L'action de l'algèbre de Hecke sur les groupes de composantes des jacobiennes des courbes modulaires est "Eisenstein".

Bas Edixhoven

le 19 mai 1988

1 Introduction.

Pour N un nombre entier positif soit $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ la courbe modulaire sur $\mathbf{Q}$ paramétrant les N-isogénies cycliques entre courbes elliptiques, et $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ sa jacobienne. L'algèbre de Hecke agit sur $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ donc aussi sur son modèle de Néron $J_0(N)$ sur $\mathbf{Z}$. Soit p un nombre premier et $\Phi_{N,p}$ le groupe de composantes connexes de la fibre géometrique $J_0(N)_p$ de $J_0(N)$ en caractéristique p.

Dans cet article nous démontrons que pour $p > 3$ l'action de l'algèbre de Hecke sur $\Phi_{N,p}$ est "Eisenstein". Cela veut dire que pour tout nombre premier l ne divisant pas N l'opérateur de Hecke T_l agit sur $\Phi_{N,p}$ par multiplication par $l+1$ (cf. [Ma], p.95). Ce résultat est une généralisation d'un théorème de K. Ribet [Ri 1],[Ri 2](Theorem 2.24), qui prouve le même résultat en supposant que la valuation de N en p est au plus 1. À dire vrai, Ribet prouve son théorème aussi pour $p = 2, 3$. Parce que dans ce cas la méthode de Ribet est plus efficace nous nous restreindrons au cas $p > 3$.

Pour prouver son théorème Ribet utilise la description donnée par A. Grothendieck [Gro 1] des groupes $\Phi_{N,p}$ en termes de l'accouplement de monodromie sur le groupe de caractères de la partie torique de la réduction (semistable) de $J_0(N)$ sur $\mathbf{Z}_p$. En se servant des résultats de [De-Ra] sur la réduction de $X_0(N)$ modulo p il obtient une description combinatoire de $\Phi_{N,p}$ en termes de points supersinguliers en caractéristique p. Ce qui reste alors à démontrer est une proposition sur les automorphismes des courbes elliptiques supersingulières.

Comme la méthode de Ribet ne marche qu'en cas de réduction semistable nous nous servons de la description donnée par M. Raynaud [Ray] des groupes $\Phi_{N,p}$ en termes de modèles sur $\mathbf{Z}$ des $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$ qui sont réguliers. De tels modèles sont connus dans le cas où la valuation en p de N est au plus 1 [De-Ra], et dans le cas où $p > 3$ [Ed]. Pour l un nombre premier ne divisant pas N il faut montrer que l'opérateur de Hecke T_l agit sur $\Phi_{N,p}$ par multiplication par $l+1$. Cet opérateur T_l est défini en termes des deux morphismes standards de $X_0(Nl)_{\mathbf{Q}}$ vers $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$. Afin de calculer l'action de T_l sur $\Phi_{N,p}$ nous étendons ces deux morphismes à certains modèles convenables sur $\mathbf{Z}_p$. Ces calculs nous conduisent à démontrer la proposition (déjà prouvée par Ribet dans le cas supersingulier) mentionnée plus haut (cf. Lemme 2 de (4.2)).

L'intérêt de ce théorème de Ribet est le rôle qu'il joue dans [Ri 2], où il est démontré que la conjecture de Taniyama et Weil implique celle de Fermat. Il est peut-être utile de remarquer que dans la démonstration que Taniyama-Weil implique Fermat [Ri 2] on n'a besoin que d'une version faible du théorème de Ribet. Cette version dit que l'action de l'algèbre de Hecke sur le sous-groupe de q-torsion de $\Phi_{N,p}$ est Eisenstein pour tout nombre premier $q > 3$. D'après

Mazur et Rapoport [Ma-Ra] ce sous-groupe est cyclique et on a un générateur explicite: c'est un multiple de $Z - Z'$ (dans leur notation). Il est très facile de calculer l'action d'un T_l sur $Z - Z'$. Bien sûr, il n'est pas utile d'affaiblir le théorème de Ribet quand il s'agit des conjectures de Serre.

Finissons par remarquer le fait que l'action de l'algèbre de Hecke sur les groupes de composantes des modèles de Néron des jacobiennes des courbes de Shimura n'est pas toujours “Eisenstein”. Ceci est une conséquence du Théorème 4.3 de Ribet ([Ri 2], version d'octobre 1988).

J'aimerais remercier K. Ribet de m'avoir demandé si la généralisation de son théorème était vraie, de m'avoir envoyé une version préliminaire de son article [Ri 1], de m'avoir stimulé d'écrire ce texte, et de ses commentaires. J'aimerais aussi remercier J. Oesterlé de m'avoir suggéré beaucoup d'améliorations.

2 Description du groupe de composantes.

Soit S un trait strictement hensélien de point fermé s et de point générique t, et $\mathcal{C} \to S$ une courbe. Supposons que $\mathcal{C}$ est régulier et que $\mathcal{C}_t$ est lisse et géométriquement irréductible sur t. Nous allons rappeler la description que donne Raynaud ([Ray], (8.1)) du modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/t}$ en termes du foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$.

Notons par C les composantes irréductibles réduites de $\mathcal{C}_s$, et par m_C la multiplicité de C dans $\mathcal{C}_s$. Alors on a l'égalité de diviseurs (de Weil ou Cartier) sur $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}_s = \sum_C m_C C.$$

Pour ne pas avoir des ennuis nous supposons que $k(s)$ est algébriquement clos et que le plus grand commun diviseur des m_C est 1.

Soit $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$ le sous-foncteur de $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$ des faisceaux inversibles de degré total 0. Rappelons ([De-Ra]I(3.3.3) ou [Ray](8.1.1)) que le degré total d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}_s$ est donné par:

$$\deg \mathcal{L} = \sum_C m_C \deg_C(\mathcal{L} \mid_C).$$

D'après théorème (8.1.4) de [Ray] le modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/k(t)}$ est égal à $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}/E$, où E est l'adhérence schématique de la section unité dans $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$. Ce faisceau en groupes E mesure le défaut de séparation de $\mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}$ sur S. Puisque $\mathcal{C}/S$ satisfait la propriété $(\mathrm{N})^*$ ([Ray](6.1.4),(6.1.6)), $\mathcal{C}/S$ est cohomologiquement plat ([Ray](7.2.1)) et E est représenté par un schéma en groupes étale sur S ([Ray](5.2)). Ce schéma en groupes est “le schéma étalé sur S” correspondant au faisceau gratte-ciel de support s et de groupe $E(S)$. Le groupe $E(S)$ est formé des faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$ qui sont triviaux sur $\mathcal{C}_t$. Soit D le groupe abélien libre qui a pour base les composantes irréductibles C de $\mathcal{C}_s$, on a donc:

$$D = \bigoplus_C \mathbf{Z}[C].$$

Alors $E(S)$ est l'image du morphisme:

$$D \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S) \qquad [C] \mapsto \mathcal{L}_C,$$

où $\mathcal{L}_C$ est l'inverse du faisceau d'idéaux sur $\mathcal{C}$ définissant le diviseur C. Comme $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}$ est la composante neutre du modèle de Néron de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_t/t}$ ([Ray](8.1.2)) on a:

$$\Phi = \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(s)/(E(s) + \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(s)) = \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S)/(E(S) + \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(S)),$$

où Φ est le groupe de composantes de la fibre sur s de ce modèle de Néron. Définissons un morphisme: $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}(S) \xrightarrow{\text{multideg}} D$ par: $\mathcal{L} \mapsto \sum_C \deg(\mathcal{L} \mid_C)[C]$. Maintenant nous avons un diagramme où la ligne est exacte:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & D & & & & & & \\ & & & & \downarrow \text{div} & & \alpha & & & & \\ 0 & \to & \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/S}(S)) & \to & \mathrm{Pic}^{[0]}_{\mathcal{C}/S}(S) & \xrightarrow{\text{multideg}} & D & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z} & \to & 0. \end{array}$$

Le morphisme $\alpha = \text{multideg} \circ \text{div}$ se calcule par:

$$\alpha : \quad [C] \mapsto \sum_{C'} \deg(\mathcal{L}_C \mid_{C'})[C'] = \sum_{C'} (C \cdot C')[C'],$$

où $(C \cdot C')$ est le nombre d'intersection de C et C' sur la surface régulière $\mathcal{C}$. De ce qui précède il s'ensuit que ([Ray](8.1.2)):

$$\Phi = \ker(\deg)/\mathrm{im}(\alpha).$$

Un élément de Φ est donc une classe modulo $\mathrm{im}(\alpha)$ de multidegrés de faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$.

3 Le groupe de composantes et morphismes.

Les notations sont celles de la Section 2. Soit $\widetilde{\mathcal{C}}/S$ une courbe satisfaisant aux hypothèses faites sur $\mathcal{C}$, et $\widetilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ un S-morphisme. Nous allons calculer les deux morphismes induits par π sur les groupes de composantes: $\Phi \xrightarrow{\pi^*} \widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\Phi} \xrightarrow{\pi_*} \Phi$.

3.1 Calcul de π^*.

D'après (2), le groupe Φ est l'homologie du complexe: $D \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z}$. On a un complexe analogue pour $\widetilde{\Phi}$. Tenant compte des deux interprétations de D (groupe de diviseurs sur $\mathcal{C}$ à support dans $\mathcal{C}_s$ et groupe de multidegrés de faisceaux inversibles sur $\mathcal{C}$), on voit facilement que le morphisme $\pi^* : \Phi \to \widetilde{\Phi}$ est induit par un morphisme de complexes:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z} \\ \downarrow \pi^*_{\text{div}} & & \downarrow \pi^*_{\deg} & & \downarrow \deg(\pi) \\ \tilde{D} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{D} & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z} \end{array}$$

$$\pi^*_{\text{div}} : \quad [C] \mapsto \pi^{-1}C \quad (\text{diviseur sur } \widetilde{\mathcal{C}})$$

$$\pi^*_{\deg} : \quad [C] \mapsto \sum_{\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C} \deg(\pi|_{\tilde{C}})[\widetilde{C}].$$

3.2 Calcul de π_*.

Les notations sont toujours les mêmes, mais dans cette section il nous faut une hypothèse supplémentaire: $\widetilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ est quasi-fini. Parce que $\widetilde{\mathcal{C}}/S$ et $\mathcal{C}/S$ sont propres, π est alors fini, et parce que $\widetilde{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}$ sont réguliers, π est plat. Le morphisme π est donc fini et plat, ce qui reste vrai après tout changement de base. La construction "norme d'un faisceau inversible" nous donne un morphisme: $\mathrm{Pic}_{\tilde{\mathcal{C}}/S} \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$. En termes de diviseurs ce morphisme est l'image directe.

En regardant les valuations que donnent les composantes irréductibles des fibres fermées on trouve l'égalité de diviseurs sur $\widetilde{\mathcal{C}}$:

$$\pi^{-1}C = \sum_{\tilde{C}\mapsto C} (m_{\tilde{C}}/m_C)\widetilde{C}.$$

Localisation au point générique d'un C nous donne:

$$\deg(\pi) = \sum_{\tilde{C}\mapsto C} (m_{\tilde{C}}/m_C)\deg(\widetilde{C}/C).$$

Pour l'image directe d'un $\tilde{C}$ on a par définition ([Gro 2] (21.10.14.1)): $\pi_*(\tilde{C}) = \deg(\tilde{C}/\pi\tilde{C})\pi\tilde{C}$. Pour voir ce qui arrive aux multidegrés appliquons le corollaire (7.1.2) de [Ray], ce corollaire dit que pour chaque $\tilde{C}$ il existe un diviseur effectif horizontal Z sur $\tilde{\mathcal{C}}$ qui a degré 1 sur $\tilde{C}$ et degré 0 sur les autres composantes de $\tilde{\mathcal{C}}_s$. Le degré de π_*Z sur $\pi\tilde{C}$ se calcule par la formule de projection: $(\pi_*Z\cdot\pi\tilde{C}) = (Z\cdot\pi^*\pi\tilde{C}) = (Z\cdot(m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}})\tilde{C}) = m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}}$. Maintenant nous savons tout du morphisme de complexes qui induit π_* sur les groupes de composantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Z} & \to & \tilde{D} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{D} & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z} \\
\downarrow {\scriptstyle\deg(\pi)} & & \downarrow \pi_*^{\mathrm{div}} & & \downarrow \pi_*^{\deg} & & \downarrow {\scriptstyle 1} \\
\mathbf{Z} & \to & D & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{\deg} & \mathbf{Z}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\pi_*^{\mathrm{div}}: &\quad [\tilde{C}] \mapsto \deg(\tilde{C}/\pi\tilde{C})[\pi\tilde{C}] \\
\pi_*^{\deg}: &\quad [\tilde{C}] \mapsto (m_{\tilde{C}}/m_{\pi\tilde{C}})[\pi\tilde{C}].
\end{aligned}$$

Remarque. Comme l'a suggéré J. Oesterlé, on peut calculer le morphisme induit par π sur les groupes de composantes sans supposer que π est quasi-fini. Le morphisme $\pi:\widetilde{\Phi}\to\Phi$ est alors induit par un morphisme de complexes commme ci-dessus, où $\pi_*^{\deg}$ est donné par la formule:

$$\pi_*^{\deg}: \quad [\tilde{C}] \mapsto \sum_{\tilde{C}\subset\pi^{-1}C} m_{\tilde{C},C}[C]$$

avec $m_{\tilde{C},C}$ la multiplicité de $\widetilde{C}$ dans $\pi^{-1}C$. La formule pour π_*^{div} est toujours la même.

3.3 Éclatements.

Il peut être nécessaire de travailler avec des modèles non minimaux, par exemple pour avoir des morphismes entre modèles réguliers. Bien sûr, le groupe de composantes ne dépend pas du modèle (régulier) qu'on choisit, mais c'est sa description qui change quand on change de modèle. Nous avons donc besoin de traduire une description en une autre. Soit alors $\widetilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ obtenu en faisant éclater $\mathcal{C}$ en un point $x\in\mathcal{C}(s)$. Nous notons E la courbe exceptionnelle et $\widetilde{C}$ le transformé strict d'une composante irréductible C de $\mathcal{C}_s$.

Dans ce cas on a: $\pi^*_{\deg}: \quad [C]\mapsto[\widetilde{C}]$. Cette formule donne l'isomorphisme: $\Phi \xrightarrow{\pi^*} \widetilde{\Phi}$, nous voulons aussi une formule pour son inverse. Pour cela il faut éliminer les $[E]$ d'un élément de $\widetilde{\Phi}$. La relation voulue nous est fournie par $\tilde{\alpha}([E])$:

$$\tilde{\alpha}([E]) = -[E] + \sum_{x\in C(s)} m_{C,x}[\widetilde{C}]$$

où $m_{C,x}$ est la multiplicité de C en x. L'isomorphisme $\widetilde{\Phi}\to\Phi$ est donc induit par:

$$(\pi^*_{\deg})^{-1}: \tilde{D}\to D \qquad [\widetilde{C}]\mapsto[C] \quad [E]\mapsto \sum_{x\in C(s)} m_{C,x}[C].$$

4 Le cas des courbes modulaires $X_0(N)$.

Pour N un entier positif soit $X_0(N)$ la courbe modulaire sur $\mathbf{Z}$ paramétrant les N-isogénies cycliques entre courbes elliptiques: $X_0(N)$ est le schéma grossier de modules compactifié associé au problème de modules $[\Gamma_0(N)]$ (cf. [Ka-Ma](8.6)). Cette courbe $X_0(N)/\mathbf{Z}$ est un modèle normal de sa fibre générique $X_0(N)_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, mais malheureusement ce n'est pas toujours un modèle régulier. Notons par $J_0(N)$ le modèle de Néron sur $\mathbf{Z}$ de $\mathrm{Pic}^0_{X_0(N)_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$. Soit p un nombre premier, S le spectre de l'anneau des vecteurs de Witt sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ et $\widetilde{X_0(N)}_S$ la résolution minimale de $X_0(N)_S$. Deligne et Rapoport [De-Ra] ont donné une description de $\widetilde{X_0(N)}_S$ dans le cas où la valuation de N en p est au plus 1. Utilisant les résultats de Katz et Mazur [Ka-Ma] on peut décrire $\widetilde{X_0(N)}_S$ pour $p > 3$ [Ed]. Dans ces deux cas on connaît donc la table d'intersection de la fibre spéciale de $\widetilde{X_0(N)}_S$, et d'après la Section 2 cela suffit pour calculer le groupe de composantes $\Phi_{N,p}$ de $J_0(N)_s$. Nous donnerons quelques exemples de ces groupes en (4.4).

4.1 Action de l'algèbre de Hecke sur $\Phi_{N,p}$.

Soit l un nombre premier ne divisant pas N. Pour une isogénie cyclique de degré Nl entre courbes elliptiques (sur une base quelconque): $E_1 \xrightarrow{\phi_{Nl}} E_2$ il existe des factorisations uniques (à isomorphisme près):

$$E_1 \xrightarrow{\phi_{N,1}} E_3 \xrightarrow{\phi_{l,2}} E_2 \qquad E_1 \xrightarrow{\phi_{l,1}} E_4 \xrightarrow{\phi_{N,2}} E_2$$

où $\phi_{*,i}$ a degré $*$ (cf. [Ka-Ma] (6.7)).

Au niveau de problèmes de modules cela donne deux morphismes:

$$\mathrm{S}, \mathrm{T} : [\Gamma_0(Nl)] \to [\Gamma_0(N)] : \quad \mathrm{S}(\phi_{Nl}) = \phi_{N,1} \quad \mathrm{T}(\phi_{Nl}) = \phi_{N,2},$$

et une involution:

$$\mathrm{W}_l : [\Gamma_0(Nl)] \to [\Gamma_0(Nl)] \quad \phi_{Nl} \mapsto \phi_{N,1}\phi_{l,1}^t.$$

Par construction on a: $\mathrm{T} = \mathrm{S} \circ \mathrm{W}_l$. On obtient des morphismes induits: $\mathrm{S}, \mathrm{T} : X_0(Nl) \to X_0(N)$, $X_0(Nl)_{\mathbf{Q}} \to X_0(N)_{\mathbf{Q}}$, un endomorphisme $\mathrm{T}_l = \mathrm{T}_*\mathrm{S}^*$ de $J_0(N)$, et finalement un endomorphisme T_l de $\Phi_{N,p}$. Le fait que S, T et W_l se prolongent aux pointes est démontré dans [De-Ra] Ch. IV Prop. 3.16, 3.18, Prop. 3.19 et ex. 4.4.

Théorème 1 *L'endomorphisme T_l de $\Phi_{N,p}$ est multiplication par $l+1$ si $p > 3$.*

Dans ce cas ($p > 3$) on connaît des modèles réguliers, alors avec les methodes des Sections 2 et 3 on pourrait simplement calculer $\mathrm{S}^* : \Phi_{N,p} \to \Phi_{Nl,p}$ et $\mathrm{T}_* : \Phi_{Nl,p} \to \Phi_{N,p}$, mais on peut faire un peu mieux. C'est à dire qu'il suffit de prouver que $\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^* : \Phi_{N,p} \to \Phi_{Nl,p}$, parce que cela implique que $\mathrm{T}_l = \mathrm{T}_*\mathrm{T}^* : \Phi_{N,p} \to \Phi_{N,p}$, et $\mathrm{T}_*\mathrm{T}^*$ agit sur $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ (et donc aussi sur $\Phi_{N,p}$) par $\deg(\mathrm{T}) = l+1$. Cette astuce est due à Ribet, (d'après Ribet, le vrai résultat est cette égalité, et le Théorème 1 en est un corollaire). On aurait pu faire beaucoup mieux si l'action de W_l sur $\Phi_{Nl,p}$ était triviale (cela réduirait le théorème à une proposition sur une seule courbe), mais cela n'est pas vrai. Alors le plus grand problème dans la démonstration de $\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^*$ est de décrire des modèles réguliers de $X_0(Nl)_S$ et $X_0(N)_S$ auxquels les morphismes S et T se prolongent. On donnera quelques exemples de ces modèles en (4.3).

Soit maintenant $\mathcal{P}$ une structure de niveau supplémentaire convenable (par exemple $[\Gamma(3)]_S$), tel qu'on a des morphismes de schémas de modules compactifiés sur S:

$$\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(Nl)]) \xrightarrow{\mathrm{S,T}} \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)]).$$

avec une action (fidèle, d'un groupe G) tel que le quotient par cette action est:

$$X_0(Nl)_S \xrightarrow{\mathrm{S,T}} X_0(N)_S.$$

Pour simplifier nous supprimons dans la suite les indices inférieures "S".

Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])(s)$ un point à stabilisateur G_x non trivial. Comme en [Ed] on fait éclater $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])$ en x jusqu'à ce que l'action de G_x sur les points fixes au dessus de x est par pseudo-réflexions (il faut donc 0,1 ou 3 éclatements). On fait éclater $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(Nl)])$ en tout $y \in \mathrm{S}^{-1}(x)$ de la même manière qu'on a fait éclater $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])$ en x. Notons les modèles obtenus par $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])^*$ et $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(Nl)])^{*\mathrm{S}}$. Nous avons maintenant un grand diagramme:

$$\begin{array}{ccccl}
\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(Nl)])^{*\mathrm{S}} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])^* & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \text{quotient par G-action} \\
X_0(Nl)^{*\mathrm{S}} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & X_0(N)^* & & \\
\downarrow \pi^{\mathrm{S}} & & \downarrow \pi & & \text{composé d'éclatements} \\
\widetilde{X_0(Nl)} & & \widetilde{X_0(N)} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \text{composé d'éclatements} \\
X_0(Nl) & \xrightarrow{\mathrm{S}} & X_0(N) & &
\end{array}$$

Il y a des morphismes induits sur les groupes abéliens libres engendrés par les composantes des fibres fermées, nous n'écrivons que les deux lignes au milieu:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{D}^{*\mathrm{S}} & \xleftarrow{\mathrm{S}^*_{\mathrm{deg}}} & D^* \\
\downarrow (\pi^{\mathrm{S}*}_{\mathrm{deg}})^{-1} & & \uparrow \pi^*_{\mathrm{deg}} \\
\tilde{D} & & D
\end{array}$$

où $\mathrm{S}^*_{\mathrm{deg}}$ et π^*_{deg} sonts induits par S et π comme en (3.1), et $(\pi^{\mathrm{S}*}_{\mathrm{deg}})^{-1}$ par π^{S} comme en (3.3).

La composition de ces trois morphismes, qu'on notera $\mathrm{S}^* : D \to \tilde{D}$, induit $\mathrm{S}^* : \ \Phi_{N,p} \to \Phi_{Nl,p}$. De la même manière on trouve des morphismes:

$$\mathrm{T}^* : \ \ D \xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{deg}}} D^* \xrightarrow{\mathrm{T}^*_{\mathrm{deg}}} \tilde{D}^{*\mathrm{T}} \xrightarrow{(\pi^{\mathrm{T}*}_{\mathrm{deg}})^{-1}} \tilde{D}.$$

Le théorème à démontrer est maintenant une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 1 *$\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^* : \ D \longrightarrow \tilde{D}$.*

On prouvera l'égalité $\mathrm{S}^*([C]) = \mathrm{T}^*([C])$ pour tout élément de base de D. Pour C le transformé strict d'une composante de $X_0(N)_s$ cela résulte de la description par [Ka-Ma]: si C est de type (a, b) alors $\mathrm{S}^*([C]) = \mathrm{T}^*([C]) = (l+1)[(a, b)$-composante de $\widetilde{X_0(Nl)}_s]$.

Soit $x \in (\mathrm{Sing}\ X_0(N))(s)$, et C_x une composante de $\widetilde{X_0(N)}_s$ dans l'image réciproque de x. Par (3.1) on a: $\pi^*_{\mathrm{deg}}[C_x] = [\tilde{C}_x]$, où $\tilde{C}_x$ est le transformé strict de C_x dans $X_0(N)^*$. Encore par (3.1) on a:

$$\mathrm{S}^*([\tilde{C}_x]) = \sum_{\mathrm{S}y=x} [C^*_y] \qquad \mathrm{T}^*([\tilde{C}_x]) = \sum_{\mathrm{T}y=x} [C^*_y]$$

où les sommes sont sur les $y \in X_0(Nl)(s)$ avec $\mathrm{S}y = x$ (resp. $\mathrm{T}y = x$), et C^*_y est la composante unique de $X_0(Nl)^*_s$ au dessus de y avec S (ou T)-image $\tilde{C}_x$. Les coefficients sont 1 parce que les $\deg(C^*_y/\tilde{C}_x)$ sont 1, ce qui à son tour résulte de ce que l'action de G_x sur chaque composante de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, [\Gamma_0(N)])^*_s$ au dessus de $\tilde{C}_x$ est triviale (cf. [Ed](ch.1)).

Par (3.3) on a:

$$(\pi_{\deg}^{\mathrm{S}*})^{-1}\mathrm{S}^*[\tilde{C}_x] = \sum_C a_{\tilde{C}}[\tilde{C}] + \sum_{\mathrm{S}y=x} [\tilde{C}_y]$$

où le deuxième terme est une somme sur les $y \in (\mathrm{Sing}\ X_0(Nl))(s)$ seulement, et le premier terme est une somme sur les composantes de $X_0(Nl)_s$ ($\tilde{C}$ est le transformé strict dans $\widetilde{X_0(Nl)}$ de C). Ce premier terme est le résultat de l'élimination des $[C_y^*]$ avec $\mathrm{S}y = x$ mais $y \in (\mathrm{Reg}\ X_0(Nl))(s)$. Pour T on a une somme analogue:

$$(\pi_{\deg}^{\mathrm{T}*})^{-1}\mathrm{T}^*[\tilde{C}_x] = \sum_C b_{\tilde{C}}[\tilde{C}] + \sum_{\mathrm{T}y=x} [\tilde{C}_y].$$

Il nous faut prouver que ces deux sommes sont identiques. Il est clair (cf. (3.3)) que les $a_{\tilde{C}}$ et $b_{\tilde{C}}$ dépendent seulement (et de la même manière) du nombre de $[C_y^*]$ éliminés, donc il suffit de prouver l'égalité des deuxièmes termes. Cela revient à démontrer que:

$$(\mathrm{Sing}\ X_0(Nl))(s) \cap \mathrm{S}^{-1}x = (\mathrm{Sing}\ X_0(Nl))(s) \cap \mathrm{T}^{-1}x,$$

ce qui est une conséquence du Lemme 2 de (4.2).

4.2 Un lemme sur les automorphismes des courbes elliptiques.

Soit p un nombre premier, $k := \overline{\mathbf{F}}_p$, N un nombre entier positif qui n'est pas divisible par p, et $X_0(N) \xrightarrow{\mathrm{S}} X_0(1)$ le morphisme donné par: $(E_1 \to E_2) \mapsto E_1$. (Dans cette section nous ne supposons *pas* que $p > 3$.)

Soit $x \in X_0(N)(k)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(x)$ correspondant au diagrammes suivants:

$$E_1 \xrightarrow{\phi} E_2 \qquad \begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\phi} & E_2 \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 \\ E_1 & \xrightarrow{\phi} & E_2 \end{array}$$

Notons que σ_1 et σ_2 ont même ordre que σ, donc la connaissance des courbes elliptiques à automorphismes $\neq \pm 1$ nous apprend que si $\sigma \neq \pm 1$ alors l'ordre de σ est 3,4 ou 6, et E_2 est isomorphe à E_1. Ceci implique que dans nos considérations sur les points de $X_0(N)$ à automorphismes nous aurons affaire aux endomorphismes seulement.

Soit maintenant $y \in X_0(1)(k)$ (disons $y \sim E$) et $\pm 1 \neq \sigma \in \mathrm{Aut}_k(y)$, alors :

$$\{x \in \mathrm{S}^{-1}y \mid \sigma \in \mathrm{Aut}_k(x)\} = \{E \xrightarrow{\phi} E_1 \mid \sigma \ker\phi = \ker\phi\}$$

Il s'agit donc de sous-groupes σ-invariants cycliques d'ordre N de

$$E[N](k) \cong (\mathbf{Z}/N)^2 = \prod_{q|N} (\mathbf{Z}/q^{n_q})^2,$$

où $N = \prod_{q|N} q^{n_q}$ est la factorisation de N en facteurs premiers. Sachant que pour tout $q \neq 2, 3$ l'action de σ sur $E[q](k)$ a deux valeurs propres distinctes il est facile de démontrer le lemme suivant.

Lemme 1 *Écrivons $N = 2^{n_2} \prod_{q\neq 2} q^{n_q}$. Pour $y \in X_0(1)(k)$ et $\sigma_4 \in \mathrm{Aut}_k(y)$ d'ordre 4 on a:*

$$\#\{x \in \mathrm{S}^{-1}y \mid \sigma_4 \in \mathrm{Aut}_k(x)\} = \begin{cases} 0 & si\ n_2 > 1\ ou\ \exists q \equiv -1(4) \\ 2^{\#\{q|q\neq 2\}} & sinon. \end{cases}$$

Écrivons $N = 3^{n_3} \prod_{q\neq 3} q^{n_q}$. Pour $y \in X_0(1)(k)$ et $\sigma_3 \in \mathrm{Aut}_k(y)$ d'ordre 3 on a:

$$\#\{x \in \mathrm{S}^{-1}y \mid \sigma_3 \in \mathrm{Aut}_k(x)\} = \begin{cases} 0 & si\ n_3 > 1\ ou\ \exists q \equiv -1(3) \\ 2^{\#\{q|q\neq 3\}} & sinon. \end{cases}$$

Nous savons déjà que les points de $X_0(N)(k)$ à automorphismes $\neq \pm 1$ correspondent aux endomorphismes (= isogénies dont la source et le but coïncident). Il se trouve même que ces endomorphismes appartiennent à l'un des sous-anneaux $\mathbf{Z}[\sigma_4]$ et $\mathbf{Z}[\sigma_3]$ de $\mathrm{End}_k(E)$. Cela résulte du fait que $\mathbf{Z}[\sigma_4]$ et $\mathbf{Z}[\sigma_3]$ sont de factorisation unique et que la factorisation de N donne exactement le même nombre d'endomorphismes cycliques de degré N que le lemme précédent.

Lemme 2 *Soit $N = lM$ avec l un nombre premier qui ne divise pas M, et $x \in X_0(N)(k)$ avec $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(x)$ d'ordre 3 ou 4. Alors on a $\mathrm{S}x = \mathrm{T}x$ pour S et T les deux morphismes $X_0(N) \to X_0(M)$ de* (4.1).

Disons que x correspond à $E \overset{\phi_N}{\to} E$, et $\phi_N \in \mathbf{Z}[\sigma]$. Ce ϕ_N se factorise en deux facteurs de degrés M et l: $\phi_N = \phi_M \phi_l$. Alors de $\phi_M\phi_l = \phi_l\phi_M$ il résulte que $\mathrm{S}x = \phi_M = \mathrm{T}x$.

4.3 Quelques exemples des modèles utilisés en (4.1).

Dans cette section on trouve des dessins des fibres fermées de quelques modèles utilisés en (4.1). Pour obtenir ces dessins on se sert de la description des points à automorphismes de (4.2) et de [Ed] ch.1.

Traitons le cas: $X_0(2\cdot 11)_S \xrightarrow{\mathrm{S}} X_0(11)_S$ où S est de caractéristique résiduelle 11. Les dessins sont dans la Figure 1.

Le deuxième exemple est: $X_0(2\cdot 13^2)_S \xrightarrow{\mathrm{S}} X_0(13^2)_S$, avec S de caractéristique résiduelle 13. Les dessins sont dans la Figure 2.

4.4 Quelques exemples des groupes $\Phi_{N,p}$.

4.4.1 Le cas traité par Mazur et Rapoport.

Il y a quelques petites erreurs dans les calculs de [Ma-Ra]. Dans cette section, nous nous permettons de refaire ces calculs. Il y a trois choses à dire. Premièrement: les $1/d_i$ qui se trouvent dans leur Proposition (1.4) ne doivent pas être là, apparemment ils n'ont pas tenu compte du fait que les X_i dans [Ray], (8.1.1) ne sont pas nécessairement réduits. D'ailleurs cela n'affecte pas leurs résultats parce que tous les d_i y sont 1. Deuxièmement: le nombre de points supersinguliers n'est pas comme il est écrit dans la Proposition (1.2): $(Q-2^\nu)/2$ doit être $(Q+2^\nu)/2$ et $(Q-2^\nu)/3$ doit être $(Q+2^{\nu+1})/3$. Troisièmement: il y a une erreur dans la structure du groupe Φ (leurs Φ modulo 2-torsion et 3-torsion ne sont pas cycliques (cf. Table 2, page 174), tandis que cela doit être bien le cas). Dans cette section nous tentons de donner les tables correctes.

Rappelons les notations: $N = pM$ est un nombre entier positif , $p > 3$ un nombre premier qui ne divise pas M. Notons par s_2, s_4 et s_6 les nombres de points supersinguliers $x \in X_0(M)(\overline{\mathbf{F}}_p)$ tel que $\#\mathrm{Aut}(x) = 2, 4, 6$. Alors notre calcul de $\Phi_{N,p}$ donne:

s_4	s_6	$\Phi_{N,p}$
0	0	$\mathbf{Z}/s_2$
>1	0	$\mathbf{Z}/(2(2s_2+s_4)) \oplus (\mathbf{Z}/2)^{s_4-2}$
0	>1	$\mathbf{Z}/(3(3s_2+s_6)) \oplus (\mathbf{Z}/3)^{s_6-2}$
>1	>1	$\mathbf{Z}/(6(6s_2+3s_4+2s_6)) \oplus (\mathbf{Z}/2)^{s_4-2} \oplus (\mathbf{Z}/3)^{s_6-2}$

Figure 1: Le cas $X_0(2 \cdot 11)_S \xrightarrow{\text{S}} X_0(11)_S$.

Figure 2: Le cas $X_0(2 \cdot 13^2)_S \xrightarrow{\text{S}} X_0(13^2)_S$.

Pour obtenir $\Phi_{N,p}$ dans le cas où $s_4 = 1$ il faut faire comme suit: prendre le cas $s_4 > 1$, supprimer le terme avec exposant "$s_4 - 2$" et supprimer le facteur "2" du premier terme. Si $s_6 = 1$ on supprime le terme d'exposant "$s_6 - 2$" et le facteur "3" du premier terme.

Soit maintenant $M = \prod_q q^{n_q}$ la factorisation de M en facteurs premiers ($n_q > 0$), $\nu = \#\{q \mid q \neq 2, 3\}$ et $Q = \deg(X_0(M)/X_0(1)) = \prod_q (q+1)q^{n_q - 1}$. Alors les nombres s_2, s_4, s_6 sont donnés par:

p		s_2	s_4	s_6
$p \equiv 1(12)$		$Q\frac{p-1}{12}$	0	0
$p \equiv 5(12)$	$s_6 = 0$	$Q\frac{p-1}{12}$	0	0
	$s_6 \neq 0$	$\frac{Q(p-1)-4\cdot 2^\nu}{12}$	0	2^ν
$p \equiv 7(12)$	$s_4 = 0$	$Q\frac{p-1}{12}$	0	0
	$s_4 \neq 0$	$\frac{Q(p-1)-6\cdot 2^\nu}{12}$	2^ν	0
$p \equiv 11(12)$	$(s_4 = 0) \wedge (s_6 = 0)$	$Q\frac{p-1}{12}$	0	0
	$(s_4 \neq 0) \wedge (s_6 = 0)$	$\frac{Q(p-1)-6\cdot 2^\nu}{12}$	2^ν	0
	$(s_4 = 0) \wedge (s_6 \neq 0)$	$\frac{Q(p-1)-4\cdot 2^\nu}{12}$	0	2^ν
	$(s_4 \neq 0) \wedge (s_6 \neq 0)$	$\frac{Q(p-1)-10\cdot 2^\nu}{12}$	2^ν	2^ν

$$s_4 = 0 \iff n_2 > 1 \ \vee \ \exists q \equiv -1(4)$$

$$s_6 = 0 \iff n_3 > 1 \ \vee \ \exists q \equiv -1(3)$$

Notons que les nombres s_2, s_4 et s_6 dans la table ci-dessus satisfont à la formule de masse ([Ka-Ma](12.4.5, 12.4.6)):

$$s_2/2 + s_4/4 + s_6/6 = \sum_{x = s.s.} 1/\#\mathrm{Aut}(x) = Q(p-1)/24.$$

4.4.2 Les groupes $\Phi_{p^2,p}$ pour $p > 3$.

Donnons d'abord un exemple: $p = 13$. Dans (4.3) on trouve le "graphe" de la fibre fermée de $\widetilde{X_0(13^2)}$. Les nombres d'intersection s'en déduisent facilement et on obtient le morphisme α de la Section 2:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -13 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile donne: $\Phi_{13^2,13} \cong \mathbf{Z}/7$.

Dans le cas général on trouve:

Proposition 2 *Pour $p > 3$ on a $\Phi_{p^2,p} \cong \mathbf{Z}/\frac{p^2-1}{24}$.*

References

[De-Ra] Deligne, P. et Rapoport, M. *Les schémas de modules de courbes elliptiques.* Lecture Notes in Mathematics 349, 143–316 (1973).

[Ed] Edixhoven, S.J. *Minimal resolution and stable reduction of* $X_0(N)$. University Utrecht Dep. Math. preprint #438 (1986).

[Gro 1] Grothendieck, A. *Modèles de Néron et monodromie.* Séminaire de Géométrie Algébrique 7, Exposé IX, Lecture Notes in Mathematics 288, 313–523 (1972).

[Gro 2] Grothendieck, A. *Eléments de géométrie algébrique IV.* Publications Mathématiques de l'IHES 32 (1967).

[Ka-Ma] Katz, N. and Mazur, B. *Arithmetic moduli of elliptic curves.* Annals of Mathematics Studies, Study 108 (1985).

[Ma] Mazur, B. *Modular curves and the Eisenstein ideal.* Publications Mathématiques de l'IHES 47, 33–186 (1977).

[Ma-Ra] Mazur, B. and Rapoport, M. *Behavior of the Néron model of the jacobian of* $X_0(N)$ *at bad primes.* Appendice de [Ma].

[Ray] Raynaud, M. *Spécialisation du foncteur de Picard.* Publications Mathématiques de l'IHES 38, 27–76 (1970).

[Ri 1] Ribet, K.A. *On the component groups and the Shimura subgroup of* $J_0(N)$. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1988.

[Ri 2] Ribet, K.A. *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *arising from modular forms.* MSRI preprint #06420-87 (June, 1987).

Bas Edixhoven
Mathematisch Instituut
Budapestlaan 6
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
The Netherlands.