CARACTÉRISATION DES FORMES MODULAIRES PAR DES VALEURS DE FONCTIONS L

FRANÇOIS MARTIN ET EMMANUEL ROYER

Résumé

On présente une application de la théorie des périodes à la détermination des formes modulaires par les valeurs de certaines de leurs fonctions L.

Abstract

We give an application of the theory of periods to the determination of modular forms by values of some of their L functions.

Introduction

Soit Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$ et k un entier, on note $S(2k,\Gamma)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $2k$ sur Γ (voir le §2.1.2). Si $(\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n)$ est un ensemble de formes linéaires sur $S(2k,\Gamma)$, on dit que cet ensemble caractérise la forme $f\in S(2k,\Gamma)$ si on a l'implication

$$\forall g\in S(2k,\Gamma),\ \begin{cases}\mathcal{L}_1(f) &= \mathcal{L}_1(g)\\ &\vdots\\ \mathcal{L}_n(f) &= \mathcal{L}_n(g)\end{cases} \Longrightarrow (f=g).$$

Si $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ est une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ et $f\in S(2k,\Gamma)$, on définit une fonction $f|_A$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ en posant

$$f|_A(z)=(cz+d)^{-2k}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

À cette fonction, on peut associer une fonction L dont les valeurs intéressantes sont les valeurs aux entiers de $[1,2k-1]$ (voir §2.2). On s'intéresse dans cet article aux formes linéaires $f\mapsto L(f|_A,\ell)$ lorsque A parcourt un ensemble de représentants du quotient $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$. On prouve le

Théorème 1. *Soit Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$ contenant $-I$ et k un entier strictement positif. Soit $f\in S(2k,\Gamma)$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $SL(2,\mathbb{Z})\times\{1,\dots,2k-1\}$ de cardinal*

$$\frac{2k-1}{6}\nu_0(\Gamma)+\varepsilon_S(2k)\frac{\nu_2(\Gamma)}{2}+2\varepsilon_U(2k)\frac{\nu_3(\Gamma)}{3}+\delta(k=1)$$

tel que

$$[\forall(A,\ell)\in\mathcal{R},\ \forall g\in S(2k,\Gamma),\ L(f|_A,\ell)=L(g|_A,\ell)]\Rightarrow(f=g).$$

Dans cet énoncé, $\delta(k=1)$ vaut 1 si $k=1$ et 0 sinon, et $\nu_0(\Gamma)=[SL(2,\mathbb{Z}):\Gamma]$. Les fonctions ε_S et ε_U sont définies par

$$\varepsilon_S(2k)=\begin{cases}1 & \text{si } 2k\equiv 0 \pmod 4\,;\\ -1 & \text{si } 2k\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

Date: 23 août 2001.

et

$$\varepsilon_U(2k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k \equiv 1 \pmod 3\,; \\ 1 & \text{si } 2k \equiv 0 \pmod 3\,; \\ -1 & \text{si } 2k \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Le nombre $\nu_2(\Gamma)$ (*resp.* $\nu_3(\Gamma)$) est le nombre de points elliptiques d'ordre 2 (*resp.* d'ordre 3) de Γ. À titre d'exemple, on a

$$\nu_2\bigl(\Gamma_0(m)\bigr) = \begin{cases} 0 & \text{si } 4|m\,; \\ \prod_{p|m} \left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\nu_3\bigl(\Gamma_0(m)\bigr) = \begin{cases} 0 & \text{si } 9|m\,; \\ \prod_{p|m} \left[1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Miy89, theorem 4.2.7] Ce résultat est à comparer avec la dimension de $S(2k, \Gamma)$, [Miy89, theorem 2.5.2, lemma 4.2.6, theorem 4.2.11]

$$\dim S(2, \Gamma) = 1 + \frac{\nu_0(\Gamma)}{12} - \frac{\nu_2(\Gamma)}{4} - \frac{\nu_3(\Gamma)}{3} - \frac{\nu_\infty(\Gamma)}{2}$$

et, si $2k \geq 4$,

$$\dim S(2k, \Gamma) = \frac{2k-1}{12}\nu_0(\Gamma) + \frac{\nu_2(\Gamma)}{4} + \frac{\nu_3(\Gamma)}{3} - \frac{\nu_\infty(\Gamma)}{2}$$

où $\nu_\infty(\Gamma)$ est le nombre de pointes de Γ (voir §2.1.1).

Sans restriction sur $S(2k, \Gamma)$, on a le minorant

$$\sharp\mathcal{R} \geq \dim S(2k, \Gamma).$$

D'autres grandeurs que les formes linéaires utilisées ici ont été étudiées. Si $f \in S(2k, m) = S\bigl(2k, \Gamma_0(m)\bigr)$, elle admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nz}$$

et on définit, pour tout caractère χ, la fonction

$$L(f \otimes \chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)\chi(n)n^{-s}.$$

Luo et Ramakrishnan [LR97] ont prouvé (entre autre) que l'ensemble des valeurs $L(f \otimes \chi, k)$ lorsque χ parcourt tous les caractères quadratiques de module premier à m détermine f. D'autre part, si $f \in S(2, m)$, on dit que f est associée à une courbe elliptique si sa fonction L coïncide avec celle d'une courbe elliptique. Stark [Sta96] a prouvé que *la* valeur $L(f, 1)$ caractérise la forme f. On remarque qu'on a fait une grosse restriction sur $S(2, m)$ puisque, si on note $Ell(2, m)$ l'ensemble (fini) des formes de $S(2, m)$ associées à une courbe elliptique, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\sharp Ell(2, m)}{\dim S(2, m)} \leq C(\varepsilon) m^{-1/2+\varepsilon}$$

avec $C(\varepsilon)$ une constante ne dépendant que de ε [DK00].

Notre méthode consiste à tirer parti des relations de Manin. À chaque forme f on peut associer un polynôme appelé polynôme de périodes (voir §2.1.3). Ce polynôme vérifie des relations que l'on peut traduire en relations linéaires sur les valeurs $L(f|_A, \ell)$. Un morphisme injectif, dû essentiellement à Eichler et Shimura (et Skoruppa dans la version utilisée ici) permet alors de ramener notre problème au calcul du rang d'un système linéaire (voir §3). Ce calcul est essentiellement un travail de combinatoire, nous établirons les résultats combinatoires nécessaires au §1.

On déduit une autre conséquence du morphisme injectif d'Eichler-Shimura, indépendante de la précédente. Pour p premier, on définit $X(p)$ comme l'ensemble des $p-1$ caractères modulo p et W_p l'involution de Fricke (voir §A). On a alors la

Proposition 2. *Soit k un entier et p un nombre premier. Soit f et g deux formes de $S(2k, \Gamma_0(p))$. On suppose que*
$$\forall \ell \in [1,k], \forall \chi \in X(p), \quad L(W_p f \otimes \chi, \ell) = L(W_p g \otimes \chi, \ell),$$
$$\forall \ell \in [1,k], \quad L(W_p f, \ell) = L(W_p g, \ell)$$
et
$$\forall \ell \in [1,k], \quad L(f,\ell) = L(g,\ell).$$
Alors, $f = g$.

On utilise les notations
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et si E est une expression pouvant prendre uniquement la valeur vraie ou la valeur fausse, $\delta(E)$ vaut 1 si E est vraie et 0 sinon. Enfin on fait la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou $b > a$.

Table des matières

Le premier paragraphe expose des résultats de combinatoire dont on aura besoin. Le deuxième paragraphe met en place ce dont on aura besoin des périodes de formes modulaires pour démontrer le théorème 1. Ce théorème est prouvé au paragraphe 3 et la proposition 2 est prouvée en appendice.

Remerciements : nous tenons à remercier R. de la Bretèche pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues. Nous remercions aussi E. Kowalski pour ses remarques simplifiant l'exposition et É. Fouvry, L. Merel et P. Michel pour l'intérêt porté à ce travail.

1. Lemmes combinatoires

On établit dans ce paragraphe des lemmes combinatoires nécessaires à la suite.

Lemme 1.1. *Soit $n \geq 0$ un entier. Soit ℓ et t des entiers tels que $0 \leq \ell \leq n$ et $0 \leq t \leq n$. Alors*
$$\sum_{u=0}^{\min(t,\ell)} (-1)^u \binom{t}{u} \binom{n-u}{n-\ell} = \binom{n-t}{\ell}.$$

Démonstration. Lorsque $t \leq \ell$ le résultat est conséquence de l'égalité

$$(n-\ell)!\sum_{u=0}^{t}(-1)^u\binom{t}{u}\binom{n-u}{n-\ell} = \sum_{v=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{v}\frac{\mathrm{d}^v}{\mathrm{d}X^v}\Big|_{X=1}(X-1)^t\frac{\mathrm{d}^{n-\ell-v}}{\mathrm{d}X^{n-\ell-v}}\Big|_{X=1}X^{n-t}.$$

On utilise ce cas et l'égalité

$$\sum_{u=0}^{\ell}(-1)^u\binom{t}{u}\binom{n-u}{n-\ell} = \frac{t!(n-t)!}{(n-\ell)!\ell!}\sum_{u=0}^{\ell}(-1)^u\binom{\ell}{u}\binom{n-u}{n-t}$$

pour prouver le cas $t > \ell$. □

Lemme 1.2. *Soit j, ℓ, r des entiers tels que $\ell \geq 1$ et $j - r \notin [1, \ell-1]$. Alors*

1. $$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{\ell+t-1}{2t}\binom{j-\ell-t}{2r-2t}+\binom{\ell+t-1}{2t+1}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t-1}\right] = \binom{j-1}{2r}$$
2. $$\sum_{t=0}^{r-1}\left[\binom{\ell+t-1}{2t}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t-1}+\binom{\ell+t}{2t+1}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t-2}\right] = \binom{j-1}{2r-1}$$
3. $$\sum_{t=0}^{r-1}\left[\binom{\ell+t-1}{2t}\binom{j-\ell-t}{2r-2t-1}+\binom{\ell+t-1}{2t+1}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t-2}\right] = \binom{j-1}{2r-1}$$
4. $$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{\ell+t-1}{2t}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t}+\binom{\ell+t}{2t+1}\binom{j-\ell-t-1}{2r-2t-1}\right] = \binom{j-1}{2r}.$$

Démonstration. Pour prouver le point 1, on note $S(\ell)$ le membre de gauche. On a $S(1) = \binom{j-1}{2r}$ et l'égalité de Pascal implique, pour $\ell \neq j-r$ l'égalité $S(\ell+1) = S(\ell)$. Les autres points se démontrent de façon identique. □

Pour tous entiers $k \geq 0$ et $r \geq 1$, on définit les polynômes $P_0^k(X) = 1$,

$$P_{2r}^k(X) = \frac{1}{(2r)!}\prod_{u=0}^{2r-1}(k+r-u-X)$$

et

$$P_{2r-1}^k(X) = \frac{1}{(2r-1)!}\prod_{u=1}^{2r-1}(k+r-u-X).$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a les relations

$$P_{2r}^k(j) = \begin{cases}\binom{k+r-j}{2r} & \text{si } j \leq k-r\,;\\ \binom{j-k+r-1}{2r} & \text{si } j > k+r\,;\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{1a}$$

et

$$P_{2r-1}^k(j) = \begin{cases}\binom{k+r-j-1}{2r-1} & \text{si } j \leq k-r\,;\\ -\binom{j-k+r-1}{2r-1} & \text{si } j > k+r-1\,;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{1b}$$

On déduit du lemme 1.2 le

Corollaire 1.3. *Soit $r > 0$.*

1. *Si $k-r \geq 1$,*

$$P_{2r}^k(j) = \binom{j-1}{2r} + \sum_{t=0}^{r-1}\left[\binom{k-r+t}{2t+1}P_{2r-2t-1}^k(j) - \binom{k-r+t}{2t+2}P_{2r-2t-2}^k(j)\right]$$

2. *si $k-r \geq 2$,*

$$P_{2r-1}^k(j) = -\binom{j-1}{2r-1} + (k-r)P_{2r-2}^k(j) - \sum_{t=1}^{r-1}\left[\binom{k-r+t}{2t}P_{2r-2t-1}^k(j) - \binom{k-r+t}{2t+1}P_{2r-2t-2}^k(j)\right].$$

Démonstration. On se ramène aux points 1 et 2 du lemme 1.2 en utilisant les égalités (1). En remarquant qu'il s'agit d'égalités de polynômes, on peut en effet supposer j suffisamment grand. □

Lemme 1.4. *Soit $\ell \in \mathbb{N}$,*

1. *si $r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,*

$$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{t+\ell-r}{2t+1}\binom{\ell-1+r-t}{2r-2t-1} - \binom{t+\ell-r}{2t}\binom{\ell-1+r-t}{2r-2t}\right] = 0$$

2. *si $r \in \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{t+\ell-r}{2t+1}\binom{\ell+r-t}{2r-2t} - \binom{t+\ell-r}{2t}\binom{\ell+r-t}{2r-2t+1}\right] = 0$$

3. *si $r \in \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{t+\ell-1}{2t}\binom{\ell-t}{2r-2t+1} - \binom{t+\ell}{2t+1}\binom{\ell-1-t}{2r-2t}\right] = 0$$

4. *si $r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,*

$$\sum_{t=0}^{r}\left[\binom{t+\ell}{2t}\binom{\ell-t}{2r-2t} - \binom{t+\ell}{2t+1}\binom{\ell-t}{2r-2t-1}\right] = 0.$$

Démonstration. Le principe de démonstration est le même que pour le lemme 1.2. □

Lemme 1.5. 1. *Soit (b_ℓ^v) l'unique suite définie par*

$$b_\ell^v = \begin{cases} 0 & \text{si } v < \ell \text{ ou } \ell < 1\,; \\ 2v-1 & \text{si } \ell = 1 \text{ et } v \geq 1\,; \\ b_\ell^{v-1} - b_{\ell-1}^{v-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $v \geq 1$. Alors si $(m,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$,

$$2\left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1-2v}\right] = \sum_{\ell=1}^{v} b_\ell^v\left[\binom{m+\ell}{k} + \binom{m+\ell}{k+1+\ell-2v}\right]$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{v} b_\ell^v = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 1\,; \\ 2 & \text{si } v \geq 2. \end{cases}$$

2. *Soit* (c_ℓ^v) *l'unique suite définie par*

$$c_\ell^v = \begin{cases} 0 & \text{si } v < \ell \text{ ou } \ell < 1\,; \\ 2v & \text{si } \ell = 1\,; \\ c_\ell^{v-1} - c_{\ell-1}^{v-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $v \geq 1$. *Alors si* $(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,

$$2\left[\binom{m}{k} - \binom{m}{k-2v}\right] = \sum_{\ell=1}^{v} c_\ell^v \left[\binom{m+\ell}{k} - \binom{m+\ell}{k+\ell-2v}\right].$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur v. □

Lemme 1.6. *Soit* $t \geq 1$, *alors*

$$\sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{t+r}{2r}\binom{2r}{r} + \sum_{r=1}^{t} (-1)^{r+1} \binom{t+r-1}{2r-1}\binom{2r-1}{r} = (-1)^{t+1}\binom{2t}{t}$$

et

$$\sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{t+r-1}{2r}\binom{2r}{r} + \sum_{r=1}^{t-1} (-1)^{r} \binom{t+r-1}{2r-1}\binom{2r-1}{r} = (-1)^{t+1}\binom{2t-1}{t}.$$

Démonstration. La première égalité résulte de

$$\sum_{r=0}^{t} (-1)^r \binom{t+r}{2r}\binom{2r}{r} = \sum_{r=0}^{t} (-1)^r \binom{t+r}{2r}\binom{2r}{r}\left[1 - \frac{t}{t+r}\right] = 0$$

grâce à [BMP86, 4.2.6.13]. La seconde égalité résulte de la première et de [BMP86, 4.2.5.71]. □

2. Les équations de Manin

2.1. Périodes de formes modulaires.

2.1.1. *Propriétés de* Γ. On considère Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$ contenant $-I$. On note $\mathcal{R}(\Gamma)$ l'ensemble fini ${}_{\Gamma}\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et $\nu_0(\Gamma)$ son cardinal. Un élément de $\mathcal{R}(\Gamma)$ obtenu par projection canonique d'une matrice M de $SL(2,\mathbb{Z})$ sera noté $\overline{M}$. Si $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, on note $\mathcal{R}^M(\Gamma)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(\Gamma)$ invariants par multiplication à droite par M :

$$\mathcal{R}^M(\Gamma) = \{\overline{A} \in \mathcal{R}(\Gamma)\ ;\ \overline{AM} = \overline{A}\}.$$

Le cardinal de $\mathcal{R}^S(\Gamma)$ est donné par $\nu_2(\Gamma)$, le nombre de points elliptiques d'ordre 2 de Γ. Le cardinal de $\mathcal{R}^U(\Gamma)$ est donné par $\nu_3(\Gamma)$, le nombre de points elliptiques d'ordre 3 de Γ. On effectue la *décomposition de* $\mathcal{R}(\Gamma)$ *selon* S (respectivement U) : puisque

$$\mathcal{R}(\Gamma) \setminus \mathcal{R}^S(\Gamma) = \{\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)\ ;\ \overline{MS} \neq \overline{M}\}$$

on peut construire $\mathcal{R}^2(\Gamma)$ un ensemble maximal de classes $\overline{M}$ de $\mathcal{R}(\Gamma)$ tels que $\overline{M} \neq \overline{MS}$ de sorte que si $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont dans $\mathcal{R}^2(\Gamma)$ alors $\overline{M} \neq \overline{NS}$. On a alors la décomposition en union disjointe

$$\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}^2(\Gamma) \sqcup \mathcal{R}^2(\Gamma)S \sqcup \mathcal{R}^S(\Gamma).$$

On a

$$\sharp\mathcal{R}^2(\Gamma) = \frac{\nu_0(\Gamma) - \nu_2(\Gamma)}{2}.$$

De même, on peut construire $\mathcal{R}^3(\Gamma)$ tel que

$$\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}^3(\Gamma) \sqcup \mathcal{R}^3(\Gamma)U \sqcup \mathcal{R}^3(\Gamma)U^2 \sqcup \mathcal{R}^U(\Gamma) \tag{2}$$

avec

$$\sharp\mathcal{R}^3(\Gamma) = \frac{\nu_0(\Gamma) - \nu_3(\Gamma)}{3}.$$

Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Im m\ z > 0\}$ par action homographique

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

et cette action s'étend en action transitive sur $\mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. L'ensemble ${}_{\Gamma}\backslash\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ est fini de cardinal $\nu_\infty(\Gamma)$ et ses éléments sont appelés *pointes* de Γ.

On définit une action Ĺ gauche de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des fonctions F de $\mathbb{C} \times \mathcal{R}(\Gamma)$ telles que pour tout $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$, $\lim_{y\to 0} y^{2k-2}F(y^{-1}, \overline{M}) < \infty$: si $h = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$ on pose

$$\begin{array}{rccc} h.F & : & \mathbb{C} \times \mathcal{R}(\Gamma) & \to & \mathbb{C} \\ & & (X, \overline{M}) & \mapsto & (-cX+a)^{2k-2}F(h^{-1}X, \overline{Mh}). \end{array}$$

2.1.2. *Formes modulaires.* Soit $2k$ un entier pair strictement positif et Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$. Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit sur l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ grâce à l'action

$$f|_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(z) = (cz+d)^{-2k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right). \tag{3}$$

On dit que f vérifie la condition de modularité sur Γ si pour toute matrice $M \in \Gamma$ on a $f|_M = f$. Soit $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, on définit

$$u_M = \inf\{u \in \mathbb{N}^*\ ;\ T^u \in M^{-1}\Gamma M\}.$$

Si f vérifie la condition de modularité sur Γ alors $f|_M$ est périodique de période u_M. Elle admet un développement de Fourier de la forme

$$f|_M(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f_M}(n) \exp\left(2i\pi \frac{n}{u_M} z\right) \tag{4}$$

pour $\Im m\ z$ assez grand et par modularité, le coefficient $\widehat{f_M}(n)$ ne dépend que de $\overline{M}$. On dit que f est holomorphe aux pointes si pour toute $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ et tout $n < 0$ on a $\widehat{f_M}(n) = 0$. Dans ce cas, f étant holomorphe sur $\mathcal{H}$, (4) converge normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$. Si f est une fonction holomorphe vérifiant la condition de modularité sur Γ, holomorphe aux pointes et vérifiant de plus $\widehat{f_M}(0) = 0$ pour toute $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, on dit que f est une forme parabolique. Si $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ et si f est parabolique on déduit du développement (4) et du fait que $f|_M$ vérifie la condition de modularité sur $M^{-1}\Gamma M$ qu'il existe une constante c telle que pour tout n strictement positif on a [Miy89, corollary 2.1.6]

$$|\widehat{f_M}(n)| \le cn^k. \tag{5}$$

On en déduit l'existence, pour toute $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, de constantes c et y_0 telles que si $y \ge y_0$ alors

$$\left|f|_M(iy)\right| \le ce^{-2\pi y/u_M} \tag{6}$$

[Miy89, lemme 4.3.3]. Lorsque $M \in \Gamma$ on écrit $\widehat{f}(n)$ au lieu de $\widehat{f_M}(n)$. On note $S(2k,\Gamma)$ l'espace des formes paraboliques de poids $2k$ sur Γ. C'est un espace de dimension finie dont la dimension a été donnée en introduction (dans le cas où $-I$ est dans Γ).

2.1.3. *Périodes.* Si f est une forme de $S(2k,\Gamma)$ et si $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, l'équation (6) permet de définir le polynôme de période de f et M par

$$\rho_M(f)(X) = -\frac{1}{(2k-2)!}\int_0^{+i\infty} f|_M(z)(X-z)^{2k-2}\,\mathrm{d}z.$$

Ce polynôme ne dépend que de la classe de M modulo Γ. Si $\mathbb{C}[X]_{2k-2}$ est l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2k-2$, on déduit des travaux de Skoruppa [Sko90, proposition 3] que le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \rho & : S(2k,m) & \to & \mathbb{C}[X]_{2k-2}^{\nu_0(\Gamma)} \\ & f & \mapsto & \{\rho_M(f)\}_{\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)} \end{array}$$

est injectif.

Pour $f \in S(2k,\Gamma)$ on définit ensuite le morphisme

$$\begin{array}{rccc} r_f & : \mathbb{C}\times\mathcal{R}(\Gamma) & \to & \mathbb{C} \\ & (X,\overline{M}) & \mapsto & \rho_M(f)(X). \end{array}$$

On déduit de la relation

$$M.r_f(X,\overline{A}) = -\frac{1}{(2k-2)!}\int_{M.0}^{M.\infty} f|_A(z)(X-z)^{2k-2}\,\mathrm{d}z$$

vraie pour toute matrice $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ les relations de Manin

$$(I+S).r_f = 0 \tag{7}$$

$$(I+U+U^2).r_f = 0. \tag{8}$$

Remarque : Le premier auteur [Mar01, appendice] a prouvé que ces relations « engendrent » toutes celles du même type au sens où ces deux relations sont équivalentes à la propriété : pour tout

$$W = \sum_M w_M M$$

de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ vérifiant

$$\sum_M w_M(M.\infty - M.0) = 0$$

on a

$$\left(\sum_M w_M M\right).r_f = 0.$$

2.2. **Fonctions L - Liens avec les périodes.** Soit f une forme de $S(2k,m)$ et M une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. On définit la fonction L de $f|_M$ par la série

$$L(f|_M,s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f_M}(n)n^{-s}.$$

Grâce à (5) cette série converge pour $\Re e\, s > k+1$. La décroissance exponentielle (6) et la représentation intégrale

$$\left(\frac{2\pi}{u_M}\right)^{-s}\Gamma(s)L(f|_M,s) = \int_1^{+\infty} f|_M(it)t^s\frac{\mathrm{d}t}{t} + (-1)^k\int_1^{+\infty} f|_{MS}(it)t^{-s+2k}\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{9}$$

donnent un prolongement holomorphe de $L(f|_M,s)$ à $\mathbb{C}$. Pour la suite, il est plus aisé d'utiliser la fonction, elle aussi entière,

$$L^*(f|_M,s) = \left(\frac{u_M}{2i\pi}\right)^s\frac{1}{\Gamma(2k-s)}L(f|_M,s).$$

On traduit les relations de Manin (7) et (8) dans la

Proposition 2.1. *Soit $f \in S(2k,\Gamma)$ et $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$. Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq 2k-1$ on a*

$$L^*(f|_M,\ell) - (-1)^\ell L^*(f|_{MS}, 2k-\ell) = 0$$

et

$$L^*(f|_M, 2k-\ell) - (-1)^\ell \sum_{j=1}^{\ell} \binom{2k-1-j}{\ell-j} L^*(f|_{MU}, j) - (-1)^\ell \sum_{j=\ell}^{2k-1} \binom{j-1}{\ell-1} L^*(f|_{MU^2}, j) = 0.$$

Remarque : La première des deux relations n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'équation fonctionnelle de L^* qu'on déduit de (9).

Démonstration. Par développement du polynôme $(X-z)^{2k-2}$, utilisation du développement de Fourier (4) et de

$$\int_0^{+i\infty} z^\ell e^{2i\pi n z}\,\mathrm{d}z = \ell!\left(\frac{i}{2\pi n}\right)^{\ell+1}$$

[BMP86, 2.3.3.2] on montre que pour tout $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$

$$\rho_M(f)(X) = \sum_{\ell=0}^{2k-2} L^*(f|_M, 2k-1-\ell) X^\ell. \tag{10}$$

On a

$$U.r_f(X,\overline{M}) = X^{2k-2} r_f\left(\frac{X-1}{X}, \overline{MU}\right)$$

et

$$U^2.r_f(X,\overline{M}) = (X-1)^{2k-2} r_f\left(\frac{-1}{X-1}, \overline{MU^2}\right)$$

de sorte que l'équation (8) donne

$$\rho_M(f)(X) + X^{2k-2}\rho_{MU}(f)\left(\frac{X-1}{X}\right) + (X-1)^{2k-2}\rho_{MU^2}(f)\left(\frac{-1}{X-1}\right) = 0.$$

Grâce à (10) on a alors la seconde relation de la proposition. On obtient de même la première relation à partir de (7) (voir aussi la remarque ci-dessus). □

La proposition 2.1 affirme que $\{L(f|_M,\ell),\ \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma),\ \ell \in [1,2k-1]\}$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{c} x_M(\ell) - (-1)^\ell x_{MS}(2k-\ell) = 0 \\ x_M(2k-\ell) - (-1)^\ell \sum\limits_{j=1}^{\ell} \binom{2k-1-j}{\ell-j} x_{MU}(j) - (-1)^\ell \sum\limits_{j=\ell}^{2k-1} \binom{j-1}{\ell-1} x_{MU^2}(j) = 0 \end{array}\right.$$

où les équations sont répétées pour chaque $\overline{M}$ de $\mathcal{R}(\Gamma)$ et chaque ℓ de $[1, 2k-1]$. Le but des paragraphes suivants est d'estimer le rang de ce système.

2.3. Base du système de Manin.

2.3.1. *Équations provenant de S.* D'après la proposition 2.1, l'équation $(1+S).r_f = 0$ est équivalente au système d'équations

$$\left\{\{\ell M\} : L^*(f|_M,\ell)-(-1)^\ell L^*(f|_{MS},2k-\ell)=0\right\}_{\substack{\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)\\ 1\leq\ell\leq 2k-1}}.$$

On appelle alors *équations provenant de S* les équations $\{\ell M\}$ données par

$$x_M(\ell)-(-1)^\ell x_{MS}(2k-\ell)=0 \qquad \{\ell M\}$$

Puisque $S^2=-I\in\Gamma$, on a l'égalité $\{\ell M\}=(-1)^{\ell+1}\{(2k-\ell)MS\}$. Le système précédent est donc équivalent au système des $\nu_0(\Gamma)k$ équations $\{\ell M\}$ lorsque $\overline{M}$ parcourt $\mathcal{R}(\Gamma)$ et ℓ parcourt $[1,k]$. En fait, les seules relations de dépendance entre équations de ce nouveau système proviennent des équations $\{kM\}$. Le système des équations $\{kM\}$ lorsque $\overline{M}$ parcourt $\mathcal{R}(\Gamma)$ est engendré par

$$\frac{\nu_0(\Gamma)-(-1)^k\nu_2(\Gamma)}{2}$$

équations indépendantes : en effet, si $\overline{M}\neq\overline{MS}$ alors $\{kM\}=(-1)^{k+1}\{kMS\}$ et si $\overline{M}=\overline{MS}$, alors l'équation $\{kM\}$ est non triviale si et seulement si $(-1)^k=-1$. On en déduit le

Lemme 2.2. *Le système d'équations*

$$\left\{\{\ell M\}\ ;\ \overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma),\ \ell\in[1,2k-1]\right\}$$

est de rang

$$\frac{2k-1}{2}\nu_0(\Gamma)-(-1)^k\frac{\nu_2(\Gamma)}{2}.$$

Il est équivalent au système d'équations indépendantes formé par la réunion des deux systèmes

$$\left\{\{\ell M\}\ ;\ \overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma),\ \ell\in[1,k-1]\right\}$$

et

$$\left\{\{kM\}\ ;\ \overline{M}\in\mathcal{R}^2(\Gamma)\cup\mathcal{R}^S(\Gamma)\right\}\ \textit{si } k \textit{ est impair,}$$
$$\left\{\{kM\}\ ;\ \overline{M}\in\mathcal{R}^2(\Gamma)\right\}\ \textit{si } k \textit{ est pair.}$$

2.3.2. *Équations provenant de U.* D'après la proposition 2.1, l'équation $(1+U+U^2).r_f=0$ est équivalente au système d'équations

$$L^*(f|_M,2k-\ell)-(-1)^\ell\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2k-1-j}{\ell-j}L^*(f|_{MU},j) \\ -(-1)^\ell\sum_{j=\ell}^{2k-1}\binom{j-1}{\ell-1}L^*(f|_{MU^2},j)=0$$

où les équations sont répétées pour chaque $\overline{M}$ de $\mathcal{R}(\Gamma)$ et chaque ℓ de $[1,2k-1]$. On appelle donc *équations provenant de U* les équations $[\ell M]$ données par

$$x_{MU}(2k-\ell)-(-1)^\ell\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2k-1-j}{\ell-j}x_{MU^2}(j) \\ -(-1)^\ell\sum_{j=\ell}^{2k-1}\binom{j-1}{\ell-1}x_M(j)=0. \qquad [\ell M]$$

On considère le système

$$(*)=\{[\ell M]\ ;\ \overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma),\ \ell\in[1,2k-1]\}.$$

Il existe des relations de dépendance entre les équations de $(*)$. On le montre dans le

Lemme 2.3. *Pour tout* $1 \le \ell \le 2k-1$ *et tout* $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$ *on a*

$$[(2k-\ell)MU] = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=2k-\ell}^{2k-1} \binom{j-1}{2k-\ell-1} [(2k-j)M]$$

et

$$[(2k-\ell)MU^2] = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=1}^{2k-\ell} \binom{2k-1-j}{\ell-1} [(2k-j)M].$$

Démonstration. On calcule, par interversion de sommes

$$\begin{aligned}\sum_{j=2k-\ell}^{2k-1} \binom{j-1}{2k-\ell-1} [(2k-j)M] = \sum_{t=2k-\ell}^{2k-1} \binom{t-1}{2k-\ell-1} x_{MU}(t) \\ - \sum_{t=1}^{\ell} x_{MU^2}(t) \sum_{j=2k-\ell}^{2k-t} (-1)^j \binom{2k-t-1}{j-1} \binom{j-1}{2k-\ell-1} \\ - \sum_{t=1}^{2k-1} x_M(t) \sum_{j=\max(2k-\ell,2k-t)}^{2k-1} (-1)^j \binom{j-1}{2k-\ell-1} \binom{t-1}{2k-j-1}.\end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité

$$\sum_{j=2k-\ell}^{2k-t} (-1)^j \binom{2k-t-1}{j-1} \binom{j-1}{2k-\ell-1} = (-1)^\ell \delta(t=\ell)$$

et au lemme 1.1 qui donne

$$\sum_{j=\max(2k-\ell,2k-t)}^{2k-1} (-1)^j \binom{j-1}{2k-\ell-1} \binom{t-1}{2k-j-1} = -\binom{2k-1-t}{\ell-1}.$$

La seconde égalité se prouve de même. □

Afin de réduire le système, on définit par récurrence les équations $[\ell M]'$, pour $0 \le 2\ell+1 \le 2k$ par les formules

$$\begin{aligned}[2\ell M]' = [2\ell M] + (k-\ell)[(2\ell-1)M]' - \sum_{t=1}^{\ell-1} \Bigg[\binom{k-\ell+t}{2t} [(2\ell-2t)M]' \\ - \binom{k-\ell+t}{2t+1} [(2\ell-2t-1)M]' \Bigg]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[(2\ell+1)M]' = [(2\ell+1)M] + \sum_{t=0}^{\ell-1} \Bigg[\binom{k-\ell+t}{2t+1} [(2\ell-2t)M]' \\ - \binom{k-\ell+t}{2t+2} [(2\ell-2t-1)M]' \Bigg].\end{aligned}$$

On développe ces équations dans le

Lemme 2.4. *On suppose* $k \ge 3$. *Soit* $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$. *Les équations* $[\ ]'$ *sont données par*

$$\begin{aligned}-\sum_{t=1}^{2\ell} \binom{k-1+\ell-t}{2\ell-t} x_{MU^2}(t) + \sum_{t=1}^{2\ell} \binom{k-1+\ell-t}{2\ell-t} x_{MU}(2k-t) \\ + \sum_{t=1}^{2k-1} P^k_{2\ell-1}(t) x_M(t) = 0 \quad [2\ell M]'\end{aligned}$$

pour $2\ell \leq k$ *et*

$$\sum_{t=1}^{2\ell+1}\binom{k-1+\ell-t}{2\ell+1-t}x_{MU^2}(t)+\sum_{t=1}^{2\ell+1}\binom{k+\ell-t}{2\ell+1-t}x_{MU}(2k-t)\\+\sum_{t=1}^{2k-1}P_{2\ell}^k(t)x_M(t)=0\quad[(2\ell+1)M]'$$

pour $2\ell+1\leq k$.

Démonstration. Pour $\ell=0$ et $\ell=1$, on vérifie immédiatement que $[1M]'$ et $[2M]'$ sont données par les formules du lemme. On suppose que $[tM]'$ est donnée par le lemme pour tout $t<2\ell$ et on montre que $[2\ell M]'$ et $[(2\ell+1)M]'$ sont données par le lemme. On calcule

$$[2\ell M]+(k-\ell)\Bigg[\sum_{t=1}^{2\ell-1}\binom{k-2+\ell-t}{2\ell-1-t}x_{MU^2}(t)+\sum_{t=1}^{2\ell-1}\binom{k-1+\ell-t}{2\ell-1-t}x_{MU}(2k-t)\\+\sum_{t=1}^{2k-1}P_{2\ell-2}^k(t)x_M(t)\Bigg]-\sum_{j=1}^{\ell-1}\binom{k-\ell+j}{2j}\Bigg[-\sum_{t=1}^{2\ell-2j}\binom{k-1+\ell-j-t}{2\ell-2j-t}x_{MU^2}(t)\\+\sum_{t=1}^{2\ell-2j}\binom{k-1+\ell-j-t}{2\ell-2j-t}x_{MU}(2k-t)+\sum_{t=1}^{2k-1}P_{2\ell-2j-1}^k(t)x_M(t)\Bigg]+\sum_{j=1}^{\ell-1}\binom{k-\ell+j}{2j+1}\\\times\Bigg[\sum_{t=1}^{2\ell-2j-1}\binom{k-2+\ell-j-t}{2\ell-1-2j-t}x_{MU^2}(t)+\sum_{t=1}^{2\ell-2j-1}\binom{k-1+\ell-j-t}{2\ell-1-2j-t}x_{MU}(2k-t)\\+\sum_{t=1}^{2k-1}P_{2\ell-2j-2}^k(t)x_M(t)\Bigg]$$

et on doit montrer que cette expression est la même que celle donnée pour $[2\ell M]'$ dans le lemme. Pour $2t\leq 2\ell-4$, le coefficient de $x_{MU^2}(2t)$ est

$$-\binom{k+\ell-2t-1}{2\ell-2t}-\binom{2k-2t-1}{2\ell-2t}+\sum_{j=0}^{\ell-t}\Bigg[\binom{k-\ell+j}{2j}\binom{k-1+\ell-j-2t}{2\ell-2j-2t}\\+\binom{k-\ell+j}{2j+1}\binom{k-2+\ell-j-2t}{2\ell-2j-2t-1}\Bigg]$$

et vaut bien $-\binom{k+\ell-2t-1}{2\ell-2t}$ grâce au point 1 lemme 1.2. Pour $2t-1\leq 2\ell-3$, le coefficient de $x_{MU^2}(2t-1)$ est

$$-\binom{k+\ell-2t}{2\ell-2t+1}-\binom{2k-2t}{2\ell-2t+1}+\sum_{j=0}^{\ell-t}\Bigg[\binom{k-\ell+j}{2j}\binom{k+\ell-j-2t}{2\ell-2j-2t+1}\\+\binom{k-\ell+j}{2j+1}\binom{k+\ell-j-2t-1}{2\ell-2j-2t}\Bigg]$$

et vaut bien $-\binom{k+\ell-2t}{2\ell-2t+1}$ grâce au point 3 du lemme 1.2.

Si $2t\leq 2\ell-4$, le terme $x_{MU}(2k-2t)$ est

$$\binom{k+\ell-2t-1}{2\ell-2t}+\sum_{j=0}^{\ell-t}\Bigg[\binom{k-\ell+j}{2j+1}\binom{k-1+\ell-2t-j}{2\ell-2t-2j-1}\\-\binom{k-\ell+j}{2j}\binom{k-1+\ell-2t-j}{2\ell-2t-2j}\Bigg]$$

et vaut bien $\binom{k+\ell-2t-1}{2\ell-2t}$ grâce au point 1 du lemme 1.4. Si $2t-1 \leq 2\ell-3$, le terme $x_{MU}(2k-2t+1)$ est

$$\binom{k+\ell-2t}{2\ell-2t+1} + \sum_{j=0}^{\ell-t}\left[\binom{k-\ell+j}{2j+1}\binom{k+\ell-2t-j}{2\ell-2t-2j} - \binom{k-\ell+j}{2j}\binom{k+\ell-2t-j}{2\ell-2t-2j+1}\right]$$

et vaut bien $\binom{k+\ell-2t}{2\ell-2t+1}$ grâce au point 2 du lemme 1.4. Enfin, le coefficient de $x_M(t)$ est

$$-\binom{t-1}{2\ell-1} + (k-\ell)P^k_{2\ell-2}(t) - \sum_{j=1}^{\ell-1}\binom{k-\ell+j}{2j}P^k_{2\ell-2j-1}(t) + \sum_{j=1}^{\ell-1}\binom{k-\ell+j}{2j+1}P^k_{2\ell-2j-2}(t) = P^k_{2\ell-1}(t)$$

grâce au corollaire 1.3. Tous les cas exclus sont immédiats. Le résultat pour $[(2\ell+1)M]'$ se montre de même façon. $\square$

On définit les équations supplémentaires

$$(E)_M = [(2q+1)M]' + [2qMU]', \quad \text{lorsque } k = 3q+1,\ q \in \mathbb{N}.$$

Le pendant, pour U du lemme 2.2 obtenu pour S est le

Lemme 2.5. *Soit $k \geq 3$. Le système d'équations*

$$\{[\ell M]\ ;\ \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma),\ \ell \in [1, 2k-1]\}$$

est de rang

$$\frac{2k-1}{3}\nu_0(\Gamma) + \begin{cases} 0 & si\ k \equiv 2 \pmod 3\ ; \\ \frac{2}{3}\nu_3(\Gamma) & si\ k \equiv 1 \pmod 3\ ; \\ -\frac{2}{3}\nu_3(\Gamma) & si\ k \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Il est équivalent au système d'équations indépendantes

$$\left\{[\ell M]',\ \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma),\ 1 \leq \ell \leq \frac{2k-1}{3}\right\}$$

lorsque $k \equiv 2 \pmod 3$,

$$\left\{[\ell M]',\ \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma),\ 1 \leq \ell \leq \frac{2k-2}{3}\right\} \bigcup \{(E)_M,\ \overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^U(\Gamma)\}$$

lorsque $k \equiv 1 \pmod 3$ *puis*

$$\left\{[\ell M]',\ \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma),\ 1 \leq \ell \leq \frac{2k}{3} - 1\right\} \bigcup \left\{\left[\frac{2k}{3}M\right]',\ \overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^3(\Gamma)U\right\}$$

lorsque $k \equiv 1 \pmod 3$.

Remarque : La preuve se lit plus facilement si on se contente de prouver que le nombre d'équations indépendantes de $(*)$ est *au moins* donné par le lemme.

Démonstration. Fixons $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$. On note $(*)_M$ le système

$$(*)_M = \{[\ell M],\ [\ell MU],\ [\ell MU^2]\ ;\ \ell \in [1, 2k-1]\}.$$

Grâce au lemme 2.3, le nombre d'équations indépendantes de ce système est inférieur ou égal à $2k-1$. Par construction, quelque soit $r \in [1, k]$, le système engendré par les équations $[\ell M]'$, $\overline{M}$ fixé, ℓ parcourant $[1, r]$ est équivalent au système engendré par les équations $[\ell M]$, $\overline{M}$ fixé, ℓ parcourant $[1, r]$. Soit $n \geq 0$ tel que $2n+1 \leq k$ et

$\overline{M} \neq \overline{MU}$. Dans les équations du lemme 2.4, la variable $x_M(k+n)$ apparaît (avec un coefficient non nul) dans $[1M]'$,$[2M]'$,...,$[2nM]'$ et dans aucune des équations $[\ell M]'$ avec $\ell > 2n$. Si d'autre part $n \in [0, k/3[$, la variable $x_M(k+n)$ n'apparaît ni dans les équations $[1MU]'$,...,$[2nMU]'$ ni dans les équations $[1MU^2]'$,...,$[2nMU^2]'$. De même, la variable $x_M(k-n)$ apparaît dans $[1M]'$,...,$[(2n+1)M]'$ et, si d'autre part $n \in [0,(k-1)/3[$, elle n'apparaît ni dans les équations $[1MU]'$,...,$[(2n+1)MU]'$ ni dans les équations $[1MU^2]'$,...,$[(2n+1)MU^2]'$. On en déduit que si $L = \lfloor (2k-1)/3 \rfloor$ alors les équations $[\ell M]'$,$[\ell MU]'$,$[\ell MU^2]'$ lorsque ℓ parcourt $[1, L]$ sont indépendantes. Finalement, si $\overline{M} \neq \overline{MU}$, le nombre d'équations indépendantes de $(*)_M$ appartient à $[3\lfloor (2k-1)/3 \rfloor, 2k-1]$. Si $\overline{M} = \overline{MU}$, le même raisonnement montre que les équations $[\ell M]'$, $1 \leq \ell \leq \lfloor (2k-1)/3 \rfloor$ sont linéairement indépendantes. Notons S_M l'ensemble des équations linéairement indépendantes

$$S_M = \{[\ell M]',\, [\ell MU]',\, [\ell MU^2]', 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{2k-1}{3} \rfloor\}.$$

1) Soit $k \equiv 2 \pmod 3$. Si $\overline{M} \neq \overline{MU}$, le système $(*)_M$ est de rang $2k-1$ et S_M est un système composé de $2k-1$ équations indépendantes. Si $\overline{M} = \overline{MU}$, le système $(*)_M$ est le même que pour un représentant $\overline{M} \neq \overline{MU}$ mais $x_M = x_{MU} = x_{MU^2}$. Ainsi, les calculs formels précédents impliquent que toute équation $[\ell M]'$ avec $\ell > \lfloor (2k-1)/3 \rfloor$ est combinaison linéaire des équations $[tM]'$, $[tMU]'$, $[tMU^2]'$ avec $t \leq \lfloor (2k-1)/3 \rfloor$, mais $[tM]' = [tMU]' = [tMU^2]'$. La décomposition (2) implique alors que le nombre d'équations indépendantes du système $(*)_M$ est

$$\nu_3(\Gamma)\frac{2k-1}{3} + \frac{2k-1}{3}[\nu_0(\Gamma) - \nu_3(\Gamma)] = \frac{2k-1}{3}\nu_0(\Gamma)$$

et une base de ce système est $[\ell M]'$, $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$, $1 \leq \ell \leq \frac{2k-1}{3}$.

2) Si $k \equiv 1 \pmod 3$, on a $3\lfloor \frac{2k-1}{3} \rfloor = 2k-2$. Posons $k = 3q+1$. Si $\overline{M} \neq \overline{MU}$, le système $(*)_M$ est engendré par les $[\ell M]'$, $[\ell MU]'$, $[\ell MU^2]'$, $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{2k-1}{3} \rfloor$ et éventuellement une autre équation. D'après le lemme 2.4, et les équations (1a) et (1b), $(E)_M$ se récrit

$$\sum_{j=1}^{2q+1} \binom{4q-j}{2q-1} [x_M(j) + x_{MU}(j) + x_{MU^2}(j)] + \sum_{j=4q+2}^{6q+1} \binom{j-2q-2}{2q} [x_M(j) + x_{MU}(j) + x_{MU^2}(j)] = 0. \qquad (E)_M$$

Cette équation ne comportant aucune valeur $x_M(j)$ aux points j, $2q+2 \leq j \leq 4q+1$, elle n'est pas combinaison linéaire des équations de S_M, ce qui montre que $S_M \cup (E)_M$ est une base d'équations engendrant $(*)_M$ qui est de rang $2k-1$.

Pour $\overline{M} = \overline{MU}$, l'équation $(E)_M$ est non triviale, donc les équations $[\ell M]'$, $1 \leq \ell \leq 2q$, $(E)_M$ sont linéairement indépendantes et engendrent $(*)_M$.

D'après la décomposition (2) le nombre d'équations indépendantes du système est

$$(2q+1)\nu_3(\Gamma) + (6q+1)\frac{\nu_0(\Gamma) - \nu_3(\Gamma)}{3} = \frac{2k-1}{3}\nu_0(\Gamma) + \frac{2\nu_3(\Gamma)}{3}$$

et une base d'équations de $(*)$ est $\{[\ell M]', \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma), 1 \leq \ell \leq \frac{2k-2}{3}\} \cup \{(E)_M, \overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^U(\Gamma)\}$.

3) Si $k \equiv 0 \pmod 3$, posons $k = 3q$. On a $3\lfloor (2k-1)/3 \rfloor = 2k-3$. Supposons que $\overline{M} \neq \overline{MU}$, le système $(*)_M$ est engendré par les équations $[\ell M]'$, $[\ell MU]'$, $[\ell MU^2]'$ lorsque $1 \leq \ell \leq 2q-1$ et éventuellement deux autres équations. Considérons

l'équation $[2qM]'$, grâce aux valeurs des polynômes P_t^k, cette équation s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{2q} \binom{4q-1-j}{2q-1} [x_M(j) - x_{MU^2}(j)] + \sum_{j=4q}^{6q-1} \binom{j-2q-1}{2q-1} [x_{MU}(j) - x_M(j)] = 0. \quad [2qM]'$$

Les équations $[2qM]'$ et $[2qMU]'$ ne comportent aucune variable $x_M(j)$ avec $2q+1 \leq j \leq 4q-1$, et ne sont pas multiples l'une de l'autre, donc l'ensemble $S_M \cup \{[2qM]', [2qMU]'\}$ est formé de $2k-1$ équations linéairement indépendantes, elles forment donc une base de $(*)_M$. Si $\overline{M} = \overline{MU}$, l'équation $[2qM]'$ est triviale, on en déduit que l'ensemble des équations $[\ell M]'$, $1 \leq \ell \leq 2q-1$ est une base d'équations de $(*)_M$. Finalement, d'après la décomposition (2) le nombre d'équations indépendantes du système est

$$(2q-1)\nu_3(\Gamma) + (6q-1)\frac{\nu_0(\Gamma) - \nu_3(\Gamma)}{3} = \frac{2k-1}{3}\nu_0(\Gamma) - \frac{2\nu_3(\Gamma)}{3},$$

une base de $(*)$ est donnée par $\{[\ell M]', \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma), 1 \leq \ell \leq 2q-1\} \cup \{[2qM]', \overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^3(\Gamma)U\}$.

□

3. Caractérisation par les valeurs de fonctions L

Au paragraphe précédent, on a déterminé le nombre d'équations indépendantes, ainsi qu'une base de ces équations, provenant d'une part de S, et d'autre part de U. On va montrer maintenant que, si $k \geq 2$, toutes ces équations sont linéairement indépendantes. On traitera le cas $k = 1$ isolément.

On a vu qu'un ensemble générateur des équations provenant de S est donné par les $\{\ell M\}$, lorsque ℓ parcourt $[1, k]$ et $\overline{M}$ parcourt $\mathcal{R}(\Gamma)$. Posons dans la suite $r_k = \lfloor \frac{2k-1}{3} \rfloor$. On a vu qu'un ensemble générateur des équations provenant de U est donné par les équations $[\ell M]'$ pour ℓ parcourant $[1, r_k]$ et $\overline{M}$ parcourt $\mathcal{R}(\Gamma)$, auxquelles on ajoute les équations $(E)_M$, $\overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^U(\Gamma)$ si $3|k-1$ et les équations $[(r_k+1)M]'$, $\overline{M} \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^3(\Gamma)U$ si $3|k$.

Par l'absurde, on suppose avoir une relation de dépendance

$$\begin{aligned} \sum_{M \in \mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{t=1}^{k} s_M(t)[x_M(t) + (-1)^{t-1} x_{MS}(2k-t)] = \sum_{M \in \mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{t=1}^{r_k} u_M(t)[tM]' \\ + \delta(3|k-1) \sum_{M \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^U(\Gamma)} v_M(r_k+1)(E)_M \\ + \delta(3|k) \sum_{M \in \mathcal{R}^3(\Gamma) \cup \mathcal{R}^3(\Gamma)U} w_M(r_k+1)[(r_k+1)M]'. \quad (11) \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, on suppose que

$$\text{si } k \text{ est pair, } s_M(k) = 0 \text{ si } M \in \mathcal{R}^2(\Gamma)S \sqcup \mathcal{R}^S(\Gamma) \quad (12a)$$

et

$$\text{si } k \text{ est impair, } s_M(k) = 0 \text{ si } M \in \mathcal{R}^2(\Gamma)S. \quad (12b)$$

On définit (cela sera justifié par la preuve du lemme 3.1) si $3|k-1$,

$$u_M(r_k+1)=\begin{cases} v_M(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)\,;\\ v_{MU}(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U^2\,;\\ v_{MU^2}(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U\,;\\ 3v_M(r_K+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^U(\Gamma).\end{cases}$$

On a alors

$$u_M(r_k+1)=u_{MU}(r_k+1)=u_{MU^2}(r_k+1)\text{ si } k\equiv 1 \pmod 3. \tag{13a}$$

On définit ensuite, si 3 divise k,

$$u_M(r_k+1)=\frac{1}{3}\begin{cases} 2w_M(r_k+1)-w_{MU}(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)\,;\\ 2w_M(r_k+1)-w_{MU^2}(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U\,;\\ -w_{MU}(r_k+1)-w_{MU^2}(r_k+1) & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U^2\,;\\ 0 & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^U(\Gamma).\end{cases}$$

On a alors, pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$,

$$u_M(r_k+1)+u_{MU}(r_k+1)+u_{MU^2}(r_k+1)=0\text{ si } k\equiv 0 \pmod 3. \tag{13b}$$

3.1. **Résolution du cas $k=1$.** On suppose $k=1$, et on note $x_M=x_M(1)$, pour $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$. L'équation de dépendance (11) s'écrit ici sous la forme :

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} s_M(x_M+x_{MS})=\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} u_M(x_M+x_{MU}+x_{MU^2}).$$

D'après les remarques précédentes, on suppose que $s_M=0$ si $\overline{M}\in\mathcal{R}^2(\Gamma)S$, et $u_M=0$ si $\overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U\sqcup\mathcal{R}^3(\Gamma)U^2$, et on définit

$$t_M=\begin{cases} s_M & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^2(\Gamma)\,;\\ s_{MS} & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^2(\Gamma)S\,;\\ 2s_M & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^S(\Gamma)\,;\end{cases}$$

et

$$v_M=\begin{cases} u_M & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)\,;\\ u_{MU} & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U^2\,;\\ u_{MU^2} & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^3(\Gamma)U\,;\\ 3u_M & \text{si } \overline{M}\in\mathcal{R}^U(\Gamma).\end{cases}$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} t_M x_M=\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} v_M x_M,$$

ce qui entraîne $t_M=v_M$ pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$. Or par construction, on a $t_{MS}=t_M$ et $v_{MU}=v_M$. Comme S et U engendrent $SL(2,\mathbb{Z})$, on en déduit qu'il existe une constante c telle que pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$ $t_M=v_M=c$. La seule relation de dépendance du système est celle obtenue par addition de toutes les équations. On en déduit que le système est composé de $\dfrac{5\nu_0(\Gamma)}{6}+\dfrac{\nu_2(\Gamma)}{2}+\dfrac{2\nu_3(\Gamma)}{3}-1$ équations indépendantes, ce qui démontre le théorème 1 dans le cas $k=1$.

3.2. **Mise en équation du système.** On suppose désormais $k \geq 2$.

Remarque : Certains résultats du paragraphe précédent, utilisés dans la suite, ne sont vrais que pour $k \geq 3$. Néanmoins, le principe de démonstration est le même pour traiter le cas $k = 2$, et nous ne le détaillerons pas ici.

Lemme 3.1. *On définit, pour tout* $j \in [1, 2k-1]$,

$$\begin{aligned}\alpha_M(j) = \sum_{t=1}^{r_k/2} \Bigg[& u_M(2t) P_{2t-1}^k(j) + u_{MU^2}(2t) \binom{t+j-k-1}{2t+j-2k} \\ & - u_{MU}(2t) \binom{t-j+k-1}{2t-j} \Bigg] \\ + \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} \Bigg[& u_M(2t+1) P_{2t}^k(j) + u_{MU^2}(2t+1) \binom{t+j-k}{2t+j-2k+1} \\ & + u_{MU}(2t+1) \binom{t-j+k-1}{2t-j+1} \Bigg] \\ & + \delta(3|k-1) u_M(r_k+1) \left[\binom{2r_k - j}{r_k - 1} + \binom{j - r_k - 2}{r_k} \right] \\ & + \delta(3|k) \Bigg\{ \binom{2r_k+1-j}{r_k} [u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)] \\ & \qquad + \binom{j - r_k - 2}{r_k} [u_{MU^2}(r_k+1) - u_M(r_k+1)] \Bigg\}\end{aligned}$$

et

$$\beta_M(j) = \delta(j \leq k) s_M(j) - (-1)^j \delta(j \geq k) s_{MS}(2k-j).$$

Alors, l'équation (11) *conduit à* $\alpha_M(j) = \beta_M(j)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{r_k/2} u_M(2t)[2tM]' = & - \sum_{j=1}^{2k-1} x_{MU^2}(j) \sum_{t=1}^{r_k/2} \binom{k-1+t-j}{2t-j} u_M(2t) \\ & + \sum_{j=1}^{2k-1} x_{MU}(j) \sum_{t=1}^{r_k/2} \binom{-k-1+t+j}{-2k+2t+j} u_M(2t) \\ & + \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) \sum_{t=1}^{r_k/2} P_{2t-1}^k(j) u_M(2t).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{M \in \mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{t=1}^{r_k/2} u_M(2t)[2tM]' = & \\ \sum_{M \in \mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) \sum_{t=1}^{r_k/2} \Bigg[& - \binom{k-1+t-j}{2t-j} u_{MU}(2t) \\ & + \binom{-k-1+t+j}{-2k+2t+j} u_{MU^2}(2t) + P_{2t-1}^k(j) u_M(2t) \Bigg]. \quad (14)\end{aligned}$$

Puis

$$\sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} u_M(2t+1)[(2t+1)M]' =$$

$$\sum_{j=1}^{2k-1} x_{MU^2}(j) \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} \binom{k-1+t-j}{2t+1-j} u_M(2t+1)$$
$$+ \sum_{j=1}^{2k-1} x_{MU}(j) \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} \binom{-k+t+j}{-2k+1+2t+j} u_M(2t+1)$$
$$+ \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} P_{2t}^k(j) u_M(2t+1).$$

Ainsi

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} u_M(2t+1)[(2t+1)M]' =$$

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) \sum_{t=0}^{(r_k-1)/2} \left[\binom{k-1+t-j}{2t+1-j} u_{MU}(2t+1)\right.$$
$$\left. + \binom{-k+t+j}{-2k+1+2t+j} u_{MU^2}(2t+1) + P_{2t}^k(j) u_M(2t+1)\right]. \quad (15)$$

Si $k \equiv 1 \pmod 3$, on a également

$$\sum_{M\in\mathcal{R}^3(\Gamma)\cup\mathcal{R}^U(\Gamma)} v_M(r_k+1)(E)_M =$$

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) u_M(r_k+1) \left[\binom{2r_k-j}{r_k-1} + \binom{j-r_k-2}{r_k}\right] \quad (16)$$

et si $k \equiv 0 \pmod 3$, on a

$$\sum_{M\in\mathcal{R}^3(\Gamma)\cup\mathcal{R}^3(\Gamma)U} w_M(r_k+1)[(r_k+1)M]' =$$

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j) \left[\binom{2r_k+1-j}{r_k} [u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)]\right.$$
$$\left. + \delta(2k-j \le r_k+1) \binom{j-r_k-2}{r_k} [u_{MU^2}(r_k+1) - u_M(r_k+1)]\right] \quad (17)$$

Finalement, les équations (14) à (17) montrent que le terme de droite de l'équation (11) est égal à

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} \alpha_M(j) x_M(j). \quad (18)$$

Enfin

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{t=1}^{k} s_M(t)[x_M(t) + (-1)^{t-1} x_{MS}(2k-t)] =$$

$$\sum_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)} \sum_{j=1}^{2k-1} x_M(j)[\delta(j \le k) s_M(j) - (-1)^j \delta(j \ge k) s_{MS}(2k-j)]. \quad (19)$$

L'égalisation de (18) et (19) donne le résultat. □

Lemme 3.2. *Soit $j < k$, on a*

$$
\begin{aligned}
s_M(j) \mp (-1)^j s_{MUS}(j) = &\\
&\sum_{t=1}^{r_k/2}\left[\binom{k+t-j-1}{2t-1} \pm \binom{k+t-j-1}{2t-j}\right] u_M(2t)\\
&+\sum_{t=0}^{(r_k-1)/2}\left[\binom{k+t-j}{2t} \pm \binom{k+t-j}{2t+1-j}\right] u_M(2t+1)\\
&-\sum_{t=1}^{r_k/2}\left[\pm\binom{k+t-j-1}{2t-1} + \binom{k+t-j-1}{2t-j}\right] u_{MU}(2t)\\
&+\sum_{t=0}^{(r_k-1)/2}\left[\pm\binom{k+t-j-1}{2t} + \binom{k+t-j-1}{2t+1-j}\right] u_{MU}(2t+1)\\
&+\delta(3|k-1)\left[\binom{2r_k-j}{r_k-1} u_M(r_k+1) \pm \binom{2r_k-j}{r_k-j} u_{MU}(r_k+1)\right]\\
&+2\delta(3|k)\delta(\mp = -)\binom{2r_k+1-j}{r_k}[u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)].
\end{aligned}
$$

Démonstration. Puisque $j < k$, le lemme 3.1 conduit à

$$
\begin{aligned}
s_M(j) = &\sum_{t=1}^{r_k/2}\left[u_M(2t)P^k_{2t-1}(j) - u_{MU}(2t)\binom{t-j+k-1}{2t-j}\right]\\
&+\sum_{t=0}^{(r_k-1)/2}\left[u_M(2t+1)P^k_{2t}(j) + u_{MU}(2t+1)\binom{t-j+k-1}{2t+1-j}\right]\\
&+\delta(3|k-1)u_M(r_k+1)\binom{2r_k-j}{r_k-1} + \delta(3|k)\binom{2r_k+1-j}{r_k}[u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)].
\end{aligned}
$$

On a aussi $\beta_{MU}(2k-j) = \alpha_{MU}(2k-j)$ et puisque $2k-j > k$ on en déduit

$$
\begin{aligned}
-(-1)^j s_{MUS}(j) = &\sum_{t=1}^{r_k/2}\left[u_M(2t)\binom{t+k-j-1}{2t-j} + u_{MU}(2t)P^k_{2t-1}(2k-j)\right]\\
&+\sum_{t=0}^{(r_k-1)/2}\left[u_M(2t+1)\binom{k+t-j}{2t+1-j} + u_{MU}(2t+1)P^k_{2t}(2k-j)\right]\\
&+\delta(3|k-1)u_{MU}(r_k+1)\binom{2k-j-r_k-2}{r_k}\\
&+\delta(3|k)\binom{2k-j-r_k-2}{r_k}[u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)].
\end{aligned}
$$

On conclut grâce aux égalités (1). □

Lemme 3.3. *Soit $2v < k$, (b^v_ℓ) et (c^v_ℓ) les suites définies dans le lemme 1.5. On a*

$$\sum_{j=v}^{2v-1}\frac{b^v_{2v-j}}{2}[s_M(j) - (-1)^j s_{MUS}(j)] = s_M(2v) - s_{MUS}(2v)$$

et

$$\sum_{j=v+1}^{2v}\frac{c^v_{2v+1-j}}{2}[s_M(j) + (-1)^j s_{MUS}(j)] = s_M(2v+1) - s_{MUS}(2v+1).$$

Démonstration. Cela résulte du lemme 3.2, d'une interversion des sommes et du lemme 1.5. On utilise aussi (13a). □

3.3. **Résolution.**

Lemme 3.4. *Soit $(a_M)_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)}$ et $(b_M)_{M\in\mathcal{R}(\Gamma)}$ des suites à valeurs complexes. Si pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$, on a :*

1. $a_{MUS} = a_M$;
2. $a_M = b_{MUS} - b_M$

alors $a_M = 0$ pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$.

Démonstration. Puisque Γ est d'indice fini dans $SL(2,\mathbb{Z})$ on peut poser $v_M = \inf\{\ell\in\mathbb{N}^* \,;\, \overline{M(US)^\ell} = \overline{M}\}$. On a

$$0 = b_{M(US)^{v_M}} - b_M = \sum_{i=0}^{v_M-1}[b_{M(US)^{i+1}} - b_{M(US)^i}] = v_M a_M$$

d'où $a_M = 0$. □

De ce lemme, on déduit le

Lemme 3.5. *Pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$ et tout $j\in[1,k-2]$ on a $s_M(j) = 0$ et $s_{MUS}(k-1) = s_M(k-1)$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $j=1$, le lemme 3.2 montre que pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$, $s_M(1) - s_{MUS}(1) = 0$, et le lemme 3.3 montre que $s_M(2) - s_{MUS}(2) = [s_M(1)+s_{MUS}(1)]/2$, donc $s_M(1) = s_M(2)-s_{MUS}(2)$. D'après le lemme 3.4, on a $s_M(1) = 0$ et donc $s_M(2) = s_{MUS}(2)$ pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$. Soit $j<k-2$, et supposons que pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$, on a $s_M(\ell) = 0$ pour tout $1\leq\ell\leq j-1$ et $s_M(j) = s_{MUS}(j)$. Le lemme 3.3 et l'hypothèse de récurrence donnent

$$s_M(j+1) - s_{MUS}(j+1) = d_j[s_M(j) + s_{MUS}(j)] = 2d_j s_M(j)$$

où d_j est une constante non nulle dépendant de j. Le lemme 3.4 montre alors que $s_M(j) = 0$ pour tout $\overline{M}\in\mathcal{R}(\Gamma)$, et que $s_M(j+1) = s_{MUS}(j+1)$, ce qui démontre le lemme. □

Lemme 3.6. *Si k est pair,*

$$u_M(1) - u_{MUS}(1) = u_M(1) + u_{MU}(1) = \sum_{j=k/2}^{k-1}\frac{b_{k-j}^{k/2}}{2}[s_M(j) - (-1)^j s_{MUS}(j)].$$

Si k est impair,

$$\begin{aligned}u_M(1) - u_{MUS}(1) &= u_M(1) - u_{MU}(1)\\ &= \sum_{j=(k+1)/2}^{k-1}\frac{c_{k-1-j}^{(k-1)/2}}{2}[s_M(j) + (-1)^j s_{MUS}(j)].\end{aligned}$$

Démonstration. Grâce au lemme 3.1 pour $j=k$ on a

$$u_M(1) = s_M(k) - (-1)^k s_{MS}(k).$$

Cette égalité conduit à $u_M(1) = (-1)^{k-1}u_{MS}(1)$ et on obtient les égalités de gauche du lemme 3.6. Les deux égalités de droite se démontrent en partant des termes de somme, en utilisant le lemme 3.2, en intervertissant les sommes et en utilisant le lemme 1.5. □

D'après les lemmes 3.5 et 3.4, on en déduit que

$$s_M(k-1) = 0, \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma) \tag{20}$$

puis que

$$u_M(1) = u_{MUS}(1). \tag{21}$$

De plus, le lemme 3.1 pour $j = k$ donne

$$s_M(k) - (-1)^k s_{MS}(k) = u_M(1). \tag{22}$$

Si k est pair, on déduit de (22) que, pour tout $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$ on a $u_M(1) = -u_{MS}(1)$, ce qui équivaut à

$$u_{MU}(1) = -u_{MUS}(1), \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{23}$$

Par comparaison de (21) et (23) on obtient

$$u_M(1) = -u_{MU}(1), \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma).$$

Cette équation conduit à

$$u_M(1) = -u_{MU^3}(1), \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$$

soit, puisque $U^3 = I$, à

$$u_M(1) = 0, \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{24}$$

Compte tenu de (24), l'équation (22) devient

$$s_M(k) = s_{MS}(k), \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{25}$$

On déduit de l'équation (25) reportée dans l'équation (12) que

$$s_M(k) = 0, \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{26}$$

Ainsi, grâce au lemme 3.5, à (20) et (26) on a $s_M(\ell) = 0$ pour tout $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$ et $\ell \in [1, 3q+2]$. On en déduit qu'il n'y a pas de relation de dépendance linéaire faisant intervenir à la fois des équations provenant de S et de U. Cela achève la preuve du théorème lorsque k est pair.

Si k est impair, on déduit de (22) l'équation

$$u_M(1) = u_{MS}(1) \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{27}$$

Puisque S et US engendrent $SL(2,\mathbb{Z})$, on déduit de (27) et de (21) qu'il existe une constante $u(1)$ telle que

$$u_M(1) = u(1) \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{28}$$

Avec les notations du lemme 3.1, on déduit du lemme 3.5 et de (20) que $\alpha_M(j) = 0$ pour tout $j \in [1, k-1]$. Par définition, on en déduit que pour tout $j \in [r_k+1, 2k-r_k-1] \setminus \{k\}$ et pour tout $\overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{r_k} u_M(\ell) P^k_{\ell-1}(j) + \delta(3|k-1)\delta(j = r_k+1) u_M(r_k+1) \\ + \delta(3|k)\delta(j = r_k+1)[u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1)] \\ + \delta(3|k)\delta(j = 2k-r_k-1)[u_{MU^2}(2k-r_k-1) - u_M(2k-r_k-1)] = 0. \end{aligned} \tag{A_j}$$

On suppose, en plus de k impair, que 3 ne divise pas k (ce dernier cas, légèrement différent, est traité ensuite). Pour $t \in [1, k-r_k-1]$, l'équivalence $P^k_{\ell-1}(k+t) = 0 \Leftrightarrow \ell \geq 2t+1$ (*resp.* $P^k_{\ell-1}(k-t) = 0 \Leftrightarrow \ell \geq 2t+2$) permet de transformer l'équation (A_{k+t}) (*resp.* (A_{k-t})) en les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_M(2t) & = \sum_{r=0}^{t-1} u_M(2r+1)\binom{t+r-1}{2r} - \sum_{r=1}^{t-1} u_M(2r)\binom{t+r-1}{2r-1} \\ -u_M(2t+1) & = \sum_{r=0}^{t-1} u_M(2r+1)\binom{t+r}{2r} + \sum_{r=1}^{t} u_M(2r)\binom{t+r-1}{2r-1} \end{cases} \tag{29}$$

Par récurrence, on déduit alors de (28) qu'il existe pour tout $\ell \in [1, 2k-2r_k-1]$ une constante $u(\ell)$ telle que

$$u_M(\ell) = u(\ell), \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma). \tag{30}$$

Grâce au lemme 1.6 on vérifie par récurrence que

$$\begin{cases} u(2t) & = (-1)^{t+1}\binom{2t-1}{t}u(1) \\ u(2t+1) & = (-1)^{t}\binom{2t}{t}u(1) \end{cases} \tag{31}$$

Toujours avec les notations du lemme 3.1, l'égalité $\alpha_M(2k-r_k) = 0$ s'écrit alors

$$\Bigg[(-1)^k\binom{r_k-1}{k-r_k-1} + \sum_{r=1}^{k-r_k-1}(-1)^r\binom{2r-1}{r}\binom{k-r_k-1+r}{2r-1} \\ + \sum_{r=0}^{k-r_k-1}(-1)^r\binom{k-r_k-1+r}{2r}\binom{2r}{r}\Bigg]u(1) = 0.$$

Grâce au lemme 1.6, cette équation se récrit

$$\begin{cases} \left[(-1)^q\binom{2q}{q} + (-1)^q\binom{2q+1}{q}\right]u(1) = 0 & \text{si } k = 3q+2\,; \\ \left[(-1)^q\binom{2q+1}{q} - (-1)^q\binom{2q-1}{q}\right]u(1) = 0 & \text{si } k = 3q+1. \end{cases}$$

On a donc $u(1) = 0$ puis, grâce à (31) et (30)

$$u_M(\ell) = 0, \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma), \forall \ell \in [1, r_k]. \tag{32}$$

Lorsque 3 divise k, les équations (29) restent vraies pour $t \in [1, k-r_k-2]$. On en déduit que (31) reste vraie pour $t \in [1, k-r_k-2]$. Ainsi (A_{k-r_k-2}) donne l'existence d'une constante C telle que

$$u_M(r_k+1) - u_{MU}(r_k+1) = C, \quad \forall \overline{M} \in \mathcal{R}(\Gamma).$$

Le choix particulier de $M \in \mathcal{R}^U(\Gamma)$ montre que $C = 0$. Grâce à (13b),

$$u_M(r_k+1) = 0.$$

L'égalité $\alpha_M(2k-r_k-1) = 0$ donne ensuite $u(1) = 0$ puis (32).

Finalement, si k est impair, le membre de droite de (11) est nul et, puisque les équations $\{tM\}$ sont linéairement indépendantes lorsque $\overline{M}$ parcourt $\mathcal{R}(\Gamma)$ et t parcourt $[1, k]$, on déduit que $s_M(t) = 0$. On en déduit qu'il n'y a pas de relation de dépendance linéaire faisant intervenir à la fois les équations provenant de S et de U.

On déduit le théorème 1 de ce qui précède.

Annexe A. Une autre application des périodes

Cet appendice propose une application du morphisme d'Eichler-Shimura indépendante de la précédente. On suppose désormais $\Gamma = \Gamma_0(p)$ avec p un nombre premier et on note $S(2k,p)$ de préférence à $S\big(2k,\Gamma_0(p)\big)$.

Si p est un nombre premier, à une forme f de $S(2k,p)$ de développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)e(nz)$$

et un caractère χ modulo p, on associe

$$f\otimes\chi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)\chi(n)e(nz).$$

On note W_p l'involution de Fricke définie par

$$W_p f(z) = f|_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ p & 0\end{smallmatrix}\right)}(z) = p^{-k}z^{-2k}f\left(\frac{-1}{pz}\right).$$

On note alors

$$W_p f\otimes\chi = (W_p f)\otimes\chi.$$

Le but de cet appendice est de montrer comment on peut caractériser une forme modulaire à partir des fonctions L de $W_p f$.

Dans [Mar01], le premier auteur prouve le

Lemme A.1. *Soit $k\geq 1$ un entier, p un nombre premier, χ un caractère modulo p et $f\in S(2k,p)$. On a pour tout s complexe*

$$\frac{p^{k-s}}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{h=1}^{p}\overline{\chi}(h)\Lambda(f|_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h\end{smallmatrix}\right)},s) = \begin{cases}\Lambda(W_p f\otimes\chi,s) & si\ \chi\neq\chi_0\,;\\ p\Lambda(W_p f\otimes\chi_0,s)-(p-1)\Lambda(W_p f,s) & si\ \chi=\chi_0.\end{cases}$$

Par orthogonalité, on déduit le

Corollaire A.2. *Soit $k\geq 1$ un entier, p un nombre premier et $h\in\{1,\dots,p-1\}$. Soit $f\in S(2k,p)$ et $s\in\mathbb{C}$. Alors*

$$\Lambda(f|_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h\end{smallmatrix}\right)},s) = \frac{p^{s-k}}{p-1}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\ p)}\chi(h)\tau(\overline{\chi})\Lambda(W_p f\otimes\chi,s) - p^{s-k}\Lambda(W_p f\otimes\chi_0,s)+p^{s-k}\Lambda(W_p f,s).$$

On définit $X(p)$ comme l'ensemble des $p-1$ caractères modulo p. On déduit du corollaire A.2 la proposition 2 : on note $m(h)$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h\end{smallmatrix}\right)$. D'après le corollaire A.2, l'hypothèse de la proposition à prouver implique que $L(f|_{m(h)},\ell) = L(g|_{m(h)},\ell)$ pour tout h de $[1,p-1]$ et ℓ de $[1,k]$. D'autre part, on déduit de l'égalité

$$L(f|_S,\ell) = -\frac{(2\pi)^\ell}{\Gamma(\ell)}\Lambda(W_p f,\ell)$$

que $L(f|_S,\ell) = L(g|_S,\ell)$ pour tout ℓ de $[1,k]$. Puisque I, S et les matrices $m(h)$ lorsque h parcourt $[1,p-1]$ constituent un ensemble de représentants du quotient $\Gamma_0(p)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on déduit de la proposition 2.1 que $L(f|_M,\ell) = L(g|_M,\ell)$ pour tout $M\in\mathcal{R}(\Gamma)$ et $\ell\in[1,2k-1]$. Finalement, on a $\rho_M(f)=\rho_M(g)$ et, grâce au morphisme injectif d'Eichler-Shimura on a $f=g$, ce qui termine la preuve.

Références

[BMP86] Yuriĭ Aleksandrovich Brychov, Oleg Igorevich Marichev and Anatoliĭ Platonovich Prudnikov. *Elementary Functions*, volume 1 of *Integrals and Series*. Gordon and Beach Science Publishers, New York, Londres, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1986. 3e impression corrigée, 1992.

[DK00] William Duke and Emmanuel Kowalski. « A problem of Linnik for elliptic curves and mean-value estimates for automorphic representations ». *Inventiones Mathematicae*, 139(1) :1–39, 2000.

[LR97] Wenzhi Luo and Dinar Ramakrishnan. « Determination of modular forms by twists of critical L-values ». *Inventiones mathematicae*, 130 :371–398, 1997.

[Mar01] François Martin. « Périodes de formes modulaires de poids 1 ». Préimprimé, 2001.

[Miy89] Toshitsune Miyake. *Modular Forms*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1989.

[Sko90] Nils-Peter Skoruppa. « Binary quadratic forms and the Fourier coefficients of elliptic and Jacobi Forms ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 411 :66–95, 1990.

[Sta96] Harold M. Stark. « On the determination of an L-function from one value ». In Bruce C. Berndt, Harold G. Diamond and Adolf J. Hildebrand, editors, *Analytic Number Theory*, volume 139 of *Progress in Mathematics*, pages 737–743, Basel, 1996. Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam, Allerton Park, 1995, Birkhäuser.

martin@math.jussieu.fr
emmanuel.royer@polytechnique.org