INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE RENNES
Université de Rennes 1 — U.R.A. C.N.R.S. 305

PRÉPUBLICATION

PIERRE BERTHELOT

Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres

Première partie

(version provisoire 1991)

Prépublication 96-03 Janvier 1996

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
Tél. : (33) 2 99 28 60 43 Fax : (33) 2 99 28 67 90

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Cette prépublication est constituée des trois premiers chapitres d'un ouvrage encore inachevé, consacré à la construction et aux propriétés de base de la cohomologie rigide des variétés algébriques sur un corps de caractéristique p. Ecrits entre 1987 et 1991, ils ont circulé depuis de manière informelle. Dans la mesure où ils ont déjà servi de référence dans divers articles, et sont notamment utilisés de manière essentielle dans la démonstration du théorème de finitude donnée dans [Be4], il nous paraît utile de les rendre accessibles de manière plus systématique, sans attendre la rédaction complète de l'ouvrage auquel ils seront incorporés. Nous attirons néanmoins l'attention du lecteur sur le fait qu'il ne s'agit pour l'instant que d'une rédaction provisoire, susceptible d'être modifiée dans la version finale.

Les trois chapitres qui sont rassemblés ici constituent la partie géométrique, « pré-cohomologique », de cet ouvrage. Le chapitre 0 est consacré à des rappels sur certaines constructions de base de la géométrie rigide sur un corps valué non archimédien K. On y trouvera notamment la construction de la fibre générique d'un schéma formel sur l'anneau $\mathcal{V}$ des entiers de K (due à Raynaud [Ra1]), celle de l'espace analytique associé à un schéma de type fini sur un corps valué non archimédien, et les relations entre ces deux espaces. Signalons simplement que la construction de la fibre générique d'un schéma formel est généralisée ici au cas d'un $\mathcal{V}$-schéma formel adique localement de type fini, dont la topologie n'est pas nécessairement définie par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{V}$.

Cette construction est liée à celle des tubes, introduits dans la première section du chapitre 1. Si P est un $\mathcal{V}$-schéma formel ($\mathfrak{m}$-adique), et X un sous-schéma localement fermé de la fibre spéciale P_0 de P, nous associons à X un ouvert de l'espace analytique rigide P_K, fibre générique de P, que nous appelerons *tube de* X dans P, et que nous noterons $]X[_P$. Lorsque X est fermé dans P_0, ce tube joue dans la définition de la cohomologie rigide le même rôle que les voisinages infinitésimaux dans celle de la cohomologie de de Rham algébrique en caractéristique 0 [Ha2], ou les voisinages à puissances divisées en cohomologie cristalline [Be1]. Lorsque X n'est pas propre sur k, la considération de ces tubes ne suffit pas à définir une bonne cohomologie pour X, à cause des problèmes de convergence au bord qui motivaient déjà l'utilisation des algèbres faiblement complètes de Monsky-Washnitzer [MW1]. Il y a donc lieu d'introduire certains voisinages des tubes, que nous appelerons voisinages stricts, et qui sont étudiés dans la deuxième section du chapitre 1. Dans la troisième section, nous montrons les théorèmes de fibration reliant les tubes de X dans deux schémas formels P et P' : si $u : P' \to P$ est un morphisme lisse induisant l'identité sur X, le morphisme de fonctorialité $]X[_{P'} \to]X[_P$ est une fibration localement triviale en disques ouverts. Le point le plus délicat est de prolonger ce résultat en un sens convenable à des voisinages stricts de ces tubes (th. 1.3.7). Ces théorèmes jouent un rôle crucial pour prouver que les constructions qui sont effectuées par la suite sont indépendantes de la façon dont les variétés (de caractéristique p) sont plongées dans des schémas formels lisses d'inégales caractéristiques, et sont de nature fonctorielle par rapport à ces variétés.

L'objet du chapitre 2 est de construire une catégorie de coefficients pour la cohomologie rigide, la catégorie des isocristaux surconvergents. Il s'agit d'une variante de la notion de cristal : de même qu'un cristal sur X peut s'interpréter comme un module à connexion intégrable sur le complété p-adique du voisinage à puissances divisées de X dans un schéma formel lisse P, un isocristal surconvergent sur X s'interprète comme un module à connexion intégrable sur un voisinage strict du tube $]X[_P$, dont la connexion vérifie certaines conditions de convergence. Pour en donner une définition valable pour tout k-schéma de type fini, nous introduisons dans la première section un analogue faisceautique des conditions de surconvergence de Dwork et Monsky-Washnitzer, qui permet d'associer à tout faisceau abélien E sur un voisinage strict du tube de X le faisceau $j^\dagger E$ des sections surconvergentes de E. Nous utilisons cette construction dans la seconde section pour définir la condition de surconvergence d'une connexion le long d'un fermé de la fibre spéciale. Soient alors Y une compactification de X, et $Y \hookrightarrow P$ un plongement de Y dans un $\mathcal{V}$-schéma formel P, lisse au voisinage de X. Grâce aux théorèmes de fibration du chapitre précédent, on montre dans la troisième section que la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules à connexion intégrable et surconvergente ne dépend que de X, et est fonctorielle en X : on obtient ainsi la catégorie des isocristaux surconvergents sur X (resp. des F-isocristaux surconvergents si l'on se donne de plus une action de Frobenius).

Les deux dernières sections explicitent les relations entre cette notion et les notions analogues en cohomologie cristalline, et en cohomologie de Monsky-Washnitzer. Dans le cas où X est propre, on y montre comment un F-cristal sur X définit un F-isocristal surconvergent sur X; pour cela, on reprend une méthode due à Dwork, qui consiste à utiliser l'action de Frobenius pour étendre le domaine de convergence de la série de Taylor de la connexion au tube $]X[_{P^2}$ tout entier. De même, lorsque X est affine et lisse, avec $X = \operatorname{Spec} A$, on prouve que la donnée d'une action de Frobenius sur un module à connexion intégrable sur une algèbre faiblement complète $A^\dagger$ relevant A entraîne la surconvergence de cette connexion, ce qui fournit une description de style Monsky-Washnitzer de la catégorie des isocristaux surconvergents sur X.

0. RAPPELS SUR LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE RIGIDE

Pour les notions de base et les résultats fondamentaux concernant la géométrie analytique rigide, nous renvoyons le lecteur au traité de Bosch, Güntzer et Remmert [BG], ainsi qu'aux articles de Tate [Ta1], Kiehl ([Ki1], [Ki2]) et Raynaud [Ra1], et aux ouvrages de Fresnel - Van der Put [FV], et Gerritzen - Van der Put [GV]. Nous rappelons brièvement ici quelques définitions et résultats fréquemment utilisés par la suite.

On désigne par K un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne, notée $|-|$; on note $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, $\Gamma_0^* \subset \mathbb{R}^{>0}$ l'image de K^* par l'application valeur absolue, et $\Gamma^* = \Gamma_0^* \otimes \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^{>0}$; Γ^* est un sous-groupe multiplicatif dense de $\mathbb{R}^{>0}$. Soit A un anneau topologique, possédant un système fondamental (V_i) de voisinages de 0 tel que les V_i soient des sous-groupes additifs de A ; on notera $A\{t_1, \ldots, t_n\}$ l'anneau des séries formelles $\varphi(\underline{t}) = \sum a_{\underline{q}} \underline{t}^{\underline{q}}$, avec $\underline{t}^{\underline{q}} = t_1^{q_1} \ldots t_n^{q_n}$, telles que $a_{\underline{q}} \to 0$ lorsque $|\underline{q}| := q_1 + \ldots + q_n \to +\infty$ (séries formelles restreintes) ; on le munit de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé des sous-groupes

$$W_i = \{ \varphi(\underline{t}) \in A\{t_1, \ldots, t_n\} \mid \forall\, \underline{q}, a_{\underline{q}} \in V \}.$$

On dit qu'une A-algèbre topologique B est *topologiquement de type fini* si elle est isomorphe, comme A-algèbre topologique, à un quotient d'une A-algèbre de la forme $A\{t_1, \ldots, t_n\}$. Une *K-algèbre de Tate* est une K-algèbre topologiquement de type fini.

0.1. Espaces analytiques rigides

(0.1.1) Rappelons qu'une *topologie de Grothendieck* $\mathcal{T}$ sur un ensemble X est constituée par la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X, comprenant $\emptyset$, X, et stable par intersections finies, et, pour tout $U \in \mathcal{F}$, d'un ensemble $\mathrm{Cov}(U)$ de recouvrements de U par des parties de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions :

(i) $(U) \in \mathrm{Cov}(U)$;

(ii) si $U, V \in \mathcal{F}$, $V \subset U$, et si $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$, alors $(V \cap U_i)_i \in \mathrm{Cov}(V)$;

(iii) si $U \in \mathcal{F}$, si $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$, et si, quel que soit i, $(U_{i,j})_j \in \mathrm{Cov}(U_i)$, alors $(U_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Cov}(U)$.

Les parties $U \in \mathcal{F}$ seront simplement appelées *ouverts*, et les recouvrements $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$ *recouvrements admissibles*. Une application $f : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ entre ensembles munis de topologies de Grothendieck est dite *continue* si l'image inverse d'un ouvert (resp. recouvrement admissible) est un ouvert (resp. recouvrement admissible). Pour tout ouvert $U \subset X$, la *topologie induite* sur U est définie de la manière évidente.

Nous dirons qu'une topologie de Grothendieck est *saturée* si elle vérifie de plus les conditions suivantes (cf. [BG, 9.1.2]) :

(iv) si $U \in \mathcal{F}$, si $V \subset U$, et s'il existe $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$ tel que, pour tout i, $V \cap U_i \in \mathcal{F}$, alors $V \in \mathcal{F}$;

(v) si $U \in \mathcal{F}$, si $U = \bigcup_i U_i$, avec $U_i \in \mathcal{F}$, et s'il existe $(V_j)_j \in \mathrm{Cov}(U)$ qui soit un recouvrement plus fin que $(U_i)_i$, alors $(U_i)_i \in \mathrm{Cov}(U)$.

Il est possible de recoller des topologies saturées [BG, 9.1.3] : soient X un ensemble, $(X_i)_i$ un recouvrement de X; on suppose données des topologies de Grothendieck $\mathcal{T}_i$ sur les X_i telles que : a) les $\mathcal{T}_i$ sont saturées ; b) pour tous i, j, $X_i \cap X_j$ est ouvert dans X_i et X_j, et les topologies induites par $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ sur $X_i \cap X_j$ coïncident. Il existe alors une unique topologie de Grothendieck saturée sur X, telle que $(X_i)_i$ soit un recouvrement admissible, et induisant sur chaque X_i la topologie $\mathcal{T}_i$: une partie U de X (resp. un recouvrement $(U_j)_j$ de U) est ouverte (resp. admissible) si et seulement si, pour tout i, $U \cap X_i$ (resp. $(U_j \cap X_i)_j$) est un ouvert de X_i (resp. un recouvrement admissible de $U \cap X_i$).

(0.1.2) Si A est une K-algèbre de Tate, on note $\mathrm{Spm}\, A$ le spectre maximal de A. Pour tout $x \in \mathrm{Spm}\, A$, correspondant à un idéal maximal $\mathfrak{a} \subset A$, on désigne par $K(x)$ le quotient $A/\mathfrak{a}$: rappelons que c'est une extension finie de K (cf. [BG, 6.1.2] ou [FV, II.3.5]), qui possède donc une unique valuation prolongeant celle de K. L'anneau de cette valuation sera noté $\mathcal{V}(x)$, son idéal maximal $\mathfrak{m}(x)$; pour $f \in A$, $f(x)$ désignera l'image de f dans $K(x)$.

Soit $X = \mathrm{Spm}\, A$. Un sous-ensemble $V \subset X$ est appelé *domaine spécial* (ou *rationnel*, mais le terme “rationnel” a déjà bien des sens en Géométrie Algébrique...) s'il existe $f_0, \ldots, f_n \in A$, engendrant l'idéal unité, tels que

(0.1.2.1) $$V = \{ x \in X \mid \forall\, i = 1, \ldots, n,\ |f_i(x)| \leq |f_0(x)| \}.$$

L'ensemble des domaines spéciaux est stable par intersection ([BG, 7.2.3], [FV, III 1.3]).

Nous considérerons X comme muni de la “topologie de Grothendieck forte” de [BG, 9.1.4] ; rappelons-en la définition.

a) Un ouvert est une partie $U \subset X$ possédant un recouvrement $(V_i)_i$ par des domaines spéciaux V_i, vérifiant la condition de finitude :

(A1) *Pour tout homomorphisme $A \to B$ d'algèbres de Tate, induisant $h : Y = \mathrm{Spm}\, B \to X = \mathrm{Spm}\, A$, tel que $h(Y) \subset U$, il existe un nombre fini de V_i dont la réunion contient $h(Y)$.*

b) Un recouvrement d'un ouvert U par des ouverts U_i est admissible s'il vérifie la condition de finitude :

(A2) *Pour tout homomorphisme d'algèbres de Tate comme en* (A1), *il existe un recouvrement fini de Y par des domaines spéciaux plus fin que le recouvrement* $(h^{-1}(U_i))_i$.

On appelle *recouvrement spécial* un recouvrement admissible par des domaines spéciaux.

La topologie de Grothendieck ainsi définie est saturée.

A tout domaine spécial V de X, défini comme en (0.1.2.1), on associe l'algèbre de Tate

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = A\{T_1, \dots, T_n\}/(f_i - f_0 T_i). \tag{0.1.2.2}$$

C'est l'algèbre de Tate universelle pour les homomorphismes de A dans une algèbre de Tate B tels que l'application $\operatorname{Spm} B \to \operatorname{Spm} A$ correspondante envoie $\operatorname{Spm} B$ dans V; en particulier, elle est indépendante à isomorphisme canonique près du choix de $f_0, \dots, f_n$ définissant V (cf. [BG, 7.2.3 prop. 4] ou [FV, III 1.2]). Le théorème d'acyclicité de Tate (voir [Ta1, 8.2], [GG, 2.4 Satz 3] ou [BG, 8.2.1 cor. 2]) permet d'en déduire un faisceau d'algèbres sur X, en posant pour tout ouvert U de X

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Ker}\,[\prod_i \Gamma(V_i, \mathcal{O}_X) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}_X)], \tag{0.1.2.3}$$

où $(V_i)_i$ est un recouvrement spécial de U; $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est l'algèbre des *fonctions analytiques*, ou *holomorphes*, sur U. La donnée sur X de la topologie de Grothendieck définie plus haut et du faisceau $\mathcal{O}_X$ définit *l'espace analytique rigide affinoïde* $X = \operatorname{Spm} A$.

(0.1.3) *Exemples.* — (i) Toute partie de X affinoïde au sens de Tate [Ta1, 7.1] est réunion finie de domaines spéciaux ([GR1], [BGR, 7.3.5 cor. 3]), donc ouverte. Toute réunion finie d'ouverts affinoïdes de X est un ouvert, tout recouvrement fini d'un ouvert par des ouverts affinoïdes est admissible.

(ii) Tout ouvert de Zariski de $\operatorname{Spm} A$ est ouvert pour la topologie de Grothendieck, et tout recouvrement d'un tel ouvert par des ouverts de Zariski est admissible ([Ki3, 1.3 et 1.4], [BG, 9.1.4 cor. 7]).

(iii) Pour $i = 1, \dots, r$, soient $f_{i,0}, \dots, f_{i,n_i}$ des éléments de A tels que, pour tout i, $f_{i,0}, \dots, f_{i,n_i}$ engendrent l'idéal A, et

$$V = \{ x \in X \mid \forall\, i, \forall\, j \geq 1,\ |f_{i,j}(x)| < |f_{i,0}(x)| \}.$$

Alors V est un ouvert de X. Soit en effet $a \in \mathfrak{m}$, et, pour tout $n \geq 1$, soit

$$V_n = \{ x \in X \mid \forall\, i, \forall\, j \geq 1,\ |f_{i,j}^n(x)| \leq |a f_{i,0}^n(x)| \}.$$

Chaque V_n est intersection de r domaines spéciaux, donc est un domaine spécial, et $V = \bigcup_n V_n$. Les V_n forment un recouvrement spécial de V : pour vérifier (A1), on observe que $f_{i,0}$ ne s'annule pas sur V; si $h(Y) \subset V$, et si $g_{i,j}$ est l'image de $f_{i,j}$ dans B, les $g_{i,0}$ sont donc inversibles dans B, et on applique aux $g_{i,j}/g_{i,0}$ le *principe du maximum* [BG, 6.2.1 prop. 4] :

(0.1.4) PROPOSITION. — *Soient B une algèbre de Tate, $f \in B$. Il existe $x_0 \in \operatorname{Spm} B$ tel que, pour tout $x \in \operatorname{Spm} B$, on ait*

$$|f(x)| \leq |f(x_0)|.$$

Rappelons qu'on définit la (*semi*) *norme spectrale* de f par

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup_{x \in X} |f(x)|\,;$$

il existe donc $x_0 \in X$ tel que

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = |f(x_0)|.$$

(0.1.5) Sous les hypothèses de (0.1.3) (iii), il résulte de (0.1.2.3) que l'algèbre des fonctions analytiques sur V est donnée par

(0.1.5.1) $$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \varprojlim_{\eta \to 1^-} \Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_X) = \varprojlim_{n \to \infty} A\{T_{i,j,n}\}/(f_{i,j}^n - a f_{i,0}^n T_{i,j,n}),$$

où $a \in \mathfrak{m}$ est un élément arbitrairement fixé, et où les flèches de transition envoient $T_{i,j,n+1}$ sur $f_{i,j} f_{i,0}^{-1} T_{i,j,n}$.

Par exemple, nous appellerons *fibré trivial en boules* (*unité*) *fermées* de dimension relative d, de base $X = \operatorname{Spm} A$, l'espace analytique affinoïde $Y = \operatorname{Spm} A\{T_1, \ldots, T_d\}$ (muni de la projection naturelle $Y \to X$) ; si $A = K$ (resp. et si $d = 1$), nous dirons que Y est la *boule* (*unité*) *fermée* de dimension d (resp. *le disque* (*unité*) *fermé*). Le sous-ensemble

(0.1.5.2) $$U = \{\, x \in Y \mid \forall\, i,\ |t_i(x)| < 1 \}$$

est un ouvert de Y, appelé *fibré trivial en boules* (*unité*) *ouvertes* de dimension relative d, de base X (resp. *boule ouverte*, *disque ouvert*) ; d'après (0.1.5.1), l'algèbre des fonctions analytiques sur U est donnée par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \varprojlim_{n \to \infty} A\{t_i, T_{i,n}\}/(t_i^n - a T_{i,n}),$$

soit :

(0.1.5.3) $$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \{\, \varphi = \sum_{\underline{q}} a_{\underline{q}} \underline{t}^{\underline{q}} \in A[[t_1, \ldots, t_d]] \mid \forall\, \eta < 1,\ \|a_{\underline{q}}\| \eta^{|\underline{q}|} \to 0 \text{ si } |\underline{q}| \to \infty \},$$

où $\|-\|$ est une norme de Banach sur A.

Si $\eta \in \mathbb{R}$, avec $0 < \eta < 1$ (resp. et si $\eta \in \Gamma^*$), le fibré en boules ouvertes (resp. fermées) de rayon η est l'ouvert (resp. le domaine spécial) de Y défini par les conditions :

$$\forall\, i,\ |t_i(x)| < \eta \qquad (\text{resp. } \forall\, i,\ |t_i(x)| \leq \eta)\,;$$

lorsque $A = K$, $d = 1$, nous utiliserons les notations habituelles $D(0, \eta^-)$ (resp. $D(0, \eta^+)$).

(0.1.6) Un *espace analytique rigide* (ou simplement un espace analytique) sur K est un ensemble X muni d'une topologie de Grothendieck saturée, et d'un faisceau de K-algèbres $\mathcal{O}_X$, possédant un recouvrement admissible $(X_i)_i$ tel que chaque X_i, muni de la structure induite, soit isomorphe à un espace analytique rigide affinoïde au sens de (0.1.2). Un ouvert de X isomorphe à un espace affinoïde est appelé *ouvert affinoïde*. Si X lui-même est un espace affinoïde, cette notion d'ouvert affinoïde coïncide avec celle de Tate [Ta1, 7.1], grâce au fait que tout ouvert affinoïde au sens de Tate est réunion finie de domaines spéciaux.

La fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_X$ en un point $x \in X$ est un anneau local. Un *morphisme de K-espaces analytiques* $f : Y \to X$ est la donnée d'une application continue de Y dans X, et d'un K-homomorphisme de faisceaux d'anneaux locaux $f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$. Tout morphisme d'algèbres de Tate $A \to B$ définit un morphisme d'espaces analytiques $\operatorname{Spm} B \to \operatorname{Spm} A$, et le foncteur Spm est pleinement fidèle [BG, 9.3.1 prop. 1].

Si $U \subset X$ est un ouvert, alors U, muni de la structure induite, est encore un espace analytique. On déduit immédiatement de (0.1.1) un théorème de recollement pour les espaces analytiques [BG, 9.3.2].

Si $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ sont deux morphismes de K-espaces analytiques, le produit fibré $X \times_Z Y$ est représentable dans la catégorie des K-espaces analytiques [BG, 9.3.5]. De même, si $K \to K'$ est une extension isométrique de corps complets munis de valeurs absolues, on définit par tensorisation par K' et complétion un foncteur d'extension des scalaires de la catégorie des K-espaces analytiques vers celle des K'-espaces analytiques [BG, 9.3.6]. Si K' est fini sur K, la restriction des scalaires de K' à K sur le faisceau structural munit tout K'-espace analytique d'une structure de K-espace analytique ; ce foncteur est adjoint à gauche du précédent.

(0.1.7) Soient X un espace analytique, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau cohérent d'idéaux, Y le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Il existe sur Y une structure canonique d'espace analytique telle que $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$: lorsque X est affinoïde, $\mathcal{I}$ est défini par un idéal $I \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et Y est l'espace analytique affinoïde $\operatorname{Spm}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)/I)$; le cas général s'en déduit par recollement. La notion d'*immersion fermée* entre espaces analytiques en résulte.

Un espace analytique X est dit *quasi-compact* s'il possède un recouvrement admissible fini par des ouverts affinoïdes ; un morphisme d'espaces analytiques est dit quasi-compact si l'image inverse de tout affinoïde est quasi-compacte. Il résulte du principe du maximum (0.1.4) qu'une boule ouverte n'est pas quasi-compacte.

Nous dirons que X est *quasi-séparé* si l'intersection de deux ouverts affinoïdes est quasi-compacte, et séparé si le morphisme diagonal $X \to X \times X$ est une immersion fermée [BG, 9.6.1] ; tout espace séparé est quasi-séparé. Dans un espace quasi-séparé, toute réunion finie d'affinoïdes est un ouvert, tout recouvrement fini par des affinoïdes est admissible.

Soient X un espace analytique, $\mathcal{T}$ la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X. Comme les faisceaux associés aux ouverts affinoïdes de X forment une famille génératrice de $\mathcal{T}$, on vérifie trivialement les assertions suivantes :

(i) Un ouvert $U \subset X$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si l'objet correspondant de $\mathscr{T}$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé) au sens de [SGA 4, VI 1.1] (resp. [SGA 4, VI 1.13]). Les ouverts de X qui sont des objets cohérents de $\mathscr{T}$ au sens de [SGA 4, VI 1.13] sont donc les ouverts quasi-compacts, quasi-séparés.

(ii) Quel que soit X, $\mathscr{T}$ est un topos algébrique au sens de [SGA 4, VI 2.3]. Pour que $\mathscr{T}$ soit un topos cohérent [SGA 4, VI 2.3], il faut et il suffit que X soit quasi-compact, quasi-séparé.

Ces remarques permettent de déduire de [SGA 4, VI 5.1, 5.2] l'énoncé suivant :

(0.1.8) PROPOSITION. — (i) *Si X est un espace analytique quasi-compact, quasi-séparé, les foncteurs $H^i(X, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes.*

(ii) *Soit $f : Y \to X$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé d'espaces analytiques. Alors les foncteurs R^if_* commutent aux limites inductives filtrantes.*

(0.1.9) Suivant Kiehl [Ki1, 2.3], nous dirons qu'un espace analytique est *quasi-Stein* s'il possède un recouvrement admissible par une suite croissante d'ouverts affinoïdes telle que, pour tout i, l'image de $\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{O}_X)$ dans $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ soit dense. Par exemple, pour tout η, le fibré en boules ouvertes de rayon η de base affinoïde défini en (0.1.5) est quasi-Stein, car un recouvrement par des fibrés en boules fermées de rayon $\eta'_n \to \eta^-$, $\eta'_n \in \Gamma^*$, vérifie les conditions requises.

(0.1.10) Un morphisme d'espaces analytiques $f : Y \to X$ est dit *fini* s'il existe un recouvrement admissible $(X_i)_i$ de X par des ouverts affinoïdes, tel que pour tout i l'ouvert $f^{-1}(X_i)$ soit affinoïde, et l'algèbre $\Gamma(f^{-1}(X_i), \mathcal{O}_Y)$ finie sur $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ [BG, 9.4.4]. Le faisceau $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est alors une $\mathcal{O}_X$–algèbre cohérente, dont la donnée est équivalente à celle du morphisme $f : Y \to X$.

(0.1.11) Nous dirons qu'un morphisme d'espaces analytiques $f : Y \to X$ est *lisse* (resp. *étale*) s'il existe des recouvrements admissibles $(Y_i)_i$ et $(X_i)_i$ de Y et X par des ouverts affinoïdes, tels que :

(i) $f(Y_i) \subset X_i$;

(ii) si $A_i = \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$, $B_i = \Gamma(Y_i, \mathcal{O}_Y)$, il existe un isomorphisme

$$B_i \simeq A_i\{T_1,\ldots,T_n\}/(f_1,\ldots,f_r),$$

avec $\det(\partial f_j/\partial T_k)_{1\leq j,k\leq r}$ inversible dans B_i (resp. et $r = n$). Pour d'autres caractérisations et propriétés des morphismes étales et lisses, nous renvoyons à [BK], [Ki3] ou [Rb1]. Lorsque $X = \mathrm{Spm}\, K$, les anneaux locaux de Y sont alors des anneaux réguliers [BG, 7.3, prop. 8].

Le faisceau des formes différentielles relatives $\Omega^1_{Y/X}$ est le $\mathcal{O}_Y$-module $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal de l'immersion diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_X Y$ ([BK], [Ki3], [Rb1]); c'est un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, qui est localement libre (resp. nul) si f est lisse (resp. étale). On définit comme en géométrie algébrique le complexe de de Rham $\Omega^{\bullet}_{Y/X}$, la notion de module à connexion intégrable sur Y relativement à X, et le complexe de de Rham $\mathcal{E} \otimes \Omega^{\bullet}_{Y/X}$ à coefficients dans un module à connexion intégrable $(\mathcal{E}, \nabla)$. Lorsque f est lisse, l'immersion diagonale est régulière, et les faisceaux $\mathcal{O}_{Y\times Y}/\mathcal{I}^{n+1}$ sont localement libres de rang fini sur $\mathcal{O}_Y$ (pour les deux structures de $\mathcal{O}_Y$-module) ; lorsque K est de caractéristique nulle, on en déduit les présentations équivalentes usuelles de la notion de module à connexion intégrable sur Y, relativement à X [Be1, II § 4].

(0.1.12) Un espace analytique rigide S est dit *connexe* s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) l'algèbre $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ ne possède pas d'idempotents autres que 0 et 1 ;

(ii) il n'existe pas de recouvrement admissible de S formé de deux ouverts non vides disjoints.

Si S possède un recouvrement admissible par deux ouverts connexes d'intersection non vide, alors S est connexe.

Le principe du prolongement analytique s'applique notamment sur les espaces analytiques connexes et lisses :

(0.1.13) PROPOSITION. — *Soient X un espace analytique rigide connexe, tel que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit intègre pour tout $x \in X$, et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ une fonction analytique. S'il existe un ouvert non vide U de X tel que la restriction de f à U soit nulle, alors $f = 0$.*

Supposons d'abord que X soit affinoïde, soit $X = \operatorname{Spm} A$. Comme X est connexe, il est aussi connexe pour la topologie de Zariski [BG, 9.1, prop. 8]. Si $x \in X$ correspond à $\mathfrak{n} \subset A$, les composantes irréductibles passant par x correspondent aux idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{n}}$. Comme l'homomorphisme canonique $A_{\mathfrak{n}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif [BG, 7.3, prop. 3], et $\mathcal{O}_{X,x}$ intègre, il en est de même de $A_{\mathfrak{n}}$ pour tout $\mathfrak{n}$. On en déduit que X est irréductible, et A intègre. L'homomorphisme $A \to \mathcal{O}_{X,x}$ est alors injectif pour tout x, et l'énoncé en résulte.

Dans le cas général, soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement admissible de X par des ouverts affinoïdes. Quitte à raffiner le recouvrement en remplaçant chaque X_i par ses composantes connexes, on peut supposer les X_i connexes. Si $U \cap X_i \neq \emptyset$, il résulte de ce qui précède que $f|_{X_i} = 0$. Par suite, si X' est la réunion des X_i tels que $f|_{X_i} = 0$, X' est non vide. Soit X'' la réunion des X_i tels que $f|_{X_i} \neq 0$. Si $f|_{X_i} = 0$ et $f|_{X_j} \neq 0$, alors $X_i \cap X_j = \emptyset$, d'après le cas précédent, si bien que $X' \cap X'' = \emptyset$. De plus, X' et X'' sont des ouverts de X : il suffit en effet, d'après (0.1.1) (iv), de vérifier que $X' \cap X_i$ (resp. $X'' \cap X_i$) est ouvert pour tout i, et cette intersection est soit égale à X_i, soit vide. Enfin, d'après (0.1.1) (v), le recouvrement (X', X'') de X est admissible, puisque $(X_i)_{i\in I}$ est un recouvrement plus fin. Comme X est connexe, X'' est vide, et $f = 0$.

0.2. Espace analytique associé à un $\mathcal{V}$-schéma formel

(0.2.1) Soit $a \in \mathfrak{m}$ un élément non nul. Sauf mention explicite du contraire, nous supposerons que, pour tous les $\mathcal{V}$-schémas formels X considérés dans cet article, la topologie de $\mathcal{O}_X$ est la topologie a-adique (condition qui ne dépend pas du choix de a) : l'espace topologique X, muni du faisceau de $\mathcal{V}/a^n\mathcal{V}$-algèbres $\mathcal{O}_X/a^n\mathcal{O}_X$, est donc un schéma usuel, et l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to \varprojlim_n \mathcal{O}_X/a^n\mathcal{O}_X$ est un isomorphisme. Nous dirons qu'un $\mathcal{V}$-schéma formel X est *localement de type fini* (resp. *de type fini*) s'il possède un recouvrement (resp. un recouvrement fini) par des ouverts affines $X_i = \operatorname{Spf} A_i$, où A_i est une $\mathcal{V}$-algèbre topologiquement de type fini. Tout ouvert affine de X est alors spectre formel d'une $\mathcal{V}$-algèbre topologiquement de type fini.

Un $\mathcal{V}$-schéma formel X est plat si et seulement s'il est sans torsion. Si X est localement de type fini, et si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est l'idéal de torsion, $X' \subset X$ le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, l'espace annelé $(X', \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ est encore un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, qui est le plus grand sous-schéma formel plat de X : pour s'en assurer, il suffit de vérifier que si A est une $\mathcal{V}$-algèbre topologiquement de type fini, et $I \subset A$ l'idéal des éléments de torsion, A/I est séparée pour la topologie a-adique ; or $A/I \subset (A/I) \otimes K$, et $(A/I) \otimes K = A \otimes K$ est une algèbre de Tate, donc séparée pour la topologie définie par les $a^n(A/I)$ [Ta1, 4.5].

(0.2.2) A tout $\mathcal{V}$-schéma formel X localement de type fini on peut associer un K-espace analytique X_K, grâce à la construction qui suit, due à Raynaud (implicite dans [Ra1] ; voir aussi [Mu1, pp. 133-134]).

Soit d'abord $X = \operatorname{Spf} A$ un $\mathcal{V}$-schéma formel affine de type fini. Puisque A est topologiquement de type fini, $A \otimes K$ est une algèbre de Tate, et, par définition, X_K est l'espace analytique affinoïde $\operatorname{Spm}(A \otimes K)$.

On observe alors que les points de X_K sont en bijection avec les quotients de A qui sont intègres, finis et plats sur $\mathcal{V}$. En effet, si R est un tel quotient, $R \otimes K$ est une extension finie de K, définissant un idéal maximal de $A \otimes K$. Réciproquement, si K' est l'extension finie de K définie par un idéal maximal de $A \otimes K$, l'image R de A dans K' est une $\mathcal{V}$-algèbre plate intègre. Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des générateurs topologiques de la $\mathcal{V}$-algèbre A, leurs images dans K' sont dans l'anneau de valuation $\mathcal{V}'$ de K' [Ta1, 5.2], et sont par conséquent entières sur $\mathcal{V}$; R est donc finie sur $\mathcal{V}$. On remarque d'autre part que, $\mathcal{V}$ étant hensélien et R finie intègre, R est une $\mathcal{V}$-algèbre locale, et que le support de $\operatorname{Spf} R \subset \operatorname{Spf} A$ consiste en un unique point fermé de X, qu'on appellera *spécialisation* du point $x \in \operatorname{Spm}(A \otimes K)$ correspondant à R.

Soit maintenant X un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini. On définit X_K comme l'ensemble des sous-schémas fermés Z de X qui sont intègres, finis et plats sur $\mathcal{V}$. Le support d'un tel sous-schéma Z est encore un point fermé de X, qu'on appellera *spécialisation* du point $x \in X_K$ correspondant à Z. En associant à tout point de X_K sa spécialisation, on définit donc une application

(0.2.2.1) $$\mathrm{sp} : X_K \longrightarrow X.$$

Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spf}\, A \subset X$, $\mathrm{sp}^{-1}(U)$ est en bijection avec $\mathrm{Spm}(A \otimes K) = U_K$ et peut donc être muni d'une structure d'espace analytique par transport de structure.

On définit alors la structure d'espace analytique de X_K grâce à la proposition suivante :

(0.2.3) PROPOSITION. — *Soient X, X' deux $\mathcal{V}$-schémas formels localement de présentation finie.*

(i) *Il existe sur X_K une unique structure d'espace analytique vérifiant les conditions* :

a) *l'image inverse par l'application* sp : $X_K \to X$ *de tout ouvert (resp. recouvrement ouvert) de X est un ouvert (resp. recouvrement admissible) de X_K* ;

b) *pour tout ouvert affine $U \subset X$, la structure induite par X_K sur $U_K = \mathrm{sp}^{-1}(U)$ coïncide avec celle qu'on a définie en* (0.2.1) *par transport de structure.*

(ii) *L'application* sp *définit de manière naturelle un morphisme de sites annelés* $X_K \to X$ [SGA 4, IV 4.9].

(iii) *L'espace analytique X_K est fonctoriel en X, et, pour tout morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels $u : X \to X'$, le diagramme de morphismes de sites annelés*

(0.2.3.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mathrm{sp}} & X_K \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_K} \\ X' & \xleftarrow{\mathrm{sp}} & X'_K \end{array}$$

est commutatif.

L'espace analytique X_K est appelé *fibre générique* de X.

L'unicité de la structure analytique de X_K est claire. Pour prouver son existence, on choisit un recouvrement de X par des ouverts affines X_i ; soit $A_i = \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$. Pour recoller les structures analytiques données sur les X_{iK}, on considère d'abord, pour $f \in A_i$, l'ouvert affine $D(f) \subset X_i$. Regardant f comme un élément de $A_i \otimes K = \Gamma(X_{iK}, \mathcal{O}_{X_{iK}})$, on a alors

(0.2.3.2) $$\mathrm{sp}^{-1}(D(f)) = \{ x \in X_{iK} \mid |f(x)| \geq 1 \}.$$

En effet, si $x \in X_{iK}$ correspond à un quotient R de A_i, le point $\mathrm{sp}(x)$ est dans $D(f)$ si et seulement si l'image de f n'appartient pas à l'idéal maximal de R, donc si et seulement si l'image de f n'appartient pas à l'idéal maximal de l'anneau de valuation $\mathcal{V}(x) \subset K(x)$, i.e. si et seulement si $|f(x)| \geq 1$. Par suite, $\mathrm{sp}^{-1}(D(f))$ est un domaine spécial dans X_{iK}. De plus, on a

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_i\{T\}/(fT - 1),$$

de sorte que $D(f)_K$ est l'espace analytique associé à $(A_i \otimes K)\{T\}/(fT - 1)$, c'est-à-dire précisément l'espace analytique induit par X_{iK} sur $\mathrm{sp}^{-1}(D(f))$, d'après (0.1.2.2).

Comme l'espace topologique sous-jacent à X_i est noethérien, l'ouvert $X_i \cap X_j$ est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts de la forme $D(f)$, avec $f \in A_i$ (resp. $f \in A_j$) ; ce qui précède montre donc que $X_{iK} \cap X_{jK} = \bigcup_f D(f)_K$ est ouvert dans X_{iK} (resp. X_{jK}). Fixons un recouvrement fini de $X_i \cap X_j$ par des ouverts $D(f_\alpha)$, $f_\alpha \in A_i$, et, pour tout α, un recouvrement fini de $D(f_\alpha)$ par des ouverts $D(f_{\alpha\beta})$, avec $f_{\alpha\beta} \in A_j$. Alors les $\mathrm{sp}^{-1}(D(f_{\alpha\beta}))$ forment un recouvrement fini de $X_{iK} \cap X_{jK}$ par des domaines spéciaux de X_{iK} et de $D(f_\alpha)_K$; mais, comme $D(f_\alpha)_K$ est un domaine spécial dans X_{jK}, les $\mathrm{sp}^{-1}(D(f_{\alpha\beta}))$ sont aussi des domaines spéciaux de X_{iK} [BG, 7.2.4 th. 2]. Par conséquent, les $\mathrm{sp}^{-1}(D(f_{\alpha\beta}))$ constituent un recouvrement admissible de $X_{iK} \cap X_{jK}$ dans X_{iK} et dans X_{jK}. D'après ce qui précède, la structure induite par X_{jK} sur $\mathrm{sp}^{-1}(D(f_{\alpha\beta}))$ coïncide avec celle de $D(f_{\alpha\beta})_K$, qui coïncide aussi avec celle qu'induit $D(f_\alpha)_K = \mathrm{sp}^{-1}(D(f_\alpha))$, elle-même égale à la structure induite par X_{iK}. Par suite, X_{iK} et X_{jK} induisent la même structure analytique sur $X_{iK} \cap X_{jK}$, ce qui permet de munir X_K d'une structure analytique par recollement.

Comme la topologie de X_K est saturée par construction, il suffit pour prouver la condition a) de la prouver lorsqu'on remplace X par l'un des X_i; comme X_i a une base d'ouverts de la forme $D(f)$, elle résulte de la quasi-compacité de U. L'assertion b) résulte de ce que X_{iK} et U_K induisent la même structure sur $X_{iK} \cap U_K$, d'après le raisonnement précédent.

L'application sp définit alors un morphisme de sites $X_K \to X$ (au sens de [SGA 4, IV 4.9.3]). Si U est un ouvert affine de X, on a par construction

$$\Gamma(U, \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{X_K}) = \Gamma(\mathrm{sp}^{-1}(U), \mathcal{O}_{X_K}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes K.$$

Le préfaisceau $V \longmapsto \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \otimes K$ est un faisceau sur V, car l'espace sous-jacent à U est noethérien. On en déduit l'identification

$$\mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{X_K} = \mathcal{O}_X \otimes K, \tag{0.2.3.3}$$

et, pour tout ouvert $U \subset X$, un homomorphisme

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes K \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_K}) \tag{0.2.3.4}$$

qui est un isomorphisme lorsque U est quasi-compact. En particulier, le morphisme sp est ainsi un morphisme de sites annelés.

Soit enfin $u : X \to X'$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels. Si $Z = \mathrm{Spf} R$ est un sous-schéma formel de X, intègre, fini et plat sur $\mathcal{V}$, de support $z \in X$, soient $z' = u(z)$, et $Z' \subset X'$ le sous-schéma formel dont l'algèbre R' est définie par le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X',z'} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_{X,z} \arrow[d, two heads] \\ R' \arrow[r] & R. \end{tikzcd}$$

La $\mathcal{V}$-algèbre R' est alors intègre, finie et plate. On définit $u : X_K \to X'_K$ en envoyant le point correspondant à Z sur celui qui correspond à Z'. Pour vérifier que u_K est continue, on se ramène au cas où X et X' sont affines, d'algèbres A, A', et, si u est défini par $\varphi : A' \to A$, u_K s'identifie, via la discussion de (0.2.2), à l'application $\mathrm{Spm}(A \otimes K) \to \mathrm{Spm}(A' \otimes K)$ déduite de φ. L'extension de u_K aux faisceaux d'anneaux est alors immédiate, ainsi que la commutativité de (0.2.3.1).

(0.2.4) *Remarques.* — (i) L'espace analytique X_K est quasi-séparé. En effet, si $U \subset X_K$ est un ouvert affinoïde, le recouvrement de U par les $U \cap X_{iK}$ est admissible, donc U est recouvert par un nombre fini de $U \cap X_{iK}$; on se ramène alors à vérifier que les $U \cap X_{iK}$ sont quasi-compacts. Soit $(U_j) \in \mathrm{Cov}(U)$ un recouvrement fini de U par des domaines spéciaux raffinant le recouvrement par les $U \cap X_{iK}$, avec $U_j \subset X_{i(j)K}$; il suffit que les $U_j \cap X_{iK}$ soient quasi-compacts. Mais $X_{i(j)K} \cap X_{iK}$ est réunion finie de domaines spéciaux de $X_{i(j)K}$, donc $U_j \cap X_{iK}$ est réunion finie de domaines spéciaux de U_j, et est par conséquent quasi-compact.

(ii) Si X est de type fini, X_K est quasi-compact.

(iii) X_K ne dépend que du plus grand sous-schéma formel plat de X.

(iv) Le foncteur X_K commute aux produits, et transforme immersions ouvertes (resp. fermées) en immersions ouvertes (resp. fermées).

(v) Grâce à (0.2.3.4), on peut considérer toute section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ comme une fonction analytique sur l'ouvert $U_K \subset X_K$, qu'on notera encore f. On observera que, pour tout $x \in U_K$, on a

(0.2.4.1) $$|f(x)| \leq 1.$$

En particulier, lorsque U est affine, la formule (0.2.3.2) peut encore s'écrire

(0.2.4.2) s

(vi) Soit $T \subset X_K$ un sous-espace analytique fermé, défini par un idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_K}$. Soit $\mathcal{I}'$ le noyau de l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{X_K} \longrightarrow \mathrm{sp}_*\mathcal{O}_{T_K}.$$

Comme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}'$ est plat, on vérifie facilement que $\mathcal{I}'$ définit un sous-schéma formel fermé $T' \subset X$, tel que $T'_K = T$, appelé *adhérence schématique de T dans X.*

(0.2.5) *Exemples.* — (i) Soit $X = \mathrm{Spf}\, \mathcal{V}\{t_1, \dots, t_d\}$ l'espace affine formel de dimension relative d sur $\mathcal{V}$. Alors $X_K = \mathrm{Spm}\, K\{t_1, \dots, t_d\}$ est la boule unité fermée de $\mathbb{A}^d_K$.

(ii) Soient $f \in \mathcal{V}\{t_1, \dots, t_d\}$, $U = D(f)$; comme on l'a vu plus haut, U_K est l'ouvert de la boule unité fermée défini par la condition $|f(x)| = 1$. Ainsi, pour $X = \widehat{\mathbb{G}}_{m\mathcal{V}}$, X_K est la couronne définie par $|t(x)| = 1$ dans $\mathrm{Spm}\, K\{t\}$.

(iii) Nous donnerons d'autres exemples en (0.3.6).

(0.2.6) Supposons maintenant, jusqu'à la fin de (0.2), que $\mathcal{V}$ soit un anneau de valuation discrète. On peut alors construire la fibre générique d'un $\mathcal{V}$-schéma formel sous des hypothèses plus générales que celles de (0.2.1).

Soient en effet X un $\mathcal{V}$-schéma formel localement nœthérien, $\mathcal{I}$ un idéal de définition de X. On suppose que le sous-schéma fermé $X_0 \subset X$ défini par $\mathcal{I}$ est un $\mathcal{V}$-schéma localement de type fini ; on observera que cette condition est indépendante du choix de l'idéal de définition $\mathcal{I}$. Sous ces hypothèses, on peut associer fonctoriellement à X un K-espace analytique, que nous noterons encore X_K, de manière à retrouver la construction précédente dans le cas où la topologie de $\mathcal{O}_X$ est la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Considérons d'abord le cas où X est affine, soit $X = \mathrm{Spf}\, A$, et fixons une famille $f_1, \ldots, f_r$ de générateurs de $I = \Gamma(X, \mathcal{I})$. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$B_n = A\{T_1, \ldots, T_r\} / (f_1^n - \pi T_1, \ldots, f_r^n - \pi T_r),$$

où $A\{T_1, \ldots, T_r\}$ désigne le complété de $A[T_1, \ldots, T_r]$ pour la topologie π-adique. Les hypothèses faites sur X entraînent que $B_n / \pi B_n \simeq A/(\pi, f_1^n, \ldots, f_r^n)[T_1, \ldots, T_r]$ est une k-algèbre de type fini, de sorte que B_n est une $\mathcal{V}$-algèbre topologiquement de type fini, et $B_n \otimes K$ une algèbre de Tate. Pour $n' \geq n$, il existe un homomorphisme canonique $B_{n'} \to B_n$ envoyant T'_i sur $f_i^{n'-n} T_i$, et le morphisme

$$\mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \longrightarrow \mathrm{Spm}(B_{n'} \otimes K)$$

qui s'en déduit identifie $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$ au domaine spécial de $\mathrm{Spm}(B_{n'} \otimes K)$ défini par les conditions $|f_i(x)| \leq |\pi|^{1/n}$. On définit alors X_K comme l'espace analytique réunion des $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$, dont ceux-ci forment un recouvrement admissible par construction. L'espace X_K ne dépend ni du choix des générateurs f_i, ni de l'idéal de définition $\mathcal{I}$. En effet, si $g_1, \ldots, g_s$ engendrent un idéal de définition $\mathcal{J}$, et si l'on note C_n la famille d'algèbres définie comme plus haut à partir des g_j, il existe des relations de la forme $g_j^m = \sum_i h_{ij} f_i$, ce qui montre que les g_j^{mnr}/π sont des éléments à puissances bornées dans $B_n \otimes K$. On en déduit pour tout n un homomorphisme canonique $C_{mnr} \otimes K \to B_n \otimes K$, et on vérifie alors facilement que ces homomorphismes sont compatibles pour n variable et définissent un isomorphisme $\bigcup_n \mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \xrightarrow{\sim} \bigcup_n \mathrm{Spm}(C_n \otimes K)$. On voit de même que X_K est fonctoriel en X. On observera que, lorsque $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ est un idéal de définition de X, on peut prendre π pour famille de générateurs, et l'homomorphisme $A_K \to B_n \otimes K$ est alors un isomorphisme pour tout n. On retrouve donc bien dans ce cas la définition précédente de la fibre générique X_K.

Il existe encore un morphisme de sites annelés $\mathrm{sp} : X_K \to X$, qu'on peut d'ailleurs déduire de (0.2.2.1) de la manière suivante. Pour $n' \geq n$, les homomorphismes naturels $A \to B_{n'} \to B_n$ donnent des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spm}(B_{n'} \otimes K) \arrow[r, "\mathrm{sp}"] \arrow[d] & \mathrm{Spf}(B_{n'}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & & X \\
\mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \arrow[r, "\mathrm{sp}"] & \mathrm{Spf}(B_n), \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et le morphisme sp : $X_K \to X$ s'en déduit par passage à la limite. Il est clair que le morphisme sp est fonctoriel en X. En particulier, soient $g \in A$, et $U = \mathrm{Spf} A_{\{g\}}$. Le morphisme canonique $U_K \to X_K$ induit alors un isomorphisme $U_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}^{-1}(U)$. En effet, si on note

$$B'_n = A_{\{g\}}\{T_1,\dots,T_r\}/(f_1^n - \pi T_1,\dots,f_r^n - \pi T_r),$$

on a $B'_n \simeq B_n\{T\}/(Tg-1)$, de sorte que $\mathrm{Spm}(B'_n \otimes K)$ s'identifie au domaine spécial V_n de $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$ défini par la condition $|g(x)| = 1$. Si U_n est l'image inverse de U dans $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$, l'ouvert V_n n'est autre que $\mathrm{sp}^{-1}(U_n)$ d'après (0.2.2). Comme $U_K = \bigcup_n \mathrm{Spm}(B'_n \otimes K)$, l'assertion en résulte.

Dans le cas général, on peut définir X_K en prenant un recouvrement affine (X_i) de X, et en recollant les X_{iK} grâce à la remarque précédente, suivant la méthode de (0.2.3).

Remarque. — Sous les hypothèses précédentes, il n'est plus vrai en général que X_K soit un espace analytique quasi-compact. Si on prend par exemple pour X le schéma formel $\mathrm{Spf}\mathcal{V}[[t]]$, dont la topologie est définie par l'idéal (t), l'espace affinoïde $\mathrm{Spm}((\mathcal{V}[[t]]\{T\}/(t^n - \pi T)) \otimes K)$ est le disque unité fermé de rayon $|\pi|^{1/n}$, et X_K est alors le disque unité ouvert.

Si Z est un sous-schéma fermé de X_0, et $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Z, la proposition suivante montre qu'on peut identifier la fibre générique de $\hat{X}$ à l'image inverse de Z par le morphisme de spécialisation sp : $X_K \to X$. Ce point de vue sera utilisé systématiquement en (1.1) pour définir le tube associé à un sous-schéma fermé de la fibre spéciale d'un schéma formel $\mathfrak{m}$-adique.

(0.2.7) PROPOSITION. — Soient X un $\mathcal{V}$-schéma formel vérifiant les hypothèses de (0.2.6), $\mathcal{I}$ un idéal de définition de X, $X_0 = V(\mathcal{I})$, $Z \subset X_0$ un sous-schéma fermé. Notons $\hat{X}$ le complété formel de X le long de Z. Si sp : $X_K \to X$ est le morphisme de spécialisation, $\mathrm{sp}^{-1}(Z)$ est un ouvert de X_K, et le morphisme canonique $\hat{X}_K \to X_K$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques

$$\hat{X}_K \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{sp}^{-1}(Z).$$

Par recollement, on se ramène au cas où X est affine. Posons $X = \mathrm{Spf} A$, $I = \Gamma(X, \mathcal{I})$, et soit $J \supset I$ l'idéal de Z. On choisit des générateurs $f_1,\dots,f_r$ de I, et des générateurs $g_1,\dots,g_s$ de J. Notons comme précédemment

$$B_n = A\{T_1,\dots,T_r\}/(f_1^n - \pi T_1,\dots,f_r^n - \pi T_r),$$

et $U_n = \mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$. D'après (0.2.3.2), un point $x \in U_n$ est tel que $\mathrm{sp}(x) \in Z$ si et seulement si on a $|g_i(x)| < 1$ pour tout i, g_i étant considéré comme élément de B_n. Comme les U_n forment un recouvrement admissible de X_K, il en résulte que $\mathrm{sp}^{-1}(Z)$ est un ouvert de X_K. Soit $\eta_n = |\pi|^{1/n}$. On peut écrire $\mathrm{sp}^{-1}(Z)$ comme la réunion des affinoïdes $V_n = \{\, x \in U_n \mid \forall\, i,\ |g_i(x)| \le \eta_n \,\} = \mathrm{Spm}(B'_n \otimes K)$, où

$$B'_n \ = \ B_n\{T'_1,\ldots,T'_s\}/(g_1^n - \pi T'_1,\ldots,g_s^n - \pi T'_s).$$

D'autre part, si $\hat{A}$ est le complété J-adique de A, et si l'on pose

$$C_n \ = \ \hat{A}\{T'_1,\ldots,T'_s\}/(g_1^n - \pi T'_1,\ldots,g_s^n - \pi T'_s),$$

$\hat{X}_K$ est par construction la réunion des ouverts $W_n = \mathrm{Spm}(C_n \otimes K)$. Comme il existe des éléments $h_{ij} \in A$ tels que $f_i = \Sigma_j h_{ij} g_j$, les éléments f_i^{ns}/π sont à puissances bornées dans $C_n \otimes K$, de sorte que l'homomorphisme $A \to C_n \otimes K$ se factorise par $B_{ns} \otimes K$, puis par $B'_{ns} \otimes K$. Par suite, le morphisme $\varphi : \hat{X}_K \to X_K$ envoie W_n dans V_{ns}. Réciproquement, on observe que B'_{ns} est nœthérien et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, donc aussi complet pour la topologie J-adique [AM, ch. 10, ex. 5], celle-ci étant plus fine d'après les relations $g_i^n = \pi T'_i$. Le morphisme $A \to B'_{ns}$ se factorise donc par $\hat{A}$, et on en tire une factorisation $C_{ns} \otimes K \to B'_{ns} \otimes K$. Il en résulte que φ induit un isomorphisme de $\hat{X}_K$ sur $\mathrm{sp}^{-1}(Z)$.

0.3. Espace analytique associé à un K-schéma

Soit X un K-schéma localement de type fini. Nous rappelons ici comment munir l'ensemble X^f des points fermés de X d'une structure d'espace analytique (voir aussi [BG, 9.3.4], [FV, (III.4.6)] ou [GV, III (1.18) (5)]); l'espace analytique ainsi obtenu sera noté X^{an}.

(0.3.1) Supposons X affine ; soit $X = \mathrm{Spec}\, A$, et fixons une présentation

$$A \ \simeq \ K[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_r).$$

Pour tout $m \geq 0$, soient A_m^0 l'image dans A de la $\mathcal{V}$-algèbre $\mathcal{V}[a^m t_1,\ldots,a^m t_n]$, où $a \in \mathfrak{m}$ est un élément fixé, et $X_m \subset X^f$ l'ensemble des points tels que $|t_i(x)| \leq |a|^{-m}$ pour tout i; en posant $t_i^{(m)} = a^m t_i$, $f_j^{(m)} = f_j(a^{-m}t_1,\ldots,a^{-m}t_n)$, on a donc

$$A \ \simeq \ K[t_1^{(m)},\ldots,t_n^{(m)}]/(f_1^{(m)},\ldots,f_r^{(m)}).$$

La sous-$\mathcal{V}$-algèbre A_m^0 de A définit une topologie sur A, et la K-algèbre séparée complétée correspondante est

$$\hat{A}_m = K\{t_1^{(m)},\ldots,t_n^{(m)}\}/(f_1^{(m)},\ldots,f_r^{(m)})$$

(car tout idéal de $K\{t_1^{(m)},\ldots,t_n^{(m)}\}$ est fermé). Si $\varphi : A \to B$ est un K-homomorphisme de A dans une K-algèbre de Tate, il définit une application entre les spectres maximaux h : $\mathrm{Spm}\, B \to \mathrm{Spm}\, A = X^f$. Pour que φ se factorise par $\hat{A}_m$, il faut et suffit que $\varphi(A_m^0)$ soit borné dans B, soit encore, d'après [Ta1, 5.2], que $|\varphi(t_i^{(m)})(y)| \leq 1$ pour tout i et tout $y \in \mathrm{Spm}\, B$. Il en résulte que l'homomorphisme canonique $A \to \hat{A}_m$ est universel pour les homomorphismes de A dans une algèbre de Tate B tels que $h(\mathrm{Spm}\, B) \subset X_m$.

En particulier, l'homomorphisme canonique $A \to \hat{A}_m$ induit une bijection $\mathrm{Spm}\, \hat{A}_m \to X_m$, qui munit X_m d'une structure d'espace analytique affinoïde. Pour tout m, X_m est un domaine spécial de X_{m+1}, et la structure analytique induite par X_{m+1} est égale à celle de X_m. Il existe donc sur $X^f = \bigcup_m X_m$ une unique structure d'espace analytique pour laquelle les X_m forment un recouvrement admissible, et induisant la structure donnée sur les X_m. Cette structure est indépendante du choix de a et de la présentation $A \simeq K[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_r)$. En effet, si on choisit un autre élément $a' \in \mathfrak{m}$, et une présentation

$$A \simeq K[t'_1,\ldots,t'_{n'}]/(f'_1,\ldots,f'_{r'})$$

définissant des sous-ensembles $X'_m \subset X^f$, il existe des polynômes g_i tels que $t'_i = g_i(t_1,\ldots,t_n)$. Par suite, il existe pour tout m un entier m' tel que $X_m \subset X'_{m'}$, et X_m est un domaine spécial de $X'_{m'}$. La propriété universelle de $\hat{A}_m$ montre que $\hat{A}_m$ est aussi l'algèbre du domaine spécial X_m de $X'_{m'}$, de sorte que la structure analytique de X_m coïncide avec celle qu'induit $X'_{m'}$; l'unicité de la structure analytique définie sur X^f en résulte.

(0.3.2) LEMME. — *Soient X un K-schéma affine de type fini, X^{an} l'espace analytique associé défini en* (0.3.1).

(i) *Si $U \subset X$ est un ouvert de Zariski, $U \cap X^{\mathrm{an}}$ est un ouvert de X^{an}; si $(U_i)_i$ est un recouvrement ouvert (de Zariski) de U, $(U_i \cap X^{\mathrm{an}})_i$ est un recouvrement admissible de $U \cap X^{\mathrm{an}}$.*

(ii) *Pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, la structure analytique de $D(f)^{\mathrm{an}}$ coïncide avec la structure induite par X^{an} sur $D(f) \cap X^{\mathrm{an}}$.*

Puisque les X_m forment un recouvrement admissible de X^{an}, il suffit pour prouver (i) de vérifier que les $X_m \cap U$ (resp. $(X_m \cap U_i)_i$) sont ouverts dans X_m (resp. forment un recouvrement admissible de $X_m \cap U$) pour tout m; comme $X_m \cap U$ (resp. $(X_m \cap U_i)_i$) est un ouvert de Zariski (resp. un recouvrement par des ouverts de Zariski) de X_m, cela résulte de (0.1.3) (ii).

Soient $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $D(f) \subset X$; fixons $a \in \mathfrak{m}$, et une présentation

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq K[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_r).$$

On en déduit la présentation

$$\Gamma(D(g), \mathcal{O}_X) \simeq K[t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}]/(f_1,\ldots,f_r, ft_{n+1}-1),$$

définissant le recouvrement admissible $(U_m)_m$ de U^{an}. Il suffit alors de montrer que X^{an} et U^{an} induisent la même structure sur les U_m. Mais U_m est le domaine spécial de X_m défini par la condition $|t_{n+1}(x)| \leq |a|^{-m}$, soit encore $|f(x)| \geq |a|^m$, et les algèbres associées à U_m comme ouvert de U^{an} ou comme domaine spécial de X_m satisfont la même propriété universelle, d'où la coïncidence des deux structures.

La construction de X^{an} dans le cas général s'achève par la proposition :

(0.3.3) PROPOSITION. — *Soient X, X' deux K-schémas localement de présentation finie.*

(i) *Il existe sur l'ensemble des points fermés de X une unique structure d'espace analytique X^{an} vérifiant les conditions :*

a) *pour tout ouvert $U \subset X$ (resp. recouvrement ouvert de U), $U \cap X^{\mathrm{an}}$ est un ouvert de X^{an} (resp. un recouvrement admissible de $U \cap X^{\mathrm{an}}$) ;*

b) *pour tout ouvert affine $U \subset X$, la structure induite par X^{an} sur $U \cap X^{\mathrm{an}} = U^{\mathrm{an}}$ coïncide avec celle qui a été définie en* (0.3.1).

(ii) *L'inclusion $i : X^{\mathrm{an}} \to X$ est de manière naturelle un morphisme de sites annelés* [SGA, IV 4.9].

(iii) *L'espace analytique X^{an} est fonctoriel en X, et, pour tout morphisme de K-schémas $u : X \to X'$, le diagramme de morphismes de sites annelés*

(0.3.3.1)
$$\begin{tikzcd} X^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "u^{\mathrm{an}}"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X'^{\,\mathrm{an}} \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Compte tenu du lemme (0.3.2), la démonstration de (i) est formellement identique à celle de (0.2.3) (i). Pour définir un morphisme $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ faisant de i un morphisme de sites annelés, il suffit de donner, pour tout ouvert affine $U \subset X$, un homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ compatible aux restrictions. Les U_m formant un recouvrement admissible croissant de U^{an}, on a

$$\Gamma(U^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) = \varprojlim_m \Gamma(U_m, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) = \varprojlim_m \hat{A}_m$$

(en reprenant les notations de (0.3.1) pour $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$), et l'homomorphisme cherché est l'homomorphisme canonique $A \to \varprojlim_m \hat{A}_m$.

Soit $u : X \to X'$; alors u induit une application u^{an} de l'ensemble des points fermés de X dans l'ensemble des points fermés de X'. Pour vérifier la continuité de u^{an}, on se ramène au cas où $X = \operatorname{Spec} A$, $X' = \operatorname{Spec} A'$, et on se donne des présentations $A = K[t_1, \ldots, t_n]/I$, $A' = K[t'_1, \ldots, t'_{n'}]/I'$; soit $\varphi : A' \to A$ définissant u. Comme les $\varphi(t'_i)$ sont des polynômes en les t_j, il existe pour tout m un entier m' tel que $u(X_m) \subset X'_{m'}$. On en déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A}'_{m'} \arrow[r, "\hat{\varphi}_{mm'}"] & \hat{A}_m \\ A' \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

qui montre que la restriction de u^{an} à X_m est induite par le morphisme d'algèbres de Tate $\hat{\varphi}_{mm'}$. Comme les X_m forment un recouvrement admissible de X, la continuité de u^{an} en découle. Enfin les $\hat{\varphi}_{mm'}$ font de $u : X_m \to X'_{m'}$ un morphisme d'espaces affinoïdes, donnant par recollement l'extension de u^{an} aux faisceaux d'anneaux. La commutativité du diagramme (0.3.3.1) est alors évidente.

(0.3.4) *Remarques.* — (i) Le foncteur X^{an} commute aux produits fibrés, transforme immersions ouvertes (resp. fermées) en immersions ouvertes (resp. fermées).

(ii) Si X est séparé, il en est donc de même de X^{an}. Nous verrons plus bas que, bien que X soit toujours quasi-séparé, il n'en est pas nécessairement de même pour X^{an} (cf. (0.3.6) (ii)).

Lorsqu'on part d'un $\mathcal{V}$-schéma X localement de type fini les constructions exposées en (0.2) et (0.3) sont reliées par la proposition suivante :

(0.3.5) PROPOSITION. — *Soient X un $\mathcal{V}$-schéma localement de type fini, $\hat{X}$ son complété formel, $\hat{X}_K$ la fibre générique de $\hat{X}$ (au sens de* (0.2.3)*), X_K la fibre générique de X, X_K^{an} l'espace analytique associé à X_K. Il existe un morphisme canonique d'espaces analytiques $\alpha : \hat{X}_K \to X_K^{\mathrm{an}}$; le morphisme α est une immersion ouverte lorsque X est séparé, de type fini, et est un isomorphisme lorsque X est propre sur $\mathcal{V}$.*

Soient X_k la fibre spéciale de X, et $Z \subset \hat{X}$ un sous-schéma formel fermé, intègre, fini et plat sur $\mathcal{V}$, d'algèbre R. Si $U \subset X$ est un ouvert affine, d'algèbre A, contenant le point fermé de X_k support de Z, Z est un sous-schéma formel fermé du complété formel $\hat{U}$ de U. On en déduit les homomorphismes $A \to \hat{A} \twoheadrightarrow R$, où $\hat{A} = \Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ est le complété a-adique de A. L'image de A dans R est dense ; comme $R \otimes K$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'image de $A \otimes K$ est fermée dans $R \otimes K$, donc égale à $R \otimes K$. Il existe alors n tel que $a^n R$ soit contenu dans l'image de A, de sorte que celle-ci est ouverte dans R ; étant dense, elle est donc égale à R. Le quotient R de A définit un unique sous-schéma fermé Y de U, tel que $\hat{Y} = \hat{Z}$; la fibre générique de Y est le point fermé x de U_K (donc de X_K) correspondant au quotient $R \otimes K$ de $A \otimes K$. On vérifie immédiatement qu'il ne dépend pas du choix de U ; l'application $\alpha : |\hat{X}_K| \to |X_K^{\mathrm{an}}|$ est alors celle qui associe au point de $\hat{X}_K$ correspondant à Z le point fermé x de X_K. Il est clair qu'elle est fonctorielle en X.

Pour vérifier que α est continue, il suffit de montrer que pour tout ouvert affine $V \subset X$, et tout ouvert U (resp. recouvrement admissible $(U_i)_i$) de X_K^{an}, $\alpha^{-1}(U)$ (resp. $(\alpha^{-1}(U_i)_i)$ est un ouvert (resp. recouvrement admissible) de $\hat{V}_K$. Comme le morphisme $\hat{V}_K \to \hat{X}_K \to X_K^{\mathrm{an}}$ se factorise par l'ouvert V_K^{an} de X_K^{an}, on est ramené à vérifier la continuité de α dans le cas où X est affine. Dans ce cas, $\hat{X}_K = \mathrm{Spm}\,\hat{A} \otimes K$ est l'ouvert X_{K0} de X_K^{an} (avec les notations de 0.3.1), et l'application α est l'inclusion naturelle de X_{K0} dans X_K^{an}, continue par construction. Dans ce cas, α est même de façon évidente un morphisme d'espaces analytiques. Lorsque V varie, ces morphismes se recollent, ce qui fait de α un morphisme d'espaces analytiques dans le cas général.

Lorsque X est séparé sur $\mathcal{V}$, le morphisme $Y \to X$ est propre, puisque Y est fini sur $\mathcal{V}$. Par suite, Y est fermé dans X et est l'adhérence schématique de sa fibre générique ;

l'injectivité de α en résulte. Pour tout ouvert affine V de X, $\hat{V}_K$ est l'ouvert affinoïde X_{K0} de X_K^{an}, donc est un ouvert affinoïde de X_K^{an}. Si de plus X est de type fini, $\hat{X}_K$ est une réunion finie d'ouverts affinoïdes de X_K^{an} ; comme X_K^{an} est séparé, $\hat{X}_K$ est donc un ouvert de X_K^{an}. De même, si $(X_i)_i$ est un recouvrement affine fini de X, les $\hat{X}_{iK}$ forment un recouvrement admissible de $\hat{X}_K$ dans X_K^{an}. Comme les structures analytiques induites par $\hat{X}_K$ et X_K^{an} sur $\hat{X}_{iK}$ coïncident pour tout i, la structure analytique de $\hat{X}_K$ est la structure induite par X_K^{an}.

Supposons enfin X propre sur $\mathcal{V}$. Soit x un point de X_K^{an}, considéré comme point fermé de X_K, de corps résiduel $K(x)$. Si $\mathcal{V}(x)$ est l'anneau des entiers de $K(x)$, le critère valuatif de propreté montre qu'il existe un unique $\mathcal{V}$-morphisme $\mathrm{Spec}\,\mathcal{V}(x) \to X$ prolongeant le morphisme $\mathrm{Spec}\,K(x) \to X_K$. Son image schématique est un sous-schéma fermé de X, intègre, fini et plat sur $\mathcal{V}$. Son complété formel Z est alors un sous-schéma formel de $\hat{X}$ vérifiant les mêmes propriétés, qui correspond à un point de X_K dont l'image par α est x.

(0.3.6) *Exemples.* — (i) Si X est l'espace affine de dimension n sur $\mathcal{V}$, le morphisme α : $\hat{X}_K \to X_K^{\mathrm{an}}$ est l'inclusion de la boule unité fermée dans l'espace affine analytique $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$.

(ii) Soit X le schéma non séparé obtenu en recollant deux copies X_1 et X_2 de la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ le long de l'ouvert U complémentaire de la section nulle. Le complété formel $\hat{X}$ est alors le schéma formel obtenu en recollant deux copies $\hat{X}_i$ de la droite affine formelle le long de $\hat{U}$. Sa fibre générique $\hat{X}_K$ est donc obtenue en recollant les deux copies $\hat{X}_{iK}$ du disque unité fermé le long de $\hat{U}_K$, qui est la couronne définie par $|t(x)| = 1$. D'autre part, X_K^{an} s'obtient en recollant deux copies de $\mathbb{A}_K^{1\,\mathrm{an}}$ le long du complémentaire de l'origine. Le morphisme $\alpha : \hat{X}_K \to X_K^{\mathrm{an}}$ est donc le recollement des deux ouverts $\hat{X}_{iK}$ le long du disque unité ouvert épointé, et n'est pas injectif.

On remarquera que X_K^{an} n'est pas quasi-séparé, car l'intersection des deux copies du disque unité fermé est égale au disque unité fermé épointé, qui n'est pas quasi-compact.

(iii) Si X est l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, α est un isomorphisme ; X_K et X_K^{an} sont donc égaux à l'espace projectif $\mathbb{P}^n_K$, muni de sa structure analytique. Soit $(t_0,\dots,t_n)$ un système de coordonnées homogènes, et notons X_i l'ouvert où $t_i \neq 0$. Un point $x \in \mathbb{P}^n_K$, de corps résiduel $K(x)$, est défini par $(t_0(x),\dots,t_n(x)) \in K(x)^{n+1}$, déterminés à multiplication près par un élément de $K(x)^*$; on peut supposer que les $t_i(x)$ sont dans $\mathcal{V}(x)$, et que $|t_i(x)| = 1$ pour un i. L'adhérence schématique de x est l'image du morphisme $\mathrm{Spec}\,\mathcal{V}(x) \to \mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$ défini par $(t_0(x),\dots,t_n(x))$, et elle a pour fibre spéciale le point image de $\mathrm{Spec}(\mathcal{V}(x)/\mathfrak{m}(x)) \to \mathbb{P}^n_k$; il appartient à $X_i \times \mathrm{Spec}\,k$ si et seulement si $|t_i(x)| = 1$. Par suite, la fibre générique $\hat{X}_{iK}$ de $\hat{X}_i$ est l'ouvert de $\mathbb{P}_K^{n\,\mathrm{an}}$ défini par :

$$\forall j,\quad |t_j(x)| \le |t_i(x)|. \tag{0.3.6.1}$$

1. LE TUBE ASSOCIÉ A UN SOUS-SCHÉMA D'UN SCHÉMA FORMEL

Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, X un k-schéma, et supposons donnée une $\mathcal{V}$-immersion $X \to P$. On se propose d'associer fonctoriellement à ces données un ouvert de la fibre générique P_K de P, *le tube de X dans P_K*, et certains voisinages particuliers de celui-ci, dits *stricts*, qui permettent d'étendre à des situations géométriques plus générales la notion de surconvergence, classique en analyse p-adique depuis les travaux de Dwork et Monsky-Washnitzer. Les théorèmes de fibration établis en (1.3) pour ces tubes sont une étape essentielle de la construction de la cohomologie rigide.

On rappelle que, pour tout ouvert $U \subset P$ et tout $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_P)$, on considère f comme une fonction analytique sur l'ouvert U_K de P_K grâce à l'homomorphisme (0.2.3.4), et que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in U_K$.

1.1. Définitions et propriétés élémentaires des tubes

(1.1.1) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, de réduction P_0 sur k, et $X \subset P_0$ un sous-k-schéma. Le sous-ensemble* $\mathrm{sp}^{-1}(X)$ *des points de P_K dont la spécialisation est dans X est un ouvert de P_K. S'il existe des sections $f_1, \dots, f_r$, $g_1, \dots, g_s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, de réductions $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$, $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_s \in \Gamma(P_0, \mathcal{O}_{P_0})$, telles que $X = Y \cap U$, avec $Y = V(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)$, $U = D(\bar{g}_1) \cup \dots \cup D(\bar{g}_s)$, alors* $\mathrm{sp}^{-1}(X)$ *est l'ouvert de P_K défini par les conditions*

(1.1.1.1) $$\forall\, i,\ |f_i(x)| < 1, \qquad \exists\, j,\ |g_j(x)| = 1.$$

Puisque, pour tout recouvrement affine $(P_\alpha)_\alpha$ de P, le recouvrement $(P_{\alpha K})_\alpha$ de P_K est admissible, on peut supposer P affine, et la première assertion résulte de la seconde.

D'après (0.2.3) et (0.2.4.2), $\mathrm{sp}^{-1}(U)$ est ouvert dans P_K, défini par la condition

$$\exists\, j,\ |g_j(x)| = 1.$$

Comme $V(f_i)$ est complémentaire de $D(f_i)$, on déduit de (0.2.3.2) :

$$\mathrm{sp}^{-1}(V(f_i)) = \{ x \in P_K \mid |f_i(x)| < 1 \},$$

et $\mathrm{sp}^{-1}(V(f_i))$ est ouvert d'après (0.1.3) (iii). Par suite, $\mathrm{sp}^{-1}(X)$ est intersection finie d'ouverts, donc est ouvert, et est défini par les conditions de (1.1.1.1).

(1.1.2) *Définitions.* — (i) Sous les hypothèses de (1.1.1), l'ouvert $\mathrm{sp}^{-1}(X)$, muni de la structure analytique induite par celle de P_K, est appelé *tube de X dans P_K*; on le notera $]X[_P$, ou simplement $]X[$.

Par construction, $]X[$ ne dépend que du sous-schéma réduit X_{red}. De même, on ne restreint pas la généralité en considérant les sous-schémas de P_0 plutôt que les sous-schémas formels (éventuellement annulés par un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$) de P.

(ii) Supposons maintenant donnée une $\mathcal{V}$-immersion de X dans un $\mathcal{V}$-schéma algébrique séparé P, et soit $\hat{P}$ le complété formel de P. L'immersion de X dans P se factorise par $\hat{P}$. D'autre part, la fibre générique $\hat{P}_K$ de $\hat{P}$ s'identifie, d'après (0.3.5), à un ouvert de l'espace analytique P_K^{an} associé à la fibre générique P_K. On peut donc encore définir le *tube de X dans P_K*, qu'on notera aussi $]X[_P$, comme étant le tube $]X[_{\hat{P}}$, considéré comme un ouvert de P_K^{an}.

(1.1.3) *Exemple.* — Soient X un schéma quasi-projectif sur k, $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$ une immersion. Il existe alors des polynômes homogènes $f_1,\ldots,f_r, g_1,\ldots,g_s \in \mathcal{V}[t_0,\ldots,t_n]$, de réductions $\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r, \bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_s \in k[t_0,\ldots,t_n]$, tels que $X = Y \cap U$, avec $Y = V(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r)$, $U = D_+(\bar{g}_1) \cup \ldots \cup D_+(\bar{g}_s)$. Soient P l'espace projectif formel associé à $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$; sa fibre générique est l'espace projectif analytique $\mathbb{P}^{n\,\mathrm{an}}_K$ (cf. (0.3.6) (iii)). En utilisant le recouvrement de P par les ouverts $U_i = D_+(t_i)$, et la description de U_{iK} par les conditions (0.3.6.1), on voit que $]X[_P$ est l'ouvert de $\mathbb{P}^{n\,\mathrm{an}}_K$ défini par les conditions :

$$\forall\, i,\ |f_i(t_0(x),\ldots,t_n(x))| < 1, \qquad \exists\, j,\ |g_j(t_0(x),\ldots,t_n(x))| = 1, \tag{1.1.3.1}$$

les coordonnées homogènes $(t_0(x),\ldots,t_n(x))$ étant choisies telles que $t_i(x) \in \mathcal{V}(x)$ pour tout i, et $|t_i(x)| = 1$ pour au moins un i.

Ainsi, si $X = \{0\} \subset \mathbb{P}^n_k$, on voit que $]X[_P$ est la boule unité ouverte $B(0, 1^-)$. Si $X = \mathbb{A}^n_k \subset \mathbb{P}^n_k$, $]X[_P$ est la boule unité fermée $B(0, 1^+)$.

(1.1.4) *Remarques.* — (i) Si X est de type fini, et ouvert dans P_0, le tube de X est un ouvert quasi-compact de P_K, qui n'est autre par construction que la fibre générique X'_K de l'ouvert X' de P de réduction X (cf. (0.2.3)). Par contre, si X est fermé dans P_0, $]X[_P$ n'est pas quasi-compact en général : c'est par exemple le cas si P est l'espace affine formel $\hat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$, et X l'origine $\{0\} \subset \mathbb{A}^n_k$, puisque $]X[_P$ est alors la boule unité ouverte.

(ii) Lorsque $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète et X fermé dans P_0, le tube $]X[_P$ s'identifie, grâce à (0.2.7), à la fibre générique du complété formel $\hat{P}_{/X}$ de P le long de X telle qu'elle est construite en (0.2.6), et ne dépend donc que de $\hat{P}_{/X}$. Plus généralement, si P est un $\mathcal{V}$-schéma formel vérifiant les hypothèses de (0.2.6), P_K sa fibre générique, $\mathcal{I}$ un idéal de définition de P, $P_0 = V(\mathcal{I})$, et $X \subset P_0$ un k-sous-schéma, on peut définir le tube de X dans P, que l'on notera encore $]X[_P$, comme l'ouvert $\mathrm{sp}^{-1}(X) \subset P_K$, où $\mathrm{sp} : P_K \to P$ est le morphisme de spécialisation défini en (0.2.6). Lorsque X est fermé dans P_0, on peut aussi définir $]X[_P$ comme la fibre générique du complété formel $\hat{P}_{/X}$, compte tenu de (0.2.7).

(iii) Si X est fermé dans un ouvert U de P, défini par un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$, et f une section de $\mathcal{I}$ sur un ouvert $V \subset U$, on a $|f(x)| < 1$ en tout point $x \in V_K \cap\ ]X[_P$.

(iv) Si X' est un sous-schéma formel de P, de réduction X sur k, il résulte immédiatement de la définition de $]X[_P$ que la fibre générique X'_K de X' est un sous-espace analytique de $]X[_P$.

L'énoncé suivant fournit un critère pour que $]X[_P$ soit non vide :

(1.1.5) PROPOSITION. — *Soit P un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, plat sur $\mathcal{V}$. Alors l'application* sp : $|P_K| \to |P|$ *est une surjection sur l'ensemble des points fermés de P.*

C'est une assertion locale sur P, qu'on suppose donc affine. Soient $A = \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, et $B \subset A \otimes K$ l'ensemble des éléments de norme spectrale au plus égale à 1. Comme A est plat sur $\mathcal{V}$, A est un sous-anneau de B, sur lequel B est entier [Ta1, 5.2]. L'application $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ induit donc une surjection β entre les points fermés. Il existe d'autre part une application α de $|P_K|$ dans l'ensemble des idéaux maximaux de B, définie comme suit : pour tout $x \in P_K$, on a par définition un homomorphisme canonique $B \to \mathcal{V}(x)$, associant à f sa valeur $f(x) \in K(x)$, et l'image inverse de $\mathfrak{m}(x)$ dans B est un idéal maximal, qui est par définition $\alpha(x)$. L'application sp est alors composée de α et β ; comme α est surjective d'après un résultat de Tate [Ta1, 6.4], la proposition en résulte.

(1.1.6) COROLLAIRE. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, X un sous-schéma de $P_0 = P \times \operatorname{Spec} k$. Si P est plat sur $\mathcal{V}$ au voisinage de X, l'application* sp *envoie surjectivement $]X[_P$ sur l'ensemble des points fermés de X.*

(1.1.7) *Remarques.* — (i) Si P est un $\mathcal{V}$-schéma formel, et X un sous-schéma de $P_0 = P \times \operatorname{Spec} k$, nous noterons encore en général sp le morphisme composé

$$]X[\ \subset P_K \xrightarrow{\text{sp}} P.$$

Par définition, on a un diagramme commutatif de morphismes de sites

$$\begin{tikzcd} X & \arrow[l]]X[_P \arrow[d] \\ P \arrow[u, leftarrow] & \arrow[l, "\text{sp}"'] P_K. \end{tikzcd}$$

Il en résulte que, pour tout faisceau abélien E sur $]X[_P$, $\text{sp}_* E$ est un faisceau abélien sur P à support dans l'adhérence de X dans P.

(ii) Soient $P' \subset P$ le plus grand sous-schéma formel de P plat sur $\mathcal{V}$, et $X' = X \times_P P'$. Compte tenu de (0.2.4) (iii), on voit immédiatement que

$$]X[_P \;=\;]X'[_{P'}.$$

(1.1.8) Soit $\eta \in \Gamma^*$, avec $\eta < 1$, et soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, $X \subset P_0$ un sous-schéma fermé de sa fibre spéciale, défini par les réductions $\bar{f}_i$ de sections $f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$. Le sous-ensemble $V_\eta \subset\,]X[_P$ défini par les conditions :

(1.1.8.1) $$\forall\, i, \;\; |f(x)| \;\le\; \eta,$$

est encore un ouvert de P. Si $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète, et si $|a| \le \eta$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$, V_η ne dépend que du sous-schéma X. En effet, il suffit de le vérifier lorsque P est affine. Si $(f'_1, \ldots, f'_r)$ est une autre famille de sections de $\mathcal{O}_P$ telle que $X = V(\bar{f}'_1, \ldots, \bar{f}'_r)$, il existe des sections $h_{ij} \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, $a_i \in \mathfrak{m}\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ telles que

(1.1.8.2) $$f'_i \;=\; \sum_j h_{ij} f_j + a_i.$$

Pour tout $x \in P_K$, on a $|h_{ij}(x)| \le 1$, et $|a_i(x)| \le \eta$, si bien que lorsque $|f_j(x)| \le \eta$ pour tout j, on a aussi $|f'_i(x)| \;\le\; \eta$. On en conclut que V_η ne dépend pas du choix de $f_1, \ldots, f_r$ relevant des générateurs de l'idéal de X dans P_0.

Dans le cas d'un sous-schéma fermé X quelconque de P_0, on peut construire localement V_η au moyen de générateurs locaux de l'idéal de X dans P_0, et la propriété d'unicité précédente permet de recoller ces constructions locales. Le sous-ensemble de $]X[_P$ ainsi obtenu est encore ouvert, car son intersection avec U_K est ouverte pour tout ouvert affine U (et est même un domaine spécial de U_K) ; il sera appelé *tube fermé de rayon η de X dans P_K*, et noté $[X]_{P\eta}$, ou $[X]_\eta$.

Si on ne suppose plus la valuation de $\mathcal{V}$ discrète, V_η dépend en général du choix des générateurs de l'idéal de X dans P_0. Toutefois, si P est affine, et si $(f_1, \ldots, f_r)$, $(f'_1, \ldots, f'_{r'})$ sont deux systèmes de générateurs de l'idéal de X modulo $\mathfrak{m}$, les relations (1.1.8.2) ne font intervenir qu'un nombre fini d'éléments $a_i \in \mathfrak{m}\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$. Il existe alors $a \in \mathfrak{m}$ tel que $a_i \in a\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ pour tout i, et les ouverts V_η et V'_η définis par les f_i et les f'_i vérifient la relation $V_\eta \subset V'_\eta$ pour $|a| \le \eta < 1$; par suite, $V_\eta = V'_\eta$ pour η assez près de 1. Plus généralement, si on suppose P quasi-compact, et si l'on fixe un recouvrement affine fini $(P_\alpha)_\alpha$ de P, et sur chaque P_α une famille $(f_1, \ldots, f_r)$ donnant des générateurs sur P_α de l'idéal de X dans P_0, les ouverts V_η définis dans chaque $P_{\alpha K} \cap\,]X[$ se recollent si η est assez près de 1, et deux systèmes de choix différents pour le recouvrement $(P_\alpha)_\alpha$ et les équations locales $(f_i)_i$ sur les P_α donnent des ouverts V_η et V'_η de $]X[_P$ qui coïncident pour η assez près de 1. En d'autres termes, les V_η peuvent dépendre des choix faits, mais le ind-objet $(V_\eta)_\eta$ de la catégorie des ouverts de $]X[_P$ formé par les V_η pour $\eta \to 1$, $\eta < 1$, est indépendant de ces choix. En pratique, seul le système inductif des V_η pour η assez près de 1 jouera un rôle dans la suite ; par abus de langage, nous parlerons du « tube fermé de rayon η pour η assez près de 1 » (en abrégé : pour $\eta \to 1^-$), et nous emploierons encore la notation $[X]_\eta$.

Lorsque nous dirons que $[X]_\eta$ satisfait une propriété $\mathscr{P}$ pour η assez près de 1 (i.e. pour $\eta \to 1^-$), cela signifiera que, pour tout choix d'un recouvrement affine de P et d'équations locales de X, il existe $\eta_0 < 1$ tel que, pour $\eta \geq \eta_0$, l'ouvert $[X]_\eta$ de $]X[_P$ correspondant à ces choix soit effectivement défini (i.e. le recollement est possible pour $\eta \geq \eta_0$), et satisfasse la propriété $\mathscr{P}$; lorsque $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète, l'expression « pour $\eta \to 1^-$ » appliquée à une propriété d'un tube fermé $[X]_\eta$ devra être comprise comme synonyme de « pour $|\pi| \leq \eta < 1^-$ », où π est une uniformisante de $\mathcal{V}$. D'autre part, les k-schémas X considérés ici seront supposés compactifiables, donc quasi-compacts ; l'hypothèse de quasi-compacité faite sur P pour définir les $[X]_\eta$ ne diminuera donc pas réellement la généralité, et sera faite systématiquement par la suite.

Enfin, les définitions précédentes s'étendent au cas où X est un sous-schéma non nécessairement fermé de P_0 en remplaçant P par un ouvert U tel que X soit fermé dans U_0, car la construction précédente, appliquée à $X \subset U_0$, donne un ouvert de $]X[_U =]X[_P$ indépendant du choix de U. On remarquera que, lorsque X est un ouvert de P, on a par définition $[X]_\eta =]X[$ pour $\eta \to 1^-$.

La même méthode permet de définir, pour $\eta \leq 1$, le *tube ouvert de rayon η de X dans P_K*, en remplaçant (1.1.8.1) par

$$\forall\, i, \quad |f_i(x)| < \eta. \tag{1.1.8.3}$$

Le tube ouvert de rayon η sera noté $]X[_{P\eta}$, ou $]X[_\eta$; pour $\eta = 1$, on obtient donc $]X[_1 =]X[$.

On observera que l'argument utilisé plus haut entraîne que, si X est fermé dans un ouvert $U \subset P$, défini par un idéal $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_U$, alors, pour toute section f de $\mathscr{I}$ sur un ouvert $V \subset U$, on a $|f(x)| \leq \eta$ (resp. $|f(x)| < \eta$) pour tout $x \in [X]_{P\eta}$ (resp. $]X[_{P\eta}$) si η est assez près de 1.

On déduit immédiatement de (0.1.3) (iii) l'énoncé suivant :

(1.1.9) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, de réduction P_0 sur k, X un sous-schéma de P. Les tubes fermés (resp. ouverts) $[X]_{P\eta}$ (resp. $]X[_{P\eta}$), avec $\eta \to 1^-$, $\eta \in \Gamma^*$, forment un recouvrement admissible de $]X[_P$.*

(1.1.10) *Remarque.* — Supposons X fermé dans P, P plat sur $\mathcal{V}$, et la valuation discrète ; soient π un générateur de $\mathfrak{m}$, $\mathscr{I}$ l'idéal de X dans P. Suivant Ogus [Og1, (2.5)], considérons le $\mathcal{V}$-schéma formel $T_{P,n}(X)$ obtenu en prenant dans l'éclaté formel P' de l'idéal $\mathscr{I}' = (\mathscr{I}^n, \pi)$ le plus grand ouvert sur lequel $\mathscr{I}'\mathcal{O}_{P'}$ est engendré par π. Alors la fibre générique de $T_{P,n}(X)$ est le tube fermé $[X]_{|\pi|^{1/n}}$, le morphisme canonique $T_{P,n}(X) \to P$ induisant l'inclusion de $[X]_{|\pi|^{1/n}}$ dans P_K [Og1, (2.6.3)].

(1.1.11) PROPOSITION. — *Soient P, P' deux $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, $X \subset P_0$,*

$X' \subset P'_0$ deux sous-schémas, $u : P' \to P$ un $\mathcal{V}$-morphisme dont la restriction à X' se factorise en $v : X' \to X$. Alors :

(i) $u_K(]X'[_{P'}) \subset]X[_P$;

(ii) *pour* $\eta \to 1^-$, $u_K([X']_{P'\eta}) \subset [X]_{P\eta}$.

La première assertion résulte de la fonctorialité de sp (prop. (0.2.3) (iii)). Pour vérifier la seconde, on se ramène au cas où X' et X sont fermés dans P' et P, supposés affines. Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ les idéaux de X, X' dans P, P', et $f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(P, \mathcal{I})$ des sections telles que $\mathcal{I} = (f_1, \ldots, f_r) + \mathfrak{m}\mathcal{O}_P$. Si $f'_i = u^*(f_i)$, les f'_i sont des sections de $\mathcal{I}'$, et, d'après (1.1.8), on a $|f'_i(x)| \leq \eta$ pour tout $x \in [X']_{P'\eta}$ si $\eta \to 1^-$. Comme $|u_K^*(f)(x)| = |f(u_K(x))|$, et que les f_i sont en nombre fini, l'assertion (ii) en découle.

Remarques. — (i) Supposons que $\mathcal{V}$ soit un anneau de valuation discrète. Comme $]X[_P$ s'identifie à la fibre générique du complété formel $\hat{P}_{/X}$ de P le long de X (cf. (1.1.4) (i)), tout morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels nœthériens $\hat{P}'_{/X'} \to \hat{P}_{/X}$ induit un morphisme $]X'[_{P'} \to]X[_P$. Le tube de X dans P dépend donc fonctoriellement du complété formel $\hat{P}_{/X}$.

(ii) Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, X, X' deux sous-schémas de P_0 tels que $X_{\mathrm{red}} = X'_{\mathrm{red}}$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que l'on ait

$$[X']_{P\eta^a} \subset [X]_{P\eta} \subset [X']_{P\eta^b}$$

pour $\eta \to 1^-$. En effet, on peut supposer $X' = X_{\mathrm{red}}$, et la proposition précédente montre que $[X_{\mathrm{red}}]_{P\eta} \subset [X]_{P\eta}$ pour $\eta \to 1^-$. D'autre part, on peut supposer X fermé dans P, et P affine. Si $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ sont les idéaux de X et X_{red} dans P, soient $f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(P, \mathcal{I})$ tels que $\mathcal{I} = (f_1, \ldots, f_r) + \mathfrak{m}\mathcal{O}_P$, $f'_1, \ldots, f'_s \in \Gamma(P, \mathcal{I}')$ tels que $\mathcal{I}' = (f'_1, \ldots, f'_s) + \mathfrak{m}\mathcal{O}_P$. Il existe alors un entier n, et des sections $h_{ij} \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, $a_i \in \mathfrak{m}\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, tels que l'on ait pour tout i

$$f'^{\,n}_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ij} f_j + a_i.$$

Comme $a_i \in \mathfrak{m}\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, il existe $a \in \mathfrak{m}$ tel que $a_i \in a\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ et on a $|a_i(x)| \leq |a| < 1$ pour tout $x \in P_K$, de sorte que, pour $\eta \geq |a|$, $[X]_{P\eta} \subset [X_{\mathrm{red}}]_{P\eta^{1/n}}$. Lorsque la valuation de K est discrète, on voit ainsi qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $|\pi| \leq \eta < 1$, on ait

$$[X_{\mathrm{red}}]_{P\eta} \subset [X]_{P\eta} \subset [X_{\mathrm{red}}]_{P\eta^{1/n}}.$$

La discussion précédente montre donc que le système inductif des $[X]_{P\eta}$ est indépendant, dans la catégorie des ind-objets de la catégorie des ouverts de P_K, de la structure de schéma fixée sur X, et ne dépend que de X_{red}.

Notons au passage la conséquence suivante de (1.1.5) :

(1.1.12) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* (1.1.11), *supposons $u : P' \to P$ plat au voisinage de X', et $v : X' \to X$ surjectif. Alors le morphisme*

$$]X'[_{P'} \longrightarrow\ ]X[_P$$

induit par u_K est surjectif.

Soit $z \in\ ]X[_P$ un point de spécialisation $x \in X$, correspondant à un sous-schéma formel fermé Z de P, intègre, fini et plat sur $\mathcal{V}$, de support x. Le sous-espace analytique fermé $u_K^{-1}(z)$ de P'_K est la fibre générique du produit fibré $P'_Z = Z \times_P P'$. Soit $x' \in X'$ un point fermé d'image x. Comme l'immersion fermée $\operatorname{Spec} k(x') \hookrightarrow P'$ se factorise par une immersion fermée $\operatorname{Spec} k(x') \hookrightarrow P'_Z$, on voit que

$$]x'[_{P'_Z}\ =\ ]x'[_{P'} \cap u_K^{-1}(z)\ \subset\ ]X'[_{P'} \cap u_K^{-1}(z).$$

Or Z est plat sur $\mathcal{V}$, et P'_Z plat sur P' au voisinage de $X'_Z = Z \times_P X'$, donc au voisinage de x'; par suite, $]x'[_{P'_Z}$ est non vide d'après (1.1.5), ce qui montre la surjectivité de $]X'[_{P'} \to\ ]X[_P$.

Un argument analogue à celui de (1.1.11) montre que la formation des tubes commute à l'extension du corps de base :

(1.1.13) PROPOSITION. — *Soient $K \hookrightarrow K'$ une extension isométrique de corps valués complets, P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, X un k-sous-schéma de P, $P' = P \times \operatorname{Spf}\mathcal{V}'$, $X' = X \times \operatorname{Spec} k'$. Il existe un isomorphisme canonique de K'-espaces analytiques*

$$]X[_P \times \operatorname{Spm} K' \xrightarrow{\ \sim\ }\ ]X'[_{P'}$$

(*resp.*

$$[X]_{P\eta} \times \operatorname{Spm} K' \xrightarrow{\ \sim\ } [X']_{P'\eta}$$

pour η assez près de 1).

La deuxième partie de l'énoncé suivant est le point de départ des propriétés de type Mayer-Vietoris en cohomologie rigide :

(1.1.14) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini, X un k-sous-schéma de P.*

(i) *Pour tout recouvrement ouvert $(V_i)_i$ de X, les tubes $]V_i[_P$ forment un recouvrement admissible de $]X[_P$.*

(ii) *Soient X_1, X_2 deux sous-schémas fermés de X, tels que $X = X_1 \cup X_2$. Alors $]X[_P =]X_1[_P \cup\ ]X_2[_P$ est un recouvrement admissible de $]X[_P$.*

(i) Pour tout i, soit U_i un ouvert de P tel que $V_i = X \cap U_i$, et soit $U = \bigcup_i U_i$. Alors U_K est un ouvert de P_K contenant $]X[$, et $(U_{iK})_i$ en est un recouvrement admissible d'après (0.2.3). Comme $]V_i[\ =\ ]X[\ \cap U_{iK}$, les $]V_i[$ forment un recouvrement admissible de $]X[$.

(ii) Soit U un ouvert de P tel que $X \subset U$ et que X soit fermé dans U. Comme la topologie de U_K est la topologie induite par P_K, on peut supposer X fermé dans P. On peut d'autre part supposer P affine ; soit $A = \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$. Soient $f_1, \ldots, f_r \in A$ engendrant l'idéal de X_1 modulo $\mathfrak{m}$, $g_1, \ldots, g_s \in A$ engendrant l'idéal de X_2 modulo $\mathfrak{m}$; comme $]X[$ ne dépend que de X_{red}, on peut supposer que l'idéal de X est engendré par les $f_i g_j$ modulo $\mathfrak{m}$. Soient $Y = \mathrm{Spm} B$ un espace analytique affinoïde, $h : Y \to P_K$ un morphisme tel que $h(Y) \subset \,]X[$, $f'_i = h^*(f_i)$, $g'_j = h^*(g_j)$. Puisque $h(Y) \subset \,]X[$, on a $|f'_i(y) g'_j(y)| < 1$ en tout point $y \in Y$. Le principe du maximum (cf. (0.1.4)), entraîne alors qu'il existe $\rho < 1$, $\rho \in \Gamma^*$, tel que $|f'_i(y) g'_j(y)| < \rho$ pour tout $y \in Y$. Soit $\rho' = \sqrt{\rho}$, et posons :

$$V_1 = \{ y \in Y \mid \forall\, i, |f'_i(y)| \leq \rho' \}, \qquad V_2 = \{ y \in Y \mid \forall\, i, |g'_j(y)| \leq \rho' \}.$$

Alors $Y = V_1 \cup V_2$, et les V_i forment un recouvrement spécial raffinant le recouvrement par les $h^{-1}(]X_i[)$.

1.2. Voisinages stricts d'un tube

Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, $Y \subset P$ un k-sous-schéma fermé, $X \subset Y$ un ouvert de Y, $Z = Y - X$ le fermé complémentaire. Le tube $]Y[_P$ est réunion disjointe de $]X[_P$ et $]Z[_P$. On pose, pour $\lambda < 1$, $\lambda \in \Gamma^*$:

(1.2.0) $$U_\lambda = \,]Y[_P - \,]Z[_{P\,\lambda}\,;$$

U_λ est un ouvert de $]Y[_P$, car, lorsque P est affine et Z défini modulo $\mathfrak{m}$ par des sections $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, U_λ est la trace sur $]Y[_P$ de la réunion des domaines spéciaux définis par $|f_i(x)| \geq \lambda$.

(1.2.1) *Définition.* — Un ouvert $V \subset \,]Y[_P$ est un *voisinage strict de* $]X[_P$ *dans* $]Y[_P$ s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) $]X[_P \subset V$;

(ii) le recouvrement de $]Y[_P$ constitué par les deux ouverts V et $]Z[_P$ est admissible.

On voit immédiatement que l'intersection de deux voisinages stricts est un voisinage strict. L'ensemble des voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ est donc filtrant ; un *système fondamental de voisinages stricts* est une partie cofinale de cet ensemble.

Nous aurons surtout à travailler avec des systèmes fondamentaux de voisinages stricts, et en général on pourra sans inconvénient remplacer un voisinage strict donné par un voisinage strict plus petit.

Remarque. — Le recouvrement de $]Y[$ constitué par les deux ouverts disjoints $]X[$ et $]Z[$ n'est pas admissible en général. Par exemple, si $P = \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathcal{V}}$, $Y = \mathbb{A}^1_k$, et si Z est l'origine de $\mathbb{A}^1_k$, on a $P_K = \,]Y[\, = D(0, 1^+)$, $]Z[\, = D(0, 1^-)$, et $]X[$ est la couronne de rayon 1 : on déduit facilement du principe du maximum que le recouvrement ainsi obtenu n'est pas admissible.

Le critère suivant est souvent commode pour vérifier qu'un voisinage est strict.

(1.2.2) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, $Y \subset P$ un k-sous-schéma fermé, X un ouvert de Y, $Z = Y - X$, et, pour $\lambda < 1$, soit U_λ l'ouvert de $]Y[_P$ défini en* (1.2.0). *Si V est un ouvert de $]Y[_P$ contenant $]X[_P$, V est un voisinage strict de $]X[_P$ si et seulement si, pour tout ouvert affinoïde $W \subset\,]Y[_P$, il existe $\lambda_0 < 1$ tel que, pour $\lambda_0 \leq \lambda < 1$ on ait $U_\lambda \cap W \subset V$.*

Supposons que V soit un voisinage strict de $]X[_P$, et W un ouvert affinoïde de $]Y[_P$. Comme les $]Z[_\lambda$, pour $\lambda \to 1^-$, forment un recouvrement admissible de $]Z[$, le recouvrement $(V,\ ]Z[_\lambda)_{\lambda\to 1^-}$ induit un recouvrement admissible sur W. On peut donc en extraire un recouvrement fini, de sorte qu'il existe λ_0 tel que $(V,\ ]Z[_{\lambda_0})$ induise un recouvrement admissible de W. Comme $U_{\lambda_0} \cap\,]Z[_{\lambda_0} = \emptyset$, on a alors $U_{\lambda_0} \cap W \subset V$.

Réciproquement, supposons la condition de la proposition remplie. On peut supposer P affine, de sorte que P_K est affinoïde. Soient $g_1,\ldots,g_r \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ engendrant l'idéal de Z dans P modulo $\mathfrak{m}$, et, pour $i = 1,\ldots,r$, et $\lambda < 1$, posons

$$U_{i\lambda} \;=\; \{\, x \in\,]Y[\;|\; |g_i(x)| \geq \lambda \,\}, \qquad U_\lambda \;=\; \textstyle\bigcup_i U_{i\lambda}.$$

Soit $h : \mathrm{Spm}\,B \to P_K$ un morphisme d'un espace analytique affinoïde dans P_K, dont l'image soit contenue dans $]Y[$. Sur $\mathrm{Spm}\,B$, le principe du maximum entraîne qu'il existe $\eta < 1$ tel que $h(\mathrm{Spm}\,B) \subset [Y]_\eta$. Appliquant la condition de l'énoncé à $[Y]_\eta$, on voit qu'il existe λ tel que $\eta \leq \lambda < 1$ et $U_\lambda \cap [Y]_\eta \subset V$. Les ensembles $[Z]_\lambda$, $U_{i\lambda} \cap [Y]_\eta$, pour $i = 1,\ldots,r$, forment une famille finie de domaines spéciaux de P_K dont la réunion recouvre $h(\mathrm{Spm}\,B)$, et constituent un raffinement du recouvrement de $h(\mathrm{Spm}\,B)$ par V et $]Z[$; ce dernier est donc admissible.

(1.2.3) *Remarques.* — (i) La notion de voisinage strict est indépendante de la structure de sous-schéma fermé mise sur Z, puisque le tube $]Z[_P$ n'en dépend pas. De même, elle est indépendante de celle de Y.

(ii) Soit $(P_i)_i$ un recouvrement ouvert de P. Alors V est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ si et seulement si, pour tout i, $V \cap P_{iK}$ est un voisinage strict de $]X \cap P_i[_{P_i}$ dans $]Y \cap P_i[_{P_i}$.

(iii) Supposons qu'il existe $g_1,\ldots,g_s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ dont les images dans $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ engendrent l'idéal de Z dans Y. Posons, pour $\lambda < 1$:

$$U'_\lambda \;=\; \{\, x \in\,]Y[_P \;|\; \exists\, j,\ |g_j(x)| \geq \lambda \,\};$$

les U'_λ, pour $\lambda \in \Gamma^*$, sont des ouverts de $]Y[_P$, et on a $U'_\lambda \subset U_\lambda$ pour tout λ. La condition de (1.2.2) est alors équivalente à la condition analogue obtenue en remplaçant U_λ par U'_λ. Comme P_K est quasi-séparé, il suffit en effet de la vérifier lorsque P est affine. Si $g_{s+1},\ldots,g_{s+r} \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ engendrent modulo $\mathfrak{m}$ l'idéal de Y dans P, on peut définir le système des U_λ par la condition :

$$\exists\, j \in \{1,\dots,s+r\}, \text{ tel que } |g_j(x)| \geq \lambda.$$

Mais W est un affinoïde sur lequel $|g_j(x)| < 1$ pour $j = s+1,\dots,s+r$. Le principe du maximum entraîne donc qu'il existe $\lambda_0 < 1$ tel que $|g_j(x)| \leq \lambda_0$ pour tout $x \in W$. Par suite, on a $U_\lambda \cap W = U'_\lambda \cap W$ pour $\lambda_0 < \lambda < 1$.

(iv) Soit V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$. Un ouvert $V' \subset V$ contenant $]X[_P$ est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ si et seulement si le recouvrement $(V',]Z[_P \cap V)$ de V est admissible. On peut donc définir un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ à partir de l'espace analytique rigide V.

(1.2.4) *Exemples.* — (i) Soient $\underline{\eta} = (\eta_n)$, $\underline{\lambda} = (\lambda_n)$ deux suites croissantes d'éléments de Γ^*, tendant vers 1 par valeurs strictement inférieures. Posons $V_n = [Y]_{\eta_n} \cap U_{\lambda_n}$, et $V = \bigcup_n V_n$. Alors V est un ouvert de $]Y[$: on peut pour le vérifier supposer P affine ; supposons Z défini par $f_1,\dots,f_n \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ modulo $\mathfrak{m}$, et soit

$$U_{i\lambda} \; = \; \{\, x \in\,]Y[_P \mid |f_i(x)| \geq \lambda \,\}.$$

Les $V_{ni} = V_n \cap U_{i\lambda_n}$ sont des domaines spéciaux de P_K, et il suffit de vérifier qu'ils forment un recouvrement spécial de V ; mais, pour tout homomorphisme $h : \mathrm{Spm}\,B \to V$, le principe du maximum entraîne que $h(\mathrm{Spm}\,B) \subset [Y]_{\eta_n}$ pour n assez grand ; comme $V \cap [Y]_{\eta_n} = \bigcup_{m \leq n} V_m$, $\mathrm{Spm}\,B$ est recouvert par un nombre fini de domaines spéciaux $h^{-1}(V_{mi})$. On voit de même que V est un voisinage strict de $]X[$.

Pour $n \to \infty$, les $[Y]_{\eta_n} \cap U_{\lambda_n}$ sont indépendants du choix des équations de Y et Z dans P ; les ouverts V_n correspondants n'en dépendent donc pas non plus. Par suite, quitte à rétrécir V en négligeant un nombre fini de V_n, V est indépendant de ces choix, et sera noté (avec un léger abus de langage) $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$. De même, on peut pour définir $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ remplacer les ouverts U_{λ_n} par les ouverts U'_{λ_n} introduits en (1.2.3) (iii).

Pour tout $\underline{\eta}$, les $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ avec $\underline{\lambda}$ variable forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$. Soit en effet V' un voisinage strict de $]X[$. Comme $[Y]_{\eta_n}$ est quasi-compact, il existe $\lambda_n < 1$ tel que $U_{\lambda_n} \cap [Y]_{\eta_n} \subset V'$, et on peut choisir les λ_n de manière à former une suite croissante de limite 1 ; le voisinage $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ correspondant est contenu dans V'.

Les voisinages stricts de la forme $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ seront appelés *standards*.

(ii) Soit T un sous-espace analytique fermé de P_K ne rencontrant pas $]X[$. Alors la trace sur $]Y[$ du complémentaire V de T est un voisinage strict de $]X[$. En effet, on peut supposer P affine, et se donner $g_1,\dots,g_s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ relevant des équations de Z dans Y. Si W est un ouvert affinoïde de $]Y[$, $W \cap T$ est un espace analytique affinoïde sur lequel $\|g_i\| < 1$ pour tout i, si bien que pour λ assez près de 1, $W \cap T \cap U_\lambda = \emptyset$ (d'après le principe du maximum), donc $W \cap U_\lambda \subset V$.

Supposons par exemple que P soit le complété formel d'un $\mathcal{V}$-schéma séparé de type fini P', et X la réduction d'un ouvert X' de P'. Alors $X'^{\mathrm{an}}_K \cap P_K$ est un voisinage strict de $]X[$ dans P_K. En effet, soient $Z' \subset P'$ un sous-schéma fermé de support $P' - X'$, $\hat{Z}'$ son complété formel, $Z = P_0 - X$ sa fibre spéciale. On a :

$$X_K'^{\mathrm{an}} \cap P_K = (P_K'^{\mathrm{an}} - Z_K'^{\mathrm{an}}) \cap P_K = P_K - (Z_K'^{\mathrm{an}} \cap P_K).$$

Les points de $Z_K'^{\mathrm{an}} \cap P_K$ sont les points fermés de Z'_K dont l'adhérence schématique dans P' (c'est-à-dire dans Z') est finie sur $\mathcal{V}$, donc $Z_K'^{\mathrm{an}} \cap P_K = Z'_K$, et c'est un sous-espace analytique fermé de P_K ne rencontrant pas $]X[$. Il suffit alors d'invoquer la remarque précédente.

(iii) Supposons que $Y = P_0$, donc que X est un ouvert de P_0. Alors $]Y[\ = P_K$, et les U_λ, pour $\lambda \in \Gamma^*$, $\lambda < 1$, forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$, grâce à la condition de (1.2.2) appliquée à $W = P_K$.

Considérons le cas particulier où P est l'espace projectif formel de dimension relative n sur $\mathcal{V}$, et X l'espace affine $\mathbb{A}_k^n \subset \mathbb{P}_k^n$; soient $t'_0, \ldots, t'_n$ des coordonnées projectives sur P, donc sur sa fibre générique $\mathbb{P}_K^{n\,\mathrm{an}}$, correspondant aux coordonnées $t_i = t'_i/t'_0$ sur $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$. Si $Z = P_0 - X$ est l'hyperplan à l'infini, et $U_i = D_+(t'_i)$, $]Z[_\lambda \cap U_{iK}$ est défini pour $i \neq 0$ par les conditions $|t'_0(x)/t'_i(x)| < \lambda$, et $|t'_j(x)| \leq |t'_i(x)|$ pour tout j. Par conséquent, $U_\lambda \cap U_{iK}$ est l'ouvert de $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$ défini par les conditions $|t_i(x)| \leq 1/\lambda$, $|t_i(x)| \geq 1$, et $|t_j(x)| \leq |t_i(x)|$ pour $j \neq 0$. Comme $U_{0K} =]X[$ est contenu dans U_λ, on en déduit que U_λ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $1/\lambda$ dans $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$.

(iv) Soit encore P l'espace projectif formel de dimension n sur $\mathcal{V}$, et supposons maintenant que X est un sous-schéma fermé de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n \subset \mathbb{P}_k^n$, défini modulo $\mathfrak{m}$ par $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]$; soient $f'_1, \ldots, f'_r \in \mathcal{V}[t'_0, \ldots, t'_n]$ les polynômes homogènes correspondants, et Y le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_k^n$ défini par $f'_1, \ldots, f'_r$. On pose

$$V = \{ x \in \mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}} \mid \forall\, i,\ |f_i(x)| < 1 \};$$

$]X[_P$ est donc l'intersection de V avec la boule unité fermée. Alors $V \subset]Y[_P$, et est un voisinage strict de $]X[_P$. En effet, si le degré de f_i est d_i, de sorte que

$$f'_i = t_0'^{d_i} f_i(t'_1/t'_0, \ldots, t'_n/t'_0),$$

$]Y[\ \cap U_{jK}$ est défini dans U_{jK} par la condition

$$\forall\, i,\ \ |f'_i(x)| < |t'_j(x)|^{d_i}.$$

Soit alors $x \in V \cap U_{jK}$; on a

$$|f'_i(x)| = |t_0'^{d_i}(x) f_i(x)| = |t_0'^{d_i}(x)/t_j'^{d_i}(x)|\,|f_i(x)|\,|t_j'^{d_i}(x)| < |t'_j(x)|^{d_i},$$

donc $V \subset]Y[$. D'autre part, tout ouvert affinoïde de $]Y[$ est contenu dans $[Y]_\eta$ pour un η assez près de 1, de sorte qu'il suffit de démontrer la condition de (1.2.2) pour $W = [Y]_\eta$. Comme le fermé $Z = Y - X$ est défini dans Y par l'équation $t'_0 = 0$, il résulte de (iii) que l'ouvert U'_λ défini en (1.2.3) (iii) est l'intersection de $]Y[$ avec la boule fermée de centre 0 et de rayon $1/\lambda$ dans $\mathbb{A}_K^{n\,\mathrm{an}}$. Pour tout j, $V \cap [Y]_\eta \cap U_{jK}$ est défini par les conditions :

$$\forall\, i,\ |f_i(x)| < 1 \quad ; \quad \forall\, i,\ |f'_i(x)| \leq \eta\,|t'_j(x)|^{d_i} \quad ; \quad \forall\, k,\ |t'_k(x)| \leq |t'_j(x)|.$$

Si $x \in U'_\lambda \cap [Y]_\eta \cap U_{jK}$, on a $|t'_j(x)| \leq \lambda^{-1}|t'_0(x)|$, d'où

$$|f'_i(x)| \leq \eta\lambda^{-d_i}|t'_0(x)|^{d_i},$$

soit encore

$$|f_i(x)| \leq \eta\lambda^{-d_i}.$$

Si λ est tel que $\eta\lambda^{-d_i} < 1$ pour tout i, on a donc $U'_\lambda \cap [Y]_\eta \subset V$.

Par exemple, prenons $X = \mathbb{A}^n_k$, plongé dans $\mathbb{A}^{2n}_{\mathcal{V}} \subset \mathbb{P}^{2n}_{\mathcal{V}} = P$ par l'immersion diagonale, et soient $t_1, \ldots, t_n$ des coordonnées sur $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$, $t_{11}, \ldots, t_{1n}$, $t_{21}, \ldots, t_{2n}$ les coordonnées correspondantes sur $\mathbb{A}^{2n}_{\mathcal{V}}$. Alors l'ouvert de $\mathbb{A}^{n\,\mathrm{an}}_K$ défini par :

$$\forall\, i, \quad |t_{2i}(x) - t_{1i}(x)| < 1$$

est un voisinage strict de $]X[_P$.

(1.2.5) PROPOSITION. — (i) *Soient P' un ouvert de P, et V' un voisinage strict de $]X \cap P'[_{P'}$ dans $]Y \cap P'[_{P'}$. Il existe un voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ tel que $V \cap P'_K \subset V'$.*

(ii) *Soit $(P_i)_i$ un recouvrement ouvert fini de P, et, pour tout i, soit V_i un voisinage strict de $]X \cap P_i[_{P_i}$ dans $]Y \cap P_i[_{P_i}$. Il existe alors un voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ tel que $V \cap P_{iK} \subset V_i$ pour tout i.*

Soit $\underline{\eta}$ une suite croissante de limite 1. D'après (1.2.4) (i), il existe une suite croissante $\underline{\lambda}$ de limite 1, telle que le voisinage strict standard $V'_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ de $]X \cap P'[_{P'}$ dans $]Y \cap P'[_{P'}$ soit contenu dans V'. Le voisinage strict standard $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ est alors tel que $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} \cap P'_K \subset V'$.

Comme l'intersection de deux voisinages stricts est un voisinage strict, on déduit (ii) de (i) par récurrence sur le nombre d'ouverts du recouvrement.

(1.2.6) On considère un diagramme commutatif

(1.2.6.1)
$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "w"'] & Y' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "v"'] & P' \arrow[d, "u"'] \\
X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spf} \mathcal{V}
\end{tikzcd}$$

dans lequel P et P' sont des schémas formels de type fini, i et i' des immersions fermées, j et j' des immersions ouvertes. On note $u_K :]Y'[_{P'} \to]Y[_P$ le morphisme induit par u (cf. (1.1.11) (i)), et on pose $Z = (Y - X)_{\mathrm{red}}$, $Z' = (Y' - X')_{\mathrm{red}}$.

(1.2.7) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* (1.2.6), *soient V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, $V' = u_K^{-1}(V) \cap]Y'[_{P'}$. Alors V' est un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$.*

Il est clair que $]X'[_{P'} \subset V'$. Comme le recouvrement $(V,\ ]Z[_P)$ de $]Y[_P$ est admissible, il en est de même du recouvrement image inverse $(V',\ u_K^{-1}(]Z[_P))$ de $]Y'[_{P'}$. Par hypothèse, $v^{-1}(Z) \subset Z'$, donc $u_K^{-1}(]Z[_P) \cap]Y'[_{P'} \subset]Z'[_{P'}$. Il en résulte que le recouvrement $(V',\ ]Z'[_{P'})$ de $]Y'[_{P'}$ est admissible.

(1.2.8) *Remarque.* — Sous les hypothèses de (1.2.6), supposons de plus P et P' affines. Soient $g_1, \dots, g_r \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ (resp. $g'_1, \dots, g'_s \in \Gamma(P', \mathcal{O}_{P'})$) des éléments relevant une suite de générateurs de l'idéal Z dans Y (resp. de Z' dans Y') ; pour $\lambda < 1$, soient U_λ, U'_λ les ouverts définis par

$$U_\lambda = \{ x \in]Y[_P \mid \exists\, i,\ |g_i(x)| \geq \lambda \}, \qquad U'_\lambda = \{ x \in]Y'[_{P'} \mid \exists\, i,\ |g'_i(x)| \geq \lambda \}.$$

Il existe alors un entier $n \geq 1$ tel que, pour tout affinoïde $W \subset]Y'[_{P'}$, on ait $u_K(U'_\lambda \cap W) \subset U_{\lambda^n}$ pour $\lambda \to 1^-$.

En effet, soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ les idéaux de Z et Z' dans P et P', $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}'_0$ leurs réductions sur k. Comme $v(X') \subset X$, une puissance $\mathcal{I}'^n_0$ de $\mathcal{I}'_0$ est contenue dans $\mathcal{I}_0\mathcal{O}_{Y'}$. Pour tout i, il existe donc une relation de la forme

$$g'^n_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ij}\, u^*(g_j) + h'_i,$$

avec $h_{ij} \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, et où h'_i est une section de l'idéal de Y' dans P'. Si $W \subset]Y'[$ est affinoïde, le principe du maximum entraîne qu'il existe $\eta_0 < 1$ tel que $W \subset [Y']_{\eta_0}$. Si $\lambda^n > \eta_0$, et si $x \in U'_\lambda$, il existe i tel que $|g'_i(x)|^n \geq \lambda^n > \eta_0$; comme $|h_{ij}(x)| \leq 1$ pour tous i, j, et $|h'_i(x)| \leq \eta_0$, il existe donc j tel que $|g_j(u_K(x))| = |u^*(g_j)(x)| \geq \lambda^n$, d'où la remarque.

Il est parfois commode d'utiliser des voisinages stricts possédant la propriété de la définition suivante.

(1.2.9) *Définition.* — Soit T un espace analytique *quasi-séparé*. Un ouvert U de T est dit *pseudo-compact* dans T si, pour tout ouvert affinoïde W de T, $W \cap U$ est quasi-compact.

Tout ouvert quasi-compact (et notamment affinoïde) de T est pseudo-compact. On vérifie immédiatement que toute réunion finie d'ouverts pseudo-compacts de T est un ouvert pseudo-compact de T, et que tout recouvrement fini d'un ouvert de T par des ouverts pseudo-compacts est admissible.

Sous les hypothèses de (1.2.4) (i), les voisinages stricts $V_{\underline{n},\ \underline{\lambda}}$ de $]X[$ sont pseudo-compacts dans $]Y[$.

(1.2.10) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, $Y \subset P$ un k-sous-schéma fermé, X_1, X_2 deux ouverts de Y, $X = X_1 \cup X_2$, $X' = X_1 \cap X_2$. Supposons donnés des voisinages stricts V_1, V_2 de $]X_1[_P$ et $]X_2[_P$ dans $]Y[_P$. Alors :*

(i) *$V' = V_1 \cap V_2$ est un voisinage strict de $]X'[_P$ dans $]Y[_P$;*

(ii) *Si V_1 et V_2 sont pseudo-compacts dans $]Y[_P$, $V = V_1 \cup V_2$ est un voisinage strict de*

$]X[_P$ dans $]Y[_P$, et (V_1, V_2) en est un recouvrement admissible.

Soient $Z = Y - X$, $Z' = Y - X'$, $Z_1 = Y - X_1$, $Z_2 = Y - X_2$, de sorte que $Z = Z_1 \cap Z_2$, $Z' = Z_1 \cup Z_2$. Par hypothèse, les recouvrements $(V_1,]Z_1[)$ et $(V_2,]Z_2[)$ de $]Y[$ sont admissibles, et il en est donc de même de leur intersection. Comme $]Z'[=]Z_1[\cup]Z_2[$, c'est un raffinement du recouvrement $(V_1 \cap V_2,]Z'[)$; ce dernier est donc encore admissible, d'où (i).

Supposons maintenant V_1 et V_2 pseudo-compacts dans $]Y[$. D'après (1.2.9), V est un ouvert pseudo-compact de $]Y[$, et (V_1, V_2) en est un recouvrement admissible. Comme $]Z[=]Z_1[\cap]Z_2[$, le même raisonnement que précédemment montre que $(V,]Z[)$ est un recouvrement admissible de $]Y[$.

(1.2.11) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, Y' un k-sous-schéma fermé de P, Y un sous-schéma fermé de Y', et X un ouvert de Y. On suppose que X est également ouvert dans Y'. Pour qu'un ouvert V de $]Y[_P$ contenant $]X[_P$ soit un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, il faut et suffit que ce soit un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y'[_P$.*

Soient $Z' = Y' - X$, $Z = Y - X = Y \cap Z'$; Y' est donc réunion des deux sous-schémas fermés Y et Z', avec $Z = Z' \cap Y$. D'après (1.1.14) (ii), le recouvrement $(]Y[,]Z'[)$ de $]Y'[$ est admissible. Si V est un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$, le recouvrement $(V,]Z[)$ de $]Y[$ est admissible. Il en résulte que le recouvrement $(V,]Z[,]Z'[)$ de $]Y'[$ est admissible, et il en est donc de même de $(V,]Z'[)$. Réciproquement, si V est un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y'[$, le recouvrement $(V,]Z[)$ induit par $(V,]Z'[)$ sur $]Y[$ est admissible.

Remarque. — Si $\overline{X}$ est l'adhérence de X dans $P_0 = P \times \operatorname{Spec} k$, tout système fondamental de voisinages stricts de $]X[$ dans $]\overline{X}[$ est donc un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$ dans $]Y[$, quel que soit le fermé $Y \subset P$ tel que X soit ouvert dans Y.

(1.2.12) PROPOSITION. — *Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, Y un k-sous-schéma fermé de P, X un ouvert de Y. On suppose que $X = X_1 \cup X_2$, les X_i étant fermés dans X. Soient Y_i l'adhérence de X_i dans Y, V_i un voisinage strict de $]X_i[_P$ dans $]Y_i[_P$. Alors :*

(i) *$V_1 \cap V_2$ est un voisinage strict de $]X_1 \cap X_2[_P$ dans $]Y_1 \cap Y_2[_P$;*

(ii) *Si V_1 et V_2 sont pseudo-compacts, le voisinage $V = V_1 \cup V_2$ de $]X[_P$ est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, et V_1, V_2 en forment un recouvrement admissible.*

Posons $X_3 = X_1 \cap X_2$, $Y_3 = Y_1 \cap Y_2$, $Z = Y - X$, $Z_i = Y_i - X_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Comme X_1 et X_2 sont fermés dans X, on a $Y_i \cap X_j = X_i \cap X_j$, et $Z_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i, j = 1, 2$, avec $i \neq j$; par suite, $Z_3 = Z_1 \cap Z_2$.

Comme V_1 et V_2 sont des voisinages stricts, le recouvrement de $]Y_3[$ intersection des recouvrements $(V_i,\ ]Z_i[)$ des $]Y_i[$, $i = 1, 2$, est admissible. Puisque $Z_i \cap X_j = \emptyset$, on a $]Z_i[\ \cap V_j \subset\ ]Z_i[\ \cap\ ]Z_j[\ =\ ]Z_3[$. Le recouvrement $(V_1 \cap V_2,\ ]Z_3[)$ de $]Y_3[$ est donc moins fin que le précédent, et par suite admissible, d'où (i).

Pour prouver l'assertion (ii), on peut, grâce à la proposition (1.2.11), supposer que $Y = Y_1 \cup Y_2$; on a alors $Z = Z_1 \cup Z_2$. Comme le recouvrement de $]Y[$ par $]Y_1[$ et $]Y_2[$ est admissible, le recouvrement $(V_1, V_2,\ ]Z_1[,\ ]Z_2[)$ l'est également. D'après (1.2.9), V est un ouvert pseudo-compact ; le recouvrement $(V,\ ]Z[)$ est moins fin que le précédent, donc admissible, d'où (ii).

1.3. Théorèmes de fibration

Soient Y un k-schéma de type fini, X un ouvert de Y, $i : Y \hookrightarrow P$, $i' : Y \hookrightarrow P'$ deux immersions fermées de Y dans deux $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, $u : P' \to P$ un $\mathcal{V}$-morphisme tel que $u \circ i' = i$. Nous étudions ici les propriétés topologiques du morphisme $u_K :]Y[_{P'} \to]Y[_P$ induit par u, lorsque u est lisse au voisinage de X. Il est facile de voir que, dans ce cas, u_K induit une fibration localement triviale en disques ouverts de $]X[_{P'}$ sur $]X[_P$. Le résultat principal de cette section est que cette structure topologique s'étend, en un sens rendu précis en (1.3.7), au morphisme induit par u_K entre des voisinages stricts convenables de $]X[_{P'}$ et $]X[_P$ dans $]Y[_{P'}$ et $]Y[_P$. Cette propriété est le point clé permettant de montrer l'indépendance par rapport au plongement P des constructions que nous effectuerons en cohomologie rigide.

Nous commençons par l'étude du morphisme $]X[_{P'} \to]X[_P$.

(1.3.1) PROPOSITION. — *Soient X un k-schéma de type fini, $i : X \hookrightarrow P$, $i' : X \hookrightarrow P'$ deux immersions de X dans des $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, $u : P' \to P$ un $\mathcal{V}$-morphisme étale au voisinage de X, tel que $u \circ i' = i$. Alors le morphisme*

$$u_K\ :\ ]X[_{P'} \longrightarrow\ ]X[_P$$

est un isomorphisme, et induit un isomorphisme $[X]_{P'\eta} \xrightarrow{\sim} [X]_{P\eta}$ pour $\eta \to 1^-$.

Comme $]X[_P$ ne change pas si on remplace P par un ouvert contenant X, on peut supposer X fermé dans P et P', P' étale sur P, et $P' \times_P X$ isomorphe à X. On peut de même supposer qu'il existe un recouvrement affine $(P_\alpha)_\alpha$ de P, et un recouvrement affine $(P'_\alpha)_\alpha$ de P', tels que $u(P'_\alpha) \subset P_\alpha$ et $X \cap P_\alpha = X \cap P'_\alpha$. Comme $]X[\ \cap P_{\alpha K} =\ ]X \cap P_\alpha[$ et que les $P_{\alpha K}$ forment un recouvrement admissible de P_K, cela permet de supposer P et P' affines. Soient $P = \mathrm{Spf}\, A$, $P' = \mathrm{Spf}\, A'$, $I \subset A$ l'idéal de X dans P, $I' = IA'$ celui de X dans P'.

Soient $f_1, \ldots, f_r$ des générateurs de I modulo $\mathfrak{m}$. D'après (1.1.9), il suffit de montrer que u_K induit un isomorphisme

$$u_K \,:\, [Y]_{P'\eta} \xrightarrow{\ \sim\ } [Y]_{P\,\eta}$$

pour $\eta \to 1^-$. Si $a \in \mathfrak{m}$, $a \neq 0$, il suffit donc d'après (0.1.2.2) de prouver que

$$A\{T_1,\ldots,T_r\}/(f_i^n - aT_i) \longrightarrow A'\{T_1,\ldots,T_r\}/(f_i^n - aT_i)$$

est un isomorphisme pour tout n, soit encore que

$$A[T_1,\ldots,T_r]/(a^m, f_i^n - aT_i) \longrightarrow A'[T_1,\ldots,T_r]\,/\,(a^m, f_i^n - aT_i)$$

est un isomorphisme pour tous m, n. Comme l'idéal engendré par I dans $A[T_1,\ldots,T_r]/(a^m, f_i^n - aT_i)$ est un nilidéal, cela résulte de ce que $A'[T_1,\ldots,T_r]$ est étale sur $A[T_1,\ldots,T_r]$ et $(A'/I)\,[T_1,\ldots,T_r]$ isomorphe à $(A/I)\,[T_1,\ldots,T_r]$.

(1.3.2) THÉORÈME (théorème de fibration faible). — *Soient X un k-schéma de type fini, $i : X \hookrightarrow P$, $i' : X \hookrightarrow P'$ deux immersions de X dans des $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, $u : P' \to P$ un $\mathcal{V}$-morphisme lisse au voisinage de X, tel que $u \circ i' = i$. Il existe alors un recouvrement admissible $(V_\alpha)_\alpha$ de $]X[_P$, et, si V'_α est l'image inverse de V_α dans $]X[_{P'}$, des isomorphismes*

$$\varphi_\alpha \,:\, V'_\alpha \xrightarrow{\ \sim\ } V_\alpha \times D(0,\, 1^-)^d$$

commutant aux projections sur V_α.

On peut supposer X fermé dans P et P', et P' lisse sur P. Il existe des recouvrements affines $(P_\alpha)_\alpha$ de P, et $(P'_\alpha)_\alpha$ de P' tels que $u(P'_\alpha) \subset P_\alpha$, $X \cap P_\alpha = X \cap P'_\alpha$, et tels que le faisceau conormal à X dans $P'_X = P' \times_P X$ soit un $\mathcal{O}_X$-module libre sur $X_\alpha = X \cap P'_\alpha$. Soient $t_1,\ldots,t_d \in \Gamma(P'_\alpha, \mathcal{O}_{P'_\alpha})$ relevant une suite régulière de générateurs de l'idéal de X_α dans $P'_\alpha \times_{P_\alpha} X_\alpha$ au voisinage de X_α; leurs images forment une base du faisceau conormal à X sur X_α. Les sections $dt_1,\ldots,dt_d$ forment une base de $\Omega^1_{P'/P}$ au voisinage de X_α, de sorte que $t_1,\ldots,t_d$ définissent un morphisme v_α de P'_α dans l'espace affine formel relatif $P''_\alpha = P_\alpha \times \widehat{\mathbb{A}}^d_{\mathcal{V}}$, étale au voisinage de X_α. Si on pose $V_\alpha = P_{\alpha K} \cap\ ]X[_P\ =\ ]X_\alpha[_{P_\alpha}$, $V'_\alpha = u_K^{-1}(V_\alpha)$, on a $V'_\alpha =\ ]X_\alpha[_{P'_\alpha}$. La section nulle fournit une immersion $i'' : X_\alpha \to P''_\alpha$, et $v_\alpha \circ i' = i''$. D'après (1.3.1), le morphisme $\varphi_\alpha :\ ]X_\alpha[_{P'_\alpha} \to\ ]X_\alpha[_{P''_\alpha}$ induit par v_α est un isomorphisme. Comme l'idéal de X_α dans P''_α est engendré par l'idéal de X_α dans P_α et par $t_1,\ldots,t_d$, on a

$$]X_\alpha[_{P''_\alpha} \,\simeq\,]X_\alpha[_{P_\alpha} \times D(0,\, 1^-)^d,$$

d'où l'énoncé.

Remarque. — Le même énoncé reste valable en remplaçant les tubes ouverts par les tubes fermés de rayon η, et $D(0,\, 1^-)$ par $D(0,\, \eta^+)$, pour $\eta \to 1^-$.

Comme première application du théorème de fibration, notons le résultat de connexité suivant :

(1.3.3) PROPOSITION. — *Soient X un k-schéma connexe, $i : X \hookrightarrow P$ une immersion dans un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini P, lisse au voisinage de X. Alors le tube $]X[_P$ est connexe.*

D'après (1.1.13), il suffit de prouver l'énoncé après extension de K; cela permet de se ramener au cas où k est parfait. On peut aussi supposer X intègre, car on peut numéroter les composantes irréductibles $X_1, \ldots, X_r$ de X de manière que, pour tout i, $(X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \cap X_i$ soit non vide. Comme les $]X_i[$ forment un recouvrement admissible de $]X[$ d'après (1.1.14) (ii), et que l'intersection

$$(]X_1[\cup \ldots \cup]X_{i-1}[) \cap]X_i[\ = \ ](X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \cap X_i[$$

est non vide pour tout i, l'assertion pour les X_i entraîne l'assertion pour X. On peut enfin supposer X fermé dans P, et P affine.

Montrons alors que la connexité de $]X[_P$ pour un plongement $i : X \hookrightarrow P$ entraîne la connexité de $]X[_P$ pour tout plongement. La méthode du plongement diagonal permet de se ramener à considérer deux plongements $i : X \hookrightarrow P$, $i' : X \hookrightarrow P'$, tels qu'il existe un morphisme $u : P' \to P$, lisse au voisinage de X, vérifiant $u \circ i' = i$. Comme $u_K :]X[_{P'} \to]X[_P$ est surjectif (d'après (1.3.2) ou (1.1.12)), la connexité de $]X[_{P'}$ entraîne celle de $]X[_P$. Pour prouver la réciproque, on peut supposer par localisation que le faisceau conormal à X dans $X \times_P P'$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre, et la démonstration de (1.3.2) montre que $]X[_{P'}$ s'identifie au produit de $]X[_P$ par une boule ouverte. Si $A = \Gamma(]X[_P, \mathcal{O}_{P_K})$, l'algèbre $\Gamma(]X[_{P'}, \mathcal{O}_{P'_K})$ est donc une sous-algèbre d'une algèbre de séries formelles à coefficients dans A, et n'a pas d'idempotents non triviaux.

Si X est lisse sur k, il en résulte que $]X[_P$ est connexe : en effet, on peut alors remplacer P par un relèvement de X en un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathcal{X}$; on obtient dans ce cas $]X[_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_K$, et, $\mathcal{X}$ étant connexe, $\Gamma(\mathcal{X}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes K$ est sans idempotents non triviaux.

Dans le cas général, soient X' le normalisé de X, et $i' : X' \to P'$ un plongement de X' dans un P-schéma formel P', lisse sur P au voisinage de X'. Comme $X' \to X$ est surjectif, il en est de même de $]X'[_{P'} \to]X[_P$ d'après (1.1.12). On est donc ramené au cas où X est normal. Si X est de dimension ≥ 2, deux points quelconques de X peuvent être joints par un diviseur connexe D [Ha1, III 7.9], et il suffit donc que $]D[_P$ soit connexe pour tout diviseur connexe D de X. Par récurrence sur $\dim X$, on est ramené au cas où X est normal de dimension 1, donc lisse.

(1.3.4) Pour obtenir la forme forte du théorème de fibration, l'étape essentielle est l'extension de (1.3.1) à un voisinage strict de $]X[$. On considère donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "v"] & P' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[ur, "j'"] \arrow[r, hook, "j"] & Y \arrow[r, hook, "i"] & P \end{tikzcd} \tag{1.3.4.1}$$

dans lequel j et j' sont des k-immersions ouvertes, i et i' des immersions fermées de Y et Y' dans des $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini. On notera $\overline{X}$ l'adhérence de X dans $P' \times_P Y$.

(1.3.5) THÉORÈME. — *Les notations et les hypothèses étant celles de* (1.3.4), *supposons que u soit étale au voisinage de X, et que la restriction de v à $\overline{X}$ soit propre. Alors u_K induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$, et un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$.*

Grâce à (1.2.11), on peut remplacer Y' par $\overline{X}$, ce qui permet de supposer que v est propre, et que $v^{-1}(X) = j'(X)$. Soit $Z = Y - X$, muni de sa structure réduite. On pose, pour $\lambda \to 1^-$,

$$U_\lambda \;=\; P_K -]Z[_{P\,\lambda},$$

et $U'_\lambda = u_K^{-1}(U_\lambda)$. En utilisant les voisinages stricts standards $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ définis en (1.2.4) (i), on voit qu'il suffit de prouver l'assertion suivante :

(1.3.5.1) *Pour tout* $\alpha \in \Gamma^*$, $\alpha \to 1^-$, *il existe* $\eta_0 \in \Gamma^*$, $\eta_0 < 1$, *tel que pour tout* $\eta \in \Gamma^*$, *avec* $\eta_0 \leq \eta < 1$, *il existe* $\lambda \in \Gamma^*$, $\lambda < 1$, *tel que le morphisme*

$$[Y']_{P'\eta} \cap u_K^{-1}([Y]_{P\alpha} \cap U_\lambda) \longrightarrow [Y]_{P\alpha} \cap U_\lambda$$

soit un isomorphisme.

Si $(P_i)_i$ est un recouvrement fini de P, et si on pose $P'_i = u^{-1}(P_i)$, $Y_i = Y \cap P_i$, $Y'_i = Y' \cap P'_i$, $X_i = X \cap Y_i = X \cap Y'_i$, il suffit de vérifier (1.3.5.1) pour X_i, Y_i, Y'_i, P_i, P'_i. En effet, fixons α et η, et supposons que, pour tout i, il existe $\lambda_i < 1$ tel que (1.3.5.1) soit vérifiée au-dessus de P_{iK}. Soit $\lambda = \operatorname{Sup} \lambda_i$. Par construction, on a $P'_{iK} = u_K^{-1}(P_{iK})$, $[Y_i]_\alpha = [Y]_\alpha \cap P_{iK}$, et

$$[Y'_i]_{P'_i\,\eta} \;=\; [Y'_i]_{P'\eta} \;=\; [Y']_{P'\eta} \cap P'_{iK}.$$

Par suite, le morphisme

$$[Y']_{P'\eta} \cap u_K^{-1}([Y]_{P\alpha} \cap U_\lambda) \cap P'_{iK} \longrightarrow [Y]_{P\alpha} \cap U_\lambda \cap P_{iK}$$

est un isomorphisme pour tout i. Comme les P_{iK} (resp. P'_{iK}) forment un recouvrement admissible de P_K (resp. P'_K), (1.3.5.1) en résulte. On supposera donc P affine.

Soient alors $P = \operatorname{Spf} A$, $f_1, \ldots, f_r \in A$ définissant Y modulo $\mathfrak{m}$ et $a \in \mathfrak{m}$ tel que $|a| = \alpha^q$, pour un entier $q \in \mathbb{N}$. Le changement de base

$$P_1 \;=\; \operatorname{Spf} A\{T_1, \ldots, T_r\}/(f_i^q - aT_i) \longrightarrow P$$

induit sur les fibres génériques P_K et P'_K la localisation au-dessus de $[Y]_{P\alpha}$. Remplaçant les données initiales par celles qu'on en déduit par ce changement de base, on est ramené au cas où $[Y]_\alpha = P_K$, et à montrer qu'il existe $\eta_0 \in \Gamma^*$, tel que pour tout $\eta \in \Gamma^*$, $\eta_0 \leq \eta < 1$, il existe $\lambda \in \Gamma^*$, $\lambda < 1$ tel que le morphisme

$$[Y']_{P'\eta} \cap U'_\lambda \longrightarrow U_\lambda$$

soit un isomorphisme; Y est alors défini par un idéal nilpotent dans $P \times \operatorname{Spec} k$, de sorte que l'espace topologique sous-jacent à X est ouvert dans celui de P.

Soit (X_i) un recouvrement fini de X, et supposons l'énoncé précédent vérifié pour les X_i, pour $\eta \geq \eta_i$. Si on pose $Z_i = Y - X_i$, $U_{i\lambda} = P_K -]Z_i[_{P\lambda}$, $U'_{i\lambda} = u_K^{-1}(U_{i\lambda})$, U_λ est la réunion des $U_{i\lambda}$, et ceux-ci en forment un recouvrement fini par des ouverts quasi-compacts, donc admissible. Soient $\eta_0 = \sup(\eta_i)$, et $\eta \geq \eta_0$. En prenant $\lambda < 1$ tel que

$$[Y']_{P'\eta} \cap U'_{i\lambda} \longrightarrow U_{i\lambda}$$

soit un isomorphisme pour tout i, $[Y']_{P'\eta} \cap U'_\lambda \to U_\lambda$ est un isomorphisme. En localisant sur X, on peut donc supposer que X est un ouvert de Y de la forme $D(g)$, avec $g \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$. D'après (1.2.3) (iii), on peut remplacer U_λ par l'ouvert (qu'on notera encore U_λ) :

$$U_\lambda = \{ x \in P_K \mid |g(x)| \geq \lambda \}.$$

Soient $P'_Y = P' \times_P Y$, $P'_X = P' \times_P X$. Comme $P'_X \to X$ possède une section et est étale au voisinage de celle-ci, X est à la fois ouvert et fermé dans P'_X. Puisque X est ouvert dans P, il est donc aussi ouvert dans P'; soit $D = P'_Y - X$ le fermé complémentaire. On a alors $P'_Y = Y' \cup D$, donc $P'_K =]Y'[_{P'} \cup]D[_{P'}$. Comme P'_X est réunion disjointe des deux composantes ouvertes et fermées X et $D \cap u^{-1}(X)$, $u_K^{-1}(]X[_P)$ est réunion disjointe des deux ouverts $]X[_{P'}$ et $]D[_{P'} \cap u_K^{-1}(]X[_P)$, qui en forment un recouvrement admissible; on notera au passage que, X étant ouvert dans P'_X, on a $[X]_{P'\eta} =]X[_{P'}$ pour $\eta \to 1^-$. On se propose de montrer qu'il existe $\rho < 1$, $\eta_0 < 1$, tels que pour tout η, avec $\eta_0 \leq \eta < 1$, il existe $\lambda < 1$ pour lequel $[Y']_{P'\eta} \cap [D]_{P'\rho} \cap U'_\lambda = \emptyset$, les ouverts $[Y']_{P'\eta}$ et $[D]_{P'\rho}$ induisant un recouvrement admissible de U'_λ.

Comme $P'_K -]Y'[_{P'}$ est un espace analytique quasi-compact contenu dans $]D[_{P'}$, il existe $\rho < 1$ tel que l'on ait

(1.3.5.2) $$P'_K -]Y'[_{P'} \subset]D[_{P'\rho} \subset [D]_{P'\rho}.$$

De même, $P'_K -]D[_{P'\rho}$ est quasi-compact et contenu dans $]Y'[_{P'}$, donc il existe $\eta_0 < 1$ tel que l'on ait

(1.3.5.3) $$P'_K -]D[_{P'\rho} \subset [Y']_{P'\eta_0}.$$

Comme $]Y'[_{P'} \cap]D[_{P'} \cap u_K^{-1}(]X[_P) =]X[_{P'} \cap]D[_{P'} = \emptyset$, le principe du maximum appliqué à $[Y']_{P'\eta} \cap [D]_{P'\rho}$ montre que, ρ étant fixé de manière à satisfaire (1.3.5.2), on peut pour tout η trouver $\lambda < 1$ tel que l'on ait

(1.3.5.4) $$[Y']_{P'\eta} \cap [D]_{P'\rho} \cap U'_\lambda = \emptyset.$$

Supposons donc ρ, η et λ choisis de manière à satisfaire les relations (1.3.5.2) à (1.3.5.4), avec $\eta \geq \eta_0$. D'après (1.3.5.3), les ouverts $[Y']_{P'\eta} \cap U'_\lambda$ et $[D]_{P'\rho} \cap U'_\lambda$ forment un recouvrement de U'_λ, manifestement admissible, et leur intersection est vide d'après

(1.3.5.4). Par suite, si $T_K = [Y']_{P'\eta} \cap U'_\lambda$ et $T'_K = [D]_{P'\rho} \cap U'_\lambda$, T_K et T'_K sont des sous-espaces analytiques fermés de U'_λ, et en particulier sont quasi-compacts.

D'après le critère jacobien de lissité, l'ensemble des points de non lissité du morphisme $T_K \to P_K$ est un fermé analytique de T_K. Comme

$$T_K \cap u^{-1}(]X[_P) \;=\; (P'_K - [D]_{P'\rho}) \cap u^{-1}(]X[_P) \;=\;]X[_{P'},$$

le morphisme $T_K \cap u^{-1}(]X[_P) \to]X[_P$ est un isomorphisme grâce au théorème de fibration faible pour les morphismes étales (1.3.1). Le principe du maximum entraîne alors que $T_K \cap U'_\lambda \to U_\lambda$ est lisse pour λ assez près de 1. De même, le support de $\Omega^1_{T_K/P_K}$ est un fermé analytique de U'_λ, ne rencontrant pas $u^{-1}(]X[_P)$, donc il existe $\lambda_0 < 1$ tel que $T_K \cap U'_\lambda \to U_\lambda$ soit étale pour $\lambda_0 \leq \lambda < 1$.

Quitte à faire un changement de base de la forme

$$\mathrm{Spf}(A\{T\}/(a - g^q T)) \longrightarrow P,$$

où $a \in \mathfrak{m}$, $q \in \mathbb{N}$ sont tels que $\lambda_0^q = |a|$, on peut supposer que $P_K = U_{\lambda_0}$, de sorte que T_K est fermé dans P'_K. Soit $T \subset P'$ son adhérence schématique (cf. (0.2.4) (vi)). Comme T est plat sur $\mathcal{V}$, l'application sp : $T_K \to T$ envoie surjectivement T_K sur l'ensemble des points fermés de la fibre spéciale T_0 de T. D'autre part, on a $T \subset]Y'[_{P'}$, de sorte que $\mathrm{sp}(T_K)$ est contenu dans l'ensemble des points fermés de Y'. Par suite, $T_{0\,\mathrm{red}}$ est un sous-schéma fermé de Y'. Comme v est propre, on en déduit que T est propre sur P. D'après un théorème de Raynaud [Ra1], le morphisme $T_K \to P_K$ est propre au sens de Kiehl [Ki2]. Etant étale, donc à fibres finies, il est fini [BGR, 9.6.3 cor. 6], défini par une $\mathcal{O}_{P_K}$-algèbre cohérente $\mathcal{R}$. L'homomorphisme $\mathcal{O}_{P_K} \to \mathcal{R}$ est un isomorphisme sur $]X[_P$; comme son noyau et son conoyau ont pour supports des fermés analytiques de P_K, c'est un isomorphisme au-dessus de U_λ pour λ assez près de 1. Le morphisme $T_K \cap U'_\lambda \to U_\lambda$ est alors un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

(1.3.6) Dans le cas de dimension relative ≥ 1, nous énoncerons le théorème de fibration fort sous une forme locale permettant l'emploi de coordonnées. Avec les notations de (1.3.4), soit $P'' = P \times \widehat{\mathbb{A}}^d_{\mathcal{V}}$ l'espace affine formel de base P, de dimension relative d; la fibre générique P''_K de P'' est isomorphe à $P_K \times D(0, 1^+)^d$. En considérant Y comme sous-schéma fermé de P'' par la section nulle, le tube $]Y[_{P''}$ (resp. $]X[_{P''}$) s'identifie alors au produit $]Y[_P \times D(0, 1^-)^d$ (resp. $]X[_P \times D(0, 1^-)^d$).

(1.3.7) THÉORÈME (de fibration fort). — *Avec les notations précécentes, supposons que u soit lisse au voisinage de X, de dimension relative d, et que $v : \overline{X} \to Y$ soit propre. Soient $\mathcal{I}' \subset \mathcal{O}_{P'}$ l'idéal de Y' dans P' et $\overline{\mathcal{I}}'$ celui de Y' dans $P'_Y = P' \times_P Y$; supposons de plus qu'il existe des sections $t_1, \ldots, t_d \in \Gamma(P', \mathcal{I}')$ induisant une base $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d$ du faisceau conormal $\overline{\mathcal{I}}'/\overline{\mathcal{I}}'^2$ au-dessus de X. Alors le P-morphisme $\varphi : P' \to P''$ défini par $t_1, \ldots, t_d$ envoie Y' dans Y, et φ_K induit un isomorphisme d'un voisinage strict de $]X[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ sur un voisinage strict de $]X[_{P''}$ dans $]Y[_{P''}$.*

Comme $t_1, \ldots, t_d$ sont des sections de $\mathcal{I}'$, φ envoie Y' dans Y. Soit $P'_X = P' \times_P X$. Puisque P' est lisse sur P au voisinage de X, l'homomorphisme canonique $\overline{\mathcal{I}}'/\overline{\mathcal{I}}'^2 \to \Omega^1_{P'_Y/Y} \otimes \mathcal{O}_{Y'}$ est un isomorphisme au-dessus de X, et $d\bar{t}_1, \ldots, d\bar{t}_d$ forment une base de $\Omega^1_{P'_X/X} \otimes \mathcal{O}_X$; $dt_1, \ldots, dt_d$ forment alors une base de $\Omega^1_{P'/P}$ au voisinage de X, et φ est étale au voisinage de X. Il suffit donc d'appliquer (1.3.5) à φ.

(1.3.8) *Remarques.* — (i) Supposons que P et P' soient affines, que le complémentaire Z de X dans Y soit l'ensemble des zéros d'une section $g \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, et que le faisceau conormal $\overline{\mathcal{I}}'/\overline{\mathcal{I}}'^2$ soit libre sur X. Alors la deuxième hypothèse de (1.3.7) est vérifiée. En effet, posons $P = \operatorname{Spf} A$, $P' = \operatorname{Spf} A'$, et soient $I \subset A$, $I' \subset A'$, les idéaux de Y et Y'. Comme $\overline{\mathcal{I}}'/\overline{\mathcal{I}}'^2$ est libre sur X, on peut trouver des éléments $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d \in I'/IA'$ induisant une base de $(I'/(I'^2 + IA'))_g$ comme $(A'/I')_g$-module, et il suffit de prendre des éléments $t_1, \ldots, t_d \in I'$ relevant $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d$.

(ii) Sous les hypothèses de (1.3.7), soient V', V'' des voisinages stricts de $]X[_{P'}$, $]X[_{P''}$ isomorphes par φ_K, et soit $\underline{\eta}$ une suite croisssante de limite 1 d'éléments de Γ^*. D'après (1.2.4) (i), il existe une suite croissante $\underline{\lambda}$ de limite 1 telle que V'' contienne le voisinage strict $V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ correspondant; $V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ peut alors s'écrire

(1.3.8.1) $$V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} = \bigcup_n ([Y]_{P\eta_n} \cap U_{\lambda_n}) \times D(0, \eta_n^+)^d.$$

Si $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} = \bigcup_n ([Y]_{P\eta_n} \cap U_{\lambda_n})$, il existe donc un voisinage strict V' de $]X[_{P'}$ dans $]Y[_{P'}$ isomorphe à $V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$, et tel que l'homomorphisme u_K s'identifie à la projection naturelle de $V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ sur $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$. L'énoncé (1.3.7) est donc en ce sens une extension au-dessus d'un voisinage strict de $]X[_P$ du théorème de fibration (1.3.2).

On observera d'autre part que, d'après (1.2.3) (iv), φ induit un isomorphisme entre des systèmes fondamentaux de voisinages stricts de $]X[_{P'}$ et $]X[_{P''}$.

(1.3.9) Supposons que $\mathcal{V}$ soit un anneau de valuation discrète, et soient P un $\mathcal{V}$-schéma algébrique séparé, P_K sa fibre générique, P_0 sa fibre spéciale, $X \subset P_0$ un sous-schéma fermé. Rappelons qu'on a défini en (1.1.2) (ii) le tube $]X[_P$ comme étant le tube de X dans le complété formel $\hat{P}$ de P, considéré comme ouvert de l'espace analytique P_K^{an} grâce à l'immersion ouverte $\hat{P}_K \hookrightarrow P_K^{\mathrm{an}}$. On se propose maintenant de montrer comment donner un sens à la notion de système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$ dans P_K^{an}.

D'après Nagata, il existe un $\mathcal{V}$-schéma propre $\overline{P}$ et une $\mathcal{V}$-immersion ouverte $P \hookrightarrow \overline{P}$. Soient Y l'adhérence de X dans $\overline{P}_0 = P \times \operatorname{Spec} k$, $\overline{P}\hat{}$ le complété formel de $\overline{P}$, et $\overline{P}\hat{}_K = \overline{P}_K^{\mathrm{an}}$ sa fibre générique. Notons que $]Y[_{\overline{P}} \cap P_K^{\mathrm{an}}$ est un voisinage strict de $]X[_P$ d'après (1.2.4) (ii). En particulier, il existe des systèmes fondamentaux de voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y[_{\overline{P}}$ qui sont contenus dans P_K^{an}.

(1.3.10) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* (1.3.9), *soient $\overline{P}$ et $\overline{P}'$ deux compactifications de P sur $\mathcal{V}$, et supposons qu'il existe un $\mathcal{V}$-morphisme $u : \overline{P}' \to \overline{P}$ induisant* *l'identité sur P. Alors, si Y et Y′ sont les adhérences de X dans* P_0 *et* P'_0, $]Y'[_{\overline{P}'} \cap P_K^{\mathrm{an}}$ *est contenu dans* $]Y[_{\overline{P}} \cap P_K^{\mathrm{an}}$ *et est un voisinage strict de* $]X[_P$ *dans* $]Y[_{\overline{P}} \cap P_K^{\mathrm{an}}$.

La première assertion résulte de ce que $u(Y') \subset Y$. Pour prouver la seconde, il suffit d'observer que, d'après (1.3.5), u_K induit un isomorphisme entre un voisinage strict V' de $]X[_P$ dans $]Y'[_{\overline{P}'}$ et un voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]Y[_{\overline{P}}$. On a alors $V' \cap P_K^{\mathrm{an}} = V \cap P_K^{\mathrm{an}}$; comme $V \cap P_K^{\mathrm{an}}$ est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_{\overline{P}}$, l'assertion en résulte.

On observera que cet énoncé entraîne que, plus généralement, si $\overline{P}$ et $\overline{P}'$ sont deux compactifications de P, il existe dans P_K^{an} un système fondamental de voisinages de $]X[_P$ qui soient stricts à la fois dans $]Y[_{\overline{P}}$ et dans $]Y'[_{\overline{P}'}$. En effet, si $\overline{P}''$ est l'adhérence de P plongé diagonalement dans $P \times P'$, et Y'' celle de X dans $\overline{P}''_0$, tout système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y''[_{\overline{P}''}$ est un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y[_{\overline{P}}$ et dans $]Y'[_{\overline{P}'}$. Sous les hypothèses de (1.3.9), on appelera donc *voisinage strict* (resp. *système fondamental de voisinages stricts*) *de* $]X[_P$ *dans* P_K^{an} un voisinage strict (resp. système fondamental de voisinages stricts) de $]X[_P$ dans $]Y[_{\overline{P}} \cap P_K^{\mathrm{an}}$, où $\overline{P}$ est une compactification quelconque de P, et Y l'adhérence de X dans $\overline{P}_0$.

Exemple. — Soit $\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A$ un $\mathscr{V}$-schéma affine, de réduction $X = \operatorname{Spec} A_0$ sur k, et soit $A \simeq \mathscr{V}[t_1, \dots, t_n]/I$ une présentation de A, définissant une immersion fermée $\mathscr{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathscr{V}}$. Considérons l'immersion diagonale $X \hookrightarrow P = \mathscr{X} \times \mathscr{X}$. Fixons une suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1, avec $\eta_i \in \Gamma^*$, et une suite décroissante $\underline{\lambda}$ de limite 1, avec $\lambda_i \in \Gamma^*$. Posons alors

$$V_i = \{ x \in \mathscr{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathscr{X}_K^{\mathrm{an}} \mid \forall\, j,\ |(1 \otimes t_j - t_j \otimes 1)(x)| \le \eta_i \ \text{ et } \ |(1 \otimes t_j)(x)| \le \lambda_i \},$$

et $V = \bigcup_i V_i$. Alors V est un voisinage strict de $]X[_{\mathscr{X}^2}$. En effet, il résulte de (1.2.4) (iv) que l'ouvert $V_0 = \{ x \mid \forall\, j, |(1 \otimes t_j - t_j \otimes 1)(x)| < 1 \}$ est un voisinage strict de $]X[_{\mathscr{X}^2}$. Si, pour tout $\lambda > 1$, on note

$$U_\lambda = \{ x \in \mathscr{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathscr{X}_K^{\mathrm{an}} \mid \forall\, j,\ |(t_j \otimes 1)(x)| \le \lambda \ \text{ et } \ |(1 \otimes t_j)(x)| \le \lambda \},$$

il suffit, d'après (1.2.4) (iii), de vérifier que, pour tout ouvert affinoïde $W \subset V_0$, on a $W \cap U_\lambda \subset V$ pour $\lambda \to 1^+$. Le principe du maximum entraîne qu'il existe i tel que, pour tout j, on ait $|(1 \otimes t_j - t_j \otimes 1)(x)| \le \eta_i$ sur W; il suffit alors de prendre $\lambda \le \lambda_i$.

Pour $\underline{\eta}$ et $\underline{\lambda}$ variables, les voisinages ainsi obtenus forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\mathscr{X}^2}$.

2. Isocristaux surconvergents

Soit X un k-schéma séparé de type fini. L'objet de ce chapitre est d'associer fonctoriellement à X une catégorie de coefficients pour la cohomologie rigide, la catégorie des *F-isocristaux surconvergents*, dont la théorie de Dwork donne de nombreux exemples. La construction de celle-ci s'opère en plusieurs étapes. Nous considérerons d'abord une situation plus générale, où X est un ouvert d'un k-schéma de type fini Y, de complémentaire Z, et nous définirons alors la notion d'*isocristal sur X*, *surconvergent le long de Z* : si Y est un k-sous-schéma d'un $\mathcal{V}$-schéma formel P lisse au voisinage de X, un tel isocristal est défini par un module à connexion intégrable sur un voisinage strict du tube de X dans $]Y[_P$, dont la connexion est donnée localement par une matrice ayant pour coefficients des fonctions analytiques sur un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, et dont la série de Taylor satisfait en outre certaines conditions de convergence. Un F-cristal sur X au sens habituel définit un isocristal dont le lieu de surconvergence Z est vide (un tel isocristal sera simplement appelé *convergent*). D'autre part, la catégorie des isocristaux surconvergents sur X est obtenue en prenant pour Y une compactification de X : nous verrons qu'elle ne dépend pas du choix de celle-ci.

2.1. Germes de sections au voisinage d'un tube

(2.1.1) Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel, Y un k-sous-schéma fermé de P, X un ouvert de Y, $j : X \hookrightarrow Y$ l'immersion correspondante, $Z = Y - X$ le fermé complémentaire. Pour tout voisinage strict V (resp. couple de voisinages stricts $V' \subset V$) de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, soit α_V (resp. $\alpha_{VV'}$) l'immersion ouverte de V dans $]Y[_P$ (resp. de V' dans V). Si A est un faisceau d'anneaux sur V, et E un A-module, nous poserons

(2.1.1.1) $$j_V^\dagger E = \varinjlim_{V' \subset V} \alpha_{VV'*}\, \alpha_{VV'}^* E,$$

la limite étant prise sur l'ensemble des voisinages stricts $V' \subset V$. Le faisceau $j_V^\dagger E$ est muni d'une structure de $j_V^\dagger A$-module, et le faisceau abélien sous-jacent ne dépend que du faisceau abélien sous-jacent à E. Nous dirons que $j_V^\dagger E$ est le *faisceau des germes de sections de E surconvergentes le long de Z*.

Compte tenu de (0.1.8), on a, pour tout ouvert quasi-compact $W \subset V$, (2.1.1.2) $$\Gamma(W, j_V^\dagger E) \;=\; \varinjlim_{V'\subset V} \Gamma(W\cap V', E).$$

On observera que, d'après (2.1.1.1), la restriction de $j_V^\dagger E$ à $]X[$ est égale à celle de E. D'autre part, si W est un ouvert affinoïde de $]Z[$, le principe du maximum entraîne que $W \subset\,]Z[_\lambda$ pour un $\lambda < 1$. Comme $U_\lambda = \,]Y[\, - \,]Z[_\lambda$ est un voisinage strict de $]X[$, il résulte de (2.1.1.2) que, pour tout faisceau abélien E sur V, la restriction de $j_V^\dagger E$ à $V \cap \,]Z[$ est nulle. En particulier, la restriction à $V \cap \,]Z[$ d'un $j_V^\dagger A$-module est toujours nulle.

Soient $V' \subset V$ un second voisinage strict de $]X[$, et A un faisceau d'anneaux sur V. Pour tout faisceau abélien M sur V, la restriction à V' de $j_V^\dagger M$ n'est autre que $j_{V'}^\dagger \alpha_{VV'}^* M$, et sera notée $j_{V'}^\dagger M$. Par suite, la restriction d'un $j_V^\dagger A$-module E à V' est munie d'une structure canonique de $j_{V'}^\dagger A$-module. D'autre part, l'homomorphisme canonique $E \to \alpha_{VV'*}\, \alpha_{VV'}^* E$ est un isomorphisme : comme $(V',\ ]Z[)$ induit un recouvrement admissible de V, il suffit de le vérifier sur V', sur lequel c'est clair, et sur $V \cap \,]Z[$, sur lequel les deux faisceaux sont nuls. En particulier, on a $j_V^\dagger A \xrightarrow{\sim} \alpha_{VV'*}\, j_{V'}^\dagger A$, et, pour tout $j_{V'}^\dagger A$-module E', $\alpha_{VV'*}E'$ est ainsi muni d'une structure canonique de $j_V^\dagger A$-module. Puisqu'on a aussi $\alpha_{VV'}^* \alpha_{VV'*} E' \xrightarrow{\sim} E'$, on voit que les foncteurs $\alpha_{VV'*}$ et $\alpha_{VV'}^*$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $j_V^\dagger A$-modules sur V et celle des $j_{V'}^\dagger A$-modules sur V'.

Nous utiliserons cette remarque pour considérer le foncteur $j_V^\dagger$ comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des faisceaux sur $]Y[$, en posant

(2.1.1.3) $$j^\dagger E \;=\; \alpha_{V*} j_V^\dagger E.$$

Compte tenu de ce qui précède, le foncteur $j^\dagger$ ne change pas si l'on remplace V par un voisinage strict $V' \subset V$. Il est encore caractérisé par la relation

(2.1.1.4) $$\Gamma(W, j^\dagger E) \;=\; \varinjlim_{V'\subset V} \Gamma(W\cap V', E)$$

pour tout ouvert quasi-compact $W \subset \,]Y[$. En effet, il existe λ tel que $W \cap U_\lambda \subset V$. Comme $W \cap U_\lambda$ est quasi-compact, on a alors, en appliquant ce qui précède au voisinage strict $V \cap U_\lambda \subset V$,

$$\Gamma(W, j^\dagger E) \;=\; \Gamma(W\cap V, j_V^\dagger E) \;=\; \Gamma(W\cap U_\lambda, j_V^\dagger E) \;=\; \varinjlim_{V' \subset V\cap U_\lambda} \Gamma(W\cap V', E).$$

On remarquera d'autre part que, d'après ce qu'on a vu plus haut, l'homomorphisme canonique

$$\Gamma(]Y[, E) \longrightarrow \Gamma(V, E)$$

est un isomorphisme pour tout $j^\dagger A$-module E, et tout voisinage strict V de $]X[$.

Remarque. — Il suffit bien sûr de passer à la limite sur un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$; on pourra par exemple se limiter aux ouverts $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ définis en (1.2.4) (i). De même, la condition de (1.2.2) montre que, les ouverts U_λ étant définis comme précédemment (ou comme en (1.2.3) (iii)), on obtient, pour W quasi-compact,

(2.1.1.5) $$\Gamma(W, j^\dagger E) \;=\; \varinjlim_{\lambda} \Gamma(W\cap U_\lambda, E).$$

(2.1.2) En supposant que $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π, montrons comment le foncteur $j^\dagger$ est relié à la notion de complétion faible de Monsky et Washnitzer [MW1]. Rappelons tout d'abord que, si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini, et $t_1, \dots, t_n$ une famille de générateurs de A comme $\mathcal{V}$-algèbre, on définit la *complétée faible* de A comme la sous-$\mathcal{V}$-algèbre $A^\dagger$ de la complétée usuelle $\hat{A}$ de A formée des éléments x qui peuvent s'écrire comme somme d'une série

(2.1.2.1) $$x = \sum_i \pi^i P_i(t_1, \dots, t_n),$$

les $P_i \in \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]$ étant tels qu'il existe des constantes a, b pour lesquelles

$$\deg P_i \leq ai + b$$

pour tout i. Il revient au même de dire que x peut s'écrire sous la forme d'une série

(2.1.2.2) $$x = \sum_{\underline{k}} \alpha_{\underline{k}} \underline{t}^{\underline{k}},$$

où les $\alpha_{\underline{k}} \in \mathcal{V}$ sont tels qu'il existe des constantes $\eta < 1$ et c telles que $|\alpha_{\underline{k}}| \leq c\eta^{|\underline{k}|}$ pour tout $\underline{k}$.

Soient P l'espace projectif formel de dimension n sur $\mathcal{V}$, Y sa réduction sur k, $j : X \hookrightarrow Y$ l'immersion de l'espace affine de dimension n définie par un système de coordonnées projectives; $]Y[$ est alors l'espace projectif sur K, $]X[$ la boule unité fermée de l'espace affine, et, d'après (1.2.4) (ii) et (iii), un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$ est fourni par les boules fermées de centre 0 et de rayon $\lambda \to 1^+$. La formule (2.1.1.5) entraîne alors que $\Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K})$ est l'anneau des séries formelles dont le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, soit

(2.1.2.3) $$\Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger \otimes K.$$

Dans la suite, nous noterons cette algèbre par $K[t_1, \dots, t_n]^\dagger$.

Plus généralement, soient $X = \operatorname{Spec} A_0$ un schéma affine et lisse sur k, et A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 (il en existe d'après [El1, th. 6]). Fixons une présentation

$$A \simeq \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/I,$$

et soient $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$, P le complété formel de la fermeture projective de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, Y sa réduction sur k. Le tube de Y est égal à P_K, le tube de X est l'intersection de P_K avec la boule unité fermée de $\mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, et les intersections de P_K avec les boules de rayon $\lambda \to 1^+$ forment un système fondamental de voisinages stricts U_λ de $]X[$ qui sont affinoïdes. L'image de l'homomorphisme de restriction

$$\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{P_K}) \longrightarrow \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \hat{A} \otimes K$$

est contenue dans la sous-algèbre $A^\dagger \otimes K \subset \hat{A} \otimes K$. En effet, au-dessus de $\mathbb{A}^n_K$, l'idéal définissant P_K dans l'espace projectif analytique n'est autre que $I\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}$, ce qui fournit l'isomorphisme

$$\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K})/I\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{P_K}),$$

et l'assertion résulte de (2.1.2.2). Comme $A^\dagger \simeq \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger / I\mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger$, on en déduit par passage à la limite un isomorphisme

$$\varinjlim_\lambda \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{P_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } A^\dagger \otimes K,$$

soit, compte tenu des remarques de (2.1.1),

$$\Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \xrightarrow{\ \sim\ } A^\dagger \otimes K. \tag{2.1.2.4}$$

On observera qu'on a d'autre part

$$\Gamma(]X[, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) = \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{P_K}) = \hat{A} \otimes K.$$

(2.1.3) PROPOSITION. — *Soient V un voisinage strict de $]X[$, A un faisceau d'anneaux sur V, et E un A-module.*

(i) *L'homomorphisme canonique*

$$E \longrightarrow j_V^\dagger E$$

est un épimorphisme. Si E est un $j_V^\dagger A$-module, c'est un isomorphisme.

(ii) *L'homomorphisme canonique*

$$E \otimes_A j_V^\dagger A \longrightarrow j_V^\dagger E$$

est un isomorphisme.

(iii) *Les foncteurs $j_V^\dagger$ et $j^\dagger$ sont exacts sur la catégorie des A-modules sur V.*

Soient W un ouvert affinoïde de V, et s une section de $j_V^\dagger E$ sur W. Quitte à passer à un recouvrement admissible de W, on peut, pour relever s en une section de E, supposer que P est affine ; soient alors $t_1, \ldots, t_n$ des sections de $\mathcal{O}_P$ relevant des équations de Z dans Y. D'après (2.1.1.5), il existe $\lambda < 1$ tel que s provienne d'une section de E sur $W \cap U_\lambda$. Soit $U_{i\lambda}$ l'ensemble des points x de $]Y[$ tels que $|t_i(x)| \geq \lambda$, et fixons λ' tel que $\lambda < \lambda' < 1$. Alors les $U_{i\lambda}$ et $[Z]_{\lambda'}$ induisent un recouvrement spécial de W ; s se relève en une section de E sur chacun des $W \cap U_{i\lambda}$ par hypothèse, et se relève en la section nulle sur $W \cap [Z]_{\lambda'}$ d'après (2.1.1.5).

Supposons que E soit un $j_V^\dagger A$-module, et prouvons la seconde partie de (i). Soient W un ouvert affinoïde de $]Y[$, et $s \in \Gamma(W, E)$ une section d'image nulle dans $\Gamma(W, j_V^\dagger E)$. D'après (2.1.1.5), il existe λ tel que $s = 0$ dans $\Gamma(W \cap U_\lambda, E)$. D'autre part, la restriction de E à $V \cap\ ]Z[$ est nulle d'après (2.1.1). Comme U_λ et $]Z[$ induisent un recouvrement admissible de V, on a $s = 0$ dans $\Gamma(W, E)$.

Pour montrer l'assertion (ii), il suffit de montrer que tout homomorphisme A-linéaire $\varphi : E \to F$ de E dans un $j_V^\dagger A$-module F possède une unique factorisation par l'homomorphisme $E \to j_V^\dagger E$, ce qui résulte de (i).

Enfin, l'exactitude à gauche de $j_V^\dagger$ résulte de celle des images directes et des limites inductives, et son exactitude à droite est conséquence de (i). Celle de $j^\dagger$ en découle puisque, avec les notations de (2.1.1), α_{V*} est une équivalence de catégories de la catégorie des $j_V^\dagger A$-modules dans celle des $j^\dagger A$-modules.

La construction de $j^\dagger$ est fonctorielle en (P, Y, X) au sens suivant :

(2.1.4) PROPOSITION. — *Avec les hypothèses et les notations de* (1.2.6), *soient V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, V' un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ tel que $u_K(V') \subset V$, u'_K la restriction de u_K à V'. On note $j_V^\dagger$, $j'^\dagger_{V'}$ les foncteurs "faisceau des germes de sections surconvergentes" définis en* (2.1.1.1).

(i) *Il existe pour tout faisceau abélien E sur V des homomorphismes canoniques*

$$j_V^\dagger E \longrightarrow u'_{K*}\, j'^\dagger_{V'} u'^{-1}_K E, \tag{2.1.4.1}$$

$$j^\dagger E \longrightarrow u_{K*}\, j'^\dagger u'^{-1}_K E. \tag{2.1.4.2}$$

Si on suppose de plus que $X' = v^{-1}(X)$, les morphismes

$$u'^{-1}_K j_V^\dagger E \longrightarrow j'^\dagger_{V'} u'^{-1}_K E, \tag{2.1.4.3}$$

$$u_K^{-1} j^\dagger E \longrightarrow j'^\dagger u'^{-1}_K E, \tag{2.1.4.4}$$

déduits de (2.1.4.1) *et* (2.1.4.2) *sont des isomorphismes.*

(ii) *Soient respectivement A et A' des faisceaux d'anneaux sur V et V', $\varphi : u'^{-1}_K A \to A'$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux, u'^*_K le foncteur image inverse correspondant de la catégorie des A-modules dans celle des A'-modules. Il existe pour tout A-module E sur V un homomorphisme canonique A-linéaire*

$$j_V^\dagger E \longrightarrow u'_{K*}\, j'^\dagger_{V'} u'^*_K E, \tag{2.1.4.5}$$

$$j^\dagger E \longrightarrow u_{K*}\, j'^\dagger u'^*_K E. \tag{2.1.4.6}$$

Si on suppose de plus que $X' = v^{-1}(X)$, les homomorphismes

$$u'^*_K j_V^\dagger E \longrightarrow j'^\dagger_{V'} u'^*_K E, \tag{2.1.4.7}$$

$$u_K^* j^\dagger E \longrightarrow j'^\dagger u'^*_K E, \tag{2.1.4.8}$$

déduits de (2.1.4.5) *et* (2.1.4.6) *sont des isomorphismes.*

Pour définir (2.1.4.1), il suffit de définir, pour tout couple d'ouverts quasi-compacts $W \subset V$, $W' \subset V'$ tels que $u_K(W') \subset W$, une application canonique

$$\Gamma(W, j_V^\dagger E) \longrightarrow \Gamma(W', j'^\dagger_{V'} u'^{-1}_K E).$$

On a alors :

$$\Gamma(W, j_V^\dagger E) = \varinjlim_{V_1} \Gamma(W \cap V_1, E),$$

$$\Gamma(W', j'^\dagger_{V'} u'^{-1}_K E) = \varinjlim_{V'_1} \Gamma(W' \cap V'_1, u'^{-1}_K E),$$

où V_1 et V'_1 parcourent l'ensemble des voisinages stricts de $]X[$ et $]X'[$ contenus dans V et V'. Comme $u'^{-1}_K(V_1)$ est un voisinage strict de $]X'[$ d'après (1.2.7), les applications naturelles

$$\Gamma(W \cap V_1, E) \longrightarrow \Gamma(W' \cap u_K'^{-1}(V_1), u_K'^{-1}E)$$

fournissent par passage à la limite l'application cherchée. L'homomorphisme (2.1.4.2) se déduit de (2.1.4.1) en appliquant α_{V*}, avec $\alpha_V : V \hookrightarrow]Y[_P$.

Supposons que $X' = v^{-1}(X)$, donc $Z' = v^{-1}(Z)$, et montrons que (2.1.4.3) est un isomorphisme. Si u est une immersion ouverte, et $Y' = u^{-1}(Y)$, l'assertion résulte de (1.2.5) et (1.2.7). Prenant des recouvrements ouverts de P et P', ce qui fournit un recouvrement admissible de $]Y[_{P'}$, on peut donc se ramener au cas où P et P' sont affines. Soient $g_1, \dots, g_s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ donnant des équations de Z dans Y. Si l'on pose

$$U_\lambda = \{ x \in]Y[_P \mid \exists\, i, |g_i(x)| \geq \lambda \},$$

$$U'_\lambda = u_K^{-1}(U_\lambda) \cap]Y'[_{P'} = \{ x' \in]Y'[_{P'} \mid \exists\, i, |u^*(g_i)(x')| \geq \lambda \},$$

$u_K'^{-1} j_V^\dagger E$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$W' \longmapsto \varinjlim_{W \supset u_K(W')} \varinjlim_\lambda \Gamma(W \cap U_\lambda, E),$$

et $j_{V'}'^\dagger u_K'^{-1}E$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$W' \longmapsto \varinjlim_\lambda \varinjlim_{W'' \supset u_K(W' \cap U'_\lambda)} \Gamma(W'', E),$$

où W' est un ouvert quasi-compact de V', et W, W'' des ouverts quasi-compacts de V ; on peut de plus se limiter aux ouverts $W' \subset V'$ pour lesquels il existe un ouvert quasi-compact $W \subset V$ tel que $u_K(W') \subset W$. On définit alors une flèche

$$j_{V'}'^\dagger u_K'^{-1}E \longrightarrow u_K'^{-1} j_V^\dagger E$$

inverse de (2.1.4.3) comme suit. Pour $W' \subset V'$ donné, on choisit un ouvert quasi-compact $W_0 \subset V$ tel que $u_K(W') \subset W_0$. Pour (λ, W'') tels que $u_K(W' \cap U'_\lambda) \subset W''$, il existe $\eta \geq \lambda$ tel que $u_K(W') \subset [Y]_\eta$, et l'ouvert quasi-compact de V obtenu en posant $W = W'' \cup (W_0 \cap [Z]_\eta)$ est alors tel que $u_K(W') \subset W$. En observant que, pour $\lambda' > \eta$, on a $W \cap U_{\lambda'} = W'' \cap U_{\lambda'}$, on voit qu'il suffit d'associer à une section $s \in \Gamma(W'', E)$ sa restriction à $W \cap U_{\lambda'}$, pour $\lambda' > \eta$ quelconque, l'application obtenue étant manifestement indépendante des choix effectués dans la construction. On en déduit que (2.1.4.4) est un isomorphisme en observant que sa restriction à V' n'est autre que (2.1.4.3), et que les deux faisceaux considérés sont nuls sur $]Z[$.

Supposons maintenant donnés A, A', et $u_K'^{-1}A \to A'$. Les homomorphismes (2.1.4.5) et (2.1.4.6) se déduisent de (2.1.4.1) et (2.1.4.2) par fonctorialité, et définissent par adjonction un homomorphisme A'-linéaire

$$u_K'^* j_V^\dagger E \longrightarrow j_{V'}'^\dagger u_K'^* E.$$

D'après (2.1.3) (ii), on a des isomorphismes

$$E \otimes_A j_V^\dagger A \xrightarrow{\ \sim\ } j_V^\dagger E, \qquad u_K'^{-1}E \otimes_{u_K'^{-1}A} j_{V'}'^\dagger u_K'^{-1}A \xrightarrow{\ \sim\ } j_{V'}'^\dagger u_K'^{-1}E.$$

Si $X' = v^{-1}(X)$, l'isomorphisme (2.1.4.3) pour E s'identifie alors au composé

$$u_K'^{-1}(E \otimes_A j_V^\dagger A) \xrightarrow{\ \sim\ } u_K'^{-1}E \otimes_{u_K'^{-1}A} u_K'^{-1} j_V^\dagger A \xrightarrow{\ \sim\ } u_K'^{-1}E \otimes_{u_K'^{-1}A} j_{V'}'^\dagger u_K'^{-1}A,$$

où le deuxième isomorphisme est défini par (2.1.4.3) pour A. L'homomorphisme de fonctorialité $j'^{\dagger}_{V'}u'^{-1}_K E \to j'^{\dagger}_{V'}u'^{*}_K E$ s'identifie d'autre part à

$$u'^{-1}_K E \otimes_{u'^{-1}_K A} j'^{\dagger}_{V'}u'^{-1}_K A \longrightarrow (u'^{-1}_K E \otimes_{u'^{-1}_K A} A') \otimes_{A'} j'^{\dagger}_{V'} A' \simeq u'^{-1}_K E \otimes_{u'^{-1}_K A} j'^{\dagger}_{V'} A'.$$

Pour prouver que (2.1.4.7) est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que

$$(u'^{-1}_K E \otimes_{u'^{-1}_K A} j'^{\dagger}_{V'}u'^{-1}_K A) \otimes_{u'^{-1}_K A} A' \longrightarrow u'^{-1}_K E \otimes_{u'^{-1}_K A} j'^{\dagger}_{V'} A'$$

en est un, ce qui résulte de (2.1.3) (ii). Enfin, l'isomorphisme (2.1.4.8) s'en déduit par le même argument que plus haut.

(2.1.5) PROPOSITION. — *Soient V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, E un $\mathcal{O}_V$-module cohérent, et j_K l'immersion de $]X[$ dans V. Alors l'homomorphisme canonique*

$$j^{\dagger}_V E \longrightarrow j_{K*}j^{*}_K E$$

est injectif.

On peut supposer P affine. Soient W un ouvert affinoïde de V, et s une section de $j^{\dagger}_V E$ sur W d'image nulle dans $j_{K*}j^{*}_K E$. D'après (2.1.1.5), s provient d'une section s' de E sur $W \cap U_\lambda$ pour λ assez près de 1, dont la restriction à $]X[$ est nulle. Le support de s' est un sous-espace analytique fermé T de W, donc quasi-compact; il existe donc $\lambda < 1$ tel que $T \subset [Z]_\lambda$. Par suite, la restriction de s' à U_λ est nulle, d'où la nullité de s.

(2.1.6) *Définition.* — Soient V un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$, A un faisceau d'anneaux sur V. Pour tout A-module E, on définit le *sous-faisceau $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}E$ des sections de E à support dans* $]Z[$ par la suite exacte

(2.1.6.1) $$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}E \longrightarrow E \longrightarrow j^{\dagger}_V E \longrightarrow 0.$$

Il résulte de (2.1.3) (iii) que le foncteur $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}$ est exact.

(2.1.7) LEMME. — *Soient X_1, X_2 deux ouverts de Y, de complémentaires Z_1, Z_2, et soient $X = X_1 \cup X_2$, $Z = Z_1 \cap Z_2$, $X' = X_1 \cap X_2$, $Z' = Z_1 \cup Z_2$, j_1, j_2, j' les immersions de X_1, X_2, X' dans Y. Soit V un voisinage strict de $]X[$ (donc aussi de $]X_1[$, $]X_2[$ et $]X'[$) dans $]Y[$, A un faisceau d'anneaux sur V. On note $j_1^{\dagger}, j_2^{\dagger}, j'^{\dagger}$ les foncteurs* (2.1.1.1) *relatifs à X_1, X_2, X' sur la catégorie des A-modules. Il existe alors des isomorphismes de foncteurs* :

(i) $j_1^{\dagger} \circ j_2^{\dagger} \simeq j_2^{\dagger} \circ j_1^{\dagger} \simeq j'^{\dagger}$;

(ii) $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z_1[} \circ \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z_2[} \simeq \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z_2[} \circ \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z_1[} \simeq \underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z[}$.

Soit $W \subset]Y[$ un ouvert affinoïde. On a alors

$$\Gamma(W, j_1^{\dagger} \circ j_2^{\dagger}E) = \varinjlim_{V_1} \Gamma(W \cap V_1, j_2^{\dagger}E) = \varinjlim_{V_1, V_2} \Gamma(W \cap V_1 \cap V_2, E),$$

où V_1 et V_2 parcourent les voisinages stricts de $]X_1[$ et $]X_2[$; l'isomorphisme $j_1^{\dagger} \circ j_2^{\dagger} \simeq j_2^{\dagger} \circ j_1^{\dagger}$ en résulte. Comme $V_1 \cap V_2$ est un voisinage strict de $]X'[$ d'après (1.2.10), il existe un homomorphisme canonique $j_1^\dagger \circ j_2^\dagger E \to j'^\dagger E$, et il suffit de montrer, en supposant P affine, que les ouverts $W \cap V_1 \cap V_2$ sont cofinaux dans l'ensemble des intersections de W avec les voisinages stricts de $]X'[$. Soient $g'_1, \dots, g'_r \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$, $g''_1, \dots, g''_s \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ définissant modulo $\mathfrak{m}$ les k-sous-schémas fermés Z_1, Z_2; alors $Z' = Y - X'$ est défini par les $g'_i g''_j$. Soit $\lambda' = \sqrt{\lambda}$; si l'on pose

$$\begin{aligned} U_{1\lambda'} &= \{ x \in]Y[\ \mid \ \exists\, i, |g'_i(x)| \geq \lambda' \}, \\ U_{2\lambda'} &= \{ x \in]Y[\ \mid \ \exists\, j, |g''_j(x)| \geq \lambda' \}, \\ U'_\lambda &= \{ x \in]Y[\ \mid \ \exists\, (i,j), |g'_i(x) g''_j(x)| \geq \lambda \}, \end{aligned}$$

on obtient l'inclusion $U_{1\lambda'} \cap U_{2\lambda'} \subset U'_\lambda$, d'où l'assertion.

Pour prouver (ii), on considère le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} E \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ j_2^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & j_2^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & j_1^\dagger \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E \arrow[r] \arrow[d] & j_1^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & j_1^\dagger \circ j_2^\dagger E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

résultant de la définition des foncteurs considérés et de (2.1.3). Grâce à (i), la colonne de droite fournit un isomorphisme

$$\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ j_2^\dagger E \simeq j_2^\dagger \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} E,$$

et la ligne supérieure permet d'en déduire l'isomorphisme

$$\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E \simeq \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} E.$$

Ce diagramme fournit également la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E \longrightarrow E \longrightarrow j_1^\dagger E \oplus j_2^\dagger E,$$

montrant qu'une section de $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_1[} \circ \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z_2[} E$ est une section de E nulle sur un ouvert de la forme $U_{1\lambda} \cup U_{2\lambda} = U_\lambda$, c'est-à-dire une section de $\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[} E$.

L'énoncé suivant permet de localiser la construction de $j^\dagger$ sur X.

(2.1.8) PROPOSITION. — *Soient V un voisinage strict de $]X[$, A un faisceau d'anneaux* *sur V, $(X_i)_{i=1\dots n}$ un recouvrement ouvert de X, et $j_{i_1\dots i_k}$ l'inclusion de $X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}$ dans Y. Alors, pour tout faisceau de A-modules E sur V, la suite*

$$(2.1.8.1) \quad 0 \longrightarrow j^\dagger E \longrightarrow \prod_i j_i^\dagger E \longrightarrow \prod_{i_0<i_1} j_{i_0 i_1}^\dagger E \longrightarrow \dots \longrightarrow j_{1\dots n}^\dagger E \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les termes de la suite étant nuls sur $]Z[$, il suffit de prouver que sa restriction à V est exacte. On conservera la notation $j_{i_1\dots i_k}^\dagger E$ pour la restriction à V de $j_{i_1\dots i_k}^\dagger E$ (i.e. pour le foncteur (2.1.1.1) correspondant).

La démonstration procède par récurrence sur n. Posons $X' = X_2 \cup \dots \cup X_n$, $Z = Y - X$, $Z' = Y - X'$, $j' : X' \to Y$, et soit $K^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \prod_{1<i} j_i^\dagger E \longrightarrow \dots \longrightarrow j_{2\dots n}^\dagger E \longrightarrow 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et (2.1.3), $K^\bullet$ est une résolution de $\underline{\Gamma}_{]Z'[}^\dagger E$. La suite exacte (2.1.6.1) donne une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_{]Z_1[}^\dagger K^\bullet \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow j_1^\dagger K^\bullet \longrightarrow 0.$$

Le lemme (2.1.7) (i) permet d'identifier $j_1^\dagger K^\bullet$ au complexe

$$0 \longrightarrow j_1^\dagger E \longrightarrow \prod_{1<i} j_{1i}^\dagger E \longrightarrow \dots \longrightarrow j_{1\dots n}^\dagger E \longrightarrow 0,$$

donc le complexe associé au complexe double $K^\bullet \to j_1^\dagger K^\bullet$ au complexe

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \prod_{i} j_i^\dagger E \longrightarrow \dots \longrightarrow j_{1\dots n}^\dagger E \longrightarrow 0.$$

Comme, d'après (2.1.6), $\underline{\Gamma}_{]Z_1[}^\dagger K^\bullet$ est une résolution de $\underline{\Gamma}_{]Z_1[}^\dagger(\underline{\Gamma}_{]Z'[}^\dagger E)$, qui s'identifie à $\underline{\Gamma}_{]Z[}^\dagger E$ d'après (2.1.7) (ii), la suite

$$0 \longrightarrow \underline{\Gamma}_{]Z[}^\dagger E \longrightarrow E \longrightarrow \prod_{i} j_i^\dagger E \longrightarrow \dots \longrightarrow j_{1\dots n}^\dagger E \longrightarrow 0$$

est exacte, et l'énoncé en résulte.

Remarque. — Soit $\mathfrak{X}$ le recouvrement de X par les X_i. On peut aussi considérer le complexe de cochaînes de type Čech

$$(2.1.8.2) \qquad \check{C}^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E) = \prod_i j_i^\dagger E \to \prod_{i_0,i_1} j_{i_0 i_1}^\dagger E \to \dots \to \prod_{i_0,\dots,i_k} j_{i_0\dots i_k}^\dagger E \to \dots,$$

ainsi que le sous-complexe des cochaînes alternées $\check{C}'^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E) \subset \check{C}^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E)$. Ce dernier est isomorphe au complexe (2.1.8.1), et est donc une résolution de $j^\dagger E$. D'autre part, l'inclusion de $\check{C}'^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E)$ dans $\check{C}^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E)$ est une équivalence d'homotopie (cf. [Se1, ch. I,

§3, prop. 2]), de sorte que $\check{C}^{\dagger\bullet}(\mathfrak{X}, E)$ est également une résolution de $j^\dagger E$.

Nous allons maintenant considérer les propriétés de finitude des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules. Rappelons qu'un faisceau de modules E sur un faisceau d'anneaux A est dit *cohérent* si E est de type fini, et si, pour tout morphisme $u : A^n \to E$ au-dessus d'un ouvert U, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un A-module de type fini sur U. Le faisceau A est dit *cohérent* s'il est cohérent en tant que faisceau de A-modules. Si c'est le cas, il y a alors équivalence entre la notion de A-module de présentation finie, et celle de A-module cohérent.

(2.1.9) PROPOSITION. — (i) *Sous les hypothèses de* (2.1.1), *le faisceau* $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ *est un faisceau d'anneaux cohérent.*

(ii) *La catégorie des* $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$*-modules cohérents est une sous-catégorie abélienne de celle des* $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$*-modules, stable par produit tensoriel et* $\mathcal{H}om$ *interne.*

Soit $\varphi : (j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[})^n \to j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ un homomorphisme $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-linéaire défini sur un ouvert $W \subset\,]Y[$. Pour prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de type fini, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de sa restriction aux ouverts d'un recouvrement admissible de W par des ouverts affinoïdes, ce qui permet de supposer W affinoïde. D'après (2.1.1.2), il existe un voisinage strict V de $]X[$ tel que φ soit défini par des sections $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(W \cap V, \mathcal{O}_{]Y[})$. Sur $W \cap\,]Z[$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est nul, et, sur $W \cap V$, il est de la forme $j^\dagger_{W\cap V}(\psi)$, avec $\psi : \mathcal{O}^n_{W\cap V} \to \mathcal{O}_{W\cap V}$. Comme le recouvrement $(]Z[, V)$ est admissible, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de type fini sur $W \cap V$. Or le foncteur $j^\dagger_{W\cap V}$ est exact, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = j^\dagger_{W\cap V}(\mathrm{Ker}(\psi))$; comme $\mathcal{O}_{]Y[}$ est cohérent, l'assertion (i) en résulte.

L'assertion (ii) est une propriété classique des faisceaux cohérents.

(2.1.10) PROPOSITION. — *Soient* E, F *deux* $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$*-modules cohérents.*

(i) *Il existe un voisinage strict* V *de* $]X[$ *et des* $\mathcal{O}_V$*-modules cohérents* $\mathcal{E}, \mathcal{F}$, *tels que* $E \simeq j^\dagger\mathcal{E}, F \simeq j^\dagger\mathcal{F}$.

(ii) *L'application naturelle*

$$\varinjlim_{V'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V'}}(\mathcal{E}|_{V'}, \mathcal{F}|_{V'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}}(E, F),$$

où V' *parcourt l'ensemble des voisinages stricts de* $]X[$ *contenus dans* V, *est alors un isomorphisme.*

Autrement dit, la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents est équivalente à la catégorie limite inductive des catégories des modules cohérents sur les voisinages stricts de $]X[$.

Pour $\lambda \to 1^-$, soit $U_\lambda = \,]Y[\, - \,]Z[_\lambda$. Supposons prouvées les deux assertions suivantes :

(i') pour tout $\eta < 1$, il existe $\lambda < 1$, un module cohérent $\mathcal{E}_\eta$ (resp. $\mathcal{F}_\eta$) sur $V_\eta = U_\lambda \cap [Y]_\eta$

et un isomorphisme de $j^\dagger_{V_\eta}\mathcal{E}_\eta$ (resp. $j^\dagger_{V_\eta}\mathcal{F}_\eta$) sur la restriction de E (resp. F) à V_η ;

(ii') pour tout $\eta < 1$, si λ, $\mathcal{E}_\eta$ et $\mathcal{F}_\eta$ vérifient (i'), alors, pour tout homomorphisme $h : E \to F$ au-dessus de V_η, il existe λ' avec $\lambda \leq \lambda' < 1$, et un homomorphisme $h_\eta : \mathcal{E}_\eta \to \mathcal{F}_\eta$ au-dessus de $V_\eta \cap U_{\lambda'}$ tels que $j^\dagger_{V_\eta \cap U_{\lambda'}}(h_\eta) = h$; de plus, si h_η et h'_η vérifient tous deux cette propriété, ils coïncident sur $V_\eta \cap U_{\lambda''}$ pour λ'' assez près de 1.

Alors la proposition en découle. Pour prouver (i), on fixe une suite croissante η_n de limite 1 ; on construit alors par récurrence une suite croissante λ_n de limite 1, et, en posant $V_n = U_{\lambda_n} \cap [Y]_{\eta_n}$, un module cohérent $\mathcal{E}_n$ sur $W_n = \bigcup_{n' \leq n} V_{n'}$, de restriction $\mathcal{E}_{n-1}$ sur W_{n-1} et donnant la restriction de E à W_n par application du foncteur $j^\dagger_{W_n}$. Supposant λ_n et $\mathcal{E}_n$ construits, soient λ'_{n+1} et $\mathcal{E}'_{n+1}$ obtenus par application de (i') à η_{n+1} ; on peut supposer $\lambda_n \leq \lambda'_{n+1}$. Sur $U_{\lambda'_{n+1}} \cap [Y]_{\eta_n}$, les faisceaux $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}'_{n+1}$ donnent tous deux la restriction de E. D'après (ii'), il existe λ_{n+1} tel que $\lambda'_{n+1} \leq \lambda_{n+1} < 1$ et un isomorphisme de $\mathcal{E}_n$ sur $\mathcal{E}'_{n+1}$ au-dessus de $U_{\lambda_{n+1}} \cap [Y]_{\eta_n}$ donnant l'identité de E par application du foncteur $j^\dagger$ correspondant. En recollant $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}'_{n+1}$ par cet isomorphisme, on obtient le faisceau cohérent $\mathcal{E}_{n+1}$. D'après (1.2.4) (i), $V = \bigcup_n V_n$ est un voisinage strict de $]X[$, et les $W_n = V \cap [Y]_{\eta_n}$ en forment un recouvrement admissible. On obtient donc par recollement sur V un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ induisant les $\mathcal{E}_n$ et un isomorphisme de $j^\dagger_V\mathcal{E}$ sur la restriction de E à V. Comme la restriction de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ à $]Z[$ est nulle, il en est de même de celle de E ; comme $]Z[$ et V forment un recouvrement admissible de $]Y[$, cet isomorphisme se prolonge trivialement en un isomorphisme de $j^\dagger\mathcal{E}$ sur E. L'assertion (ii) se montre de la même manière.

La démonstration de (i') et (ii') est classique, la quasi-compacité de $[Y]_\eta$ et de V_η permettant de travailler avec des recouvrements finis par des ouverts affinoïdes sur lesquels E possède une présentation finie, et de se ramener au cas particulier où $E = j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ (resp. $\mathcal{E}_\eta = \mathcal{O}_{V_\eta}$), qui résulte alors de (2.1.1.5).

Remarque. — Il résulte facilement de la démonstration précédente que E est un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module localement libre de type fini si et seulement s'il existe un voisinage strict V de $]X[$ et un $\mathcal{O}_V$-module localement libre de type fini $\mathcal{E}$ tels que $E \simeq j^\dagger\mathcal{E}$.

(2.1.11) COROLLAIRE. — *Le foncteur de restriction de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents vers les $\mathcal{O}_{]X[}$modules cohérents est fidèle.*

Si $f : E \to F$ est un homomorphisme de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, il existe d'après (2.1.10) un voisinage strict V de $]X[$, et un homomorphisme $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_V$-modules cohérents tel que $f = j^\dagger(g)$. Si $f = 0$ sur $]X[$, il en est de même de g. Le support de $\mathrm{Im}(g)$ est alors un fermé analytique de V qui ne rencontre pas $]X[$, et il existe donc un voisinage strict de $]X[$ disjoint de ce support. L'énoncé en résulte.

La proposition (2.1.10) permet de montrer que la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents est de nature locale sur X; plus précisément, on obtient un champ [Gi1, II

1.2.1] sur Y en associant à tout ouvert $j : X \hookrightarrow Y$ la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents :

(2.1.12) PROPOSITION. — *Soient $(X_i)_{i=1\ldots n}$ un recouvrement ouvert fini de X, j_i l'immersion de X_i dans Y.*

(i) *Supposons donnés, pour tout i, un $j_i^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E_i cohérent (resp. localement libre de type fini), et pour tous i, i', des isomorphismes $j_{i'}^\dagger E_i \simeq j_i^\dagger E_{i'}$ vérifiant la condition de cocycle. Alors il existe un unique $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent E (resp. localement libre de type fini) muni d'isomorphismes $j_i^\dagger E \simeq E_i$ compatibles aux isomorphismes $j_{i'}^\dagger E_i \simeq j_i^\dagger E_{i'}$.*

(ii) *Supposons donnés deux $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents E, F, et, pour tout i, un homomorphisme $\varphi_i : j_i^\dagger E \to j_i^\dagger F$, avec $j_{i'}^\dagger\varphi_i = j_i^\dagger\varphi_{i'}$. Il existe alors un unique homomorphisme $\varphi : E \to F$ tel que $j_i^\dagger\varphi = \varphi_i$ pour tout i.*

D'après (2.1.10), il existe pour tout i un voisinage strict V_i de $]X_i[$ et un module cohérent (resp. localement libre de type fini) $\mathcal{E}_i$ sur V_i tels que $j_i^\dagger\mathcal{E}_i \simeq E_i$. De plus, l'isomorphisme $j_{i'}^\dagger E_i \simeq j_i^\dagger E_{i'}$ provient d'un isomorphisme $\mathcal{E}_{i'} \simeq \mathcal{E}_i$ sur un voisinage strict $W_{ii'} \subset V_i \cap V_{i'}$ de $]X_i \cap X_{i'}[$. Fixons une suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1. Comme les voisinages $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ forment un système fondamental de voisinages stricts, on peut, quitte à rétrécir les V_i, supposer que les V_i sont les voisinages standards $V_{i\,\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ associés à $\underline{\eta}$ et à une suite $\underline{\lambda}$ (indépendante de i). La réunion des $V_{i\,\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ est alors le voisinage standard $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ de $]X[$ associé aux suites $\underline{\eta}$ et $\underline{\lambda}$, et les $V_{i\,\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ en forment un recouvrement admissible. Comme $V_{i\,\underline{\eta},\underline{\lambda}} \cap V_{i'\,\underline{\eta},\underline{\lambda}} \subset V_{ii'\,\underline{\eta},\underline{\lambda}^2}$, on peut supposer que les isomorphismes $\mathcal{E}_{i'} \simeq \mathcal{E}_i$ sont définis sur les $V_i \cap V_{i'}$ et satisfont la condition de cocycle sur les $V_i \cap V_{i'} \cap V_{i''}$. Il existe alors un module $\mathcal{E}$ cohérent (resp. localement libre de type fini) sur V induisant les $\mathcal{E}_i$ sur les V_i, et le $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module $E = j^\dagger\mathcal{E}$ vérifie alors

$$j_i^\dagger E \simeq j_i^\dagger j^\dagger\mathcal{E} \simeq j_i^\dagger\mathcal{E} \simeq j_i^\dagger\mathcal{E}_i \simeq E_i.$$

L'unicité de E se vérifie de façon analogue, ainsi que l'assertion relative aux homomorphismes.

2.2. Connexions surconvergentes le long d'un fermé

Dorénavant, nous supposerons que le corps de base K est *de caractéristique nulle*.

Les notations étant toujours celle de (2.1), on suppose donné un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels $f : P \to S$, *lisse sur un voisinage de X dans P*. Sauf mention explicite du contraire, les faisceaux de différentielles sur les S_K-espaces analytiques considérés dans cette section seront relatifs à S_K.

(2.2.1) LEMME. — *Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble des points de $]Y[$ où le* *morphisme f_K est lisse est un voisinage strict de* $]X[$.

D'après le critère jacobien (0.1.11), l'ensemble des points de non lissité de f_K est un fermé analytique de P_K, et son complémentaire est donc ouvert. Il contient la fibre générique de l'ouvert de lissité de f, donc $]X[$, et le lemme en résulte d'après (1.2.4) (ii).

(2.2.2) Soient δ l'immersion diagonale de P_K dans $P_K \times_{S_K} P_K$, $\mathcal{I}$ son idéal, et

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{O}_{P_K \times P_K} / \mathcal{I}^{n+1}$$

le faisceau des parties principales d'ordre n, considéré comme un faisceau sur P_K. Au-dessus de l'ouvert de lissité de f_K, $\mathcal{P}^n$ est localement isomorphe (pour ses deux structures de $\mathcal{O}_{P_K}$-algèbre) à une algèbre de polynômes tronquée. Le lemme (2.2.1) entraîne alors que, sur $]Y[_P$, $j^\dagger\mathcal{P}^n$ est localement isomorphe à une algèbre de polynômes tronquée sur $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$. Comme K est de caractéristique nulle, on déduit de [Be1, II 4.2] que les différentes caractérisations habituelles de la structure de module à connexion intégrable s'appliquent aux $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules (plus précisément, $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ et les $j^\dagger\mathcal{P}^n$, munis des homomorphismes qui les relient, forment un groupoïde formel PD-adique de type fini différentiellement lisse au sens de [Be1, II 1.1.3 et 4.2.2]) ; une connexion intégrable relativement à S_K sur un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E est donc constituée par l'une des données équivalentes suivantes :

(i) un homomorphisme

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[}} \Omega^1_{]Y[}$$

tel que $\nabla(am) = a\nabla(m) + m \otimes da$ pour $a \in j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ et $m \in E$ (on remarquera que $E \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[}} \Omega^1_{]Y[} \simeq E \otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}} j^\dagger\Omega^1_{]Y[}$ grâce à (2.1.3) (ii)), et tel que l'homomorphisme composé

$$E \xrightarrow{\ \nabla\ } E \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[}} \Omega^1_{]Y[} \xrightarrow{\ \nabla\ } E \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[}} \Omega^2_{]Y[}$$

soit nul ;

(ii) une famille compatible d'isomorphismes $j^\dagger\mathcal{P}^n$-linéaires

$$\varepsilon_n : j^\dagger\mathcal{P}^n \otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}} E \xrightarrow{\ \sim\ } E \otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}} j^\dagger\mathcal{P}^n,$$

induisant l'identité modulo $j^\dagger\mathcal{I}$, et vérifiant la condition de transitivité usuelle [Be1, II 1.3.1] sur la diagonale du produit $P_K \times_{S_K} P_K \times_{S_K} P_K$ (nous dirons que la famille des ε_n vérifie la *condition de cocycle*) ;

(iii) un homomorphisme de faisceaux d'anneaux du faisceau des opérateurs différentiels de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ dans lui-même dans celui des opérateurs différentiels de E dans lui-même, compatible à la filtration par l'ordre et à l'action de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ par homothéties.

Suivant la terminologie classique, nous appelerons *section horizontale* d'un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module à connexion intégrable E toute section s de E telle que $\nabla(s) = 0$, et *homomorphisme horizontal* entre deux $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules à connexion intégrable E, F tout homomorphisme $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-linéaire φ commutant aux connexions. Rappelons qu'en munissant le faisceau $\mathcal{H}om_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}}(E, F)$ de la connexion définie par

$$\nabla(\varphi) \;=\; \nabla_F \circ \varphi - (\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1}) \circ \nabla_E,$$

un homomorphisme horizontal peut s'interprèter comme une section horizontale de $\mathcal{H}om_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}}(E, F)$, et que, réciproquement, une section s est horizontale si et seulement si l'homomorphisme $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[} \to E$ envoyant 1 sur s est horizontal.

(2.2.3) PROPOSITION. — *Soit E un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent, muni d'une connexion intégrable ∇ relativement à S_K.*

(i) *Il existe un voisinage strict V de $]X[$ et un $\mathcal{O}_V$-module cohérent $\mathcal{E}$ muni d'une connexion intégrable ∇_0 relativement à S_K, tels que $(E, \nabla) \simeq j^\dagger(\mathcal{E}, \nabla_0)$.*

(ii) *Si $S = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, le $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E est localement libre de rang fini.*

La première assertion résulte de (2.1.10) appliqué aux images inverses de E et ε_2 sur les produits double et triple, d'après [Be1, II 3.3.9 et 4.2.10]. Comme K est de caractéristique nulle, la seconde assertion en résulte classiquement (voir par exemple [Ph1, lemme 10.3.1]).

Localement, si l'on se donne une base de E et un système de coordonnées locales sur la partie lisse de P_K, une connexion sur E est donc définie par une matrice dont les coefficients sont des formes différentielles analytiques sur un voisinage strict de $]X[$.

(2.2.4) Soient W un ouvert de $]Y[$ sur lequel $\Omega^1_{P_K}$ possède une base de sections de la forme $dt_1, \ldots, dt_m$, $\partial_1, \ldots, \partial_m$ les dérivations correspondantes, et notons encore $\partial_i : E \to E$ l'action de ∂_i définie par la connexion ∇ de E. On peut décrire explicitement l'isomorphisme ε_n comme étant l'isomorphisme $j^\dagger\mathcal{P}^n$-linéaire tel que, pour toute section $e \in \Gamma(W, E)$, on ait :

(2.2.4.1)
$$\varepsilon_n(1 \otimes e) \;=\; \sum_{|\underline{k}| \leq n} \frac{1}{\underline{k}!}\, \underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\tau}^{\underline{k}},$$

avec $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. Posons :

(2.2.4.2)
$$\hat{\varepsilon}(1 \otimes e) = \varprojlim_n \varepsilon_n(1 \otimes e) \;\in\; \varprojlim_n \Gamma(W, E \otimes_{j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}} j^\dagger\mathcal{P}^n)$$
$$= \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\underline{k}!}\, \underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\tau}^{\underline{k}}.$$

Nous dirons que $\hat{\varepsilon}(1 \otimes e)$ est la *série de Taylor* de $e \in (M, \nabla)$. Lorsque E est localement libre de rang fini, on peut, en utilisant les coordonnées locales $t_1, \ldots, t_m$ sur W, la considérer comme une section de $E \mathbin{\hat{\otimes}} j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}[[\tau_1, \ldots, \tau_m]]$, donc comme une série formelle à coefficients dans E. Cela justifie la terminologie de la définition suivante.

Nous désignerons par p_1 et p_2 les morphismes

$$]Y[_{P^2} \rightrightarrows]Y[_P$$

induits par les deux projections de $P_K \times_{S_K} P_K$ sur P_K, et nous considérerons ces deux espaces analytiques comme munis des faisceaux d'anneaux $j'^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y[}$ et $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y[}$. On observera que la diagonale de $]Y[_P$ est un sous-espace analytique localement fermé de $]Y[_{P^2}$.

(2.2.5) *Définition.* — Soit E un $\mathcal{O}_{]X[}$module (resp. $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y[}$-module) muni d'une connexion intégrable ∇. Nous dirons que ∇ est *convergente* (resp. *surconvergente le long de* Z) s'il existe sur $]X[_{P^2}$ (resp. $]Y[_{P^2}$) un isomorphisme

$$\varepsilon \,:\, p_2^*E \xrightarrow{\ \sim\ } p_1^*E \tag{2.2.5.1}$$

induisant pour tout n les isomorphismes ε_n par réduction modulo $\mathcal{I}^{n+1}$ (resp. $j'^{\dagger}\mathcal{I}^{n+1}$) et application de δ^{-1} (resp. via l'identification $\delta^{-1}j'^{\dagger} \simeq j^{\dagger}\delta^{-1}$ de (2.1.4.4)).

On observera que la notion de connexion convergente est en fait le cas particulier de la notion de connexion surconvergente le long de Z obtenu lorsque le lieu de surconvergence Z est vide, i.e. lorsque $Y = X$.

La proposition suivante permet d'expliciter la notion de surconvergence lorsque (E, ∇) est de la forme $j^{\dagger}(\mathcal{E}, \nabla_0)$, où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent sur un voisinage strict V de $]X[_P$, et ∇_0 une connexion intégrable sur $\mathcal{E}$.

(2.2.6) PROPOSITION. — *Soient V un voisinage strict de $]X[$ lisse sur S_K, $(\mathcal{E}, \nabla_0)$ un $\mathcal{O}_V$-module cohérent muni d'une connexion intégrable, $(E, \nabla) = j^{\dagger}(\mathcal{E}, \nabla_0)$. Pour que ∇ soit surconvergente, il faut et suffit qu'il existe un voisinage strict V' de $]X[_{P^2}$, contenu dans $p_1^{-1}(V) \cap p_2^{-1}(V)$, et un isomorphisme $\varepsilon' : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ sur V', induisant par réduction modulo $\mathcal{I}^{n+1}$, pour tout n, la restriction à $V' \cap\,]Y[_P$ des isomorphismes $\varepsilon_{0n} : \mathcal{P}^n \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}^n$ définis par ∇_0.*

Soit $j'^{\dagger}$ le foncteur “faisceau des sections surconvergentes” au voisinage de $]X[_{P^2}$. Comme $j'^{\dagger}\circ p_i^* \simeq p_i^*\circ j^{\dagger}$ et $j^{\dagger}\circ\delta^* \simeq \delta^*\circ j'^{\dagger}$ d'après (2.1.4), l'existence de ε' entraîne la surconvergence de ∇ en prenant $\varepsilon = j'^{\dagger}(\varepsilon')$.

Si ∇ est surconvergente, il existe d'après (2.1.10) un voisinage strict V'_0 de $]X[_{P^2}$ contenu dans $p_1^{-1}(V) \cap p_2^{-1}(V)$, et un isomorphisme $\varepsilon' : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ sur V'_0 tels que l'isomorphisme ε de (2.2.5.1) soit défini par $\varepsilon = j'^{\dagger}(\varepsilon')$; il faut alors montrer que, quitte à rétrécir V'_0, ε' induit les ε_{0n} par réduction modulo $\mathcal{I}^{n+1}$, pour tout n. On peut supposer que V'_0 est un voisinage strict standard $V_{\underline{n},\underline{\lambda}}$, et il suffit alors de montrer qu'il existe une suite $\underline{\lambda}' \geq \underline{\lambda}$ telle que ε' induise les ε_{0n} sur $V_{\underline{n},\underline{\lambda}'}$. On peut pour cela supposer P affine. Soient ε_n : $\mathcal{P}^n \otimes E \xrightarrow{\sim} E \otimes \mathcal{P}^n$ les isomorphismes définis par ∇; comme $\nabla = j^{\dagger}(\nabla_0)$, on a $\varepsilon_n = j^{\dagger}(\varepsilon_{0n})$ pour tout n. Puisque $\varepsilon = j'^{\dagger}(\varepsilon')$, et que par hypothèse la réduction modulo $j'^{\dagger}\mathcal{I}^{n+1}$ de ε est égale à ε_n, la réduction modulo $j'^{\dagger}\mathcal{I}^{n+1}$ de $j'^{\dagger}(\varepsilon')$ est $j^{\dagger}(\varepsilon_{0n})$, pour tout n. En particulier, si ε'_n est la réduction modulo $\mathcal{I}^{n+1}$ de ε', la restriction à $]X[$ de ε'_n est égale à celle de ε_{0n}.

Soient η_i un élément de la suite $\underline{\eta}$, et $V_i = [Y]_{\eta_i} \cap U_{\lambda_i}$. Comme $\mathcal{E}$ est cohérent sur V, le module

$$N_i = \operatorname{Ker}(\Gamma(V_i, \mathcal{E}) \to \Gamma(V_i \cap]X[, \mathcal{E}))$$

a pour support un fermé analytique T de V_i tel que $T \cap]X[= \emptyset$; le principe du maximum entraîne alors qu'il existe $\lambda_i' \geq \lambda_i$ tel que $T \cap U_{\lambda_i'} = \emptyset$. Comme les $\mathcal{P}^n$ sont localement libres de rang fini, le support de

$$\operatorname{Ker}(\Gamma(V_i, \mathcal{P}^n \otimes \mathcal{E}) \to \Gamma(V_i \cap]X[, \mathcal{P}^n \otimes \mathcal{E}))$$

est égal à celui de N_i. Par conséquent, quel que soit n, la restriction à $U_{\lambda_i'}$ de ε_n' est égale à celle de ε_{0n}, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Compte tenu de (2.2.3), on voit donc que la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents munis d'une connexion intégrable et surconvergente est équivalente à la catégorie limite inductive des catégories des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable sur les voisinages stricts V de $]X[$, pour lesquels les isomorphismes ε_n sont induits par un isomorphisme entre les deux images inverses sur un voisinage strict de $]X[_{P^2}$, soit encore à la catégorie limite inductive des catégories des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents, munis d'un isomorphisme entre leur deux images inverses sur un voisinage strict de $]X[_{P^2}$, cet isomorphisme vérifiant la condition de cocycle.

(2.2.7) PROPOSITION. — *Soient E, F deux $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis de connexions intégrables et surconvergentes.*

(i) *L'isomorphisme* (2.2.5.1) *est déterminé de manière unique par la connexion, et même par sa restriction à $]X[$. Il satisfait nécessairement la relation de transitivité sur $]Y[_{P^3}$.*

(ii) *Si $h : E \to F$ est un homomorphisme $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-linéaire, h vérifie la relation $\varepsilon \circ p_2^*(h) = p_1^*(h) \circ \varepsilon$ si et seulement si la restriction de h à $]X[$ est horizontale. De même, une section s de E vérifie la relation $\varepsilon(p_2^*(s)) = p_1^*(s)$ si et seulement si la restriction de s à $]X[$ est horizontale.*

(iii) *Si $E' \subset E$ est un sous-$j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent, stable par la connexion de E, la restriction de celle-ci à E' est surconvergente, et il en est de même de la connexion quotient sur E/E'.*

Grâce à (2.1.11), on se ramène pour vérifier (i) et (ii) au cas où $Y = X$; on peut de plus supposer P affine. Pour $\eta < 1$, $\eta \in \Gamma^*$, soient $p_{i\eta}$ les projections de $[X]_{P^2\eta}$ sur $[X]_{P\eta}$. Comme le recouvrement du tube ouvert par les tubes fermés de rayon $\eta \to 1^-$ est admissible, il suffit de montrer que l'homomorphisme

$$p_{1\eta*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{[X]}}(p_{2\eta}^* E, p_{1\eta}^* F) \to \varprojlim_n p_{1\eta*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{[X]}}((p_{2\eta}^* E) \otimes \mathcal{O}_{[X]}/\mathcal{I}^n, (p_{1\eta}^* F) \otimes \mathcal{O}_{[X]}/\mathcal{I}^n)$$

est injectif pour tout η. Puisque $[X]_{P\eta}$ est affinoïde, on peut supposer que E possède une présentation finie. On est ainsi ramené à vérifier que l'homomorphisme

$$p_{1\eta *}p_{1\eta}^{*}F \longrightarrow \varprojlim_n p_{1\eta *}((p_{1\eta}^{*}F)/\mathcal{I}^n(p_{1\eta}^{*}F))$$

est injectif. Comme f est lisse au voisinage de X, le théorème de fibration faible (1.3.2) permet de recouvrir $[X]_{P\eta}$ par des ouverts affinoïdes de la forme $U = \mathrm{Spm}\,A$ au-dessus desquels $[X]_{P^2\eta}$ s'identifie au produit $U \times D(0, \eta^+)^m$. Si $M = \Gamma(U, F)$, on obtient en prenant les sections sur U un homomorphisme de la forme

$$M \otimes_A A\{\tau_1, \ldots, \tau_m\} \longrightarrow M \otimes_A A[[\tau_1, \ldots, \tau_m]],$$

dont l'injectivité se ramène par dévissage au cas où M est un quotient de A.

Pour prouver l'assertion (iii), on observe d'abord que $p_i^*E' \subset p_i^*E$: d'après (2.2.1), les projections p_i sont lisses, donc plates [Rb1], sur un voisinage strict de $]X[_{P^2}$, de sorte que les morphismes d'espaces annelés $p_i : (]Y[_{P^2}, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}) \to (]Y[_P, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[})$ sont plats. On applique alors ce qui précède à l'homomorphisme composé

$$p_2^*E' \longrightarrow p_2^*E \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} p_1^*E \longrightarrow p_1^*E/E'.$$

(2.2.8) COROLLAIRE. — *Soit E un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent, muni d'une connexion intégrable ∇. Pour que ∇ soit surconvergente, il faut et suffit qu'il existe un recouvrement ouvert $(P_i)_{i\in I}$ de P tel que, pour tout i, la restriction de ∇ à $P_{iK} \cap\,]Y[_P =]P_i \cap Y[_{P_i}$ soit surconvergente.*

Il est clair que la restriction à $]P_i \cap Y[$ d'une connexion surconvergente est encore surconvergente. Inversement, les ouverts $]P_i \cap Y[_{P^2}$ forment un recouvrement admissible de $]Y[_{P^2}$, et les isomorphismes (2.2.5.1) obtenus sur chacun des $]P_i \cap Y[_{P^2}$ se recollent grâce à (2.2.7) (i).

Compte tenu de (2.1.9) et (2.1.11), on obtient aussi les corollaires :

(2.2.9) COROLLAIRE. — *La catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable et surconvergente est une sous-catégorie de la catégorie des $\mathcal{O}_{]X[}$-modules cohérents à connexion intégrable (resp. et convergente), et une sous-catégorie pleine de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable.*

(2.2.10) COROLLAIRE. — *La catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable et surconvergente est une catégorie abélienne, possédant un produit tensoriel et un $\mathcal{H}om$ interne, et le foncteur d'oubli de la connexion est exact.*

(2.2.11) PROPOSITION. — *Soient $(X_i)_{i=1\ldots n}$ un recouvrement ouvert fini de X, j_i l'immersion de X_i dans Y. Supposons donné un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E cohérent, muni d'une connexion intégrable ∇, et, pour tout i, soit $(E_i, \nabla_i) = j_i^\dagger(E, \nabla)$. Pour que ∇ soit surconvergente, il faut et suffit que ∇_i soit surconvergente pour tout i.*

Cela résulte immédiatement de (2.1.12) (ii), appliqué aux homomorphismes entre p_2^*E et p_1^*E.

Remarque. — Il résulte donc de (2.1.12) que la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$–modules cohérents, munis d'une connexion intégrable et surconvergente, est de nature locale en X : si on associe à tout ouvert X de Y la catégorie correspondante, et si pour tout $j' : X' \subset Y$, avec $X' \subset X$, on définit le foncteur de restriction correspondant comme étant égal à $j'^\dagger$, on obtient de la sorte un champ sur Y.

Nous allons voir que la surconvergence d'une connexion sur un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E peut être testée en choisissant des coordonnées locales, et en étudiant la série de Taylor (2.2.4.1). D'après (2.2.8) et (2.2.11), on peut pour cela localiser sur P, et sur X. Montrons auparavant un lemme.

(2.2.12) LEMME. — *Soient A une K-algèbre de Tate, munie d'une norme de Banach $\|-\|$, $X = \mathrm{Spm}\, A$, $Y = X \times D(0, 1^+)^m = \mathrm{Spm}\, A\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$, E un A-module de type fini, muni en tant que A-module d'une norme de Banach encore notée $\|-\|$* [BG, 3.7.3.3]. *Soient $\eta \in \Gamma^*$ tel que $\eta \leq 1$, et $B_\eta = \Gamma(X \times D(0, \eta^+)^m, \mathcal{O}_Y)$. Alors tout élément $e \in M \otimes_A B_\eta$ s'écrit de manière unique comme somme d'une série*

(2.2.12.1) $$e = \sum_{\underline{k}} e_{\underline{k}} \otimes \underline{\tau}^{\underline{k}},$$

avec $e_{\underline{k}} \in M$, et $\|e_{\underline{k}}\|\eta^{|\underline{k}|} \to 0$ si $|\underline{k}| \to \infty$.

Comme $\|\tau_i\| \leq \eta$ dans B_η, la condition $\|e_{\underline{k}}\|\eta^{|\underline{k}|} \to 0$ entraîne la convergence de la série (2.2.12.1) dans $M \otimes_A B_\eta$ (la topologie définie par une norme de Banach en tant que B_η-algèbre coïncidant avec la topologie produit tensoriel [BG, 3.7.3.6]).

L'unicité des $e_{\underline{k}}$ se voit en introduisant, pour tout entier n, le quotient $B_n = A\{\tau_1, \dots, \tau_m\}/(\tau_1, \dots, \tau_m)^{n+1}$, libre de rang fini sur A, et en utilisant la continuité de l'homomorphisme $M \otimes_A B_\eta \to M \otimes_A B_n$. Pour prouver l'existence d'une telle série, il suffit d'écrire e sous la forme

$$e = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes \varphi_i,$$

avec $\varphi_i \in B_\eta$; chaque φ_i est alors de la forme $\varphi_i = \sum_{\underline{k}} a_{i\underline{k}} \underline{\tau}^{\underline{k}}$, avec $\|a_{i\underline{k}}\|\eta^{|\underline{k}|} \to 0$, et on pose $e_{\underline{k}} = \sum_i a_{i\underline{k}} m_i$.

(2.2.13) PROPOSITION. — *Supposons P et S affines, et Z de la forme $Y \cap V(g)$, avec $g \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$; notons $U_\lambda = \{ x \in P_K \mid |g(x)| \geq \lambda \}$. Supposons de plus qu'il existe des sections $t_1, \dots, t_m \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ telles que $\Omega^1_{P/S}$ soit libre au voisinage de X, de base $dt_1, \dots, dt_m$. Il existe alors un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$ sur lequel $dt_1, \dots, dt_m$*

forment une base de $\Omega^1_{P_K/S_K}$; *soient* $\partial_1, \ldots, \partial_m$ *les dérivations correspondantes. Soient* V *un voisinage strict de* $]X[$, $(\mathcal{E}, \nabla_0)$ *un* $\mathcal{O}_V$*-module cohérent muni d'une connexion intégrable, et* $(E, \nabla) = j^\dagger(\mathcal{E}, \nabla_0)$.

(i) *Supposons* ∇ *surconvergente. Pour tout* $\eta < 1$, $\eta \in \Gamma^*$, *il existe* $\lambda < 1$, $\lambda \in \Gamma^*$, *tel que* $[Y]_\eta \cap U_\lambda \subset V$, *et que, pour toute section* $e \in \Gamma([Y]_\eta \cap U_\lambda, \mathcal{E})$, *on ait*

$$\| \tfrac{1}{\underline{k}!} \underline{\partial}^{\underline{k}} e \| \, \eta^{|\underline{k}|} \to 0$$

pour $|\underline{k}| \to \infty$, $\| - \|$ *désignant une norme de Banach sur* $\Gamma([Y]_\eta \cap U_\lambda, \mathcal{E})$.

(ii) *Réciproquement, si, pour tout* $\eta < 1$, $\eta \in \Gamma^*$, *on peut trouver* $\lambda < 1$, $\lambda \in \Gamma^*$, *vérifiant les conditions de* (i), *alors* ∇ *est surconvergente.*

L'homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}^m_{P_K} \to \Omega^1_{P_K/S_K}$ défini par $dt_1, \ldots, dt_m$ est un isomorphisme sur $]X[$. Comme les supports de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Coker}(\varphi)$ sont des fermés analytiques ne rencontrant pas $]X[$, l'intersection avec $]Y[$ de leur complémentaire est un voisinage strict V_0 de $]X[$ d'après (1.2.4) (ii). Quitte à rétrécir V_0, on peut de plus supposer, d'après (2.2.1), que V_0 est lisse sur S_K, et que $V_0 \subset V$.

Comme $1 \otimes g - g \otimes 1$ appartient à l'idéal de Y dans P^2, on voit que, pour $x \in [Y]_{P^2\eta}$, et $\lambda > \eta$, la condition $|(1 \otimes g)(x)| \geq \lambda$ équivaut à $|(g \otimes 1)(x)| \geq \lambda$. On a donc

$$[Y]_{P^2\eta} \cap p_1^{-1}(U_\lambda) \ = \ [Y]_{P^2\eta} \cap p_2^{-1}(U_\lambda)$$

pour $\lambda > \eta$; posons alors $V_{\eta\lambda} = [Y]_{P^2\eta} \cap p_1^{-1}(U_\lambda) = [Y]_{P^2\eta} \cap p_2^{-1}(U_\lambda)$.

Puisque ∇ est surconvergente, il existe un isomorphisme $\varepsilon : p_2^* E \xrightarrow{\sim} p_1^* E$ sur $[Y]_{P^2\eta}$ induisant les isomorphismes ε_n sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale. D'après (2.2.6), on peut alors trouver un voisinage strict V' de $]X[_{P^2}$ dans $]Y[_{P^2}$, contenu dans $p_1^{-1}(V_0) \cap p_2^{-1}(V_0)$, tel que ε soit de la forme $\varepsilon = j'^\dagger(\varepsilon')$, où $\varepsilon' : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ est un isomorphisme défini sur V', induisant modulo $\mathcal{I}^{n+1}$ les isomorphismes $\varepsilon_{0n} : \mathcal{P}^n \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}^n$ définis par ∇_0, pour tout n. Fixons $\eta < 1$, $\eta \in \Gamma^*$, et soit $\lambda < 1$, $\lambda \in \Gamma^*$, tel que $V_{\eta\lambda} \subset V'$. Quitte à augmenter λ, il résulte de (1.3.8) (ii), appliqué à $p_1 :]Y[_{P^2} \to]Y[_P$, qu'il existe un isomorphisme

$$V_{\eta\lambda} \xrightarrow{\ \sim\ } ([Y]_{P\eta} \cap U_\lambda) \times D(0, \eta^+)^m,$$

les sections $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ correspondant aux coordonnées sur $D(0, \eta^+)$. Soient $e \in \Gamma([Y]_{P\eta} \cap U_\lambda, \mathcal{E})$, et $\theta(e) = \varepsilon'(p_2^*(e)) \in \Gamma(V_{\eta\lambda}, p_1^*\mathcal{E})$. D'après (2.2.12), on peut écrire $\theta(e)$ comme somme d'une série

$$\theta(e) = \sum_{\underline{k}} \ \theta_{\underline{k}}(e) \otimes \underline{\tau}^{\underline{k}},$$

avec $\theta_{\underline{k}}(e) \in \Gamma([Y]_{P\eta} \cap U_\lambda, \mathcal{E})$, et $\|\theta_{\underline{k}}(e)\| \, \eta^{|\underline{k}|} \to 0$. Les $\theta_{\underline{k}}(e)$ sont uniquement déterminés; comme ε' induit les ε_{0n} modulo $\mathcal{I}^{n+1}$, on a nécessairement

$$\theta_{\underline{k}}(e) \ = \ \tfrac{1}{\underline{k}!} \, \underline{\partial}^{\underline{k}} e,$$

d'où (i).

Réciproquement, fixons une suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1. Pour prouver la surconvergence de ∇, il suffit alors de montrer qu'il existe une suite $\underline{\lambda}$, telle que, sur chaque $V_{\eta_i\lambda_i} = [Y]_{P^2\eta_i} \cap p_1^{-1}(U_{\lambda_i})$, il existe un isomorphisme $\varepsilon' : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ induisant les ε_{0n} : pour i variable, les isomorphismes $p_2^*E \xrightarrow{\sim} p_1^*E$ obtenus sur les $[Y]_{P\eta_i}$ en appliquant $j'^\dagger$ aux ε' se recollent nécessairement, grâce à l'argument de (2.2.7) (i). Posons $\eta = \eta_i$, $\lambda = \lambda_i$, et soit $M = \Gamma([Y]_{P\eta} \cap U_\lambda, \mathcal{E})$. Pour $e \in M$, on définit $\theta(e)$ comme somme de la série (convergente car $\|\tau_i\| \leq \eta$ sur $[Y]_{P^2\eta}$)

$$\theta(e) \;=\; \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\underline{k}!}\,\underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\tau}^{\underline{k}} \;\in\; \Gamma(V_{\eta\lambda}, p_1^*\mathcal{E}) \;\simeq\; M \otimes \Gamma(V_{\eta\lambda}, \mathcal{O}_{V_{\eta\lambda}}).$$

On vérifie que l'application $\theta : M \to M \otimes \Gamma(V_{\eta\lambda}, \mathcal{O}_{V_{\eta\lambda}})$ ainsi définie est semi-linéaire par rapport à $p_2^* : \Gamma([Y]_{P\eta} \cap U_\lambda, \mathcal{O}_{P_K}) \to \Gamma(V_{\eta\lambda}, \mathcal{O}_{V_{\eta\lambda}})$, de sorte qu'elle définit un homomorphisme $\Gamma(V_{\eta\lambda}, \mathcal{O}_{V_{\eta\lambda}})$-linéaire

$$\varepsilon \;:\; \Gamma(V_{\eta\lambda}, p_2^*\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(V_{\eta\lambda}, p_1^*\mathcal{E})$$

qui induit les ε_{0n} modulo $\mathcal{I}^{n+1}$. L'homomorphisme ε est un isomorphisme, car on construit son inverse de la même manière, en associant à e la somme de la série

$$\sum_{\underline{k}} (-1)^{|\underline{k}|}\,\underline{\tau}^{\underline{k}} \otimes \frac{1}{\underline{k}!}\,\underline{\partial}^{\underline{k}} e \;\in\; \Gamma(V_{\eta\lambda}, p_2^*\mathcal{E}) \;\simeq\; \Gamma(V_{\eta\lambda}, \mathcal{O}_{V_{\eta\lambda}}) \otimes M.$$

Dans le cas particulier où $Z = \emptyset$, la proposition précédente donne donc un critère pour qu'une connexion soit convergente :

(2.2.14) COROLLAIRE. — *Supposons que P et S soient affines, que X soit fermé dans P, et que $\Omega^1_{P/S}$ soit libre au voisinage de X, de base $dt_1, \ldots, dt_m$; soient $\partial_1, \ldots, \partial_m$ les dérivations correspondantes. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{]X[}$-module cohérent, muni d'une connexion intégrable ∇, la connexion ∇ est convergente si et seulement si, pour tout $\eta < 1$, et toute section $e \in \Gamma([X]_\eta, \mathcal{E})$, on a*

$$\left\| \frac{1}{\underline{k}!}\,\underline{\partial}^{\underline{k}} e \right\| \eta^{|\underline{k}|} \to 0$$

pour $|\underline{k}| \to \infty$, $\|-\|$ désignant une norme de Banach sur $\Gamma([X]_\eta, \mathcal{E})$.

(2.2.15) *Exemples.* — (i) La dérivation usuelle $d : \mathcal{O}_{]Y[} \to \Omega^1_{]Y[}$ définit une structure de module à connexion surconvergente sur $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$.

(ii) La théorie de Dwork fournit de nombreux exemples de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules à connexion surconvergente, dans des situations où P est un espace projectif et X un ouvert de sa réduction modulo p. Rappelons par exemple les deux cas importants dans la théorie des sommes exponentielles, en renvoyant à [Be3] pour plus de détails.

a) On choisit π tel que $\pi^{p-1} = -p$, et on prend $K = \mathbb{Q}_p(\pi)$, $P = \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$, $Y = P_0$, $X = \mathbb{A}^1_k$;

par suite, $]Y[\ = \mathbb{P}^1_K$, et $]X[\ = D(0,\ 1^+)$. On définit un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module à connexion surconvergente $\mathcal{L}_\pi$ en munissant $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ de la connexion définie par

$$\nabla(1) = -\pi\, dt,$$

où t est une coordonnée sur $\mathbb{A}^1_k$.

b) On choisit $a \in \mathbb{Z}_p$, P et Y comme plus haut, $X = \mathbb{P}^1_k - \{0, \infty\}$, si bien que $]X[$ est la couronne de rayon 1 de $\mathbb{A}^1_k$. On définit alors un module à connexion surconvergente $\mathcal{K}_a$ en munissant $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ de la connexion définie par

$$\nabla(1) = at^{-1}dt.$$

(2.2.16) Supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "w"'] & Y' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "v"'] & P' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & P \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & S \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \arrow[rr, hook] & & \operatorname{Spf} \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

où f' est supposé lisse sur un voisinage de X' dans P'. L'homomorphisme (2.1.4.2) permet de définir un foncteur, encore noté u_K^*, de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules dans la catégorie des $j'^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_{P'}}$-modules, et il s'étend de la manière usuelle aux modules à connexion intégrable. Il est clair que l'image inverse d'une connexion surconvergente est encore surconvergente.

Le rôle de l'isomorphisme ε sur $]Y[_{P^2}$ est d'assurer que le foncteur u_K^* ne dépend, à isomorphisme canonique près, que de la restriction de u à Y'; en particulier, deux morphismes ayant même réduction sur k donnent des foncteurs image inverse isomorphes :

(2.2.17) PROPOSITION. — *Soient $u, u' : P' \to P$ deux morphismes dont la restriction à Y' se factorise par v.*

(i) *Il existe un isomorphisme canonique $\varepsilon_{u',u}$ entre les foncteurs u_K^* et $u_K'^*$ sur la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$–modules à connexion intégrable et surconvergente.*

(ii) *Pour toute section horizontale s, on a*

(2.2.17.1) $$\varepsilon_{u',u}(u_K'^*(s)) = u_K^*(s).$$

Soit $h = (u, u') : P' \to P \times_S P$. Comme u et u' coïncident sur Y', le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr] \arrow[d, "v"'] & & P' \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r] & P \arrow[r] & P \times_S P \end{tikzcd}$$

est commutatif. Par suite, h_K s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {]Y'[_{P'}} \arrow[d, shift right, "u_K"'] \arrow[d, shift left, "u'_K"] \arrow[dr, "h_K"] & \\ {]Y[_P} & {]Y[_{P^2}}. \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Pour tout $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module à connexion intégrable et surconvergente E, l'isomorphisme ε sur $]Y[_{P^2}$ donne alors, par image inverse par h_K, un isomorphisme canonique

$$\varepsilon_{u',u} = h_K^*(\varepsilon) : u_K'^*E \xrightarrow{\sim} u_K^*E, \tag{2.2.17.2}$$

dont on vérifie aisément, à l'aide de la condition de transitivité sur $]Y[_{P^3}$, qu'il est horizontal pour les connexions images inverses.

On observera que cette condition de transitivité permet également d'assurer, pour un troisième morphisme $u'' : P' \to P$ coïncidant avec u et u' sur Y', la relation

$$\varepsilon_{u'',u'} \circ \varepsilon_{u',u} = \varepsilon_{u'',u}. \tag{2.2.17.3}$$

Enfin, l'assertion sur les sections horizontales résulte de (2.2.7) (ii).

Remarque. — D'après la définition, l'isomorphisme (2.2.17.2) peut être facilement explicité, avec des coordonnées locales, par substitution dans la série de Taylor (2.2.4.2) - voir en [Be3, 3.4] un exemple d'un tel calcul pour expliciter l'action du Frobenius dans la théorie de Dwork.

2.3. Isocristaux convergents et surconvergents

Gardant les mêmes notations et les mêmes hypothèses qu'en (2.1) et (2.2), nous examinons maintenant la dépendance par rapport à P et Y de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis d'une connexion intégrable et surconvergente. On aboutit ainsi à la construction de deux catégories fonctoriellement associées à X, celle des isocristaux convergents, et celle des isocristaux surconvergents.

Le premier pas est un théorème d'indépendance par rapport à P :

(2.3.1) THÉORÈME. — *Considérons un diagramme commutatif de la forme*

$$\begin{tikzcd} & & P' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, hook, "j"] & Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[ur, "i'"] & P \end{tikzcd}$$

où u est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels, lisse au voisinage de X.

(i) *Le foncteur u_K^* induit une équivalence de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules* *cohérents, munis d'une connexion relativement à S, intégrable et surconvergente le long de $Y-X$, avec la catégorie analogue sur $]Y[_{P'}$.*

(ii) *Si E est un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-module cohérent, muni d'une connexion relativement à S, intégrable et surconvergente le long de $Y-X$, l'homomorphisme u_K^* induit un isomorphisme entre les sections horizontales*

$$\Gamma(]Y[_P, E)_{\nabla=0} \xrightarrow{\sim} \Gamma(]Y[_{P'}, u_K^* E)_{\nabla=0}.$$

Il existe des recouvrements affines (P_α) et (P'_α) de P et P', tels que $u(P'_\alpha) \subset P_\alpha$ et $Y \cap P'_\alpha = Y \cap P_\alpha$. Comme l'assertion est locale sur $]Y[_P$, cela permet de supposer P et P' affines. D'autre part, la remarque de (2.2.11) montre que l'assertion est locale sur X. On peut donc supposer que X est le complémentaire dans Y d'un fermé défini par une équation, et que le faisceau conormal à X dans $P' \times_P X$ est libre de rang d sur $\mathcal{O}_X$. Soient P'' l'espace affine formel de dimension relative d sur P, $s : P \to P''$ la section nulle. Le théorème de fibration fort (1.3.7) permet alors de définir un P-morphisme $\varphi : P' \to P''$ commutant aux immersions fermées $Y \to P'$ et $Y \to P''$ (cette dernière étant définie par s), et induisant un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_{P'}$, et un voisinage strict de $]X[_{P''}$; il induit de même un isomorphisme entre des voisinages stricts de $]X[_{P'^2}$ et $]X[_{P''^2}$. Comme la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable et surconvergente ne dépend que d'un voisinage strict de $]X[$, on est ramené au cas où $P' = P''$.

Le foncteur s_K^* est alors quasi-inverse à gauche de u_K^*, et il suffit de définir un isomorphisme de foncteurs $u_K^* \circ s_K^* \simeq \mathrm{Id}$. Comme $s \circ u$ et Id induisent tous deux l'identité sur Y, c'est une conséquence de (2.2.17). Enfin, (ii) résulte de (i).

Remarque. — Nous construirons en (3.1.10) un foncteur quasi-inverse canonique de u_K^*.

(2.3.2) *Définitions.* — Soient S un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, Y un k-schéma de type fini, muni d'un $\mathcal{V}$-morphisme $Y \to S$, X un ouvert de Y, $j : X \hookrightarrow Y$.

(i) Supposons qu'il existe un S-schéma formel de type fini P, et une S-immersion fermée $i : Y \hookrightarrow P$, tels que P soit lisse sur S au voisinage de X. D'après (2.3.1), la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis d'une connexion intégrable et surconvergente relativement à S, ne dépend à équivalence canonique près que du couple (X, Y) au-dessus de S, et non de P. En effet, si $i' : Y \hookrightarrow P'$ est une autre S-immersion fermée telle que P' soit un S-schéma formel lisse au voisinage de X, posons $P'' = P \times_S P'$, et soit $i'' : Y \hookrightarrow P''$ l'immersion diagonale. Les deux projections $q : P'' \to P$, $q' : P'' \to P'$ sont lisses au voisinage de X, de sorte que les foncteurs image inverse q_K^* et $q_K'^*$ sont respectivement des équivalences de catégories de la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis d'une connexion intégrable et surconvergente le long de Z, sur $]Y[_P$ et $]Y[_{P'}$, dans la catégorie analogue sur $]Y[_{P''}$. On en déduit une équivalence de catégories, définie à isomorphisme canonique près, entre ces deux catégories sur $]Y[_P$ et $]Y[_{P'}$.

Par définition, la catégorie des *isocristaux sur X/S, surconvergents le long de Z*, notée $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X, Y/S)$, est la catégorie des $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules cohérents, munis d'une connexion relativement à S, intégrable et surconvergente. Lorsque Z est vide, cette catégorie sera appelée catégorie des *isocristaux convergents sur X/S*, et notée $\mathrm{Isoc}(X/S)$. Nous emploierons parfois le terme "cristal" au lieu de "isocristal" ([Be2], [Be3]), lorsqu'aucune confusion n'est possible avec la notion usuelle de cristal [Be1]. Lorsque $S = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, nous emploierons plutôt la notation X/K.

Le $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y[_P}$-module à connexion correspondant à un isocristal surconvergent E sera appelé *réalisation de E sur P*, et souvent noté E_P. On dispose donc d'une telle réalisation pour tout plongement $i' : Y \hookrightarrow P'$ dans un S-schéma formel, lisse au voisinage de X. De plus, si $u : P' \to P$ est un S-morphisme entre deux tels plongements, il existe un isomorphisme canonique horizontal

$$u_K^* E_P \xrightarrow{\ \sim\ } E_{P'}. \tag{2.3.2.1}$$

En effet, avec les notations introduites plus haut, les deux morphismes $q : P'' \to P$ et $u \circ q' : P'' \to P' \to P$ coïncident sur $Y \subset P''$, de sorte que la connexion de E_P fournit l'isomorphisme (2.2.17.2)

$$q_K'^{*} u_K^* E_P \xrightarrow{\ \sim\ } q_K^* E_P.$$

Comme, par construction, $E_{P'}$ est le module à connexion sur $]Y[_{P'}$ d'image $q_K^* E_P$ par l'équivalence de catégories $q_K'^{*}$, on en déduit l'isomorphisme (2.3.2.1).

On vérifie sans difficulté que, si l'on dispose d'un troisième plongement de Y, et d'un morphisme de celui-ci dans P', les isomorphismes (2.3.2.1) correspondants vérifient une relation de transitivité (cf. (2.2.17.3)).

Si $E \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X, Y/S)$, on appelera *section horizontale de E* toute section horizontale d'une réalisation E_P de E. Il résulte de (2.3.1) (ii) que le module des sections horizontales de E est indépendant de la réalisation choisie. Nous le noterons $\Gamma((X, Y)/S, E)$.

(ii) Soient $E \in \mathrm{Isoc}^{\dagger}(X, Y/S)$, et $i : U \hookrightarrow T$ un plongement d'un ouvert U de Y dans un S-schéma formel non nécessairement lisse. On associe à E un $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]U[}$-module cohérent E_T sur $]U[_T$ de la façon suivante. Localement, il existe une S-immersion fermée $U \hookrightarrow P$ de U dans un S-schéma formel lisse P, et un S-morphisme $u : T \to U$ induisant l'identité sur U. Soient E_P la réalisation de la restriction de E à U sur $]U[_P$, et $u_K :]U[_T \to]U[_P$ le morphisme induit par u. On vérifie aisément que le $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]U[}$-module $E_T = u_K^* E_P$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de P et u. De plus, cette construction fournit encore un isomorphisme (2.3.2.1) pour tout S-morphisme $u : T' \to T$ entre plongements d'ouverts de Y dans des S-schémas formels. On obtient ainsi une description de style cristallin de la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(X, Y/S)$, qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter.

Lorsque $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète, la construction de E_T s'étend au cas où T est un S-schéma formel vérifiant les hypothèses de (0.2.6). D'après (1.1.4) (ii), on peut se limiter à considérer le cas où T possède un idéal de définition $\mathcal{I}$ tel que $U = V(\mathcal{I})$.

La fonctorialité de la construction permet de se ramener au cas affine. Si on choisit une immersion fermée $u_0 : U \hookrightarrow P$, où P est un S-schéma formel π-adique affine et lisse, le fait que $\pi = 0$ sur U permet de construire par récurrence une famille de S-morphismes $u_i : \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_T/\mathcal{I}^{i+1} \to P$, telle que u_i induise u_{i-1} sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_T/\mathcal{I}^i$. Par passage à la limite, on en déduit un S-morphisme $u : T \to P$, qui définit un morphisme d'espaces analytiques $u_K :]U[_T \to]U[_P$ d'après la remarque (1.1.11) (i). La construction s'achève alors comme précédemment.

(iii) Lorsqu'il n'existe pas de plongement global $i : Y \hookrightarrow P$, on peut définir la catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S)$ par recollement : on choisit un recouvrement ouvert (Y_α) de Y, et des immersions fermées $Y_\alpha \hookrightarrow P_\alpha$ dans des S-schémas formels lisses au voisinage de $X_\alpha = Y_\alpha \cap X$; on pose $Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \cap Y_\beta, X_{\alpha\beta} = X \cap Y_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta} = P_\alpha \times_S P_\beta$; on note $j_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow Y_\alpha$, $j_{\alpha\beta} : X_{\alpha\beta} \hookrightarrow Y_{\alpha\beta}$ les restrictions de j, $p_{\alpha\beta} : P_{\alpha\beta} \to P_\alpha$, $q_{\alpha\beta} : P_{\alpha\beta} \to P_\beta$ les projections. Un isocristal sur X/S, surconvergent le long de Z, est alors constitué par la donnée, pour tout α, d'un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y_\alpha[_{P_\alpha}}$-module cohérent E_α, muni d'une connexion intégrable et surconvergente, et, pour tous α, β, d'un isomorphisme horizontal $p^*_{\alpha\beta K}E_\alpha \simeq q^*_{\alpha\beta K}E_\beta$ sur $]Y_{\alpha\beta}[_{P_{\alpha\beta}}$, ces isomorphismes vérifiant la condition de cocycle.

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que la catégorie ainsi définie ne dépend pas, à équivalence canonique près, des choix effectués. Par souci de simplicité, nous nous limiterons généralement dans la suite au cas où il existe un plongement global $Y \hookrightarrow P$ lisse au voisinage de X, les résultats obtenus s'étendant sans difficulté au cas général.

(iv) La catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S)$ est fonctorielle par rapport à (X, Y, S). En effet, à tout diagramme commutatif de la forme

(2.3.2.2)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d, "w"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

on peut associer en procédant comme suit un *foncteur image inverse*

$$v^* \ : \ \mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(X', Y'/S'),$$

ne dépendant que de v, à isomorphisme canonique près.

Supposons d'abord qu'on puisse trouver un plongement $i : Y \hookrightarrow P$ (resp. $i' : Y' \hookrightarrow P'$), où P (resp. P') est lisse sur S (resp. S') au voisinage de X (resp. X'), et un S-morphisme $u : P' \to P$ induisant v. D'après (2.2.17), le foncteur u_K^* sur la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis d'une connexion intégrable et surconvergente, ne dépend en fait (à isomorphisme canonique près) que de v. D'autre part, si on change les plongements P et P', en gardant l'hypothèse d'existence d'un prolongement de v en $P' \to P$, la méthode du plongement diagonal montre que les foncteurs images directes se correspondent via les équivalences de catégories (2.3.1). On peut donc prendre le foncteur induit par u_K^* comme définition du foncteur image inverse v^* pour les isocristaux, et nous dirons que u_K^* en est une *réalisation*.

S'il n'existe pas de morphisme $u : P' \to P$ prolongeant v, il est facile de changer le plongement P' de manière à assurer l'existence d'un prolongement de v : il suffit pour cela de remplacer P' par le produit $P \times_S P'$, et i' par l'immersion $i'' = (i', i \circ v)$; P'' est alors lisse sur P', donc sur S', au voisinage de X, et la projection q de P'' sur P est un prolongement de v. On observera que, dans le cas où il existe $u : P' \to P$ prolongeant v, le foncteur u_K^* utilisé précédemment est canoniquement isomorphe, via l'équivalence $q_K'^*$ induite par $q' : P'' \to P'$, au foncteur q_K^* utilisé ici : cela résulte, d'après (2.2.17), de ce que q et $u \circ q'$ coïncident sur Y'.

Pour tout morphisme $(w', v') : (X'', Y'') \to (X', Y')$ au-dessus de $S'' \to S'$, on montre facilement l'existence d'un isomorphisme canonique de foncteurs

$$(v \circ v')^* \simeq v'^* \circ v^*.$$

(2.3.3) *Remarques.* — (i) D'après (2.2.11), on définit un champ sur Y en associant à tout ouvert $X \subset Y$ la catégorie des isocristaux sur X/S, surconvergents le long de $Y - X$, les morphismes de restriction étant les morphismes image inverse.

On observera qu'on obtient également un champ sur Y en associant à tout ouvert $X \subset Y$ la catégorie des isocristaux convergents sur X/S : cela résulte de ce que pour tout recouvrement ouvert (X_α) de X, les $]X_\alpha[$ forment un recouvrement admissible de $]X[$.

(ii) D'après (2.2.3) (ii), toute réalisation E_P d'un isocristal E de $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/K)$ est un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module localement libre de rang fini. Il en est donc de même des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_T}$-modules E_T définis en (2.3.2) (ii), pour toute immersion fermée $Y \hookrightarrow T$.

(iii) D'après (2.2.10), la catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S)$ est abélienne, possède produit tensoriel et $\mathcal{H}om$ interne, et, pour toute immersion fermée $Y \hookrightarrow T$, le foncteur qui associe à un isocristal E le $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module E_T est exact; si T est lisse sur S au voisinage de X, il est fidèle.

(iv) Lorsque, dans le diagramme (2.3.2.2), le morphisme $S' \to S$ est plat, le foncteur $v^* : \mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S) \to \mathrm{Isoc}^\dagger(X', Y'/S')$ est exact. C'est en effet une propriété locale sur Y', de sorte qu'on peut supposer S, S', Y et Y' affines. On plonge alors Y dans un S-schéma formel affine et lisse P; Y' s'envoie dans $P \times_S S'$, et on plonge Y' dans un schéma formel P' affine et lisse sur $P \times_S S'$. Comme P' est lisse sur S', le morphisme composé $u : P' \to P \times_S S' \to P$ fournit une réalisation de v^*. Or u est un morphisme plat, donc il en est de même de u_K, et du morphisme d'espaces annelés $(]Y'[_{P'}, j'^\dagger\mathcal{O}_{]Y'[}) \to (]Y[_P, j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[})$ induit par u_K. L'assertion en résulte.

(2.3.4) La catégorie des isocristaux convergents définie ici est équivalente à celle que définit Ogus dans [Og1]. En effet, une des descriptions de cette dernière est la suivante [Og1, (2.11)] : pour toute immersion fermée de X dans un $\mathcal{V}$-schéma formel P, Ogus construit un système inductif de $\mathcal{V}$-schémas formels $T_{P,n}(X)$, qui sont des modèles formels des tubes fermés $[X]_{P,\, p^{1/n}}$ (voir (1.1.10)); si P est lisse sur $\mathcal{V}$, un isocristal convergent sur X peut alors être décrit comme une famille compatible de $\mathcal{O}_{T_{P,n}(X)} \otimes_{\mathcal{V}} K$-

modules cohérents E_n sur les $T_{P,n}(X)$, munis d'isomorphismes $p_2^* E_n \simeq p_1^* E_n$ sur $T_{P^2,n}(X)$, vérifiant la condition de cocycle. Mais la donnée d'un $\mathcal{O}_{T_{P,n}(X)} \otimes_{\mathcal{V}} K$-module cohérent E_n est équivalente à la donnée d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{E}_n$ sur la fibre générique $[X]_{P,p^{1/n}}$ de $T_{P,n}(X)$ [Og1, (1.5)], et le fait que l'on se donne une famille de faisceaux E_n compatible aux morphismes $T_{P,n}(X) \to T_{P,n+1}(X)$ signifie que l'on se donne pour tout n un isomorphisme de la restriction de $\mathcal{E}_{n+1}$ à $[X]_{P,p^{1/n}}$ avec $\mathcal{E}_n$. Comme les $[X]_{P,p^{1/n}}$ forment un recouvrement admissible de $]X[_P$, la donnée du système des $\mathcal{E}_n$ équivaut à celle d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $]X[_P$, et on retrouve la description des isocristaux convergents donnée en (2.3.2).

Nous donnons maintenant un énoncé d'indépendance de la catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/S)$ par rapport à Y :

(2.3.5) THÉORÈME. — *Soient $j : X \hookrightarrow Y$ et $j' : X \hookrightarrow Y'$ deux immersions ouvertes, Y et Y' étant des k-schémas de type fini, $Z = Y - X$, $Z' = Y' - X$, et soit $v : Y' \to Y$ un morphisme propre tel que $v \circ j' = j$.*

(i) *Le foncteur v^* est une équivalence de la catégorie des isocristaux sur X/S surconvergents le long de Z dans la catégorie des isocristaux sur X/S surconvergents le long de Z'.*

(ii) *Si E est un isocristal sur X/S surconvergent le long de Z, l'homomorphisme canonique*

$$\Gamma((X,Y)/S, E) \longrightarrow \Gamma((X,Y')/S, v^*E)$$

est un isomorphisme.

L'assertion (ii) résulte encore de (i).

Pour prouver (i), observons tout d'abord que le lemme de Chow précis [GR2, cor. 5.7.14] permet de trouver un éclatement $v' : Y'' \to Y'$ centré en dehors de X, tel que $v'' : Y'' \to Y$ soit projectif. Il suffit alors de montrer que v'^* et v''^* sont des équivalences de catégories. On est ainsi ramené au cas où v est projectif.

L'assertion est locale sur Y, qu'on peut donc supposer affine. Soit $i : Y \to P$ une immersion fermée dans un schéma formel affine, lisse sur S au voisinage de X. On peut trouver un espace projectif (formel) $P' = \mathbb{P}_P^N$ sur P, et une P-immersion fermée $i' : Y' \to P'$; soit $P'_Y = P' \times_P Y$. Le caractère local en X de la catégorie des isocristaux surconvergents le long de $Y - X$ (cf. (2.2.17)) montre qu'il suffit de prouver le théorème pour une base d'ouverts de X; on peut ainsi supposer qu'il existe un entier m et une section $s \in \Gamma(P'_Y, \mathcal{O}_{P'_Y}(m))$ telle que $X = Y' \cap D(s)$ dans P'_Y. On peut de plus supposer $D(s)$ assez petit pour qu'il existe des sections $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N \in \Gamma(D(s), \mathcal{O}_{P'_Y})$ formant une suite régulière de générateurs de l'idéal de X dans $D(s)$. Quitte à multiplier les $\bar{t}_i$ par une puissance de s, on peut supposer qu'il existe un entier d tel qu'ils se prolongent en une famille de sections, encore notées $\bar{t}_i$, de $\Gamma(P'_Y, \mathcal{O}_{P'_Y}(md))$. Soient $t_1, \dots, t_N \in \Gamma(P', \mathcal{O}_{P'}(md))$

relevant les $\bar{t}_i$, et $T \subset P'$ le sous-schéma formel des zéros de $t_1, \ldots, t_N$. Comme la catégorie des isocristaux surconvergents ne dépend que d'un voisinage strict arbitrairement petit de $]X[$, on peut d'après (1.2.11) supposer que Y' est l'adhérence de X dans P'_Y; Y' est alors un sous-schéma fermé de T.

Par construction, le morphisme $T \to P$ est étale aux points de X. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & T \arrow[d, "u'"] \\ X \arrow[ur, "j'"] \arrow[r, hook, "j"] & Y \arrow[r, hook, "i"] & P \end{tikzcd}$$

vérifie alors les hypothèses du théorème (1.3.5), et il en est de même du diagramme analogue où l'on remplace P et T par $P \times_S P$ et $T \times_S T$. Par suite, u'_K (resp. $u'_K \times u'_K$) induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_T$ dans $]Y'[_T$ (resp. de $]X[_{T^2}$ dans $]Y'[_{T^2}$) et un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ (resp. de $]X[_{P^2}$ dans $]Y[_{P^2}$). Le foncteur u'^*_K induit donc une équivalence entre la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents, munis d'une connexion intégrable surconvergente, et la catégorie analogue sur $]Y'[_T$; comme u'^*_K est une réalisation de v^*, le théorème en résulte.

(2.3.6) *Définition.* — Soient X un k-schéma séparé de type fini, et $\overline{X}$ une compactification de X au-dessus de S. La catégorie des isocristaux sur X, surconvergents le long de $\overline{X} - X$, est appelée simplement catégorie des *isocristaux surconvergents sur* X/S, et noté $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/S)$.

Il résulte en effet du théorème précédent que cette catégorie ne dépend pas, à équivalence canonique près, du choix de la compactification $\overline{X}$: si $\overline{X}'$ est une autre compactification, soient $\overline{X}''$ l'adhérence schématique de X plongé diagonalement dans $\overline{X} \times_S \overline{X}'$, $v : \overline{X}'' \to \overline{X}$, $v' : \overline{X}'' \to \overline{X}'$ les morphismes induits par les deux projections ; les foncteurs v^* et v'^* sont alors des équivalences de catégories.

La catégorie des isocristaux surconvergents sur X/S est fonctorielle en (X, S). En effet, pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

on peut trouver des compactifications Y, Y' de X et X' au-dessus de S et S', telles qu'il existe un k-morphisme $v : Y' \to Y$ prolongeant w : si l'on choisit des compactifications arbitraires de X et X' entre lequelles w ne se prolonge pas nécessairement, il suffit de remplacer Y' par l'adhérence schématique de X' dans $Y' \times_S Y$, et le prolongement v est alors induit par la projection sur Y. Par ailleurs, si l'on change de compactifications et de prolongements, la méthode du plongement diagonal, et le théorème (2.3.5) appliqué aux projections, montrent qu'il existe un isomorphisme canonique entre les foncteurs v^* correspondants. A isomorphisme canonique près, on peut donc définir le *foncteur image inverse* w^* pour les isocristaux surconvergents sur X/S comme étant le foncteur v^*. On vérifie encore aisément l'existence d'un isomorphisme canonique de foncteurs $(w \circ w')^* \simeq w'^* \circ w^*$, pour $w' : X'' \to X'$.

D'après (2.3.5) (ii), le module des sections horizontales d'un isocristal surconvergent E sur X est indépendant de la compactification choisie ; il est évidemment fonctoriel en X et E.

Remarque. — Supposons qu'il existe une immersion fermée de X dans un $\mathcal{V}$-schéma T séparé, de type fini, et lisse au voisinage de X. Nous avons vu en (1.3.10) qu'il est possible de définir la notion de système fondamental de voisinages stricts de $]X[$ dans T_K^{an} sans faire intervenir explicitement de compactification de T, donc de X. Comme la construction de la catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ ne dépend que d'un système fondamental de voisinages stricts de $]X[$ dans $]\overline{X}[$, elle peut être décrite à partir de l'espace analytique T_K^{an}, sans faire intervenir explicitement de compactifications. Nous ne chercherons pas à développer cette description en toute généralité, mais nous l'expliciterons en (2.5) lorsque X est affine et lisse, pour donner une description de style Monsky-Washnitzer de $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$.

(2.3.7) Pour introduire la notion de F-isocristal (sur)convergent, nous supposerons que $S = \mathrm{Spec}\,\mathcal{V}$, que le corps résiduel k de $\mathcal{V}$ est de caractéristique $p > 0$, et que X est un ouvert d'un k-schéma de type fini Y.

Tout d'abord, si $\sigma : K \to K'$ est une extension de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique, $\mathcal{V}'$ l'anneau d'entiers de K', et k' son corps résiduel, soient X', Y' déduits de X, Y par le changement de base de k à k'. On dispose d'un foncteur de changement de base évident

$$\sigma^* \ : \ \mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/K) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(X', Y'/K').$$

Supposons en particulier donné un relèvement $\sigma : K \to K$ du Frobenius de k. Si E est un isocristal sur X/K, surconvergent le long de $Y - X$, son image inverse $F_\sigma^* E$ par Frobenius s'obtient en appliquant le foncteur de changement de base σ^*, puis le foncteur image inverse par le Frobenius $(F_X, F_Y) : (X, Y) \to (X^{(p)}, Y^{(p)})$. Nous appelerons *$F$-isocristal sur $X/(K, \sigma)$, surconvergent le long de $Y - X$*, la donnée d'un isocristal E sur X/K, surconvergent le long de $Y - X$, et d'un isomorphisme de $\mathrm{Isoc}^\dagger(X, Y/K)$:

$$\Phi \ : \ F_\sigma^* E \xrightarrow{\ \sim\ } E,$$

appelé *Frobenius* de E. En prenant le cas particulier où Y est une compactification de X (resp. $Y = X$), on obtient la notion de *F-isocristal surconvergent sur* $X/(K, \sigma)$ (resp. *convergent*).

Nous noterons F-Isoc$^\dagger(X,Y/K)$ (resp. F-Isoc$^\dagger(X/K)$, resp. F-Isoc(X/K)) la catégorie des F-isocristaux sur X surconvergents le long de $Y - X$ (resp. des F-isocristaux surconvergents sur X, resp. convergents sur X). C'est encore une catégorie abélienne, munie d'un produit tensoriel et d'un $\mathcal{H}om$ interne; si E, F sont des F-isocristaux surconvergents, le Frobenius de $\mathcal{H}om(E, F)$ est défini en posant, pour tout $f : E \to F$,

$$\Phi_{\mathcal{H}om(E,F)}(F_\sigma^*(f)) = \Phi_F \circ F_\sigma^*(f) \circ \Phi_E^{-1}.$$

(2.3.8) *Exemples.* — Nous reprenons ici les exemples de (2.2.15), qui sont des isocristaux surconvergents.

(i) Pour tout X, de compactification $\overline{X}$, le $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[}$-module $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[}$, muni de la dérivation canonique, définit un isocristal surconvergent sur X/K, qu'on note $\mathcal{O}_{X/K}$. On a $F_\sigma^*\mathcal{O}_{X/K} = \mathcal{O}_{X/K}$, ce qui permet de munir $\mathcal{O}_{X/K}$ d'une structure de F-isocristal surconvergent, en prenant $\Phi = \mathrm{Id}$.

On définit le *F-isocristal de Tate* $\mathcal{O}_{X/K}(1)$ comme étant égal à l'isocristal surconvergent $\mathcal{O}_{X/K}$ muni du Frobenius Φ défini par la multiplication par p^{-1}. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathcal{O}_{X/K}(n) = \mathcal{O}_{X/K}(1)^{\otimes n}$, et, pour tout F-isocristal surconvergent E et tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le twist de Tate $E(n)$ comme étant $E \otimes \mathcal{O}_{X/K}(n)$; autrement dit, $E(n)$ est le F-isocristal surconvergent déduit de E en multipliant F par p^{-n}.

(ii) L'exemple (2.2.15) (ii) a) définit un isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p(\pi)$, noté encore $\mathcal{L}_\pi$. Si on choisit pour relèvement de Frobenius sur K l'identité de $\mathbb{Q}_p(\pi)$, et pour relèvement sur $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ l'élévation à la puissance p-ième des coordonnées projectives (t, t'), $F_\sigma^*\mathcal{L}_\pi$ est le module $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ muni de la connexion ∇^σ définie par

$$\nabla^\sigma(1) = -\pi p t^{p-1} dt.$$

On définit $\Phi : F_\sigma^*\mathcal{L}_\pi \to \mathcal{L}_\pi$ comme étant l'endomorphisme de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ défini par la multiplication par $\exp \pi(t - t^p)$, série qui est bien une section de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$, car de rayon de convergence $p^{(p-1)/p^2} > 1$ [Dw1, 21.1]. On obtient ainsi le *F-isocristal de Dwork* associé à π, qui peut par ailleurs s'interpréter comme facteur direct sur $\mathbb{Q}_p(\pi)$ de la cohomologie rigide relative du revêtement d'Artin-Schreier de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ [Be3, (1.5)].

(iii) De même, l'exemple (2.2.15) (ii) b) définit un isocristal surconvergent sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p$, qu'on notera encore $\mathcal{K}_a$. Avec le relèvement de Frobenius utilisé en (ii), $F_\sigma^*\mathcal{K}_a$ est le module $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$ munie de la connexion ∇^σ définie par

$$\nabla^\sigma(1) = a p t^{-1} dt.$$

Pour qu'il existe sur $\mathcal{K}_a$ une structure de F-isocristal, il faut et il suffit que a soit de la forme $m/(p-1)$, avec $m \in \mathbb{Z}$, et celle-ci est alors définie par la multiplication par t^m. On obtient ainsi un *F-isocristal de Kummer*, qui s'interprète aussi comme facteur direct de la cohomologie rigide relative du revêtement de Kummer de $\mathbb{G}_m$ défini par l'élévation à la puissance $(p-1)$-ième [Be3, (2.2)].

(2.3.9) *Remarques.* — On dispose donc de deux catégories d'isocristaux sur X, fonctorielles en X : les isocristaux convergents et les isocristaux surconvergents. Lorsque X est propre, ces deux catégories coïncident par construction. Dans le cas général, la condition de surconvergence est nécessaire pour pouvoir développer un bon formalisme cohomologique, comme nous le verrons plus loin, et il ne fait pas de doute que ce soit parmi les isocristaux surconvergents, et même certainement parmi les F-isocristaux surconvergents, qu'il faille chercher l'analogue p-adique de la catégorie des faisceaux lisses ℓ-adiques, ou des systèmes locaux sur le corps des complexes. Néanmoins, on rencontre naturellement des isocristaux convergents, mais non nécessairement surconvergents, et les relations entre ces deux catégories méritent d'être étudiées.

(i) Le foncteur naturel $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/S) \to \mathrm{Isoc}(X/S)$, qui s'interprète, pour tout plongement $\overline{X} \hookrightarrow P$, comme la restriction de $]\overline{X}[_P$ à $]X[_P$, est fidèle d'après (2.2.9).

(ii) On ignore par contre si ce foncteur est pleinement fidèle en général. En utilisant le $\mathscr{H}om$ interne, on se ramène comme d'habitude à un problème sur les sections horizontales : si s est une section horizontale définie sur $]X[$ d'un isocristal surconvergent E sur X, peut-on prolonger s en une section (nécessairement horizontale) de E sur $]\overline{X}[$? En écrivant $E = j^\dagger\mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent muni d'une connexion intégrable sur un voisinage strict V de $]X[$, il revient au même de demander si toute section horizontale de $\mathcal{E}$ sur $]X[$ se prolonge en une section (horizontale) sur un voisinage strict de $]X[$.

Dans le cas particulier où $X = \mathbb{A}^1_k$, $Y = \mathbb{P}^1_k$, on est confronté à un problème général de la théorie des systèmes différentiels linéaires p-adiques : étant donnés un système $Y' = AY$, où A est une matrice de fonctions analytiques sur un disque $D(0,\rho^-) \subset \mathbb{A}^1_k$, $\rho > 1$, et une solution Y définie sur le disque fermé $D(0,1^+)$, Y est-elle en fait convergente sur un disque de rayon $\rho' > 1$? Dans le cas d'un système de rang 1, Dwork et Robba [Ro1] ont apporté une réponse positive à cette question. Plus généralement, Crew a montré [Cr1, Th. 4.10] que le foncteur $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to \mathrm{Isoc}(X/K)$ est pleinement fidèle lorsque X est une courbe, et qu'on se limite aux isocristaux de rang 1.

(iii) Enfin, le foncteur $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to \mathrm{Isoc}(X/K)$ n'est pas essentiellement surjectif en général. Crew a en effet montré [Cr1, Th. 4.12] qu'un F-isocristal unité (i.e. dont la fibre en chaque point de X n'a que la pente 0) surconvergent de rang 1 sur une courbe X correspond à un caractère de $\pi_1(X)$ à valeurs dans K, à monodromie locale finie (i.e. tel que l'image du groupe d'inertie en chaque point à l'infini de X soit finie). Il en tire [Cr1, 4.15] l'exemple suivant, montrant qu'un sous-isocristal convergent d'un isocristal surconvergent n'est pas nécessairement surconvergent. Soit X la courbe obtenue à partir d'une courbe modulaire Y sur k, de niveau ≥ 3, en enlevant les points supersinguliers, et soit $f : C \to X$ la courbe elliptique ordinaire universelle sur X. Comme la situation considérée se relève algébriquement en $\mathscr{C} \to \mathscr{Y}$, le faisceau de cohomologie rigide relative $E = R^1f_{\mathrm{rig}\,*}(C/\mathscr{Y})$ est un F-isocristal surconvergent sur X (comme on le verra plus loin). Par contre, le sous F-isocristal unité E' de E (défini par exemple à partir de (2.4.1) plus bas et de la comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie rigide, et a priori donc seulement convergent) ne vérifie pas la condition de Crew, d'après un théorème d'Igusa, et n'est donc pas un F-isocristal surconvergent. Ce n'est pas non plus un isocristal surconvergent, car, si c'était le cas, E' serait la restriction d'un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent, encore noté E', et l'homomorphisme composé

$$F^*E' \longrightarrow F^*E \longrightarrow E \longrightarrow E/E',$$

étant nul sur le tube $]X[_{\mathcal{Y}}$, serait nul sur un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{Y}}$ d'après (2.1.11), de sorte que le Frobenius Φ de E induirait une structure de F-isocristal surconvergent sur E', prolongeant sa structure de F-isocristal convergent.

2.4. F-Isocristaux convergents associés aux F-cristaux

Nous supposons dans cette section que $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps résiduel k, muni d'un relèvement σ du Frobenius de k; on note π une uniformisante de $\mathcal{V}$, et on suppose que l'indice de ramification de $\mathcal{V}$ satisfait la relation $e \leq p - 1$. Soit X un k-schéma de type fini. Nous allons montrer ici comment associer à tout F-cristal non dégénéré M sur $X/(\mathcal{V}, \sigma)$ un F-isocristal convergent M^{an} sur $X/(K, \sigma)$.

(2.4.1) Pour tout cristal M sur X, nous noterons F^*M le cristal sur X image inverse de M par le morphisme de Frobenius $(F, \sigma) : (X, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{V})$. Rappelons qu'un F-cristal non dégénéré M sur $X/(\mathcal{V}, \sigma)$ est un cristal M sur $X/\mathcal{V}$ muni d'un morphisme de cristaux Φ : $F^*M \to M$ tel qu'il existe un morphisme de cristaux $V : M \to F^*M$ vérifiant $V \circ \Phi = p^n$, $\Phi \circ V = p^n$, pour un certain entier n. Soit $i : X \hookrightarrow P$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse. La construction de M^{an} s'effectue en deux étapes :

(i) si M est un cristal de type fini sur X, on lui associe un “isocristal convergent de rayon de convergence $|\pi|$”, i.e. un module cohérent M_P sur $[X]_{P,|\pi|}$ muni d'un isomorphisme $\varepsilon_P : p_2^*M_P \xrightarrow{\sim} p_1^*M_P$ sur $[X]_{P^2,|\pi|}$, vérifiant la condition de cocycle;

(ii) si M est un F-cristal non dégénéré, l'action de Frobenius permet de prolonger canoniquement M_P (resp. ε_P) sur $]X[_P$ (resp. $]X[_{P^2}$), en reprenant une méthode de Dwork (cf. l'exposé de Katz [Ka1]).

Le caractère fonctoriel de la construction permettant le recollement, on suppose P affine, soit $P = \mathrm{Spf} A$. Soient $I \subset A$, $J \subset A \hat{\otimes} A$ les idéaux de X dans P et dans $P \times P$, et $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}'$ les séparés complétés p-adiques des enveloppes à puissances divisées Δ, Δ' de I et J. Rappelons qu'un cristal de type fini M sur X est défini par un module de type fini, séparé et complet $M_{\hat{\Delta}}$ sur $\hat{\Delta}$, muni d'un isomorphisme

$$\varepsilon_{\hat{\Delta}} \;:\; \hat{\Delta}' \hat{\otimes} M_{\hat{\Delta}} \xrightarrow{\ \sim\ } M_{\hat{\Delta}} \hat{\otimes} \hat{\Delta}'$$

entre les images inverses de $M_{\hat{\Delta}}$ définies par les deux projections de $P \times P$ sur P, $\varepsilon_{\hat{\Delta}}$ vérifiant la condition de cocycle.

Soient $f_1, \ldots, f_r$ des générateurs de I, et ρ l'homomorphisme composé

(2.4.1.1) $$\rho\ :\ \Delta \longrightarrow A\otimes K \longrightarrow (A\otimes K)\{T_i\}/(f_i - \pi T_i),$$

dont le but est l'algèbre de l'ouvert affinoïde $[X]_{P,|\pi|}$ de P_K. Pour que ρ se factorise par $\hat{\Delta}$, il faut et suffit que ρ soit continu pour la topologie π-adique de Δ, ce qui équivaut à dire que l'image de Δ dans $(A \otimes K)\{T_i\}/(f_i - \pi T_i)$ est bornée. Comme Δ est engendré par les éléments $f_1^{[q_1]}\ldots f_r^{[q_r]}$ comme A-module, il suffit de vérifier que les images de ceux-ci forment un ensemble borné. Or on a

$$\rho(f_1^{[q_1]}\ldots f_r^{[q_r]}) = f_1^{q_1}\ldots f_r^{q_r}/q_1!\ldots q_r! = \pi^{q_1+\cdots+q_r}\,T_1^{q_1}\ldots T_r^{q_r}/q_1!\ldots q_r!.$$

Puisque $e \leq p-1$, les éléments $\pi^{q_1+\cdots+q_r}/q_1!\ldots q_r!$ sont des entiers p-adiques, et l'ensemble des monômes $T_1^{q_1}\ldots T_r^{q_r}$ est borné, d'où l'assertion.

L'homomorphisme

(2.4.1.2) $$\hat{\rho}\ :\ \hat{\Delta} \longrightarrow (A\otimes K)\{T_i\}/(f_i - \pi T_i)$$

qui prolonge ρ permet donc de déduire de $M_{\hat{\Delta}}$ un module de type fini sur l'algèbre $(A \otimes K)\{T_i\}/(f_i - \pi T_i)$, qui définit donc un module cohérent M_P sur $[X]_{P,|\pi|}$. La même méthode appliquée à $\hat{\Delta}'$ permet de déduire l'isomorphisme ε_P de $\varepsilon_{\hat{\Delta}}$, d'où l'étape (i) de la construction.

Supposons maintenant que M soit un F-cristal. Soit $F : P \to P$ un relèvement du Frobenius absolu de $P \times \operatorname{Spec} k$, semi-linéaire au-dessus du Frobenius σ de $\mathcal{V}$. Alors F induit un morphisme σ-semi-linéaire d'espaces analytiques $F_K : P_K \to P_K$. Si l'on pose $\eta_n = |\pi|^{p^{-n}}$, on a alors pour tout $n \geq 0$:

(2.4.1.3) $$F_K([X]_{P,\eta_{n+1}}) \subset [X]_{P,\eta_n}.$$

On a en effet $F_K^*(f_i) = f_i^p + \pi g_i$, avec $g_i \in A$, et il en résulte, pour $x \in [X]_{P,\eta_{n+1}}$:

$$|f_i(F_K(x))| = |F_K^*(f_i)(x)| = |f_i(x)^p + \pi g_i(x)| \leq \eta_n.$$

D'autre part, F induit un homomorphisme $\hat{\Delta} \to \hat{\Delta}$, et $(F^*M)_{\hat{\Delta}}$ se déduit de $M_{\hat{\Delta}}$ par cette extension des scalaires. Comme M est un F-cristal non dégénéré, l'homomorphisme Φ : $(F^*M)_{\hat{\Delta}} \to M_{\hat{\Delta}}$ définissant la structure de F-cristal donne un isomorphisme après tensorisation par K. Posons $M_0 = M_P$, et, pour tout n, soit $M_n = (F_K^*)^n M_0$ le module cohérent sur $[X]_{P,\eta_n}$ déduit de M_0 grâce à (2.4.1.3). Alors $(F_K^*)^n(\Phi)$ induit un isomorphisme entre M_n et la restriction à $[X]_{P,\eta_n}$ de M_{n+1}. On obtient ainsi par recollements successifs un module cohérent M^{an} sur $]X[_P$, muni d'un isomorphisme $F_K^*M^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{an}}$. Comme $\Phi_{\hat{\Delta}}$ est un morphisme de cristaux, il vérifie la relation

$$\varepsilon_{\hat{\Delta}} \circ p_2^*(\Phi_{\hat{\Delta}}) = p_1^*(\Phi_{\hat{\Delta}}) \circ (F\times F)^*(\varepsilon_{\hat{\Delta}}).$$

Il en résulte que ε_P se prolonge en un isomorphisme $p_2^*M^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} p_1^*M^{\mathrm{an}}$ sur $]X[_{P^2}$, qui satisfait la condition de cocycle. On obtient donc ainsi un F-isocristal convergent M^{an}; il est clair que cette construction est fonctorielle en M et en X.

(2.4.2) THÉORÈME. — *Soit X un k-schéma de type fini. Le foncteur qui à un F-cristal non dégénéré M sur X associe le F-isocristal convergent M^{an} est pleinement fidèle sur la* *catégorie des F-cristaux non dégénérés à isogénie près. Si X est lisse sur k, il existe pour tout F-isocristal convergent N un F-cristal non dégénéré M sur X et un entier* $n \geq 0$ *tels que* $N \simeq M^{\mathrm{an}}(n)$ *(où* $M^{\mathrm{an}}(n)$ *est le twist de Tate défini en* (2.3.8) (i)).

Montrons d'abord la pleine fidélité de $M \longmapsto M^{\mathrm{an}}$. En prenant le $\mathcal{H}om$ interne, il suffit de montrer que ce foncteur induit une bijection entre les sections de M horizontales et invariantes par Frobenius (tensorisées par $\mathbb{Q}$), et celles de M^{an}.

L'assertion est locale sur X, que nous supposerons affine. Soient $X \hookrightarrow P$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel affine et lisse, et $F : P \to P$ un relèvement du Frobenius absolu de $P \times \operatorname{Spec} k$. Reprenant les notations de (2.4.1), on pose

$$B_n \;=\; \Gamma([X]_{\eta_n}, \mathcal{O}_{]X[}) \;=\; (A \otimes K)\{T_i\}/(f_i^{p^n} - \pi T_i).$$

Si l'on note

$$\phi_n \,:\, \hat{\Delta} \xrightarrow{\;\hat{\rho}\;} B_0 \xrightarrow{\;F^n\;} B_n$$

l'homomorphisme déduit de (2.4.1.2) et (2.4.1.3), on a par construction des isomorphismes

$$\Gamma([X]_{\eta_n}, M^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\;\sim\;} \phi_{n*}(B_n) \otimes_{\hat{\Delta}} M_{\hat{\Delta}},$$

$$\Gamma(]X[, M^{\mathrm{an}}) \;=\; \varprojlim_n \Gamma([X]_{\eta_n}, M^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\;\sim\;} \varprojlim_n \phi_{n*}(B_n) \otimes_{\hat{\Delta}} M_{\hat{\Delta}},$$

les morphismes de transition étant définis d'une part par les homomorphismes $\phi_{n+1*}(B_{n+1}) \to \phi_{n*}(B_n)$ (correspondant à la restriction de $[X]_{\eta_{n+1}}$ à $[X]_{\eta_n}$), semi-linéaires par rapport à F, d'autre part par l'homomorphisme semi-linéaire $M_{\hat{\Delta}} \to M_{\hat{\Delta}}$ défini par Φ. L'homomorphisme canonique

(2.4.2.1) $$\theta \;:\; (M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q})_{\nabla=0,\,\Phi=\mathrm{Id}} \longrightarrow \Gamma(]X[, M^{\mathrm{an}})_{\nabla=0,\,\Phi=\mathrm{Id}}$$

associe alors à $s \in M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q}$ la famille $\theta(s) = (\phi_n^*(s))_n$ qu'on en déduit par extension des scalaires via les ϕ_n.

En sens inverse, on dispose d'un homomorphisme

(2.4.2.2) $$\Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[}) \longrightarrow \Gamma([X]_{\eta_1}, \mathcal{O}_{]X[}) = (A \otimes K)\{T_i\}/(f_i^p - \pi T_i) \xrightarrow{\;\psi\;} \hat{\Delta} \otimes \mathbb{Q},$$

où ψ est défini comme suit. On définit d'abord un homomorphisme $A[T_i] \to \hat{\Delta}$ en envoyant T_i sur $(\pi^{-1}p\,!)f_i^{[p]}$. En passant aux complétés, en tensorisant par $\mathbb{Q}$, et en observant que πT_i a pour image $p!\,f_i^{[p]} = f_i^p$, on en tire l'homomorphisme cherché ; il est clair qu'il commute aux endomorphismes définis par ceux de A, et notamment à F. On en déduit alors un homomorphisme

(2.4.2.3) $$\theta' \;:\; \Gamma(]X[, M^{\mathrm{an}})_{\nabla=0,\,\Phi=\mathrm{Id}} \longrightarrow (M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q})_{\nabla=0,\,\Phi=\mathrm{Id}}$$

en composant la restriction de $]X[$ à $[X]_{\eta_1}$ avec l'homomorphisme

$$\Gamma([X]_{\eta_1}, M^{\mathrm{an}}) \;\simeq\; \phi_{1*}(B_1) \otimes_{\hat{\Delta}} M_{\hat{\Delta}} \xrightarrow{\;\psi\otimes\mathrm{Id}\;} F_*(\hat{\Delta}) \otimes_{\hat{\Delta}} M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\;\Phi\;} M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q}.$$

Comme l'homomorphisme composé

$$\hat{\Delta}\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\hat{\rho}} B_0 \xrightarrow{F} B_1 \xrightarrow{\psi} \hat{\Delta}\otimes\mathbb{Q}$$

est l'homomorphisme induit par F, on voit que, pour $s \in (M_{\hat{\Delta}} \otimes \mathbb{Q})_{\nabla=0,\ \Phi=\mathrm{Id}}$, l'image par θ' de $\theta(s)$ est $\Phi(F^*(s)) = s$.

Réciproquement, soient $t \in \Gamma(]X[, M^{\mathrm{an}})_{\nabla\,=\,0,\ \Phi\,=\,\mathrm{Id}}$, et $s = \theta'(t)$. L'homomorphisme composé

$$B_1 \xrightarrow{\psi} \hat{\Delta}\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\hat{\rho}} B_0$$

est celui que définit la restriction de $[X]_{\eta_1}$ à $[X]_{\eta_0}$, si bien que la restriction de $\theta(s)$ à $[X]_{\eta_0}$ est égale à celle de t. Il résulte alors de (2.4.1.3) que $\theta(s)$ et t, ayant même restriction sur $[X]_{\eta_0}$, coïncident sur $]X[$. Par suite, θ et θ' sont des isomorphismes réciproques.

Supposons maintenant X lisse sur k, et soit N un F-isocristal convergent sur X. Grâce à la pleine fidélité, l'existence d'un entier $n \geq 0$ et d'un F-cristal M tels que $N \simeq M^{\mathrm{an}}(n)$ est une propriété locale sur X, ce qui permet de supposer X affine et relevé en un schéma formel P lisse sur W. Soit encore $\hat{\Delta}'$ l'enveloppe à puissances divisées complétée de l'idéal de X dans $P \times P$. Un résultat d'Ogus [Og2, prop. 7.3] entraîne qu'il existe un cristal M, qu'on peut supposer sans p-torsion, tel que N, muni de l'isomorphisme

$$\varepsilon\ :\ \hat{\Delta}\otimes N \xrightarrow{\ \sim\ } N\otimes\hat{\Delta}$$

déduit de $\varepsilon : p_2^*N \xrightarrow{\sim} p_1^*N$ par l'homomorphisme $\Gamma(]X[_{P^2}, \mathcal{O}_{]X[}) \to \hat{\Delta}$, soit isomorphe à $M \otimes \mathbb{Q}$, muni de l'isomorphisme analogue; de plus, l'isomorphisme $\Phi : F^*N \xrightarrow{\sim} N$ correspond à un élément de $\mathrm{Hom}(F^*M, M) \otimes \mathbb{Q}$, de sorte qu'il existe un entier n tel que $p^n\Phi \in \mathrm{Hom}(F^*M, M)$. Il est alors clair que M, muni de $p^n\Phi$, est un F-cristal non dégénéré, encore noté M, et que N est isomorphe à $M^{\mathrm{an}}(n)$.

2.5. F-isocristaux surconvergents sur un schéma affine et lisse

Nous supposons encore que $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k, mais l'indice de ramification e est ici quelconque; nous noterons π une uniformisante de $\mathcal{V}$. Le résultat principal de cette section est l'interprétation dans le cadre de la théorie de Monsky-Washnitzer de la notion de F-isocristal surconvergent sur un k-schéma affine et lisse.

(2.5.1) Soient $X = \mathrm{Spec}\, A_0$ un k-schéma affine et lisse, et A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0. Nous nous proposons de montrer que, si $A^\dagger$ est la complétée faible de A, et $F : A^\dagger \to A^\dagger$ un relèvement de Frobenius, la donnée d'un F-isocristal surconvergent sur X équivaut à celle d'un $(A^\dagger \otimes K)$-module projectif de type fini M, muni d'une connexion intégrable $\nabla : M \to M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}$, et d'un isomorphisme horizontal

$$\Phi\ :\ (M^\sigma,\ \nabla^\sigma) \xrightarrow{\ \sim\ } (M, \nabla),$$

où $(M^\sigma,\ \nabla^\sigma)$ est déduit de (M, ∇) en étendant les scalaires par F.

Fixons comme en (2.1.2) une présentation $A \simeq \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/I$, et soient P le complété formel de la fermeture projective de $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, Y sa réduction sur k, $j : X \hookrightarrow Y$. On a alors $]Y[_P = P_K$, et nous avons vu qu'un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_P$ est formé des intersections U_λ de $\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$ avec les boules $B(0, \lambda^+) \subset \mathbb{A}^n_K$, pour $\lambda \to 1^+$. Rappelons que, d'après (2.1.2.4), on a

$$\text{(2.5.1.1)} \qquad \begin{aligned} \Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) &\simeq \Gamma(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \Gamma(U_\lambda, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \\ &\simeq \varinjlim_\lambda \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{U_\lambda}) \simeq A^\dagger \otimes K. \end{aligned}$$

Pour $\lambda > 1$, nous poserons $A_\lambda = \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{U_\lambda})$.

(2.5.2) PROPOSITION. — *Avec les notations de* (2.5.1), *le foncteur* $\Gamma(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, -)$ *induit une équivalence entre* :

(i) *La catégorie des $j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}$-modules cohérents, et celle des $(A^\dagger \otimes K)$-modules de type fini* ;

(ii) *La catégorie des $j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}$-modules cohérents à connexion intégrable* (*resp. des isocristaux surconvergents sur X*), *et celle des $(A^\dagger \otimes K)$-modules projectifs de type fini munis d'une connexion intégrable* (*resp. dont la série de Taylor converge sur un voisinage strict de la diagonale dans $\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$*).

D'après (2.1.10), un $j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}$-module cohérent E est de la forme $j^\dagger \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un module cohérent sur un voisinage strict U_λ. Comme U_λ est affinoïde, la donnée de $\mathcal{E}$ équivaut à celle du A_λ-module de type fini $M_\lambda = \Gamma(U_\lambda, \mathcal{E})$, et, pour $\lambda' < \lambda$, la restriction de $\mathcal{E}$ à $U_{\lambda'}$ est définie par $M_\lambda \otimes_{A_\lambda} A_{\lambda'}$. Par passage à la limite, on en déduit que la donnée de E équivaut à celle du $(A^\dagger \otimes K)$-module de type fini $M = \varinjlim_\lambda \Gamma(U_\lambda, \mathcal{E})$ formé par ses sections globales. De plus, E est localement libre de type fini si et seulement si M est projectif de type fini sur $A^\dagger \otimes K$. On observera que, d'après (2.1.1), on peut calculer M indifféremment par

$$\text{(2.5.2.1)} \qquad M = \Gamma(P_K, E) = \Gamma(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, E) = \Gamma(U_\lambda, E),$$

pour tout $\lambda > 1$.

Soient $\Omega^1_{A^\dagger}$ le module des différentielles de $A^\dagger$ au sens de Monsky-Washnitzer ([MW1, th. 4.2], [vdP1, (2.3)]); nous poserons $\Omega^1_{A^\dagger \otimes K} = \Omega^1_{A^\dagger} \otimes K$. Il est clair qu'on a encore un isomorphisme

$$\Gamma(P_K, j^\dagger \Omega^1_{P_K}) \simeq \varinjlim_\lambda \Gamma(U_\lambda, \Omega^1_{U_\lambda}) \simeq \Omega^1_{A^\dagger \otimes K}.$$

Si E est un $j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}$-module localement libre de type fini muni d'une connexion intégrable ∇, on obtient donc en passant aux sections globales une connexion intégrable $M \to M \otimes \Omega^1_{A^\dagger \otimes K}$ sur M, dont la donnée équivaut à celle de ∇ d'après (2.2.3). Il en résulte que la catégorie des isocristaux surconvergents sur X/K est équivalente à celle des $(A^\dagger \otimes K)$-modules projectifs de type fini M, munis d'une connexion intégrable $\nabla : M \to M \otimes \Omega^1_{A^\dagger \otimes K}$, dont la série de Taylor est convergente sur un voisinage strict du tube de la diagonale dans $\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$.

Remarque. — Rappelons que, d'après (1.2.4) (iv), l'ouvert U de $\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$ défini par les conditions $|t_{2i}(x) - t_{1i}(x)| < 1$, $\forall i = 1,\ldots,n$, est un voisinage strict du tube de la diagonale, ce qui permet de se limiter à la recherche du domaine de convergence de la série de Taylor à l'intérieur de U.

Supposons maintenant donné un morphisme

$$w \,:\, X' = \operatorname{Spec} A'_0 \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A_0$$

entre deux k-schémas affines et lisses. On dispose alors du foncteur image inverse w^* pour les isocristaux surconvergents défini en (2.3.6). Soient d'autre part A, A' deux $\mathcal{V}$-algèbres lisses relevant A_0 et A'_0, et $A^\dagger$, $A'^\dagger$ leurs complétées faibles. Si w est défini par $\varphi : A_0 \to A'_0$, il existe un homomorphisme $\psi : A^\dagger \to A'^\dagger$ relevant φ [vdP1, (2.4.4)]. Par suite, on obtient un foncteur ψ_K^* de la catégorie des $(A^\dagger \otimes K)$-modules à connexion intégrable dans celle des $(A'^\dagger \otimes K)$-modules à connexion intégrable. Nous allons d'abord vérifier que ψ_K^* conserve la surconvergence, et s'identifie canoniquement à w^*, grâce aux lemmes suivants :

(2.5.3) LEMME. — *Soient A, A' deux $\mathcal{V}$-algèbres de type fini, $A^\dagger$, $A'^\dagger$ leurs complétées faibles, $\psi : A^\dagger \to A'^\dagger$ un homomorphisme de $\mathcal{V}$-algèbres. Fixons des présentations $A \simeq \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]/I$, $A' \simeq \mathcal{V}[t'_1,\ldots,t'_{n'}]/I'$, d'où des immersions fermées*

$$i \,:\, \mathcal{X}_K = \operatorname{Spec}(A \otimes K) \hookrightarrow \mathbb{A}_K^n, \qquad i' \,:\, \mathcal{X}'_K = \operatorname{Spec}(A' \otimes K) \hookrightarrow \mathbb{A}_K^{n'},$$

et soient U_λ et U'_λ les intersections de $\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$ et $\mathcal{X}_K'^{\mathrm{an}}$ avec les boules fermées B_λ, $B'_\lambda = B(0, \lambda^+)$ dans $\mathbb{A}_K^n$ et $\mathbb{A}_K^{n'}$, $A_\lambda = \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}})$, $A'_\lambda = \Gamma(U'_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K'^{\mathrm{an}}})$.

(i) *Pour tous $f \in A^\dagger$ et $\eta > 1$, il existe $\lambda > 1$ et $f' \in A_\lambda$ d'image $f \otimes 1 \in A^\dagger \otimes K$, tels que $\|f\| \le \eta$, où $\|-\|$ est la norme sur A_λ quotient de celle de $\Gamma(B_\lambda, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^n})$.*

(ii) *Pour tout $\lambda > 1$, il existe $\lambda' > 1$ tel que l'homomorphisme composé*

$$A_\lambda \to A^\dagger \otimes K \to A'^\dagger \otimes K$$

se factorise par $A'_{\lambda'}$.

Soit $f \in A^\dagger$. D'après (2.1.2.1), il existe des constantes a, b, et des polynômes $P_{ik} \in \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]$, avec $\deg P_{ik} \le ak + b$, tels qu'on puisse écrire f sous la forme

$$f = \sum_k \pi^k P_{ik}(t_1,\ldots,t_n).$$

Pour λ fixé, on a par définition $\|t_i\| \le \lambda$ dans A_λ, donc $\|P_{ik}\| \le \lambda^{ak+b}$, d'où

$$\|f\| \;\le\; \sup_k |\pi|^k \lambda^{ak+b}.$$

Il suffit alors de choisir λ tel que $|\pi|\lambda^a \le 1$, et $\lambda^b \le \eta$ pour obtenir (i).

Pour prouver (ii), posons $f_i = \psi(t_i) \in A'^{\dagger}$. D'après (2.5.1.1), il existe λ'_0 tel que l'homomorphisme $A \to A^{\dagger} \otimes K \to A'^{\dagger} \otimes K$ se factorise par un homomorphisme $\varphi_{\lambda'_0} : A \to A'_{\lambda'_0}$, envoyant t_i sur un élément, encore noté f_i, ayant f_i pour image dans $A'^{\dagger} \otimes K$; pour $\lambda' \leq \lambda'_0$, soit $\varphi_{\lambda'}$ le composé $A \to A'_{\lambda'_0} \to A'_{\lambda'}$. Pour $\lambda > 1$ fixé, montrons d'abord qu'il existe λ' tel que $1 < \lambda' \leq \lambda'_0$, et que $\varphi_{\lambda'}$ se factorise par A_λ. On peut supposer que λ est de la forme $\lambda = |\pi|^{-1/m}$. Soit A_1^0 la sous-$\mathcal{V}$-algèbre de A engendrée par les éléments πt_i; d'après (0.3.1), $A_{|\pi|^{-1}}$ est la complétée de $A \otimes K$ pour la topologie définie par les $\pi^k A_1^0$. Comme U_λ est le domaine spécial de $U_{|\pi|^{-1}}$ défini par les conditions $|t_i(x)| \leq \lambda$, l'algèbre A_λ est définie par

$$A_\lambda \;=\; A_{|\pi|^{-1}}\{T_1, \ldots, T_n\}/(T_i - \pi t_i^m).$$

Pour obtenir la factorisation voulue, il suffit donc de montrer qu'il existe $\lambda' > 1$ tel que les éléments πf_i et πf_i^m soient à puissances bornées dans $A'_{\lambda'}$, et il suffit qu'il en soit ainsi des πf_i^m. Pour cela, il suffit que, pour la norme quotient sur $A'_{\lambda'}$, on ait $\|\pi f_i^m\| \leq 1$, soit $\|f_i\| \leq |\pi|^{-1/m}$, et l'assertion (i) entraîne l'existence d'un tel λ'.

Enfin, les homomorphismes $A_\lambda \to A^{\dagger} \otimes K \to A'^{\dagger} \otimes K$ et $A_\lambda \to A'_{\lambda'} \otimes K \to A'^{\dagger} \otimes K$ sont égaux. En effet, il suffit qu'ils le soient après composition avec l'inclusion $A'^{\dagger} \otimes K \hookrightarrow \hat{A}' \otimes K$. Comme ils sont égaux sur $A \otimes K$, dont l'image est dense dans A_λ, et que tout morphisme d'algèbres de Tate est continu, ils coïncident sur A_λ.

Remarque. — La semi-norme spectrale étant majorée par toute norme de Banach [BGR, 3.8.2, cor.2], l'assertion (i) est a fortiori valable pour la semi-norme spectrale sur A_λ.

(2.5.4) LEMME. — *Soient $w : X' \to X$ un morphisme de k-schémas, $j : X \hookrightarrow P$, $j' : X' \hookrightarrow P'$ des immersions dans des $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, Y, Y' les adhérences de X et X' dans P et P'. On suppose qu'il existe un ouvert $U' \subset P'$ contenant X', et un $\mathcal{V}$-morphisme $u : U' \to P$ prolongeant w. On suppose de plus qu'il existe un voisinage strict V'_0 de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et un morphisme $u' : V'_0 \to P_K$ prolongeant $u_K :]X'[_{P'} \to]X[_P$. Alors :*

(i) *Il existe un voisinage strict V' de $]X'[_{P'}$ tel que $V' \subset V'_0$ et $u'(V') \subset]Y[_P$.*

(ii) *Pour tout voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, $u'^{-1}(V) \cap V'$ est un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$.*

Comme u' prolonge u_K, et que u prolonge w, on a $u'(]X'[_{P'}) \subset]X[_P$. Soient $Z = Y - X$, $Z' = Y' - X'$; pour $\eta, \lambda < 1$, notons $U'_\lambda = P'_K -]Z'[_{P'\lambda}$, et $U'_{\eta\lambda} = [Y']_{P\eta} \cap U'_\lambda$. Fixons $\eta < 1$. Puisque V'_0 est un voisinage strict, il existe $\lambda < 1$ tel que $U'_{\eta\lambda} \subset V'_0$, et il suffit de montrer qu'il existe λ' tel que $\lambda \leq \lambda' < 1$ et $u'(U'_{\eta\lambda'}) \subset]Y[_P$. Si $u'_{\eta\lambda}$ est la restriction de u' à $U'_{\eta\lambda}$, soit $W_{\eta\lambda} = u'^{-1}_{\eta\lambda}(P_K -]Y[_P)$. Comme $U'_{\eta\lambda}$ est quasi-compact, il en est de même de $W_{\eta\lambda}$. Puisque $u'(]X'[_{P'}) \subset]X[_P$, on a $W_{\eta\lambda} \subset]Z'[_{P'}$. Le principe du maximum entraîne donc qu'il existe $\lambda' < 1$ tel que $W_{\eta\lambda} \subset]Z'[_{P'\lambda'}$, d'où $u'(U'_{\eta\lambda'}) \subset]Y[_P$.

Pour prouver (ii), on observe d'abord que, puisque $u'(]X'[_{P'}) \subset]X[_P$, $]X'[_{P'}$ est contenu dans $u'^{-1}(V)$. Le recouvrement $(]Z[_P, V)$ de $]Y[_P$ étant admissible, $(u'^{-1}(]Z[_P),$

$u'^{-1}(V))$ est un recouvrement admissible de V'. Comme $u'^{-1}(]Z[_P) \subset]Z'[_{P'}$, $(]Z'[_{P'}, u'^{-1}(V))$ induit un recouvrement admissible de V', ce qui entraîne que $u'^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ d'après (1.2.3) (iv).

(2.5.5) PROPOSITION. — *Soient X, X' deux k-schémas séparés de type fini, $w : X' \to X$ un k-morphisme, $w^* : \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to \mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K)$ le foncteur image inverse défini en* (2.3.6). *Soient d'autre part $X \hookrightarrow T$, $X' \hookrightarrow T'$ des immersions dans des $\mathcal{V}$-schémas séparés de type fini, lisses au voisinage de X, $\hat{T}$, $\hat{T}'$ les complétés formels de T, T'. On suppose qu'il existe un ouvert $U' \subset \hat{T}'$ contenant X', un $\mathcal{V}$-morphisme $u : U' \to \hat{T}$ prolongeant w, un voisinage strict V'_0 de $]X'[_{T'}$ dans T'^{an}_K, et un morphisme $u' : V'_0 \to T^{\mathrm{an}}_K$ prolongeant u_K : $]X'[_{T'} \to]X[_T$. Alors :*

(i) *Il existe un voisinage strict $V' \subset V'_0$ de $]X'[_{T'}$ et un voisinage strict V de $]X[_T$ dans T^{an}_K tels que $u'(V') \subset V$.*

(ii) *Si $j^\dagger$ et $j'^\dagger$ désignent les foncteurs* (2.1.1.1) *sur V et V', et si (E, ∇) est un $j^\dagger\mathcal{O}_V$-module cohérent à connexion intégrable et surconvergente, la connexion image inverse sur u'^*E est encore surconvergente. De plus, la restriction du foncteur u'^* à la sous-catégorie $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est canoniquement isomorphe à w^*.*

Soient P, P' des compactifications de T et T' sur $\mathcal{V}$, Y, Y' les adhérences de X et X' dans $P_0 = P \times \mathrm{Spec}\, k$ et $P'_0 = P' \times \mathrm{Spec}\, k$. Quitte à rétrécir V', on peut supposer que $V' \subset]Y'[_{P'}$, puis, grâce à (2.5.4), que $u'(V') \subset]Y[_P$. En posant $V =]Y[_P \cap T^{\mathrm{an}}_K$, on obtient un couple de voisinages stricts possédant les propriétés de (i).

Soient $P'' = P' \times P$, $U'' = U' \times P$, et $q : P'' \to P$, $q' : P'' \to P'$ les deux projections. On peut plonger X dans P'' par l'immersion correspondant au graphe de w; soient Y'' l'adhérence de X' dans P'', $j'' : X' \hookrightarrow Y''$. Le morphisme u définit une section $s : U' \to U''$ de q' au-dessus de U', et le morphisme u' une section $s' : V' \to P''_K$ de q'_K au-dessus de V', de restriction s_K au-dessus de $]X'[_{P'}$. Quitte à rétrécir V', on peut supposer que $s'(V') \subset]Y''[_{P''}$, grâce à (2.5.4). Notant $j''^\dagger$ le foncteur (2.1.1.1) sur le voisinage strict $V'' = q'^{-1}_K(V') \cap]Y''[_{P''}$, on obtient un foncteur s'^* de la catégorie des $j''^\dagger\mathcal{O}_{P''_K}$-modules à connexion intégrable sur V'' dans celle des $j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K}$-modules à connexion intégrable sur V', et on a des isomorphismes de foncteurs $s'^* \circ q^*_K \simeq u'^*$, $s'^* \circ q'^*_K \simeq \mathrm{Id}$.

D'après (2.3.5), le foncteur q'^*_K induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie des $j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K}$-modules à connexion intégrable et surconvergente, et celle des $j''^\dagger\mathcal{O}_{P''_K}$-modules à connexion intégrable et surconvergente. Si E est un $j^\dagger\mathcal{O}_{P_K}$-module à connexion intégrable et surconvergente, il en est de même du $j''^\dagger\mathcal{O}_{P''_K}$-module $q^*_K E$. Il existe donc un $j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K}$-module à connexion intégrable et surconvergente E', unique à isomorphisme canonique près, tel que $q'^*_K E' \simeq q^*_K E$. On en déduit alors l'isomorphisme horizontal $E' \simeq s'^* \circ q'^*_K E' \simeq s'^* \circ q^*_K E \simeq u'^* E$, ce qui montre que u'^* préserve la surconvergence. De même, si E'' est un $j''^\dagger\mathcal{O}_{P''_K}$-module à connexion intégrable et surconvergente, et E' le $j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K}$-module à connexion intégrable et surconvergente tel que $q'^*_K E' \simeq E''$, l'isomorphisme $E' \simeq s'^* \circ q'^*_K E' \simeq s'^* E''$ montre que le foncteur s'^* préserve la surconvergence. Comme, d'après la construction (2.3.6), le foncteur w^* s'obtient en composant q_K^* avec un foncteur quasi-inverse de $q_K'^*$, et que s'^* est un tel foncteur, on en déduit l'isomorphisme de foncteurs $w^* \simeq u'^*$.

(2.5.6) COROLLAIRE. — *Soient $X = \operatorname{Spec} A_0$, $X' = \operatorname{Spec} A'_0$ deux k-schémas affines et lisses, $w : X' \to X$ un k-morphisme, défini par un homomorphisme $\varphi : A_0 \to A'_0$, et soit w^* : $\operatorname{Isoc}^\dagger(X/K) \to \operatorname{Isoc}^\dagger(X'/K)$ le foncteur image inverse défini en* (2.3.6). *Soient d'autre part A, A' deux $\mathcal{V}$-algèbres lisses relevant A_0 et A'_0, $\psi : A^\dagger \to A'^\dagger$ un homomorphisme relevant φ, ψ_K^* le foncteur de la catégorie des $(A^\dagger \otimes K)$-modules à connexion intégrable dans celle des $(A'^\dagger \otimes K)$-modules à connexion intégrable défini par ψ. Alors, via l'équivalence de* (2.5.2), *le foncteur ψ_K^* préserve la surconvergence, et la restriction de ψ_K^* à la sous-catégorie* $\operatorname{Isoc}^\dagger(X/K)$ *est canoniquement isomorphe à w^*.*

Posons $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{X}' = \operatorname{Spec} A'$. Par passage aux complétés, l'homomorphisme ψ définit un morphisme $u : \hat{\mathcal{X}}' \to \hat{\mathcal{X}}$ qui prolonge w. De plus, d'après (2.5.3), il existe un voisinage strict $U'_{\lambda'}$ de $]X'[_{\mathcal{X}'}$ et un morphisme $u' : U'_{\lambda'} \to \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$ prolongeant u_K, tels que l'homomorphisme $\Gamma(U_\lambda,\ j^\dagger\mathcal{O}_{P_K}) \to \Gamma(U'_{\lambda'},\ j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K})$ s'identifie par (2.5.1.1) à ψ_K. Dans l'équivalence de (2.5.2), le foncteur ψ_K^* correspond alors au foncteur u'^* défini par le morphisme d'espaces annelés $(U'_{\lambda'}, j'^\dagger\mathcal{O}_{P'_K}) \to (\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, j^\dagger\mathcal{O}_{P_K})$. D'après (2.5.5), u'^* préserve la surconvergence, et est canoniquement isomorphe à w^*, d'où le corollaire.

Pour prouver le résultat annoncé en (2.5.1), nous utiliserons une variante de la méthode de Dwork utilisée dans la construction de la section 2.4, associant à un F-cristal non dégénéré sur X un F-isocristal convergent. On suppose donné un automorphisme σ de $\mathcal{V}$ relevant le Frobenius de k.

(2.5.7) THÉORÈME. — *Avec les notations et les hypothèses de* (2.5.1), *soient M un $(A^\dagger \otimes K)$-module de type fini, muni d'une connexion intégrable ∇, $F : A^\dagger \to A^\dagger$ un relèvement du Frobenius de A_0 au-dessus de σ* [vdP1, th. 2.4.4] *et $(M^\sigma, \nabla^\sigma)$ le module à connexion intégrable déduit de (M, ∇) par extension des scalaires. On suppose qu'il existe un isomorphisme horizontal $\Phi : (M^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla)$. Alors, si (E, ∇) est le $j^\dagger\mathcal{O}_{P_K}$-module correspondant à (M, ∇) dans l'équivalence de* (2.5.2), *la connexion ∇ est surconvergente.*

D'après (2.2.11), l'assertion est locale sur X, ce qui permet de supposer que Ω_X^1 est libre de base $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m$. Si $z_1, \dots, z_m \in A$ relèvent $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$, $\Omega_{A^\dagger}^1$ est un $A^\dagger$-module libre de base $dz_1, \dots, dz_m$, car il en est ainsi de $\Omega_{\hat{A}}^1$. Soient $\partial_1, \dots, \partial_m$ les dérivations correspondantes, et $e_1, \dots, e_n$ une famille de générateurs de M. Pour tout i et tout k, posons $\partial_i e_k = \sum_j b_{ijk} e_j$, et soit $B_i \in \mathcal{M}_n(A^\dagger \otimes K)$ la matrice des b_{ijk}; la connexion ∇ est donc déterminée par la famille des matrices B_i. Il existe un entier $r \geq 0$ tel que, pour tout i, B_i soit à coefficients dans $\pi^{-r}A^\dagger$. Considérons alors les générateurs $e_i^\sigma = 1 \otimes e_i \in M^\sigma$. Si l'on pose

$F(z_i) = z_i^p + \pi g_i$, avec $g_i \in A^\dagger$, on obtient $dF(dz_i) = pz_i^{p-1}dz_i + \pi dg_i \in \pi\Omega^1_{A^\dagger}$. Par suite, avec la famille de générateurs e_i^σ, la connexion ∇^σ est définie par des matrices à coefficients dans $\pi^{-r+1}A^\dagger$. En utilisant l'isomorphisme horizontal Φ, on déduit des e_i^σ des générateurs $e_i^{(1)}$ de M pour lesquels les matrices $B_i^{(1)}$ correspondantes sont à coefficients dans $\pi^{-r+1}A^\dagger$. Par itération, on en déduit qu'il existe des générateurs e_i de M pour lesquels la connexion peut être définie par des matrices B_i à coefficients dans $A^\dagger$.

Pour λ assez près de 1, il existe un $\mathcal{O}_{U_\lambda}$-module cohérent à connexion intégrable $(\mathcal{E}, \nabla)$ tel que $(E, \nabla) \simeq j^\dagger(\mathcal{E}, \nabla)$. Montrons d'abord qu'il existe $\eta'_0 < 1$, $\lambda_0 > 1$, $\eta'_0, \lambda_0 \in \Gamma^*$, tels que, pour tout $e \in \Gamma(U_{\lambda_0}, \mathcal{E})$ (resp. $f \in A_{\lambda_0}$), on ait

$$\| \tfrac{1}{\underline{k}!}\, \underline{\partial}^{\underline{k}} e \|_{\lambda_0} \eta_0'^{|\underline{k}|} \to 0, \tag{2.5.7.1}$$

en notant $\| - \|_\lambda$ la norme quotient sur $\Gamma(U_\lambda, \mathcal{E})$ définie par celle de A_λ (correspondant à la présentation définie par les t_j), et par les générateurs $e_1, \ldots, e_n$ construits plus haut. Choisissons d'abord un réel $\eta''_0 < p^{-1/(p-1)}$, ce qui assure que $\eta_0''^{|\underline{k}|}/|\underline{k}!| \to 0$. Il suffit alors de montrer que, quel que soit $\rho > 1$, il existe $\lambda_0 > 1$ tel que $\| \underline{\partial}^{\underline{k}} e \|_{\lambda_0} \le \rho^{|\underline{k}|} \|e\|_{\lambda_0}$: choisissant $\rho > 1$ arbitrairement, on posera $\eta'_0 = \eta''_0/\rho$.

Observons d'abord qu'il existe $\lambda_0 > 1$ tel que pour tout λ, $1 < \lambda \le \lambda_0$, tout i, et tout $f \in A_\lambda$, on ait $\|\partial_i(f)\|_\lambda \le \rho \|f\|_\lambda$. En effet, si $f = \sum_{\underline{n}} \alpha_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}}$, avec $\alpha_{\underline{n}} \in K$, on a $\|f\|_\lambda = \inf_\alpha (\sup_{\underline{n}} |\alpha_{\underline{n}}| \lambda^{|\underline{n}|})$, où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des séries $\sum_{\underline{n}} \alpha_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}}$ de somme f. Comme $\partial_i(f) = \sum_j \sum_{\underline{n}} n_j \alpha_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}-1_j} \partial_i(t_j)$, on en déduit

$$\|\partial_i(f)\|_\lambda \le (\|f\|_\lambda/\lambda) \sup_j \|\partial_i(t_j)\|_\lambda .$$

Puisque $\partial_i(t_j) \in A^\dagger$, il existe d'après (2.5.3) (i) un réel $\lambda_0 > 1$ tel que, quels que soient i, j, on ait $\|\partial_i(t_j)\|_{\lambda_0} \le \rho$, et l'assertion en résulte.

Pour $e \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{E})$, posons $e = \sum_k f_k e_k$. On a $\partial_i e = \sum_{j,k} f_k b_{ijk} e_j + \partial_i(f_k)\, e_k$, d'où, pour tout λ, la majoration

$$\|\partial_i e\|_\lambda \le \sup_{j,k} (\|b_{ijk}\|_\lambda \|f_k\|_\lambda, \|\partial_i(f_k)\|_\lambda).$$

Comme les B_i sont à coefficients dans $A^\dagger$, on a encore, pour λ assez près de 1 et tous i, j, k, la majoration $\|b_{ijk}\|_\lambda \le \rho$. Comme $\|e\|_\lambda = \inf_f (\sup_k \|f_k\|_\lambda)$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des combinaisons $\sum_k f_k e_k$ de somme e, on voit que, pour $\lambda \to 1^+$, on a $\|\partial_i e\|_\lambda \le \rho \sup_k (\|f_k\|_\lambda)$, d'où $\|\partial_i e\|_\lambda \le \rho \|e\|_\lambda$. On obtient ainsi η'_0, λ_0 ayant les propriétés annoncées.

Posons $\zeta_i = 1 \otimes z_i - z_i \otimes 1$, $\tau_j = 1 \otimes t_j - t_j \otimes 1$. Pour $\eta < 1$, $\lambda > 1$, soient

$$\begin{aligned} U'_\lambda &= \{ x \in \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \mid \forall j, |(1 \otimes t_j)(x)| \le \lambda, |(t_j \otimes 1)(x)| \le \lambda \}, \\ W_\eta &= \{ x \in \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \mid \forall j, |\tau_j(x)| \le \eta \}, \\ W'_\eta &= \{ x \in \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \times \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}} \mid \forall i, |\zeta_i(x)| \le \eta \}, \end{aligned}$$

et $V_{\eta\lambda} = W_\eta \cap U'_\lambda$. Pour toute suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1, et toute suite décroissante $\underline{\lambda}$ de limite 1, l'ouvert $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} = \bigcup_n V_{\eta_n \lambda_n}$ est un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{X}^2}$, d'après l'exemple de (1.3.10). Nous allons construire des suites $\underline{\eta}$, $\underline{\lambda}$ telles qu'il existe sur le voisinage $V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ un isomorphisme $\varepsilon : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes ε_n définis par ∇.

Fixons un réel $\eta_0 \in \Gamma^*$ tel que $\eta_0 < \eta'_0$. Puisque les t_j engendrent A, il existe des relations de la forme $\zeta_i = \sum_j \beta_{ij}\tau_j$, avec $\beta_{ij} \in A \otimes_{\mathcal{V}} A$. D'après (2.5.3) (i), il existe donc pour tout $\rho > 1$ un réel $\lambda > 1$ pour lequel $\|\zeta_i\| \leq \rho \sup_j \|\tau_j\|$, la norme étant la norme spectrale sur U'_λ. Par suite, on a $V_{\eta_0\lambda} \subset W'_{\eta'_0} \cap U'_\lambda$ pour λ assez près de 1. Quitte à diminuer λ_0, on peut donc supposer que cette condition est satisfaite pour λ_0. On procède d'abord comme dans la démonstration de (2.2.13) pour définir sur $V_{\eta_0\lambda_0}$ un isomorphisme $\varepsilon : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes ε_n définis par ∇, en posant

$$\varepsilon(p_2^*(e)) \;=\; \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\underline{k}!}\,\underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\zeta}^{\underline{k}},$$

la série convergeant dans $\Gamma(V_{\eta_0\lambda_0}, p_1^*\mathcal{E})$ grâce à (2.5.7.1). On utilise ensuite l'action de Frobenius pour prolonger l'isomorphisme ε de $V_{\eta_0\lambda_0}$ à un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{X}^2}$ associé à des suites $\underline{\eta}$, $\underline{\lambda}$ convenables. En diminuant λ_0, on peut supposer d'après (2.5.2) qu'il existe un morphisme $F_K : U_{\lambda_0} \to \mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}$ tel que l'homomorphisme $\Gamma(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}, j^\dagger\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}}) \to \Gamma(U_{\lambda_0}, j^\dagger\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}})$ induit par F_K soit égal à $F \otimes \sigma$. En diminuant encore λ_0, on peut aussi supposer que Φ est défini par un isomorphisme $F_K^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ sur U_{λ_0}. Pour tout η, et tout $\lambda \leq \lambda_0$, on en déduit des isomorphismes $\Phi_i : (F_K \times F_K)^*(p_i^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} p_i^*\mathcal{E}$ sur $V_{\eta\lambda}$.

Choisissons $\rho \in \Gamma^*$ tel que $|\pi| < \rho < 1$. On définit par récurrence une suite croissante $\underline{\eta}$ en posant

$$\eta_{n+1} \;=\; \inf(\eta_n^{1/p}, \eta_n/\rho).$$

On a donc $\eta_{n+1} = \eta_n/\rho$ si $\eta_n \leq \rho^{p/(p-1)}$, et $\eta_{n+1} = \eta_n^{1/p}$ si $\eta_n \geq \rho^{p/(p-1)}$; en particulier, on a $\eta_n < 1$ pour tout n, et la suite $\underline{\eta}$ a pour limite 1. Supposons alors qu'on ait défini une suite décroissante $\lambda_0 \geq \ldots \geq \lambda_n > 1$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$, on ait

$$(F_K \times F_K)(V_{\eta_i\lambda_i}) \;\subset\; V_{\eta_{i-1}\lambda_{i-1}},$$

et montrons qu'il existe λ_{n+1} vérifiant la même condition. Posons

$$F(t_j) \;=\; t_j^p + \pi a_j,$$

avec $a_j \in A^\dagger$. On peut supposer que λ_0 est choisi assez près de 1 pour que, pour tout j, la norme spectrale de a_j vérifie $\|a_j\|_{\lambda_0} \leq 1/|\pi|$. Alors, en posant $\lambda'_{n+1} = \lambda_n^{1/p}$, on obtient, pour tout $x \in U'_{\lambda'_{n+1}}$,

$$\begin{aligned} |(t_j \otimes 1)((F_K \times F_K)(x))| \;&=\; |(F(t_j) \otimes 1)(x)| \;=\; |((t_j^p + \pi a_j) \otimes 1)(x)| \\ &\leq\; \max(\lambda_n, |\pi|\,\|a_j\|_{\lambda_0}) \;=\; \lambda_n, \end{aligned}$$

de sorte que $(F_K \times F_K)(x) \in U'_{\lambda_n}$. D'autre part, si $J = \mathrm{Ker}(A \otimes_{\mathcal{V}} A \to A)$, on a dans $(A \otimes A)^\dagger$ la relation

$$(F \otimes F)(\tau_j) \;=\; 1 \otimes (t_j^p + \pi a_j) - (t_j^p + \pi a_j) \otimes 1 \;=\; \tau_j^p + \pi\alpha_j,$$

avec $\alpha_j \in J(A \otimes A)^\dagger$. Dans $(A \otimes A)^\dagger$ on peut écrire α_j sous la forme $\alpha_j = \sum_i \gamma_{ij}\tau_i$.

Appliquant (2.5.3) (i) aux γ_{ij}, on peut trouver $\lambda''_{n+1} > 1$ tel que, pour tous i, j, on ait $\|\gamma_{ij}\| \leq \rho/|\pi|$ sur $U'_{\lambda''_{n+1}}$. On obtient alors, pour $x \in V_{\eta_{n+1}\lambda''_{n+1}}$,

$$|\pi\alpha_j(x)| \;\leq\; |\pi|\,(\rho/|\pi|)\,\eta_{n+1} \;\leq\; \eta_n,$$

tandis qu'on a d'autre part $|\tau_j^p(x)| \leq \eta_{n+1}^p \leq \eta_n$. Par conséquent, si l'on pose

$$\lambda_{n+1} \;=\; \inf(\lambda'_{n+1}, \lambda''_{n+1}),$$

on a bien $(F_K \times F_K)(V_{\eta_{n+1}\lambda_{n+1}}) \subset V_{\eta_n\lambda_n}$.

Supposons construit sur $V_n = \bigcup_{i\leq n} V_{\eta_i\lambda_i}$ un isomorphisme $\varepsilon^{(n)} : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$. On définit sur $V_{\eta_{n+1}\lambda_{n+1}}$ un isomorphisme $\varepsilon'^{(n+1)} : p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$ comme étant le composé

$$p_2^*\mathcal{E} \xrightarrow[\sim]{p_2^*(\Phi)^{-1}} (F_K \times F_K)^*(p_2^*\mathcal{E}) \xrightarrow[\sim]{(F_K\times F_K)^*(\varepsilon^{(n)})} (F_K \times F_K)^*(p_1^*\mathcal{E}) \xrightarrow[\sim]{p_1^*(\Phi)} p_1^*\mathcal{E}.$$

Le fait que Φ soit horizontal entraîne que, sur $V_n \cap V_{\eta_{n+1}\lambda_{n+1}}$ les isomorphismes $\varepsilon^{(n)}$ et $\varepsilon'^{(n+1)}$ coïncident, comme le prouve la démonstration de (2.2.7). Ils se recollent donc pour définir un isomorphisme $\varepsilon^{(n+1)}$ sur V_{n+1}. On obtient ainsi par récurrence l'isomorphisme cherché sur $V = \bigcup_i V_{\eta_i\lambda_i}$, d'où la surconvergence de ∇.

(2.5.8) COROLLAIRE. — *Soient $X = \operatorname{Spec} A_0$ un schéma affine et lisse sur k, A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0, $A^\dagger$ sa complétée faible, $F : A^\dagger \to A^\dagger$ un relèvement de l'endomorphisme de Frobenius de A_0. Alors la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur X est équivalente à la catégorie des $(A^\dagger \otimes K)$-modules (projectifs) de type fini M, munis d'une connexion intégrable ∇ et d'un isomorphisme horizontal Φ : $(M^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla)$.*

D'après (2.5.2), la catégorie des isocristaux surconvergents sur X est équivalente à celle des $(A^\dagger \otimes K)$-modules de type fini (nécessairement projectifs), munis d'une connexion surconvergente ∇. De plus, cette équivalence est fonctorielle par rapport à $A^\dagger$, d'après (2.5.6). Par suite, la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur X est équivalente à celle des $(A^\dagger \otimes K)$-modules de type fini, munis d'une connexion surconvergente ∇ et d'un isomorphisme horizontal Φ : $M^\sigma \xrightarrow{\sim} M$. Comme toute connexion intégrable pour laquelle il existe un tel isomorphisme est surconvergente d'après (2.5.7), l'énoncé en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas II,* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1963-64, dir. par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. **270**, Springer Verlag (1972).

[AM] M. Atiyah, I. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley (1969).

[BK] R. Berger, R. Kiehl, E. Kunz, H.-J. Nasthold, *Differentialrechnung in der analytischen Geometrie*, Lecture Notes in Math. **38**, Springer-Verlag (1967).

[Be1] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[Be2] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique* p, Journées d'analyse p-adique (1982), in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).

[Be3] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque **119/120**, p. 17-49 (1984).

[Be4] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Prépublication de l'IRMAR 95-35 (1995).

[BO] P. Berthelot, A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology I*, Invent. Math. **72**, p. 159-199 (1983).

[BG] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften **261**, Springer-Verlag (1984).

[Cr1] R. Crew, *F-isocrystals and p-adic representations*, in *Algebraic Geometry - Bowdoin 1985*, PSPM **46**, part 2, p. 111-138 (1987).

[Dw1] B. Dwork, *Lectures on p-adic differential equations*, Grundlehren der math. Wissenschaften **253**, Springer-Verlag (1982).

[El1] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **6**, p. 553-604 (1973).

[FV] J. Fresnel, M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math. **18**, Birkhäuser (1981).

[GG] L. Gerritzen, H. Grauert, *Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen*, in *Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira*, p. 159-184, University of Tokyo Press, Princeton University Press (1969).

[GV] L. Gerritzen, M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Math. **817**, Springer-Verlag (1980).

[Gi1] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren der math. Wissenschaften **179**, Springer-Verlag (1971).

[GR1] H. Grauert, R. Remmert, *Nichtarchimedische Funktionentheorie*, in *Weierstraß-Festschrift*, Wissenschaftl. Abh. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen **33**, p. 393-476 (1966).

[GR2] L. Gruson, M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13**, p. 1-89 (1971).

[Ha1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. **52**, Springer-Verlag (1977).

[Ha2] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **45**, p. 5-99 (1976).

[Ka1] N. Katz, *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 1971-72, exp. 409, Lecture Notes in Math. **317**, p. 167-200, Springer-Verlag (1973).

[Ki1] R. Kiehl, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. math. **2**, p. 256-273 (1967).

[Ki2] R. Kiehl, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. math. **2**, p. 191-214 (1967).

[Ki3] R. Kiehl, *Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper*, Publ. Math. I.H.E.S. **33** (1967).

[Me] F. Mehlmann, *Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren*, Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster **19**, Münster (1981).

[MW1] P. Monsky, G. Washnitzer, *Formal cohomology I*, Annals of Math. **88**, p. 181-217 (1968).

[Mu1] D. Mumford, *An analytic construction of degenerating curves over complete local fields*, Compositio Math. **24**, p. 129-174 (1972).

[Og1] A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology II - Convergent isocrystals*, Duke Math. Journal **51**, p. 765-850 (1984).

[Og2] A. Ogus, *The convergent topos in characteristic p*, in *Grothendieck Festschrift III*, Progress in Math. **88** , Birkhaüser (1990).

[Ph1] F. Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. **2**, Birkhäuser (1979).

[vdP1] M. van der Put, *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, in *Introduction aux cohomologies p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 33-59 (1986).

[Ra1] M. Raynaud, *Géométrie analytique rigide, d'après Tate, Kiehl, …,* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **39/40**, p. 319-327 (1974).

[Ro1] Ph. Robba, *Caractérisation des dérivées logarithmiques*, Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique 1974/75, Institut Henri Poincaré, Paris (1975).

[Rb1] J. Roubaud, *Morphismes rigides étales*, Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle, Fac. des Sciences Orsay (1970).

[Se1] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math. **61**, p. 197-278 (1955).

[Ta1] J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12**, p. 257-289 (1971).