of unramified functors. Applications* (*according to unpublished results of A. Grothendieck*, Sém. Bourbaki, Vol. 9, Exp. **294** (1965), Soc. Math. France, 1995.

[Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

[52] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé