Réduction semi–stable des courbes d'après Artin, Deligne, Grothendieck, Mumford, Saito, Winters, ...

par Ahmed ABBES

Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos k de caractéristique $p \geq 0$ et de corps de fractions K. On note s son point fermé, η son point générique et $\overline{\eta}$ un point géométrique générique correspondant à une clôture séparable $\overline{K}$ de K. On désigne par I le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K et par P son sous–groupe d'inertie sauvage.

Une courbe sur S (ou une S–courbe) est un S–schéma plat, séparé, de type fini et de dimension relative 1. Une S–courbe $f : X \to S$ est propre (resp. régulière) si f est propre (resp. X est régulier). Elle est stable (resp. semi–stable) si elle est propre et si ses fibres géométriques sont des courbes stables (resp. semi–stables), i.e. sont réduites et connexes, ont pour seules singularités des points doubles ordinaires et chacune de leurs composantes irréductibles isomorphe à $\mathbb{P}^1$ rencontre les autres composantes en au moins 3 points (resp. 2 points). Une S–courbe propre est appelée modèle de sa fibre générique.

1 Énoncés des théorèmes

L'objectif de cet exposé est de présenter diverses preuves du théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit C une courbe propre, lisse et géométriquement irréductible sur K, de genre $g \geq 2$. Il existe une extension finie séparable K' de K telle que $C_{K'} = C \times_K K'$ admet un modèle stable sur la fermeture intégrale R' de R dans K'.*

Ce théorème, difficile en caractéristique résiduelle positive, admet une démonstration simple en caractéristique résiduelle nulle. Pour la décrire, je commencerai par quelques rappels sur les modèles réguliers qui seront aussi utiles pour les autres preuves.

Un sous–schéma fermé d'un schéma régulier est un diviseur à croisement normaux (dcn) si localement pour la topologie étale, il est défini par une équation de la forme $\prod_{i \in I} f_i$, où $(f_i)_{i \in I}$ est une partie d'un système régulier de paramètres. On note qu'un dcn est un diviseur réduit.

Soit X_η une courbe propre et lisse sur η. On sait qu'il existe (cf. [1, 17]) :

(i) un modèle régulier de X_η sur S;

(ii) un modèle régulier X de X_η sur S dont la fibre fermée réduite $X_{s,\mathrm{red}}$ est un dcn. Un tel modèle est dit régulier à croisement normaux (rcn).

Grâce au critère de contraction de Castelnuovo (cf. [7] théorème 3.1 et [19, 25]), on peut construire à partir des modèles ci-dessus :

- un modèle régulier relativement minimal, c'est à dire un modèle relativement minimal parmis les modèles du type (i).
- un modèle rcn relativement minimal, c'est à dire un modèle relativement minimal parmi les modèles du type (ii).

Supposons de plus X_η géométriquement irréductible. A part dans le cas où il existe un modèle régulier X dont la fibre fermée est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$, il existe des modèles minimaux parmis les modèles du type (i) et parmi ceux du type (ii) et ces modèles sont uniques à des isomorphismes uniques près (cf. [7, 19, 25]).

Soit C une courbe propre, lisse et géométriquement irréductible sur K de genre $g \geq 2$. Supposons d'abord que la caractéristique résiduelle de R est nulle. On se fixe un modèle régulier X de C sur S dont la fibre fermée réduite $X_{s,\mathrm{red}}$ est un dcn. La démonstration du théorème 1.1 est complètement constructive à partir de la donnée de X. Pour ce faire, on introduit la construction suivante: soit $n > 0$ un entier. On note $R' = R[\pi']/(\pi'^n - \pi)$ où π est une uniformisante de R, $S' = \mathrm{Spec}(R')$, et on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r, equal] & S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

où $X' = X \times_S S'$ et X'' est la normalisée de X'.

Théorème 1.2 *Supposons la caractéristique résiduelle de R nulle. Soient $[X_s] = \sum_{i \in I} n_i [C_i]$ la décomposition de X_s en composantes irréductibles, et $n > 0$ un entier tels que $n_i | n$ pour tout $i \in I$. Alors, la fibre fermée de $X'' \to S'$ est réduite et ses seules singularités sont des points doubles ordinaires.*

Cet énoncé est suffisant pour beaucoup d'applications. On le démontrera dans la section 1.1. Le théorème 1.1 s'en déduit facilement (cf. remarque 1.9).

Les démonstrations générales du théorème 1.1 sont plus compliquées. Schématiquement, elles peuvent se diviser en trois parties (inégales). Il s'agit d'abord d'identifier un bon candidat pour un modèle stable. On donnera ensuite une caractérisation du fait qu'il soit stable. On démontrera enfin que cette caractérisation est vérifiée après une extension finie de la base.

La première étape est facile. En effet, un modèle stable de C sur S, quand il existe, est unique à isomorphisme unique près. Il s'obtient à partir du modèle régulier minimal par un procédé canonique. On démontrera dans la section 1.2 l'énoncé suivant :

Proposition 1.3 *Soit C une courbe propre lisse et géométriquement irréductible sur K de genre $g \geq 2$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) C admet un modèle stable;

ii) le modèle rcn minimal de C sur S a une fibre fermée réduite;

iii) le modèle régulier minimal de C sur S a pour fibre fermée un dcn.

Les démonstrations du théorème 1.1 diffèrent essentiellement par leurs deuxième et troisième parties. La preuve la plus récente, et à mon point de vue la plus naturelle, est celle de T. Saito [26]. Il s'agit de donner une caractérisation cohomologique du fait que le modèle régulier minimal soit semi–stable. On fixe dans la suite un nombre premier $\ell \neq p$.

Théorème 1.4 *Soit C une courbe propre lisse et géométriquement irréductible sur K de genre $g \geq 2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *l'action de I sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente;*

2) *le modèle rcn minimal de C sur S a une fibre fermée réduite.*

On démontrera aussi le théorème suivant :

Théorème 1.5 (T. Saito) *Soit C une courbe propre lisse et géométriquement irréductible sur K de genre $g \geq 2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *l'action du groupe d'inertie sauvage P sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est triviale;*

2) *le modèle rcn minimal X de C sur S vérifie la propriété suivante : toute composante irréductible E de X_s de multiplicité divisible par p est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ et coupe les autres composantes en exactement deux points et les multiplicités des composantes qui coupent E sont premières à p.*

Le théorème 1.1 découle du théorème 1.4 et du théorème de monodromie (voir appendice B):

Théorème 1.6 *L'action de I sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est quasi–unipotente. C'est–à–dire, il existe un sous–groupe ouvert I' de I tel que l'action de I' sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente.*

Les démonstrations des théorèmes 1.4 et 1.5 suivent la même stratégie. Par un calcul de cycles évanescents modérément ramifés, on montre que la condition 1) est équivalente à une condition numérique sur des produits d'intersection sur X. Grâce à une analyse combinatoire assez fine, on montre que cette condition numérique est équivalente à la condition 2). Le calcul des cycles evanescents est effectué dans la section 3 et l'analyse combinatoire est développée dans la section 2.

Contrairement à la preuve de T. Saito, les premières démonstrations du théorème de réduction semi–stable utilisent les jacobiennes. On démontrera, dans la proposition 4.1, que le modèle régulier minimal de C sur S est semi–stable si et seulement si la jacobienne de sa fibre fermée est un schéma semi–abélien. Par un théorème de Raynaud, cette dernière coïncide avec la fibre fermée du modèle de Néron connexe de la jacobienne de C. On ramène ainsi la réduction semi–stable de la courbe à la réduction semi–stable de sa jacobienne, dont la preuve est due à Grothendieck (cf. section 5). On démontrera dans la proposition 5.10 le critère effectif de réduction semi–stable suivant dû à Serre et Raynaud : *une variété abélienne sur K dont tous les points de n torsion sont rationnels sur K, pour un entier $n \geq 3$ et premier à la caractéristique résiduelle p, a réduction semi–stable sur S.*

On donnera aussi une démonstration plus directe due à Artin–Winters qui n'utilise pas les modèles de Néron. Son caractère combinatoire cache des idées géométriques profondes, que nous essayons d'expliquer dans la section 5.3.

Pour finir, je voudrais signaler l'existence d'autres preuves du théorème de réduction semi–stable, en particulier celles par la géométrie rigide [4] et par la théorie géométrique des invariants [13].

Je remercie J.–B. Bost, B. Edixhoven, Q. Liu, D. Lorenzini, M. Raynaud et T. Saito pour leurs lectures attentives de cet exposé et leurs commentaires qui ont amélioré son contenu et sa rédaction.

Table des matières

Notations

Soit r un entier. On note $\delta_p(r) = r$ si $p = 0$, et $\delta_p(r)$ le plus grand diviseur de r premier à p si p est un nombre premier.

Soit a un entier ≥ 2. On désigne par μ_a le groupe des racines a–ème de l'unité. Noter que si a est premier à la caractéristique de k, alors $\mu_a(R) = \mu_a(K) = \mu_a(k)$.

Soit V un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue et quasi–unipotente de I (i.e. il existe $N, m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $\sigma \in I$, $(\sigma^m - 1)^N|V = 0$). Alors V admet une filtration dont les quotients successifs sont simples. On note V' la représentation semi–simplifiée de V, et on définit la dimension semi-simplifiée de V par $\dim_s V = \dim_{\mathbb{Q}_l}((V')^I)$. Clairement, l'action de I sur V est unipotente si et seulement si $\dim_s(V) = \dim_{\mathbb{Q}_l}(V)$.

1.1 Preuve du théorème 1.2

On suppose k de caractéristique zéro. On note $R' = R[\pi']/(\pi'^n - \pi)$, $S' = \mathrm{Spec}(R')$, et t le point fermé de S'. Soient x un point fermé de X, $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x et A son complété. Puisque X_s est un dcn sur X, alors

$$A \simeq \begin{cases} R[[u,v]]/(\pi - u^a) & \text{si } X_s \text{ a une seule branche en } x; \\ \\ R[[u,v]]/(\pi - u^a v^b) & \text{si } X_s \text{ a deux branches en } x. \end{cases}$$

Noter que $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_R R'$ et $A \otimes_R R'$ sont réduits.

Soient $x_1, \ldots, x_r$ les points de X'' au dessus de x, pour chaque i, $\hat{\mathcal{O}}_{X'',x_i}$ le complété de l'anneau local de X'' en x_i, et A' la normalisation de $A \otimes_R R'$ dans son anneau total de fractions. On a, par EGA IV 7.8.3,

$$A' \simeq \prod_{i=1}^{r} \hat{\mathcal{O}}_{X'',x_i}.$$

Supposons que X_s a une seule branche en x. Soit $n = an'$, alors

$$A' \simeq \prod_{\xi \in \mu_a(R)} \{R'[[u,v]]/(\pi'^{n'} - \xi u)\}' \simeq \prod_{\xi \in \mu_a(R)} R'[[v]],$$

où $\{\ \}'$ désigne la normalisation. On en déduit que X'' est lisse en $x_1, \ldots, x_r$.

Supposons que X_s a deux branches en x. Soient $d = (a,b)$, $a = d\alpha$, $b = d\beta$ et $n = d\alpha\beta n'$. Alors,

$$A' \simeq \prod_{\xi \in \mu_d(R)} \{R'[[u,v]]/(\pi'^{n'\alpha\beta} - \xi u^\alpha v^\beta)\}'.$$

On se propose de normaliser $R'[[u,v]]/(\pi'^{n'\alpha\beta} - \xi u^\alpha v^\beta)$. On fixe $\theta \in R$ tel que $\theta^{\alpha\beta} = \xi$, et on considère le morphisme

$$f : P = \mathrm{Spec}(R'[[z,y]]/(\pi'^{n'} - \theta z y)) \longrightarrow Q = \mathrm{Spec}(R'[[u,v]]/(\pi'^{n'\alpha\beta} - \xi u^\alpha v^\beta))$$

donné par le morphism de R'–algèbres

$$\begin{array}{rccc} f^* : & R'[[u,v]]/(\pi'^{n'\alpha\beta} - \xi u^\alpha v^\beta) & \longrightarrow & R'[[z,y]]/(\pi'^{n'} - \theta z y) \\ & (u,v) & \longmapsto & (z^\beta, y^\alpha) \end{array}$$

Soit κ le point générique de Q. Comme $(\alpha, \beta) = 1$, alors f induit une immersion fermée $P \times_Q \kappa \subset \kappa$. Or $P \times_Q \kappa \neq \emptyset$ (car f^* est injectif), d'où $P \times_Q \kappa = \kappa$. Puisque P est normal, f^* induit un isomorphisme

$$\{R'[[u,v]]/(\pi'^{n'\alpha\beta} - \xi u^\alpha v^\beta)\}' \simeq R'[[z,y]]/(\pi'^{n'} - \theta z y).$$

On en déduit que chaque x_i est un point double ordinaire sur X''_t. □

1.2 Preuve de la proposition 1.3

Soit C une courbe propre lisse et géométriquement irréductible sur K de genre $g \geq 2$.

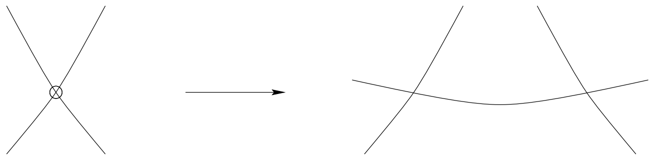
Lemme 1.7 *L'éclatement de l'idéal maximal d'un modèle semi–stable de C en un point singulier est un modèle semi–stable.*

Preuve. Soient X un modèle semi–stable de C sur S et x un point singulier dans X. Donc x est un point double ordinaire dans X_s. La déformation universelle d'une singularité double ordinaire est l'anneau $W[[u,v,t]]/(uv-t)$ sur l'anneau $W[[t]]$ où $W = k$ is $p = 0$ et l'anneau des vecteur de Witt de k si $p > 0$. On en déduit que la complétion de l'anneau local de X en x est donnée par

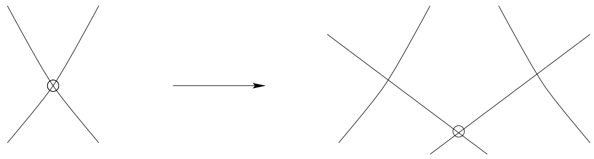
$$\hat{O}_{X,x} \simeq R[[u,v]]/(uv - \pi^n) \tag{1}$$

où π est une uniformisante de R et n est un entier ≥ 1. De plus, x est singulier ssi $n \geq 2$. Soit $\widetilde{X}$ l'éclatement de X en x. Les propriétés suivantes découlent facilement de (1) :

Si $n = 2$, alors $\widetilde{X}$ est régulier au dessus de x. Sa fibre fermée s'obtient à partir de X_s en remplaçant x par un $\mathbb{P}^1$ qui coupe transversalement les deux branches de X_s en x, en deux points distincts



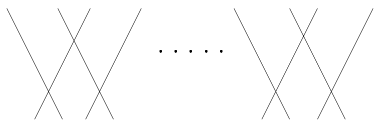
Si $n \geq 3$, alors $\widetilde{X}$ a au plus un point singulier $\widetilde{x}$ au dessus de x. La complétion de l'anneau local de $\widetilde{X}$ en $\widetilde{x}$ est isomorphe à $R[[\alpha,\beta]]/(\alpha\beta - \pi^{n-2})$. La fibre $\widetilde{X}_s$ s'obtient à partir de X_s en remplaçant x par deux $\mathbb{P}^1$ qui se coupent transversalement en $\widetilde{x}$ et chacun coupe une branche de X_s en x, en un point distinct de $\widetilde{x}$:



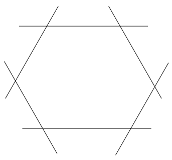
$\square$

Preuve de i) $\Rightarrow$ iii). Soit X un modèle stable de C sur S. Une désingularisation minimale $\widetilde{X}$ de X est une courbe semi–stable par le lemme 1.7. En particulier, elle ne contient pas de $\mathbb{P}^1$ de self–intersection -1. C'est donc le modèle régulier minimal de C sur S. De (1), on voit que la fibre fermée de $\widetilde{X}$ est un dcn.

Preuve de iii) $\Rightarrow$ i). Soient $\mathcal{C}$ le modèle régulier minimal de C sur S et $E_1, \ldots, E_n$ les composantes irréductibles de X_s isomorphes à $\mathbb{P}^1$ qui coupent les autres composantes en deux points. Alors, les E_i forment des chaînes du type :



sauf si elles forment un cycle qui constitue toute la fibre fermée :

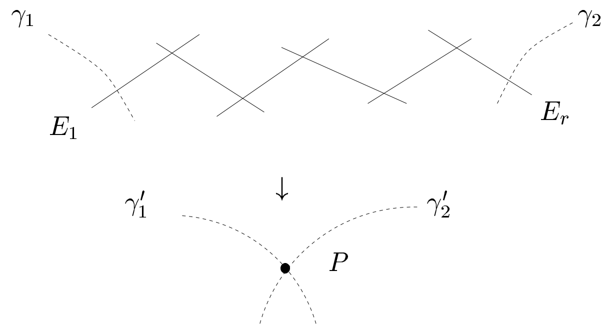


Mais dans ce dernier cas, le genre de C vaut 1, ce qui contredit l' hypothèse de la proposition. L'implication $iii) \Rightarrow i)$ découle alors du lemme suivant :

Lemme 1.8 *Soient X une S–courbe propre et régulière et $E_1, \ldots, E_r$ des composantes irréductibles de sa fibre fermée qui sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$, de self–intersection -2, et qui forment une chaîne du type décrit ci–dessus. Alors, on peut les contracter en un point double rationnel P d'une S–courbe normale Y. Si de plus X_s est un dcn, alors P est un point double ordinaire de la fibre fermée Y_s.*

Preuve. Par un théorème de Lipman, on peut contracter les E_i en un point double rationnel P d'une S–courbe normale Y ([18] théorème 27.1). Le morphisme de contraction $\rho : X \to Y$ est la composé d'une suite d'éclatements puisque c'est ainsi pour toute désingularisation d'une singularité rationnelle sur une surface normale ([18] théorème 4.1).

Supposons que X_s soit un dcn.



Soient γ_1 la branche de X_s qui coupe E_1 et γ_2 celle qui coupe E_r. On désigne par Y_s' la transformée stricte de Y_s dans X et par γ_1' et γ_2' les images de γ_1 et γ_2 dans Y_s. L'égalité des diviseurs de Cartier $X_s = Y_s' + \sum_i E_i$ montre que la multiplicité du point P sur la courbe Y_s vaut 2. Il s'en suit aussi que la multiplicité de P sur γ_1' et sur γ_2' vaut 1, i.e. γ_1' et γ_2' sont lisses en P. On montre d'abord que l'espace cotangent de Y_s en P est de dimension 2. On sait que l'espace cotangent de Y en P est de dimension 3, car P est un point double rationnel (cf. [18] corollaire 23.3). Il suffit donc de voir que l'image de π dans l'espace cotangent de Y en P est non nulle. Sinon, l'image de π dans l'espace cotangent de X en tout point Q au dessus de P serait nulle. Ceci est faux en un point Q lisse dans X/S. Il reste à voir que γ_1' et γ_2' se coupent transversalement en P. Si ce n'était pas le cas, par éclatement du point P dans Y, les transformées strictes de γ_1' et γ_2' se rencontreraient. Par conséquent, γ_1 et γ_2 seraient séparées sur X par une chaîne de $\mathbb{P}^1$ de longeur au plus $r-1$, ce qui n'est pas le cas. □

L'implication $iii) \Rightarrow ii)$ est évidente. Pour $ii) \Rightarrow iii)$, il suffit de noter que sous l'hypothèse $ii)$, le modèle rcn minimal X de C coïncide avec le modèle régulier minimal. En effet, si X contient un $\mathbb{P}^1$ de self–intersection -1, alors ce $\mathbb{P}^1$ coupe le reste des composantes en un seul point car la fibre fermée X_s est réduite. En contractant ce $\mathbb{P}^1$, on obtient encore un modèle r.c.n, ce qui contredit la minimalité de X. □

Remarque 1.9 En caractéristique résiduelle nulle, le théorème 1.1 s'obtient du théorème 1.2 comme suit : soit $\widetilde{X}$ la désingularisation minimale de X''. Par le lemme 1.7, la fibre fermée $\widetilde{X}_t$ est réduite, et ses seules singularités sont des points doubles ordinaires. En contractant les $\mathbb{P}^1$ de self–intersection -1, on voit que le modèle régulier minimal de $C_{K'}$ sur S' est semi–stable. Le théorème 1.1 en découle grâce à la proposition 1.3.

2 Analyse combinatoire

Le lecteur qui ne souhaiterait pas lire cette section, devrait admettre les propositions 2.3 et 2.6.

Définition 2.1 *Une forme est la donnée des objets suivants*

1) *un* $\mathbb{Z}$*–module libre* M *de rang fini et une base* B*;*

2) *une forme bilinéaire symétrique* $(\ ,\ )$ *sur* M*;*

3) *une forme linéaire sur* M*, notée* $(\ ,\omega)$*;*

4) *un élément* $E = \sum_{C\in B} r_C C$*, où* r_C *est un entier* ≥ 1 *pour tout* $C \in B$*;*

tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

a) *la forme bilinéaire induite sur* $M_{\mathbb{Q}}$ *est semi–définie négative de noyau engendré par* E*;*

b) $(C, C') \geq 0$ *pour tout* $C, C' \in B$ *tel que* $C \neq C'$*;*

c) B *est connexe : il n'existe pas de partition* $B = B_1 \sqcup B_2$ *avec* $(C_1, C_2) = 0$ *pour tout* $C_1 \in B_1$ *et* $C_2 \in B_2$*;*

d) $\frac{1}{2}(C, C + \omega) + 1$ *est un entier* ≥ 0*, pour tout* $C \in B$*.*

Le genre de M *est l'entier positif* $g = \frac{1}{2}(E, \omega) + 1$*. On pose* $E_0 :\ = \sum_{C\in B} C$ *et* $F :\ = (\ , \omega + E_0)$*.*
On dit qu'une forme est relativement minimale s'il n'existe pas de $C \in B$ *tel que* $(C, C) = (C, \omega) = -1$*.*
On dit qu'une forme est rcn relativement minimale s'il n'existe pas de $C \in B$ *tel que* $(C, C) = (C, \omega) = -1$ *et* $F(C) \leq 0$*.*

On associe à une forme M le graphe dont les sommets sont indexés par B et où le nombre d'arêtes liant deux sommets distincts $C, C' \in B$ est (C, C').

Soit X une S–courbe propre et régulière. En tant que diviseur de Cartier, la fibre fermée se décompose

$$[X_s] = \sum_{C\in B} r_C [C]$$

où B est l'ensemble des composantes irréductibles de X_s. On associe à X la forme $M(X)$ donnée par

1) $M(X)$ est le groupe abélien libre de base B;

2) $(\ ,\ )$ est le produit d'intersection;

3) $(\ ,\omega)$ est le degré d'intersection avec le faisceau dualisant relatif ω de X sur S;

4) $E = [X_s] = \sum_{C\in B} r_C C$.

Les propriétés a)—d) sont alors bien connues. Il est facile de voir que les notions de modèle relativement minimal et de forme relativement minimale se correspondent :

Lemme 2.2 *i) Soit* X *une* S*–courbe propre et régulière. Alors,* X *est relativement minimale si et seulement si* $M(X)$ *est une forme relativement minimale.*
ii) Soit X *une* S*–courbe propre et rcn. Alors,* X *est rcn relativement minimale si et seulement si* $M(X)$ *est une forme rcn. relativement minimale.*

Proposition 2.3 *Soit* M *une forme rcn relativement minimale de genre* $g \geq 2$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $F(E) = F(E_0)$*;*

2) $E = E_0$*.*

Preuve. On a
$$F(E) - F(E_0) = \sum_{C \in B} (r_C - 1) F(C) \tag{2}$$
Pour chaque $C \in B$, on pose $N(C) = \{C' \in B; (C.C') \geq 1\}$ et $n(C) = \#N(C)$. Alors
$$F(C) = (C, C + \omega) + \sum_{C' \in N(C)} (C, C') \geq -2 + n(C) \geq -2.$$

Lemme 2.4 *$F(C) \leq 0$ ne se produit que dans l'un des cas suivants :*

(α) $(C, C+\omega) = -2$, $N(C) = \{C'\}$, $(C, C') = 1$. *Dans ce cas* $F(C) = -1$, $(C, C) r_C + r_{C'} = 0$ *et* $-(C, C) \geq 2$.

(β) $(C, C+\omega) = -2$, $N(C) = \{C', C''\}$, $(C, C') = (C, C'') = 1$. *Dans ce cas* $F(C) = 0$, $(C, C) r_C + r_{C'} + r_{C''} = 0$ *et* $-(C, C) \geq 2$.

(γ) $(C, C+\omega) = -2$, $N(C) = \{C'\}$, $(C, C') = 2$. *Dans ce cas* $F(C) = 0$, $(C, C) r_C + 2r_{C'} = 0$ *et* $-(C, C) \geq 2$.

On dit alors que C est de type (α) ou (β) ou (γ).

On distingue deux cas possibles suivant qu'il existe ou pas de $C \in B$ de type (α).

1) Il n'existe pas de $C \in B$ de type (α).

Dans ce cas, $F(C) \geq 0$ pour tout $C \in B$. L'expression (2) montre que $F(E) \geq F(E_0)$ et que $F(E) = F(E_0)$ ssi $(r_C - 1)F(C) = 0$ pour tout $C \in B$. On en déduit que $r_C = 1$ pour tout C dans B qui n'est pas de type (β) ou (γ).

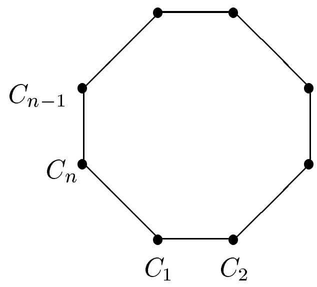
Soient $C \in B$ de type (γ) et C' son unique successeur sur le graphe de M. Comme C' n'est pas de type (β), deux cas se présentent :

i) C' n'est pas de type (γ), donc $r_{C'} = 1$. De la relation $(C, C) r_C + 2r_{C'} = 0$ et l'inégalité $-(C, C) \geq 2$ on tire que $r_C \leq 1$ et donc $r_C = 1$.

ii) C' est de type (γ). Dans ce cas $B = \{C, C'\}$. Les relations $(C, C) r_C + 2r_{C'} = 0$ et $(C', C') r_{C'} + 2r_C = 0$ impliquent que $(C, C) = (C', C') = -2$ et $r_C = r_{C'} = 2$. Mais dans ce cas le genre $g = 1$ ce qui contredit l'hypothèse de la proposition.

Soit $C \in B$ de type (β). On considère dans le graphe de M une chaîne maximale $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de B de type (β), qui contient C et qui vérifie $(C_i, C_{i+1}) = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Soit C_0 l'unique prédécesseur de C_1 et C_{n+1} l'unique successeur de C_n. Il y a deux cas possibles :

i) $C_0 = C_n$ et $C_{n+1} = C_1$, i.e. les C_i forment un cycle de longueur $n \geq 2$



Dans ce cas $B = \{C_1, \ldots, C_n\}$. En additionnant les relations $r_i + r_{i+2} = -(C_i, C_i) r_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$, on trouve que $\sum_{i=1}^{n} r_i((C_i, C_i) + 2) = 0$. Comme $(C_i, C_i) + 2 \leq 0$, on en déduit que $(C_i, C_i) = -2$ pour tout i et $g(M) = 1$. Ceci contredit l'hypothèse de la proposition.

ii) C_0 et C_{n+1} ne sont pas de type (β), i.e. les C_i forment une chaîne

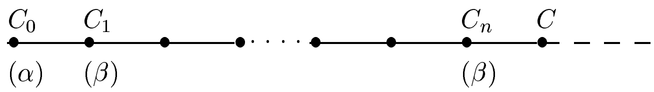
Comme C_0 et C_{n+1} ne sont pas de type (γ), alors $r_0 = r_{n+1} = 1$. On en déduit

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 + r_2 & \geq & 2r_1 \\ r_1 + r_3 & \geq & 2r_2 \\ & \vdots & \\ r_{n-2} + r_n & \geq & 2r_{n-1} \\ r_{n-1} + 1 & \geq & 2r_n \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \geq r_1 + r_n \Rightarrow r_1 = r_n = 1.$$

De proche en proche, on voit que $r_i = 1$ pour tout i.

2) Il existe $C \in B$ de type (α).

Sur le graphe de M, les sommets de type (α) sont des bouts de chaînes, dites de type A_n, de la forme



où $n \geq 0$, C_0 est de type (α), C_i pour $1 \leq i \leq n$ est de type (β) et $(C_i, C_{i+1}) = 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Une chaîne de type A_n admet un successeur unique (C dans la figure ci–dessus). On démontre facilement les estimations suivantes :

Lemme 2.5 *Soient λ une chaîne de type A_n et C son successeur, alors*

$$r_0 | r_C \quad \text{et} \quad (n+2) r_0 \leq r_0 + r_n \leq r_C.$$

De plus, $r_C = (n+2) r_0$ ssi $(C_i, C_i) = -2$ pour $0 \leq i \leq n$. Dans ce cas, $r_i = (i+1) r_0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Le successeur d'une chaîne de type A_n n'est pas de type (α). Sinon, $r_n = -(C, C) r_C \geq 2 r_C$ ce qui contredit lemme 2.5. Par définition, le successeur n'est pas de type (γ). On dit que la chaîne est maximale si son successeur n'est pas de type (β).

On décompose B en trois sous–ensembles $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3$ où B_1 est constitué des éléments de B qui font partie d'une chaîne de type A_n, B_2 est formé des successeur de chaînes maximales et B_3 contient le reste des éléments. Pour $C \in B_2$, on pose

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CH}(C) & = & \{\lambda \text{ chaîne maximale de type } \mathrm{A_n} \text{ et de successeur } C\} \\ \overline{\mathrm{CH}}(C) & = & \{C\} \cup \bigcup_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} \overline{\lambda} \end{array}$$

où $\overline{\lambda}$ désigne le sous–ensemble de B formé des sommets de λ,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(C) & = & \#\mathrm{CH}(C) \\ \varphi(C) & = & \displaystyle\sum_{C' \in \overline{\mathrm{CH}}(C)} (r_{C'} - 1) F(C'). \end{array}$$

Pour $\lambda = (C_0, \ldots, C_n) \in \mathrm{CH}(C)$, on pose $r_{i,\lambda} = r_{C_i}$ pour $0 \leq i \leq n_\lambda$. On a

$$F(E) - F(E_0) = \sum_{D \in B_3} (r_D - 1)F(D) + \sum_{C \in B_2} \varphi(C) \tag{3}$$

Pour tout $D \in B_3$, $F(D) \geq 0$. Considérons $C \in B_2$, alors

$$\varphi(C) = (r_C - 1)(F(C) - \mathrm{ch}(C)) + \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} ((r_C - 1) - (r_{0,\lambda} - 1)) \tag{4}$$

$$F(C) - \mathrm{ch}(C) = (C, C + \omega) + ((C, E_0 - C) - \mathrm{ch}(C)) \geq -2 \tag{5}$$

Par ailleurs,

i) Si $F(C) - \mathrm{ch}(C) = -2$, alors $(C, C+\omega) = -2$ et $(C, E_0 - C) = \mathrm{ch}(C)$. Dans ce cas $B = \overline{\mathrm{CH}}(C)$.

ii) Si $F(C) - \mathrm{ch}(C) = -1$ alors $\varphi(C) > 0$. En effet, $\varphi(C) \leq 0$ implique

$$\frac{\mathrm{ch}(C)}{2} r_C \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} r_C (1 - \frac{1}{n_\lambda + 2}) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} (r_C - r_{0,\lambda}) \leq r_C - 1.$$

D'où $\mathrm{ch}(C) = 1$. Par suite $F(C) = 0$ et C est de type (β) ce qui est impossible.

iii) Si $F(C) - \mathrm{ch}(C) \geq 0$, alors $\varphi(C) \geq 0$.

On distingue alors deux sous–cas :

A) *Il n'existe pas $C \in B_2$ tel que $F(C) - \mathrm{ch}(C) = -2$.*

En vue de l'expression (3), l'égalité $F(E) = F(E_0)$ ne se produit que si $(r_D - 1)F(D) = 0$ pour tout $D \in B_3$, et $\varphi(C) = 0$ pour tout $C \in B_2$. Sous l'hypothèse **A)**, $\varphi(C) = 0$ implique que $F(C) - \mathrm{ch}(C) \geq 0$. Comme $r_C \geq r_{0,\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{CH}(C)$, alors $\varphi(C) = 0$ implique par (4) que $(r_C - 1)(F(C) - \mathrm{ch}(C)) = 0$, et $r_C = r_{0,\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{CH}(C)$. Ce qui contredit le lemme 2.5. Donc $B_2 = \emptyset$ et B ne contient pas de somment de type (α). Ceci contredit l'hypothèse **2)**.

B) *Il existe $C \in B_2$ tel que $F(C) - \mathrm{ch}(C) = -2$.*

Dans ce cas $B = \overline{\mathrm{CH}}(C)$. La relation $F(E) = F(E_0)$ implique que $\varphi(C) = 0$. D'où

$$2(r_C - 1) = \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} (r_C - r_{0,\lambda}) \geq \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} r_C (1 - \frac{1}{n_\lambda + 2}) \geq r_C \frac{\mathrm{ch}(C)}{2}.$$

Par suite $\mathrm{ch}(C) < 4$. Il y a trois cas possibles :

i) $\mathrm{ch}(C) = 1$, donc $F(C) = -1$ et C est de type (α) ce qui est impossible.

ii) $\mathrm{ch}(C) = 2$, donc $F(C) = 0$ et C est de type (β) ou (γ) ce qui est impossible.

iii) $\mathrm{ch}(C) = 3$, donc $F(C) = 1$. Soient λ_i (pour $i = 1, 2, 3$) les trois chaînes maximales de successeur C.

$$\varphi(C) = 0 \Leftrightarrow 2 = r_C (\sum_{i=1}^{3} \frac{r_{0,\lambda_i}}{r_C} - 1).$$

On en déduit que $1 < \sum_{i=1}^{3} r_{0,\lambda_i}/r_C \leq 2$. Donc

$$1 < \sum_{i=1}^{3} \frac{r_{0,\lambda_i}}{r_C} < -(C, C) = \sum_{i=1}^{3} \frac{r_{n_i,\lambda_i}}{r_C} < 3.$$

Ceci implique que $-(C, C) = 2$. La contradiction découle alors de l'inégalité suivante

$$3 < \frac{2}{r_C} - (C, C) + 1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{r_{0,\lambda_i} + r_{n_i,\lambda_i}}{r_C} \leq 3.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.3. □

On fixe un nombre premier p, et on pose $E_1 = \sum_{C\in B} m_C C$ où $m_C = \delta_p(C)$ pour $C \in B$.

Proposition 2.6 *Soit M une forme rcn relativement minimale de genre $g \geq 2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *$F(E) = F(E_1)$;*

2) *Si p divise r_C pour $C \in B$, alors $F(C) = 0$, $(C, C+K) = -2$ et pour tout $C' \in B$ tel que $(C, C') \neq 0$ et $C \neq C'$, on a $(p, r_{C'}) = 1$.*

Preuve. On a
$$F(E) - F(E_1) = \sum_{C\in B} (r_C - m_C)F(C) \tag{6}$$
Comme dans la preuve de 2.3, on distingue deux cas possibles :

1) Il n'existe pas de $C \in B$ de type (α).

L'expression (6) montre que $F(E) = F(E_1)$ ssi $(r_C - m_C)F(C) = 0$ pour tout $C \in B$. On en déduit que $r_C = m_C$ pour tout C dans B qui n'est pas de type (β) ou (γ).

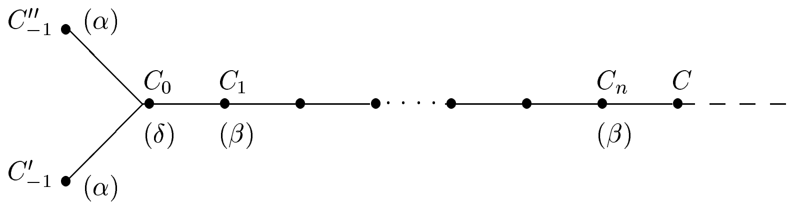
Soient $C \in B$ de type (γ) et C' son unique successeur sur le graphe de M. De la preuve de 2.3, on retient que C' n'est ni de type (β) ni de type (γ). Donc $(p, r_{C'}) = 1$. Noter que si $p \neq 2$, alors $(p, r_C) = 1$ car $(C, C)r_C = -2r_{C'}$.

Soit $C \in B$ de type (β). On considère dans le graphe de M une chaîne maximale $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de B de type (β), qui contient C et qui vérifie $(C_i, C_{i+1}) = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Soit C_0 l'unique prédécesseur de C_1 et C_{n+1} l'unique successeur de C_n. Nous avons vu dans la preuve de 2.6 que les C_i ne forment pas un cycle. Donc C_0 et C_{n+1} ne sont ni de type (β) ni de type (γ), d'où $(p, r_0) = (p, r_{n+1}) = 1$. Les relations $r_i + r_{i+2} = -(C_{i+1}, C_{i+1})r_{i+1}$ montrent que si $p|r_i$ et $p|r_{i+1}$, alors $p|r_{i+2}$. On en déduit que p ne peut pas diviser deux sommets consécutifs car p ne divise pas r_0 et r_{n+1}.

2) Il existe $C \in B$ de type (α).

Un élément $C \in B$ est dit de type (δ) si $F(C) = 1$, et s'il existe deux éléments distincts $C', C'' \in B$ de type (α) tels que $(C, C') = (C, C'') = 1$, et $(C', C') = (C'', C'') = -2$. Il est facile de voir que si C est de type (δ), alors $(C, C+K) = -2$, $r_C = 2r_{C'} = 2r_{C''}$ et $n(C) = 3$. Soit $\tilde{C}$ l'élément de $N(C)$ différent de C' et C''. On a $(C, \tilde{C}) = 1$.

Une branche du graphe de M est dite de type D_n si elle est composée de $(C'_{-1}, C''_{-1}, C_0, C_1, \ldots, C_n)$ où C'_{-1} et C''_{-1} sont de type (α), C_0 est de type (δ), C_i pour $1 \leq i \leq n$ sont de type (β), $N(C_0) = \{C'_{-1}, C''_{-1}, C_1\}$, et $(C_i, C_{i+1}) = 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$.



Une branche de type A_n qui n'est pas contenue dans une branche de type D_m est dite branche de type A'_n. Noter que dans une branche D_n, il y a deux sous–branches de type A_0.

Sur le graphe de M, les sommets de type (α) sont des bouts de branches de type D_n ou A'_n. On appelle chaîne, une branche de type A'_n ou D_n. Une chaîne admet un successeur unique. Le lemme suivant est l'analogue du lemme 2.5 pour les branches D_n.

Lemme 2.7 *Soient $\lambda = (C'_{-1}, C''_{-1}, C_0, \ldots, C_n)$ une chaîne de type D_n et C son successeur, alors*

$$r_0 | r_C \quad \text{et} \quad r_n \leq r_C.$$

De plus, $r_n = r_C$ ssi $(C_i, C_i) = -2$ pour $0 \leq i \leq n$. Dans ce cas, $r_i = r_0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Le successeur d'une chaîne de type D_n n'est pas de type (α). Sinon, $r_n = -(C, C)r_C \geq 2r_C$ ce qui contredit le lemme 2.5. Par définition, le successeur n'est pas de type (γ). On dit que la chaîne est maximale si son successeur n'est pas de type (β).

On décompose B en quatre sous–ensembles $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3 \sqcup B_4$ où B_1 est constitué des éléments de B qui font partie d'une chaîne de type A'_n, B_2 est constitué des éléments de B qui font partie d'une chaîne de type D_n, B_3 est formé des successeurs de chaînes maximales et B_4 contient le reste des éléments. Pour $C \in B_3$, on pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{CH}_A(C) &= \{\lambda \text{ chaîne maximale de type } \mathrm{A'_n} \text{ de successeur } C\} \\
\mathrm{CH}_D(C) &= \{\lambda \text{ chaîne maximale de type } \mathrm{D_n} \text{ de successeur } C\} \\
\mathrm{CH}(C) &= \mathrm{CH}_A(C) \cup \mathrm{CH}_D(C) \\
\overline{\mathrm{CH}}(C) &= \{C\} \cup \bigcup_{\lambda \in \mathrm{CH}(C)} \overline{\lambda} \\
\mathrm{ch}_*(C) &= \#\mathrm{CH}_*(C) \\
\varphi(C) &= \sum_{C' \in \overline{\mathrm{CH}}(C)} (r_{C'} - m_{C'})F(C').
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = (C'_{-1}, C''_{-1}, C_0, \ldots, C_n) \in \mathrm{CH}_D(C)$, on pose $r_{-1,\lambda} = r_{C'_{-1}} = r_{C''_{-1}}$, $r_{i,\lambda} = r_{C_i}$ pour $0 \leq i \leq n_\lambda$ et $m_{i,\lambda} = \delta_p(r_{i,\lambda})$ pour $-1 \leq i \leq n_\lambda$. On introduit des notations analogues pour $\lambda \in \mathrm{CH}_A(C)$. On a

$$F(E) - F(E_1) = \sum_{D \in B_4} (r_D - m_D)F(D) + \sum_{C \in B_3} \varphi(C) \tag{7}$$

Pour tout $D \in B_4$, $F(D) \geq 0$. Considérons $C \in B_3$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi(C) &= (r_C - m_C)(F(C) - \mathrm{ch}_A(C)) + \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}_A(C)} ((r_C - m_C) - (r_{0,\lambda} - m_{0,\lambda})) \\
&\quad + \sum_{\lambda \in \mathrm{CH}_D(C)} (2m_{-1,\lambda} - m_{0,\lambda})
\end{aligned} \tag{8}$$

En effet, pour $\lambda \in \mathrm{CH}_D(C)$, $r_{0,\lambda} = 2r_{-1,\lambda}$, $m_{0,\lambda} = 2m_{-1,\lambda}$ si $p \neq 2$, et $m_{0,\lambda} = m_{-1,\lambda}$ si $p = 2$. Le signe de

$$F(C) - \mathrm{ch}_A(C) = (C, C + K) + ((C, E_0 - C) - \mathrm{ch}_A(C)) \geq -2$$

se calcule grâce à l'estimation facile suivante :

Lemme 2.8 *Soient r, r' deux entiers positifs tel que $r | r'$, $m = \delta_p(r)$ et $m' = \delta_p(r')$. Alors*

$$r' - m' \geq \frac{r'}{r}(r - m),$$

avec égalité ssi $(p, r'/r) = 1$.

i) Si $F(C) - \mathrm{ch}_A(C) = -2$, alors $(C, C + K) = -2$ et $(C, E_0 - C) = \mathrm{ch}_A(C)$.
Dans ce cas $B = \overline{\mathrm{CH}}(C)$ et $\mathrm{ch}_D(C) = 0$.

ii) Si $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)=-1$ alors $\varphi(C)\geq 0$.
Preuve. Si $r_C-m_C=0$, alors $\varphi(C)\geq 0$. Supposons que $r_C-m_C>0$. On va démontrer que

$$(r_C-m_C)(F(C)-\mathrm{ch}_A(C))+\sum_{\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)}((r_C-m_C)-(r_{0,\lambda}-m_{0,\lambda}))>0.$$

Sinon,

$$\frac{\mathrm{ch}_A(C)}{2}(r_C-m_C)\leq \sum_{\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)}(r_C-m_C)(1-\frac{1}{n_\lambda+2})\leq \sum_{\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)}((r_C-m_C)-(r_{0,\lambda}-m_{0,\lambda}))\leq r_C-m_C$$

D'où $\mathrm{ch}_A(C)\leq 2$. Si $\mathrm{ch}_A(C)=1$, alors $F(C)=0$ et C est de type (β) ce qui est impossible. Si $\mathrm{ch}_A(C)=2$, alors $F(C)=1$, les deux branches maximales de type A'_n de successeur C sont de longeur 0 (i.e. chacune est formée d'un seul sommet qui est de type (α)), on les note C_1 et C_2. De plus, $r_C=2r_{C_1}=2r_{C_2}$. Le lemme 2.5 montre que $(C_1,C_1)=(C_2,C_2)=-2$. Il s'en suit que C est de type (δ) ce qui est impossible.

iii) Si $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)\geq 0$, alors $\varphi(C)\geq 0$.

On distingue alors deux sous–cas:

A) *Il n'existe pas $C\in B_3$ tel que $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)=-2$.*

En vue de l'expression (7), l'égalité $F(E)=F(E_1)$ ne se produit que si $(r_D-m_D)F(D)=0$ pour tout $D\in B_4$, et $\varphi(C)=0$ pour tout $C\in B_3$. Soit $C\in B_3$. Si $r_C=m_C$, alors pour tout $\lambda\in \mathrm{CH}(C)$, $r_{0,\lambda}|r_C$ et donc $(p,r_{0,\lambda})=1$. On en déduit que p ne peut pas diviser les multiplicités de deux sommets (β) consécutifs de λ. Si $r_C\neq m_C$, l'analyse précédente montre que $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)\geq 0$. Donc $\varphi(C)=0$ implique que $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)=0$ et $r_C=r_{0,\lambda}$ pour tout $\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)$. Cette dernière égalité contredit le lemme 2.5. Donc $\mathrm{ch}_A(C)=0$ et $F(C)=0$, i.e. C est de type (β) ou (γ). Ceci est impossible.

B) *Il existe $C\in B_3$ tel que $F(C)-\mathrm{ch}_A(C)=-2$.*

Dans ce cas $B=\overline{\mathrm{CH}}(C)$ et $\mathrm{ch}_D(C)=0$. La relation $F(E)=F(E_1)$ implique que $\varphi(C)=0$. Si $r_C=m_C$, on conclut comme plus haut. Supposons que $r_C-m_C>0$, alors

$$2(r_c-m_C)=\sum_{\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)}((r_C-m_C)-(r_{0,\lambda}-m_{0,\lambda}))\geq \sum_{\lambda\in \mathrm{CH}_A(C)}(r_C-m_C)(1-\frac{1}{n_\lambda+2})\geq (r_C-m_C)\frac{\mathrm{ch}_A(C)}{2}$$

Par suite $\mathrm{ch}_A(C)\leq 4$. Il y a quatres cas possibles:

i) $\mathrm{ch}_A(C)=1$, donc $F(C)=-1$ et C est de type (α) ce qui est impossible.

ii) $\mathrm{ch}_A(C)=2$, donc $F(C)=0$ et C est de type (β) ou (γ) ce qui est impossible.

iii) $\mathrm{ch}_A(C)=3$, donc $F(C)=1$. Soit λ_i (pour $i=1,2,3$) les trois chaînes maximales de successeur C. La relation $\varphi(C)=0$ donne

$$r_C-m_C=\sum_{i=1}^{3}(r_{0,\lambda_i}-m_{0,\lambda_i})\leq \sum_{i=1}^{3}\frac{r_{0,\lambda_i}}{r_C}(r_C-m_C).$$

Donc

$$1\leq \sum_{i=1}^{3}\frac{r_{0,\lambda_i}}{r_C}\leq \sum_{i=1}^{3}\frac{r_{n_i,\lambda_i}}{r_C}=-(C,C)=\sum_{i=1}^{3}\frac{r_{n_i,\lambda_i}+r_{0,\lambda_i}}{r_C}-\sum_{i=1}^{3}\frac{r_{0,\lambda_i}}{r_C}\leq 2.$$

Si $-(C,C)=1$, alors $n_i=0$ pour $i=1,2,3$, i.e. chaque λ_i est réduite à un sommet C_i de type (α). A une permutation près, on a

$$(-(C_1,C_1),-(C_2,C_2),-(C_3,C_3))=(\frac{r_C}{r_{0,\lambda_1}},\frac{r_C}{r_{0,\lambda_2}},\frac{r_C}{r_{0,\lambda_3}})=(2,3,6) \text{ ou } (2,4,4) \text{ ou } (3,3,3).$$

Chacun de ces cas donne $g=1$, ce qui est impossible. Si $-(C,C)=2$, alors $\sum_{i=1}^{3} r_{0,\lambda_i}/r_C=1$ et $r_C=r_{n_i,\lambda_i}+r_{0,\lambda_i}$. En utilisant lemme 2.5, on voit que $g=1$ ce qui est impossible.

iv) $\mathrm{ch}_A(C)=4$, donc $F(C)=2$. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_4$ les quatres chaînes de type A'_n maximales de successeur C. On voit que $r_{0,\lambda_i}/r_C=1/2$ et que λ_i est réduite à un sommet C_i de type (α). Donc $(C,C)=-2$, et par le lemme 2.5 $(C_i,C_i)=-2$. Ceci implique que $g=1$ ce qui est impossible.

□

3 Faisceaux des cycles évanescents

Soient ℓ un nombre premier inversible dans R et $\Lambda=\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$. Soit $f:X\to S$ un morphisme de type fini. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & & X_{\overline{\eta}} \arrow[ll, "\overline{j}"'] \arrow[d] \\
s \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] & \overline{\eta} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Les faisceaux des cycles évanescents sont les faisceaux

$$\Psi^n(\Lambda)=i^*\mathrm{R}^n\overline{j}_*(\Lambda) \qquad (\text{pour } n\geq 0)$$

sur X_s, munis par transport de structure, d'une action continue de $I=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Théorème 3.1 ([8] (finitude) théorème 3.2) *Les faisceaux $\Psi^n(\Lambda)$ sont constructibles.*

Soient $\overline{x}$ un point géométrique de X_s, $X_{(\overline{x})}$ le hensélisé strict de X en $\overline{x}$, et $(X_{(\overline{x})})_{\overline{\eta}}$ la fibre géométrique générique du morphisme naturel $X_{(\overline{x})}\to S$. La fibre de $\Psi^n(\Lambda)$ en $\overline{x}$ est donnée par

$$\Psi^n(\Lambda)_{\overline{x}}\simeq \mathrm{H}^n((X_{(\overline{x})})_{\overline{\eta}},\Lambda) \tag{9}$$

On en déduit les propriétés suivantes

Proposition 3.2 *i) Les faisceaux $\Psi^n(\Lambda)$ sont nuls pour $n>\dim(X_\eta)$.*
ii) Si f est lisse en un point x de X_s et $\overline{x}$ est un point géométrique au dessus de x, alors $\Psi^n(\Lambda)_{\overline{x}}=0$ pour tout $n>0$.

Le deuxième point découle de l'acyclicité locale des morphismes lisses.

Si de plus f est propre, la suite spectrale de Leray pour le morphisme $\overline{j}:X_{\overline{\eta}}\to X$ peut s'écrire, grâce au théorème de changement de base propre, sous la forme

$$E_2^{p,q}=\mathrm{H}^p(X_s,\Psi^q(\Lambda))\Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X_{\overline{\eta}},\Lambda).$$

Cette suite spectrale est équivariante pour l'action de I.

Variante modérément ramifiée. Soit K_{t} l'extension modérément ramifée maximale de K dans $\overline{K}$. On note $X_{\mathrm{t}}=X\times_S \mathrm{Spec}(K_{\mathrm{t}})$ et $\overline{j}_{\mathrm{t}}:X_{\mathrm{t}}\to X$ la projection. Les faisceaux des cycles évanescents modérément ramifiés sont les faisceaux

$$\Psi_{\mathrm{t}}^n(\Lambda):=i^*\mathrm{R}^n(\overline{j}_{\mathrm{t}})_*(\Lambda) \qquad (\text{pour } n\geq 0).$$

Comme P est un pro–p–groupe et p est inversible dans Λ, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^*(X_{\mathrm{t}},\Lambda) & \simeq & H^*(X_{\overline{\eta}},\Lambda)^P, \\ \Psi_{\mathrm{t}}^i(\Lambda) & \simeq & \Psi^i(\Lambda)^P. \end{array}$$

Si f est propre, la suite spectrale de Leray pour $\overline{j}_{\mathrm{t}}$ s'écrit sous la forme

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^q(\Lambda)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X_{\mathrm{t}},\Lambda) = \mathrm{H}^{p+q}(X_{\overline{\eta}},\Lambda)^P \tag{10}$$

Elle peut s'obtenir en prenant les P–invariants dans la suite spectrale pour $\overline{j}$.

On considère dans la suite $f : X \to S$ une S–courbe propre et régulière, de fibre générique lisse sur η. On désigne par $X_{s,\mathrm{red}}$ le sous–schéma réduit de X_s. On suppose que $X_{s,\mathrm{red}}$ est un dcn sur X. On commence par rappeler la description des faisceaux des cycles évanescents modérément ramifié de X/S en fonction de la géométrie de sa fibre fermée.

Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X au dessus d'un point x de X_s. Soient $X_{(\overline{x})}$ le hensélisé strict de X en $\overline{x}$, B l'ensemble des branches de X_s passant par x, et pour chaque $i \in B$, r_i la multiplicité de la branche i dans la fibre fermée de $X_{(\overline{x})}/S$. On définit le complexe $\mathbb{K}$ concentré en degrés 1 et 0

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{K}: & \mathbb{Z}^B & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (n_i)_{i\in B} & \longmapsto & \sum_{i\in B} r_i n_i \end{array}$$

Théorème 3.3 ([15] I théorème 3.3) *Soit $c = \delta_p(\#H_0(\mathbb{K}))$ le plus grand diviseur premier à p du cardinal de $H_0(\mathbb{K})$. Il existe un ensemble fini Θ sur lequel $\mu_c(R)$ agit fidèlement et transitivement tel qu'on a*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\mathrm{t}}^0(\Lambda)_{\overline{x}} & \simeq & \Lambda^{\Theta}, \\ \Psi_{\mathrm{t}}^1(\Lambda)_{\overline{x}} & \simeq & (H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda(-1))^{\Theta}. \end{array}$$

De plus, l'action de I_{t} sur les membres de gauche coïncide avec l'action de I_{t} sur les membres de droite induite par le caractère $\chi_c : I_{\mathrm{t}} \to \mu_c(R)$, inverse du caractère canonique, et l'action de $\mu_c(R)$ sur Θ.

L'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$ sur les membres de gauche coïncide avec celle sur les membres de droite induite par un caractère $\chi_{\overline{x}} : \mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x)) \to \mu_c(R)$ et l'action de $\mu_c(R)$ sur Θ.

Noter que de $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x)) \neq 1$ si et seulement si x est un point générique de X_s, et que dans ce cas $\Psi_{\mathrm{t}}^1(\Lambda)_{\overline{x}} = 0$. On donne dans l'appendice A une démonstration complète de ce théorème.

Soit ω le faisceau dualisant relatif de X sur S. En tant que diviseur de Cartier, la fibre fermée X_s se décompose

$$E:=[X_s] = \sum_{C\in B} r_C[C]$$

où B est l'ensemble des composantes irréductibles de X_s. Pour chaque $C \in B$, on note $m_C = \delta_p(r_C)$. On pose

$$E_0 := \sum_{C\in B}[C] \quad , \quad E_1 = \sum_{C\in B} m_C[C].$$

On désigne par \$ l'ensemble des points fermés de X qui sont singuliers dans $X_{s,\mathrm{red}}$. A tout $x \in \$$, on associe r_1 et r_2 les multiplicités des deux branches de X_s en x, $m_1 = \delta_p(r_1)$ et $m_2 = \delta_p(r_2)$, et $d_x = (m_1, m_2)$.

Soient C une composante irréductible de X_s et $\overline{C}$ sa normalisation. L'image inverse de $\Psi_{\mathrm{t}}^0(\Lambda)$ par le morphisme naturel $\overline{C} \to C \to X_s$ (notée aussi $\Psi_{\mathrm{t}}^0(\Lambda)$), est un faisceau constructible à fibres Λ–plates (cf. théorème 3.3). On en déduit par [8] [Rapport] théorème 4.9, que $\mathrm{R}\Gamma(\overline{C}, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\Lambda))$ est un complexe parfait de Λ–modules. Soit $\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)))$ sa classe dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{K}(\Lambda)$ des Λ–modules projectifs de type fini. On note $\mathrm{rg} : \mathrm{K}(\Lambda)\to\mathbb{Z}$ le morphisme rang.

Proposition 3.4 *Soient $W_C = C\cap\$$, W'_C l'ensemble des points singuliers de C et $W''_C = W_C - W'_C$. Alors,*

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))) = -m_C(C,\omega+E_0) + \sum_{x\in W'_C} 2d_x + \sum_{x\in W''_C} d_x.$$

Preuve. Par le théorème 3.3, le faisceau $\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)$ est modérément ramifié en tout point fermé de $\overline{C}$. Soient κ le point générique de C, $\overline{\kappa}$ un point géométrique générique au dessus de κ, z un point fermé de C et z' un point de $\overline{C}$ au dessus de z. Notons $\Theta_{\overline{\kappa}}$ et Θ_z les ensembles donnés par le théorème 3.3 pour $\overline{\kappa}$ et z. En appliquant la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich [14] X théorème 7.1, on obtient

$$\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))) = (2-2g_{\overline{C}})\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\Lambda^{\Theta_{\overline{\kappa}}}) - \sum_{\substack{z'\ \in\ \overline{C}(k)\\ z'\ \mapsto\ z}} (\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\Lambda^{\Theta_{\overline{\kappa}}}) - \mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\Lambda^{\Theta_z})).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))) = m_C(2-2g_{\overline{C}}) - \sum_{z\in W'_C} 2(m_C-d_z) - \sum_{z\in W''_C}(m_C-d_z).$$

Par la formule d'adjonction

$$2-2g_{\overline{C}} = 2-2g_C+2\#W'_C = -(C,\omega+C)+2\#W'_C = -(C,\omega+E_0)+2\#W'_C+\#W''_C.$$

La proposition 3.4 s'ensuit. $\square$

On veut aussi étudier l'action de I_{t} sur $\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))$. On considère alors $\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)$ comme faisceau de $\Lambda[I_{\mathrm{t}}]$–modules. On note $c=\#\Theta_{\overline{\kappa}}$ et $H=\mu_c(R)$. On sait que I_{t} agit sur les fibres de $\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)$ via le caractère $\chi_c : I_{\mathrm{t}}\to H$. Le fait que les fibres de $\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)$ ne sont pas $\Lambda[H]$–projectives introduit une difficulté supplémentaire (par exemple $\mathrm{R}\Gamma(\overline{C},\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))$ n'est pas forcement un complexe parfait de $\Lambda[H]$–modules). On introduit alors $U=C-W_C$, qu'on identifie aussi à un ouvert de $\overline{C}$. Le théorème 3.3 et [8] [Rapport] théorème 4.9 impliquent que $\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))$ est un complexe parfait de $\Lambda[H]$–modules.

Soient Γ^H le foncteur des "invariants sous H", $\mathrm{R}\Gamma^H$ son foncteur dérivé et $(\ )^H : \mathrm{K}(\Lambda[H])\to\mathrm{K}(\Lambda)$ le morphisme qu'il induit sur le groupe de Grothendieck des $\Lambda[H]$–modules projectifs.

Proposition 3.5 *On a*

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma^H(\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)))) = \chi_c(U) = -(C,\omega+E_0).$$

Preuve. Soit $\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda[H])}(\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)))$ la classe de $\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))$ dans $\mathrm{K}(\Lambda[H])$. Puisque $\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)$ est localement constant sur U et modérément ramifié en dehors de U, la formule de Grothendieck–Ogg–Shafarevich donne

$$\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda[H])}(\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda))) = \chi_c(U)\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda[H])}(\Lambda^{\Theta_{\overline{\kappa}}}) \in \mathrm{K}(\Lambda[H]).$$

Appliquons $(\ )^H$, on obtient

$$\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\mathrm{R}\Gamma^H(\mathrm{R}\Gamma_c(U,\Psi^0_{\mathrm{t}}(\Lambda)))) = \chi_c(U)\mathrm{cl}_{\mathrm{K}(\Lambda)}(\Gamma^H(\Lambda^{\Theta_{\overline{\kappa}}})) \in \mathrm{K}(\Lambda).$$

Or $\Gamma^H(\Lambda^{\Theta_{\overline{\kappa}}}) = \Lambda$ par le théorème 3.3. L'égalité $\chi_c(U) = -(C,\omega+E_0)$ a été démontrée au cours de la preuve de 3.4. $\square$

3.1 Faisceaux des cycles évanescents ℓ–adiques

Le théorème 3.3 implique que $(\Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}))_{n\geq 0}$ forment des $\mathbb{Z}_\ell$–faisceaux sur X_s, notés $\Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Z}_\ell)$. On définit aussi les faisceaux $\Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell) = \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$. La suite spectrale (10) induit une suite spectrale I_{t}–équivariante :

$$E_2^{p,q} = H^p(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^q(\mathbb{Q}_\ell)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P \tag{11}$$

Théorème 3.6 *On a*

$$\dim H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P = 2 + (E_1, \omega + E_0) \tag{12}$$

$$\dim_{\mathrm{s}} H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P = 2 + (E_0, \omega + E_0) \tag{13}$$

Preuve. Soit $\alpha : Z \to X_{s,\mathrm{red}}$ la normalisation de la fibre fermée réduite $X_{s,\mathrm{red}}$. La suite spectrale (11) et le théorème 3.3 impliquent

$$\begin{aligned} 2 - \dim H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P &= \chi(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) - \chi(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^1(\mathbb{Q}_\ell)) \\ &= \chi(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) - \sum_{x\in\$} d_x \end{aligned}$$

L'exactitude de la suite courte

$$0 \longrightarrow \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \alpha_*\alpha^*\Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \bigoplus_{x\in\$} \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)_x \longrightarrow 0$$

implique que

$$\chi(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) = \chi(Z, \alpha^*\Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) - \sum_{x\in\$} d_x.$$

Par la proposition 3.4,

$$\chi(Z, \alpha^*\Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) = -\sum_{C\in B} m_C(C, \omega + E_0) + \sum_{C\in B}\Big(\sum_{x\in W'_C} 2d_x + \sum_{x\in W''_C} d_x\Big).$$

L'équation (12) découle en remarquant que

$$\sum_{C\in B}\Big(\sum_{x\in W'_C} 2d_x + \sum_{x\in W''_C} d_x\Big) = 2\sum_{x\in\$} d_x.$$

La suite spectrale (11) est I_{t}–équivariante. Par conséquent,

$$2 - \dim_{\mathrm{s}} H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P = \chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) - \chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^1(\mathbb{Q}_\ell)),$$

où

$$\chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell)) = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathrm{s}} H^j(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell)).$$

Puisque I_{t} agit par un quotient fini sur les groupes $H^j(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell))$ (cf. théorème 3.3), alors

$$\chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell)) = \sum_j (-1)^j \dim\{H^j(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^i(\mathbb{Q}_\ell))\}^{I_{\mathrm{t}}}.$$

Par le théorème 3.3, $\chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^1(\mathbb{Q}_\ell)) = \#\$$. Soit $U = X_{s,\mathrm{red}} - \$$ qu'on considère comme ouvert de Z. Par la proposition 3.5, on a

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{s}}(X_s, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell)) &= \sum_j (-1)^j \dim\{H_c^j(U, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell))\}^{I_{\mathrm{t}}} + \#\$ \\ &= \dim\{\mathrm{R}\Gamma_c(U, \Psi_{\mathrm{t}}^0(\mathbb{Q}_\ell))\}^{I_{\mathrm{t}}} + \#\$ \\ &= -\sum_{C\in B}(C, \omega + E_0) + \#\$ \end{aligned}$$

L'équation (13) s'en suit. □

3.2 Preuve des théorèmes 1.4 et 1.5

On considère une courbe C/K propre lisse et géométriquement irréductible de genre $g \geq 2$, et on désigne par X son modèle rcn minimal sur R. On a équivalence entre les propositions suivantes

(1) L'action de I sur $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente.

(2) P agit trivialement sur $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$, et l'action de I_{t} sur $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P$ est unipotente.

(3) $\dim H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) = \dim H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P = \dim_{\mathrm{s}} H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^P$.

(4) $(E, \omega + E_0) = (E_1, \omega + E_0) = (E_0, \omega + E_0)$.

(5) $E = E_0$.

Les équivalences (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) sont évidentes, (3) $\Leftrightarrow$ (4) découle du théorème 3.6, et (4) $\Leftrightarrow$ (5) est l'énoncé de la proposition 2.3. Le théorème 1.4 s'en suit. De même, le théorème 1.5 découle de la formule (12) et de la proposition 2.6.

Remarque 3.7 Sous l'hypothèse que $\mathrm{pgcd}(r_C)_{C \in B} = 1$, la relation $(E, \omega+E_0) = (E_0, \omega+E_0)$ est équivalente à l'égalité

$$\dim H^1(X_s, \mathcal{O}) = \dim H^1(X_{s,\mathrm{red}}, \mathcal{O}).$$

Si de plus X est relativement minimale, cet équation implique très simplement que $X_s = X_{s,\mathrm{red}}$ (cf. lemme 4.2). L'analyse combinatoire de la proposition 2.3 semble inévitable quand on suppose seulement que X est rcn relativement minimale.

4 Réduction semi-stable via les jacobiennes

Soit $f : X \to S$ une S–courbe propre, régulière, de fibre générique X_η lisse et géométriquement irréductible sur η de genre $g \geq 1$, et de fibre fermée connexe $[X_s] = \sum_{i \in I} r_i [C_i]$. On suppose que $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i \in I} = 1$. Cette hypothèse est vérifiée si par exemple $X_\eta(K) \neq \emptyset$.

On sait par [21, 22] que le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{X_s/k}$ est repésentable par un schéma en groupes locallement de type fini sur k. Soit $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ sa composante neutre. C'est un schéma en groupes (séparé) lisse de type fini sur k (cf. [5] 8.2/3, 8.4/2). Comme tout groupe algébrique commutatif sur k, $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ admet un plus grand sous–tore $T_0 \subset \mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$. Puisque k est algébriquement clos, T_0 est caractérisé par la condition que $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}/T_0$ est extension d'un schéma abélien B_0 sur k par un groupe unipotent lisse et connexe U_0 (cf. [5] 9.2/1 et 9.2/2) :

$$0 \longrightarrow U_0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{X_s/k}/T_0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0.$$

Soient $u = \dim U_0, t = \dim T_0$ et $a = \dim B_0$. Donc $g = a + u + t$.

On commence par rappeler la structure de $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$. On renvoie à l'exposé [16] et à [5] chapitre 9 pour plus de détails. Supposons d'abord que X_s soit semi-stable. On désigne par \$ l'ensemble des points singuliers de X_s et par $\pi : \widetilde{X}_s \to X_s$ sa normalisation. On dispose d'une suite exacte de faisceaux étales sur X_s

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \pi_* \mathbb{G}_m \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \tag{14}$$

où Q est un faisceau concentré sur \$. Pour $x \in \$$, soient $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ les deux points de $\widetilde{X}_s$ au dessus de x. La fibre de Q en x est donnée par la suite exacte suivante

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(x, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(\widetilde{x}, \mathbb{G}_m) \times \Gamma(\widetilde{x}', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q_x \arrow[r] & 0 \\ & k^* & k^* \times k^* & & \end{tikzcd}$$

La suite de cohomologie associée à (14) induit la suite exacte suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & \prod\limits_{i\in I} k^* \arrow[r] & \prod\limits_{x\in \$} Q_x \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Pic}^0_{X_s/k} \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0_{\widetilde{X}_s/k} \arrow[r] & 0 \\
& & & & T \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ est canoniquement une extension de la variété abélienne $\mathrm{Pic}^0_{\widetilde{X}_s/k}$ par un tore T. Le groupe des caractère de T est donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow \bigoplus_{x\in \$} \mathbb{Z}'(x) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où $\mathbb{Z}'(x)$ est le noyau du morphisme somme

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}'(x) \longrightarrow \mathbb{Z}^{B_x} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

B_x est l'ensemble des branches de X_s en x, et φ est le morphisme induit par les applications canoniques $B_x \to B$ qui associent à une branche la composante qui la contient.

Considérons maintenant le cas général. Soit $X_{s,\mathrm{red}}$ la fibre fermée réduite de X/S. Le morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}_{X_s/k} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X_{s,\mathrm{red}}/k} \tag{15}$$

est un épimorphisme de faisceaux étales de noyau un groupe connexe lisse unipotent (cf. [5] 9.2/5 et [16]).

Supposons que X_s soit réduit et notons $\widetilde{X}_s \to X_s$ sa normalisation. Soit $X'_s \to X_s$ la courbe maximale entre $\widetilde{X}_s$ et X_s qui soit homéomorphe à X_s. On peut décrire X'_s localement en un point singulier x de X_s comme suit : soient $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ les points de $\widetilde{X}_s$ au dessus de x. L'anneau local de X'_s en l'unique point x' au dessus de x est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \arrow[r] & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\widetilde{X}_s,\widetilde{x}_i} \arrow[r] & \prod\limits_{i=1}^{n} k(\widetilde{x}_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}' \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathcal{O}_{X'_s,x'} \arrow[r] \arrow[u] & k(x') \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où Δ est le morphisme diagonal. Par suite, X'_s admet un voisinage étale de x' qui est aussi un voisinage étale de l'intersection des axes de coordonnées dans $\mathbb{A}^n_k$. Le morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}_{X_s/k} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X'_s/k} \tag{16}$$

est un épimorphisme de faisceaux étales. Son noyau est un groupe connexe unipotent qui est trivial ssi $X'_s \simeq X_s$ (cf. [5] 9.2/9).

Proposition 4.1 *Supposons que X soit régulière relativement minimale et que $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i\in I} = 1$. Les propiétés suivantes sont équivalentes :*

1) *X_s est une courbe semi–stable sur k;*

2) *le radical unipotent de* $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ *est trivial.*

Preuve. Nous avons vu que 1) $\Rightarrow$ 2). Suppposons que le radical unipotent de $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ soit trivial. L'analyse précédente implique que $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k} = \mathrm{Pic}^0_{X_{s,\mathrm{red}}/k}$. En particulier,

$$\dim \mathrm{Pic}^0_{X_s/k} = \dim H^1(X_s, \mathcal{O}) = \dim H^1(X_{s,\mathrm{red}}, \mathcal{O}) = \dim \mathrm{Pic}^0_{X_{s,\mathrm{red}}/k}.$$

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses de la proposition* 4.1*, on a*

i) $H^0(X_s, \mathcal{O}) = k$ *et* $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}) = g$*;*

ii) si $r_i > 1$ *pour un* $i \in I$*, alors* $g > \dim H^1(X_{s,\mathrm{red}}, \mathcal{O})$*.*

Preuve. i) On a $\chi(X_s, \mathcal{O}) = 1 - g$, il suffit donc de montrer que $H^0(X_s, \mathcal{O}) = k$. Puisque X_s est connexe, $H^0(X_{s,\mathrm{red}}, \mathcal{O}) = k$. Soit Z un sous–schéma fermé strict de X_s de pure dimension 1 tel que $H^0(Z, \mathcal{O}) = k$. On décompose Z en tant que diviseur de Cartier sur X en $[Z] = \sum_{i \in I} a_i[C_i]$. On a $0 = (X_s, X_s - Z) = (X_s - Z)^2 + (Z, X_s - Z)$. Puisque $X_s \neq Z$ et $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i\in I} = 1$, alors $(X_s - Z)^2 < 0$. D'où $(Z, X_s - Z) > 0$ et donc $(Z, C_i) > 0$ pour un $i \in I$ tel que $a_i < r_i$. Soit $Z' = Z + C_i$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-Z) \otimes \mathcal{O}_{C_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z'} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \tag{17}$$

implique que $H^0(Z', \mathcal{O}) = k$. En commençant par $Z = X_{s,\mathrm{red}}$, on obtient par une recurrence finie que $H^0(X_s, \mathcal{O}) = k$.

ii) Supposons que $X_s \neq X_{s,\mathrm{red}}$ et considérons Z un fermé strict de X_s de pure dimension 1, contenant $X_{s,\mathrm{red}}$ tel que $[X_s] = [Z] + [C_i]$ et $H^0(Z, \mathcal{O}) = k$ (il en existe d'après la preuve du i)). On a $(Z, C_i) = -(C_i)^2 > 0$. Par conséquent, la suite exacte (17) donne la suite cohomologique suivante

$$0 \to H^1(C_i, \mathcal{O}_X(-Z) \otimes \mathcal{O}_{C_i}) \to H^1(X_s, \mathcal{O}) \to H^1(Z, \mathcal{O}) \to 0.$$

Le terme de gauche a pour dimension $(Z, C_i) + p(C_i) - 1$ car $(Z, C_i) > 0$, où $p(C_i)$ est le genre arithmétique de C_i. Il est donc nul ssi $p(C_i) = 0$ et $(Z, C_i) = 1$ ssi $p(C_i) = 0$ et $(C_i)^2 = -1$. Ceci contredit la relative minimalité de X. On en déduit que $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}) > \dim H^1(Z, \mathcal{O}) \geq \dim H^1(X_{s,\mathrm{red}}, \mathcal{O})$. □

Le lemme 4.2 implique que X_s est réduit. Grâce à l'hypothèse 2), l'épimorphisme (16) est un isomorphisme. Donc $X_s \simeq X'_s$, i.e. X_s admet un voisinage étale de chacun de ses points singuliers qui est aussi un voisinage étale de l'intersection des axes de coordonnées dans $\mathbb{A}^n_k$ pour un entier $n \geq 2$. L'espace tangent de Zariski de X_s en un tel point est de dimension 1 ou 2 car X_s est une courbe sur une surface régulière. Donc les singularités de X_s sont doubles ordinaires. Le fait que X soit relativement minimale implique que X_s est semi-stable. □

Grâce à la proposition 4.1, le théorème 1.1 se ramène à l'énoncé suivant :

Proposition 4.3 *Soit* C *une courbe propre lisse et géométriquement irréductible sur* K *de genre* $g \geq 1$*. Il existe une extension finie séparable* K' *de* K *tel que la propiété suivante soit vérifiée. Soient* R' *la clôture intégrale de* R *dans* K'*,* t *le point fermé de* $\mathrm{Spec}(R')$*, et* X' *le modèle régulier minimal de* $C' = C \times_K K'$ *sur* R'*. Alors,* $\mathrm{Pic}^0_{X'_t/k}$ *est un schéma semi–abélien.*

La section 4.1 contient une première démonstration de cet énoncé due à Artin et Winters [3]. On donnera dans la section 5 une autre preuve due à Deligne et Mumford [10]. Elle consiste à ramener l'énoncé ci–dessus à un énoncé plus général sur les variétés abéliennes, qu'on démontrera d'après Grothendieck [15] IX.

4.1 Preuve d'Artin–Winters

On reprend les données et hypothèses de la proposition 4.1, à savoir $f : X \to S$ désigne une S–courbe propre, régulière relativement minimale, de fibre générique lisse et géométriquement irréductible de genre $g \geq 1$, et de fibre fermée connexe $[X_s] = \sum_{i\in I} r_i[C_i]$ telle que $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i\in I} = 1$. Soit $M := M(X)$ la forme associée à X (cf. définition 2.1). L'accouplement d'intersection définit un morphisme $\mu : M \longrightarrow M^*$. Soient $G = G(M)$ son conoyau et G_{tor} le sous–groupe de torsion de G. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_{\mathrm{tor}} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{18}$$

En effet, soit $h : M^* \to \mathbb{Z}$ le morphisme dual du morphisme

$$\mathbb{Z} \longrightarrow M \qquad , \qquad 1 \longmapsto \sum_{i \in I} r_i [C_i].$$

On a $h \circ \mu = 0$ car X_s coupe tout diviseur en zero. Donc h induit une application $g : G \to \mathbb{Z}$. De plus $g \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme car le noyau de μ est engendré par $[X_s]$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & D' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & D \arrow[d] & \\
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Pic}(X_\eta) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
M \arrow[r, "\mu"] & M^* \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Voici quelques indications pour la formation de ce diagramme. Pic( ) désigne le groupe (et non le foncteur) de Picard. Les définitions des morphismes $\lambda, \varphi, \nu, \psi$ sont évidentes. La surjectivité de ν est une conséquence de la régularité de X et du fait que tout diviseur de Cartier sur X_η peut être étendu en un diviseur de Cartier de X. L'isomorphisme entre les noyaux D de ψ et D' de φ découle du fait que $\ker(\mu) = \mathbb{Z}.[X_s]$ car $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i \in I} = 1$, et $[X_s] \in \ker(\lambda)$ puisque X_s est un diviseur principal sur X.

Proposition 4.4 *i) On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & D' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^0_{X_s/k}(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Pic}(X_s) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
 & & M^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & M^* \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où θ est le morphisme induit par le degré sur chaque composante C_i. De plus, le noyau N est uniquement q–divisible pour tout entier q premier à p.

ii) Soit n un entier positif premier à p. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{X_s/k}(k)[n] \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_\eta)[n] \longrightarrow G[n] \longrightarrow 0 \tag{20}$$

où $A[n]$ désigne les éléments de n–torsion dans un groupe commutatif A.

Preuve. *i*) Par définition, φ se factorise par θ. On renvoie à [5] 9.3/13 pour la surjectivité de θ et le fait que son noyau coïncide avec $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$. Il reste à voir que $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_s)$ est surjectif et que son noyau est uniquement q–divisible. Pour tout entier $N \geq 1$, on note X_N le N–ème voisinage infinitisimal de X_s dans X. Par EGA III 5.1.6, on a

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \varprojlim_N \mathrm{Pic}(X_N).$$

Considérons la suite exacte

$$0 \to J \to \mathcal{O}^*_{X_N} \to \mathcal{O}^*_{X_{N-1}} \to 0.$$

Le noyau J est cohérent sur $X_1 = X_s$. Comme X_1 est une courbe, on en déduit que $\mathrm{Pic}(X_N) \to \mathrm{Pic}(X_{N-1})$ est surjectif. Il suffit de montrer que le noyau de ce morphisme est uniquement q–divisible. Considérons la suite de cohomologie

$$H^0(X_{N-1}, \mathcal{O}^*_{X_{N-1}}) \to H^1(X_s, J) \to \mathrm{Pic}(X_N) \to \mathrm{Pic}(X_{N-1}) \to 0.$$

D'une part $H^0(X_N, \mathcal{O}^*)$ est q–divisible car c'est le groupe des unités d'un anneau local Artinien de corps residuel algébriquement clos k. D'autre part $H^1(X_s, J)$ est uniquement q–divisible puisque c'est un k–espace vectoriel.

ii) découle du diagramme (19), du i) ci–dessus, et du fait que $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}(k)$ est n–divisible. □

On se propose maintenant d'étudier la taille de G. On introduit la notion suivante.

Définition 4.5 *Soient A un groupe abélien de type fini et c un entier. On définit $\rho_c(A)$ comme le plus petit entier r pour lequel il existe un sous–groupe $H \subset A$ d'indice fini divisant c et ayant r générateurs.*

Remarque 4.6

1) $\rho_1(A)$ est le nombre minimal de générateurs de A.
2) Si on écrit $A = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ où $d_i \geq 0$ et $d_r | d_{r-1} \ldots | d_1$, alors $\rho_c(A)$ est le plus petit entier ρ tel que $d_{\rho+1} \ldots d_r$ divise c.
3) Si q est un nombre premier qui ne divise pas c, alors $\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_q}(A[q]) \leq \rho_c(A)$.

Théorème 4.7 *Il existe un entier $c = c(g)$ qui ne dépend que du genre g tel que pour toute forme M de genre g on ait*

$$\rho_c(G_{\mathrm{tor}}) \leq \beta,$$

où G_{tor} est le sous–groupe de torsion de $G = G(M)$, $\beta = \beta(M) = 1 - v + e$ est le premier nombre de Betti du graphe de M, v est le nombre de ses sommets et e est le nombre de ses côtés.

Ce théorème est le centre de la preuve d'Artin–Winters. Sa démonstration est purement combinatoire. C'est pourquoi nous avons choisi de ne pas la reproduire ici. On renvoie à [3] et [11] pour des exposés clairs. Noter que l'énoncé démontré dans [3, 11] est $\rho_c(G) \leq 1 + \beta$, et qu'il est équivalent au théorème ci–dessus vu la suite exacte (18). On donnera dans la section 5.3 une interprétation géométrique de ce théorème valable pour toute variété abélienne. Mais pour cela, on a besoin d'admettre le théorème de réduction semi–stable.

On prend maintenant $M := M(X)$ et $\beta := \beta(M(X)) = 1 - v + e$.

Lemme 4.8 *On a $\beta \leq t + u$.*

Preuve. Soient $X_0 = X_{\mathrm{red}}$, $\mathrm{Pic}^0_{X_0/k}$ sa jacobienne et u' et t' les dimensions de ses parties unipotentes et multiplicatives. L'épimorphisme (15) montre que $u' \leq u$ et $t' = t$. Soit ε le conoyau du morphisme

$$0 \to \mathcal{O}_{X_0} \to \prod_{i \in I} \mathcal{O}_{C_i} \to \varepsilon \to 0 \tag{21}$$

Le faisceau ε est concentré en les points singuliers de X_0 et

$$\dim_k \varepsilon = \sum_{i<j} (C_i, C_j) = e.$$

La suite de cohomologie associée à (21) donne

$$0 \to k \to \prod_{i \in I} k \to H^0(X_0, \varepsilon) \to H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \xrightarrow{\psi} \prod_{i \in I} H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \to 0.$$

Le morphisme ψ est le morphisme tangent au morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}^0_{X_0/k} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Pic}^0_{C_i/k}.$$

On sait que le noyau de ce dernier est un groupe algébrique linéaire lisse et connexe. D'où

$$\beta = 1 - v + e = \dim_k \ker(\psi) \leq u' + t' \leq u + t.$$

□

La proposition 4.3 découle de l'énoncé suivant :

Proposition 4.9 *Il existe un entier $N = N(g)$ ne dépendant que du genre g tel que la propriété suivante soit verifiée. Soit X une S–courbe propre régulière relativement minimale, de fibre générique lisse de genre $g \geq 1$, et de fibre fermée connexe $[X_s] = \sum_{i \in I} r_i [C_i]$ tel que $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i \in I} = 1$. Si pour un nombre premier $q > N$ différent de p, le groupe $\mathrm{Pic}(X_\eta)[q]$ est de rang $2g$, alors $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ est semi–abélien.*

Preuve. On prend $N = c(g)$ l'entier donné par le théorème 4.7. Sous les hypothèses de la proposition, la suite exacte (20) implique :

$$2g \leq 2a + t + \beta \leq 2a + 2t + u.$$

Or $g = a + u + t$, donc $u = 0$. □

5 Réduction semi–stable des variétés abéliennes

Soit $f : X \to S$ une S–courbe propre, régulière relativement minimale, de fibre générique lisse et géométriquement irréductible sur η de genre $g \geq 1$, et de fibre fermée connexe $[X_s] = \sum_{i \in I} r_i [C_i]$ tel que $\mathrm{pgcd}(r_i)_{i \in I} = 1$.

Théorème 5.1 (Artin [2]) *Le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représentable par un espace algébrique sur S.*

En fait, le théorème d'Artin affirme que le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représentable par un espace algébrique si $f : X \to S$ est cohomologiquement plat en dimension 0, i.e. pour tout S–schéma S', le morphisme canonique

$$f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\sim} f'_* \mathcal{O}_{X'}$$

est un isomorphisme où $f' : X' = X \times_S S' \to S'$. Par EGA III 7.8.4, ceci est équivalent à $\dim_k H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \dim_K H^1(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta})$. Cette propriété a été démontrée dans le lemme 4.2.

Soit $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ le sous–foncteur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ formé des éléments dont les restrictions à X_s et X_η sont respectivement dans les composantes neutres $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$ et $\mathrm{Pic}^0_{X_\eta/K}$.

Théorème 5.2 (Raynaud [24]) *Le foncteur $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est représentable par un S–schéma lisse et séparé.*

La fibre générique de $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est canoniquement isomorphe à la jacobienne $J_K = \mathrm{Pic}^0_{X_\eta/K}$. Soient $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J_K sur R et $\mathcal{J}^\circ$ sa composante neutre. Par la propriété universelle des modèles de Néron, on a un morphisme canonique $\mathrm{Pic}^0_{X/S} \to \mathcal{J}^\circ$.

Théorème 5.3 (Raynaud, [5] 9.5/4) *Le morphisme* $\mathrm{Pic}^0_{X/S} \to \mathcal{J}^\circ$ *est un isomorphisme.*

La fibre fermée de $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Pic}^0_{X_s/k}$. La proposition 4.3 devient alors un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 5.4 (Grothendieck) *Soit A une variété abélienne sur K. Il existe une extension finie séparable K' de K tel que le modèle de Néron connexe de $A' = A \times_K K'$ sur la clôture intégrale R' de R dans K' soit semi–abélien.*

On reprend la démonstration de [15] IX. On fixe dans la suite A une variété abélienne sur K de dimension g. On note $\mathcal{A}$ son modèle de Néron sur R et $\mathcal{A}^\circ$ sa composante neutre. On fixe un nombre premier $\ell \neq p$ et on considère le pro–schéma en groupes :

$$\mathrm{T}_\ell(A) = \varprojlim_n A[\ell^n].$$

Le module de Tate de A, $U = \mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K})$, est un $\mathbb{Z}_\ell$–module libre de rang $2g$ muni d'une action continue de I. Le pro–ℓ–schéma en groupes associé à $\mathcal{A}_s$ coincide avec celui associé à $\mathcal{A}_s^\circ$

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s) = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s^\circ).$$

La première étape dans la preuve du théorème de réduction semi–abélienne consiste à relier $\mathrm{T}_\ell(A)$ et $\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s)$. Pour cela, on introduit le pro–schéma en groupes :

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ) = \varprojlim_n \mathcal{A}^\circ[\ell^n].$$

Pour tout $n > 0$, le schéma en groupes $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]$ est plat et quasi–fini sur S. Comme S est hensélien, $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]$ se décompose canoniquement en somme

$$\mathcal{A}^\circ[\ell^n] = \mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f \sqcup \mathcal{A}^\circ[\ell^n]'$$

où $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f$ est fini sur S et $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]'$ a une fibre fermée vide. Le schéma $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]$, il est donc plat sur S. On définit la *partie fixe* de $\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)$ par

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f = \varprojlim_n \mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f \subset \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ).$$

On a $\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s^\circ) = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f \times_S s$. On définit la partie fixe de $\mathrm{T}_\ell(A)$ par

$$\mathrm{T}_\ell(A)^f = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f \times_S \eta \subset \mathrm{T}_\ell(A).$$

La notion de partie fixe est justifiée par le lemme suivant :

Lemme 5.5 *On a*

$$\mathrm{T}_\ell(A)^f(\overline{K}) = U^I.$$

Preuve. On démontre d'abord la relation suivante

$$\mathcal{A}[\ell^n]^f(\overline{K}) = (A[\ell^n](\overline{K}))^I = A[\ell^n](K).$$

Comme S est strictement hensélien et $\mathcal{A}[\ell^n]^f$ est fini étale sur S, alors $\mathcal{A}[\ell^n]^f(\overline{K}) = \mathcal{A}[\ell^n]^f(S)$. L'égalité ci–dessus devient une conséquence de la propriété universelle des modèles de Néron. Elle implique que

$$U^I = \varprojlim_n \mathcal{A}[\ell^n]^f(\overline{K}) \supset \varprojlim_n \mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f(\overline{K}).$$

Si (x_n) est un élément du deuxième membre, alors x_n est une section de A sur K qui est infiniment divisible par ℓ. Donc, sa restriction dans $\mathcal{A}_s(k)$ est infiniment divisible par ℓ. Elle est par suite dans $\mathcal{A}_s^\circ(k)$, ce qui démontre l'égalité annoncée. □

Pour chaque $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]^t \subset \mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f$ le sous–schéma en groupes maximal de $\mathcal{A}^\circ[\ell^n]^f$ dont la fibre spéciale est contenue dans le tore maximal de $\mathcal{A}_s^\circ$. On pose

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^t = \varprojlim_n \mathcal{A}^\circ[\ell^n]^t.$$

Soit T_0 le plus grand sous–tore contenu dans $\mathcal{A}_s$. Alors,

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^t \times_S s = \mathrm{T}_\ell(T_0).$$

Soient $A' = \mathrm{Ext}^1_K(A, \mathbb{G}_m)$ la variété abélienne duale de A, $\mathcal{A}'$ son modèle de Néron sur S et $\mathcal{A}'^\circ$ sa composante neutre. On dispose alors de deux filtrations

$$W = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^t(\overline{K}) \quad \subset \quad V = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f(\overline{K}) \quad \subset \quad U = \mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K})$$

$$W' = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ)^t(\overline{K}) \quad \subset \quad V' = \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ)^f(\overline{K}) \quad \subset \quad U' = \mathrm{T}_\ell(A')(\overline{K})$$

qu'on se propose de comparer relativement à l'accouplement canonique

$$\varphi : U \times U' \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K}) \tag{22}$$

Théorème 5.6 (Théorème d'orthogonalité de Grothendieck) *La partie torique W est l'intersection de la partie fixe V avec l'orthogonal, par rapport à φ, de la partie fixe V' .*

Par dualité, la partie torique W' est l'intersection de la partie fixe V' avec l'orthogonal, par rapport à φ, de la partie fixe V.

5.1 Preuve du théorème d'orthogonalité d'après Grothendieck [15] IX

C'est une application de la théorie des biextensions (cf. [15] VII et VIII et [6]). Soit $\mathcal{P}_K$ la biextension de Poincaré de (A, A') par $\mathbb{G}_m$. On rappelle que l'on dispose de l'interprétation cohomologique suivante des classes d'isomorphisme de biextensions

$$\mathrm{Biext}(A, A', \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Ext}^1(A \otimes^{\mathbb{L}} A', \mathbb{G}_m).$$

A partir de cette interprétation, il est facile d'associer à une classe $w \in \mathrm{Biext}(A, A', \mathbb{G}_m)$ un accouplement

$$\phi_w : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A') \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_m).$$

L'accouplement (22) n'est rien d'autre que l'accouplement induit sur les points $\overline{K}$–rationnels par l'accouplement $\phi_{\mathcal{P}_K}$.

Par [15] VIII 7.1, la restriction à la fibre générique induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{BIEXT}(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}'^\circ, \mathbb{G}_{m,S}) \simeq \mathrm{BIEXT}(A, A', \mathbb{G}_m) \tag{23}$$

Soient $\mathcal{P} \in \mathrm{BIEXT}(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}'^\circ, \mathbb{G}_{m,S})$ l'image inverse de $\mathcal{P}_K$ et

$$\phi : \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ) \times \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ) \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_{m,S})$$

l'accouplement qu'elle induit. La restriction de ϕ aux parties fixes

$$\phi^f : \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f \times \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ)^f \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_{m,S})$$

est complètement déterminée par sa restriction aux fibres spéciales

$$\phi_s : \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s^\circ) \times \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s'^\circ) \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_{m,k}).$$

Noter que ϕ_s n'est rien d'autre que l'accouplement induit par la biextension $\mathcal{P}_s \in \mathrm{BIEXT}(\mathcal{A}_s^\circ, \mathcal{A}_s'^\circ, \mathbb{G}_{m,k})$ fibre spéciale de $\mathcal{P}$. J'affirme que la restriction de ϕ^f à

$$\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^t \times \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ)^f \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_{m,S})$$

est identiquement nulle. Il suffit de vérifier cet énoncé pour les restrictions aux fibres spéciales. Soit T_0 le sous–tore maximale de $\mathcal{A}_s^\circ$. On se ramène donc à montrer que la restriction de ϕ_s à

$$\mathrm{T}_\ell(T_0) \times \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s'^\circ) \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_{m,k})$$

est identiquement nulle. Ce dernier accouplement est défini par la biextension $(\mathcal{P}_s)|_{T_0 \times \mathcal{A}_s'^\circ}$. Or, par [15] VIII 4.6,

$$\mathrm{Biext}(T_0, \mathcal{A}_s'^\circ, \mathbb{G}_{m,k}) = 1.$$

Ainsi, on a montré que $W \subset V \cap V'^\perp$ (où $\perp$ désigne l'orthogonal par rapport à φ). Le fait que cette inclusion soit une égalité est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 5.7 *L'inclusion*

$$\mathrm{T}_\ell(T_0) \subset \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}_s'^\circ)^\perp$$

est une égalité, où $\perp$ désigne maintenant l'orthogonal par rapport à ϕ_s.

Preuve (d'après [15] VIII 4.11–4.14). On considère l'extension canonique

$$0 \to U_0 \to \mathcal{A}_s^\circ / T_0 \to B_0 \to 0$$

où B_0 est une variété abélienne sur k et U_0 est un groupe unipotent. On considère aussi T_0' le sous–tore maximal de $\mathcal{A}_s'^\circ$ et l'extension canonique

$$0 \to U_0' \to \mathcal{A}_s'^\circ / T_0' \to B_0' \to 0$$

où B_0' est une variété abélienne et U_0' est un groupe unipotent. Par [15] VIII 4.8, l'image inverse induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{BIEXT}(B_0, B_0', \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{BIEXT}(\mathcal{A}_s^\circ, \mathcal{A}_s'^\circ, \mathbb{G}_m) \tag{24}$$

Ceci permet de descendre la biextension $\mathcal{P}_s$ en une biextension E de $B_0 \times B_0'$ par $\mathbb{G}_m$. A cette biextension est associé un accouplement

$$\phi_E : \mathrm{T}_\ell(B_0) \times \mathrm{T}_\ell(B_0') \longrightarrow \mathrm{T}_\ell(\mathbb{G}_m).$$

Par fonctorialité, l'accouplement ϕ_s se factorise à travers ϕ_E. La proposition se ramène alors à montrer que le noyau de ϕ_E à gauche est trivial. Il est facile de voir que ceci est équivalent au fait que le morphisme induit par la biextension E

$$g_E : B_0 \to (B_0')^\vee$$

a un noyau fini, où $(B_0')^\vee$ est la variété abélienne duale de B_0'. Par dualité, ceci est équivalent au fait que le morphisme $g_E' : B_0' \to (B_0)^\vee$ est surjectif.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur $\mathcal{A}^\circ$. On fixe sur $\mathcal{L}$ une rigidification à l'origine ce qui revient à se donner une structure du cube sur le $\mathbb{G}_{m,S}$–torseur associé (noté aussi par $\mathcal{L}$). Une telle structure est équivalente à la donnée d'une structure de biextension de $(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^\circ)$ par $\mathbb{G}_{m,S}$ sur

$$\Lambda(\mathcal{L}) = m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$$

où $m : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}^\circ$ est la somme et $p_i : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}^\circ$ sont les projections.
Soit $L = \mathcal{L}_\eta$ vu comme $\mathbb{G}_m$–torseur cubiste sur A. Comme toute biextension, $\Lambda(L)$ définit un morphisme

$$\psi : A \to A' \quad , \quad x \to \Lambda(L)_{x,-}$$

Il découle des définitions un isomorphisme canonique

$$\Lambda(L) \simeq (1_A \times \psi)^* \mathcal{P}_K \in \mathrm{BIEXT}(A, A, \mathbb{G}_m) \tag{25}$$

Par propriété universelle des modèles de Néron, ψ se prolonge en un morphisme $\Psi : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}'^\circ$.
Le morphisme ψ est une isogénie car L est ample. Donc, on peut trouver une isogénie $\psi' : A' \to A$ et un entier m tels que $\psi \circ \psi' = m1_{A'}$ et $\psi' \circ \psi = m1_A$. Soit $\Psi' : \mathcal{A}'^\circ \to \mathcal{A}^\circ$ le prolongement de ψ'. On a

$$\Psi' \circ \Psi = m\ 1_{\mathcal{A}^\circ} \quad \text{et} \quad \Psi \circ \Psi' = m\ 1_{\mathcal{A}'^\circ}$$

On en déduit que Ψ induit une isogénie sur les parties fixes $\mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}^\circ)^f \to \mathrm{T}_\ell(\mathcal{A}'^\circ)^f$, et que sa restriction aux fibres spéciales envoie T_0 sur T'_0, U_0 sur U'_0, B_0 sur B'_0, et établit une isogénie entre B_0 et B'_0. En particulier,

$$\dim B_0 = \dim B'_0 \quad , \quad \dim T_0 = \dim T'_0 \quad , \quad \dim U_0 = \dim U'_0.$$

Par l'équivalence de catégories (23), l'isomorphisme (25) se prolonge en un isomorphisme canonique

$$\Lambda(\mathcal{L}) \simeq (1_{\mathcal{A}^\circ} \times \Psi)^* \mathcal{P} \in \mathrm{BIEXT}(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^\circ, \mathbb{G}_m).$$

La descente des torseurs cubistes implique, dans notre cas, qu'il existe M un $\mathbb{G}_m$–torseur cubiste sur B_0 qui descend $\mathcal{L}_s$. De l'équivalence de catégories (24), on obtient un isomorphisme canonique

$$\Lambda(M) \simeq (1_{B_0} \times \Psi_s)^* E \in \mathrm{BIEXT}(B_0, B_0, \mathbb{G}_m).$$

Par conséquent, le morphisme g'_E se factorise suivant

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[rr, "\Psi_s"] \arrow[dr, "g_{\Lambda(M)}"'] & & B'_0 \arrow[dl, "g'_E"] \\ & (B_0)^\vee & \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que $g_{\Lambda(M)}$ est surjectif, ce qui revient à démontrer que M est ample. Soit $\pi : \mathcal{A}_s^\circ \to B_0$ la projection canonique. On sait que $\pi^* M = \mathcal{L}_s$ est ample. Il s'ensuit par [23] que M est ample. $\square$

Proposition 5.8 *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1) $\mathcal{A}^\circ$ *est semi–abélien;*
2) $V'^\perp \subset V$*;*
3) $W = V'^\perp$*;*
4) *l'action de I sur $U = \mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K})$ est unipotente d'échelon 2 (i.e. il existe un sous–module U' de U stable par I tel que I agit trivialement sur U' et sur U/U').*

Preuve. Soient u, t et a les dimensions unipotente, torique et abélienne de $\mathcal{A}_s^\circ$ ou de $\mathcal{A}_s'^\circ$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & V \arrow[dr, "2u"] & & \\ 0 \arrow[r, "t"] & W = V \cap V'^\perp \arrow[ur, "2a"] \arrow[dr, "2u"'] & & W'^\perp = V + V'^\perp \arrow[r, "t"] & U \\ & & V'^\perp \arrow[ur, "2a"'] & & \end{tikzcd}$$

où les quotients successifs sont sans torsion, de rangs indiqués sur les flèches. L'équivalence entre 1), 2) et 3) s'en suit. L'assertion 4) est équivalente à I agit trivialement sur U/V. Par dualité, ceci est équivalent à I agit trivialement $V^\perp$, i.e. $V^\perp \subset V'$, c'est à dire à l'assertion 2) pour A'. Par l'analyse précédente, ceci est équivalent à $u = 0$. □

Remarque 5.9

1) Si A est la jacobienne d'une courbe C propre lisse et géométriquement irréductible sur K, alors on a un isomorphisme canonique

$$U = \mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K}) \simeq H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell(1)).$$

On obtient ainsi une autre démonstration du théorème 1.4. Noter qu'on n'avait pas besoin de préciser l'échelon d'unipotence dans le théorème 1.4.

2) Plus généralement, pour toute variété abélienne A sur K, il existe un isomorphisme canonique

$$H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K}), \mathbb{Z}_\ell).$$

Donc, l'assertion 4) de la proposition 5.8 est équivalente à la même assertion pour $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell)$ et même pour $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

3) Par le théorème de monodromie, l'action de I sur $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est quasi–unipotente. Pour voir que son échelon d'unipotence est deux, il suffit de noter que toute variété abélienne est le quotient de la jacobienne d'une courbe lisse, et que l'échelon d'unipotence pour le H^1 d'une courbe est deux (cf. corollaire B.1). Le théorème 5.4 découle comme corollaire de la proposition 5.8.

4) Dans [15] I Appendice 6, Deligne donne une autre preuve du théorème de réduction semi–stable des variétés abéliennes de nature plus arithmétique que la preuve de Grothendieck.

5.2 Un critère de réduction semi–stable

Par le théorème de monodromie, il existe un sous–groupe ouvert I' de I tel que l'action de I' sur $U = \mathrm{T}_\ell(A)(\overline{K})$ est unipotente (d'échelon 2 grâce à la remarque 5.9–3). Donc l'action de I' sur $U' = \mathrm{T}_\ell(A')(\overline{K})$ est aussi unipotente, où A' est la variété abélienne duale de A. On prend I' invariant dans I, et on définit $\widetilde{V} = U^{I'}$ *sous–module essentiellement fixe de* U, et $\widetilde{W} = \{(U')^{I'}\}^\perp$ *sous–module essentiellement torique de* U, où $\perp$ désigne l'orthogonal par rapport à l'accouplement (22). La proposition 5.8 montre que $\widetilde{W} \subset \widetilde{V}$. La filtration

$$0 \subset \widetilde{W} \subset \widetilde{V} \subset U$$

est invariante sous l'action de I, et ne depend pas du choix de I'.

Il existe un plus grand sous–groupe ouvert $\widetilde{I}$ de I qui opère de façon unipotente sur U. C'est le noyau de la représentation de I dans la semi–simplifiée de U. C'est aussi le noyau de la représentation de I dans $\widetilde{V}$. Soient $\widetilde{K} = (\overline{K})^{\widetilde{I}}$, $G = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) = I/\widetilde{I}$, $\widetilde{S}$ le normalisé de S dans $\widetilde{K}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ le modèle de Néron de $A_{\widetilde{K}}$ sur $\widetilde{S}$, et $\widetilde{\mathcal{A}}^\circ$ sa composante neutre. Par la proposition 5.8, $A_{\widetilde{K}}$ a réduction semi–stable. De plus, $\widetilde{K}$ est la plus petite extension galoisienne K' de K telle que $A_{K'}$ ait réduction semi–stable. On a $\widetilde{V} = \mathrm{T}_\ell(\widetilde{\mathcal{A}}^\circ)^f(\overline{K})$, et par la proposition 5.8 $\widetilde{W} = \mathrm{T}_\ell(\widetilde{\mathcal{A}}^\circ)^t(\overline{K})$. L'action de I sur ces modules induit une action de $G = I/\widetilde{I}$.

Par transport de structure, G opère sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ et sur $\widetilde{\mathcal{A}}^\circ$, de façon compatible avec son action sur $\widetilde{S}$. On obtient ainsi une action de G sur la fibre spéciale $\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ$ de $\widetilde{\mathcal{A}}^\circ$. Par conséquent, G agit sur le module de Tate $\mathrm{T}_\ell(\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ)(k)$. Il est facile de voir que l'isomorphisme canonique

$$\widetilde{V} = \mathrm{T}_\ell(\widetilde{\mathcal{A}}^\circ)^f(\overline{K}) \simeq \mathrm{T}_\ell(\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ)(k)$$

est G–équivariant pour les deux actions de G décrites ci–dessus.

Proposition 5.10 *Soit A une variété abélienne sur K et $n \geq 2$ un entier premier à la caractéristique résiduelle p. Supposons que I opère trivialement sur $A[n](\overline{K})$, i.e. tous les points de n–torsion de A sont rationnels sur K. Alors, ou bien A a réduction semi–stable sur S, ou bien $n = 2$.*

Preuve. On choisit $I' = \widetilde{I}$, de sorte que l'action de G sur $\widetilde{V}$ soit fidèle. Il s'en suit que son action sur $\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ$ est aussi fidèle. Par ailleurs, l'action de G sur $\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ[n](k)$ est triviale car $\widetilde{\mathcal{A}}_k^\circ[n](k) \subset A[n](\overline{K})$ et I agit trivialement sur $A[n](\overline{K})$. On conclut en utilisant le critère suivant de Serre :

Lemme 5.11 ([15] IX 4.7.1) *Soient G un schéma en groupes commutatif sur un corps k, extension d'un schéma abélien par un tore, et n un entier ≥ 2. Alors, tout automorphisme d'ordre fini de G, induisant l'identité sur $G[n]$, est réduit à l'identité si $n \neq 2$, et est de carré réduit à l'identité si $n = 2$.*

□

Le lemme suivant sera utilisé dans la section 5.3.

Lemme 5.12 *Soient J un sous–groupe ouvert de I contenant $\widetilde{I}$ et $L = (\overline{K})^J$, de sorte que $K \subset L \subset \widetilde{K}$. Soient $\overline{V}$ et $\overline{W}$ les parties fixe et torique du module de Tate de A_L. Alors,*

$$\overline{V} = \widetilde{V}^{\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L)} \quad \text{et} \quad \overline{W} = \widetilde{W}^{\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L)}.$$

Preuve. La première relation est évidente. La deuxième est équivalente à $\overline{V} \cap \widetilde{V}'^{\perp} = \overline{V} \cap \overline{V}'^{\perp}$. On a $\overline{V}' \subset \widetilde{V}'$, donc $\overline{V} \cap \widetilde{V}'^{\perp} \subset \overline{V} \cap \overline{V}'^{\perp}$. Soient $x \in \overline{V} \cap \overline{V}'^{\perp}$ et $y \in \widetilde{V}'$, alors

$$0 = \langle x, \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L)} \tau(y) \rangle = \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L)} \tau \langle \tau^{-1}(x), y \rangle = \#\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/L) \langle x, y \rangle.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

5.3 Groupes des composantes connexes des modèles de Néron

Soient A une variété abélienne sur K de dimension g, $\mathcal{A}$ son modèle de Néron sur R, et $\mathcal{A}^\circ$ sa composante neutre. On note a, t et u les dimensions abélienne, torique et unipotente de $\mathcal{A}_s^\circ$.

On se propose d'expliquer les idées géométriques qui se cachent derière la preuve combinatoire d'Artin–Winters (voir aussi [20] 1.9–1.11 pour une étude plus détaillée de cette preuve). Pour cela, on considère

$$\Phi = \mathcal{A}_s / \mathcal{A}_s^\circ$$

le groupe des composantes connexes de $\mathcal{A}_s$.

Proposition 5.13 *Soient ℓ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle p et $\Phi[\ell]$ le sous–groupe de ℓ–torsion de Φ.*

(i) *Si $\ell \geq 3$, alors $\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell} \Phi[\ell] \leq t + u$.*

(ii) *Si $\ell > 2g + 1$, alors $\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell} \Phi[\ell] \leq t$.*

On va montrer l'énoncé plus fort suivant :

Théorème 5.14 (Edixhoven [12]) *Soient ℓ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle p, Φ_ℓ la composante ℓ–primaire de Φ et $r_1 \geq r_2 \geq \ldots$ la suite finie de nombres entiers positifs définie par l'isomorphisme*

$$\Phi_\ell \simeq \bigoplus_{i \geq 1} \mathbb{Z}/\ell^{r_i}\mathbb{Z}.$$

Alors, on a

$$u \geq \sum_{i \geq t+1} \left(\frac{\ell^{\lfloor r_i/2 \rfloor} + \ell^{\lceil r_i/2 \rceil}}{2} - 1 \right),$$

où pour tout nombre réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$ et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geq x$.

La proposition 5.13 s'obtient comme suit :

(i) Pour $\ell \geq 3$ et $r \geq 1$, on a
$$\frac{\ell^{\lfloor r/2 \rfloor} + \ell^{\lceil r/2 \rceil}}{2} - 1 \geq 1.$$
Grâce au théorème 5.14, on en déduit que $\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell}(\Phi[\ell]) \leq t+u$.

(ii) Pour $\ell > 2g+1$ et $r \geq 1$, on a
$$\frac{\ell^{\lfloor r/2 \rfloor} + \ell^{\lceil r/2 \rceil}}{2} - 1 > g.$$
Comme $u \leq g$, le théorème 5.14 implique que $r_i = 0$ pour $i \geq t+1$. Par conséquent, $\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell}(\Phi[\ell]) \leq t$.

Nous allons reproduire la preuve originelle [12] du théorème 5.14. L'ingrédient de base est une filtration canonique de Φ_ℓ, introduite par Lorenzini [20], qui lui a permis d'établir des estimations sur la taille de Φ_ℓ. Le résultat d'Edixhoven (cf. théorème 5.14) est un raffinement de ses estimations.

On fixe dans la suite un nombre premier $\ell \neq p$. Je commence par rappeler quelques caractérisations cohomologiques de Φ_ℓ. D'abord, le lien avec le module de Tate $U = \mathrm{T}_\ell(\overline{K})$ est donné par la formule suivante (cf. [15] IX 11.2)
$$\Phi_\ell = (U \otimes \mathbb{D}_\ell)^I / (U^I \otimes \mathbb{D}_\ell) \tag{26}$$
où $\mathbb{D}_\ell = \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell$. De la suite exacte de I–modules continus
$$0 \longrightarrow U \longrightarrow U \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow U \otimes \mathbb{D}_\ell \longrightarrow 0$$
on tire que
$$\Phi_\ell = \mathrm{tors}(H^1(I, U))$$
où "tors" désigne le sous–module de torsion. Rappelons que le groupe d'inertie modérée $I_{\mathrm{t}} = I/P$ est canoniquement isomorphe au produit $\prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_q(1)$. La suite spectrale de Hochschild–Serre donne
$$\Phi_\ell = \mathrm{tors}(H^1(I, U)) = \mathrm{tors}(H^1(I_{\mathrm{t}}, U^P)) = \mathrm{tors}((U^P)_{I_{\mathrm{t}}})(-1) = \mathrm{tors}((U)_I)(-1)$$
où les indices I et I_{t} désignent les co–invariants et "(-1)" est le twist de Tate.

Soit N le sous–module de U engendré par $\sigma(x) - x$ pour $\sigma \in I$ et $x \in U$, de sorte que $U_I = U/N$. J'affirme que N est contenu dans $V'^{\perp}$, l'orthogonal de la partie fixe V' par rapport à l'accouplement (22). En effet, pour $\sigma \in I$, $x \in U$ et $y \in V'$, on a
$$\langle \sigma(x) - x, y \rangle = \sigma \langle x, \sigma^{-1}(y) \rangle - \langle x, y \rangle = \sigma \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0.$$
Comme $U/V'^{\perp}$ est sans torsion, on en déduit que
$$\Phi_\ell = \mathrm{tors}(V'^{\perp}/N)(-1) = (V'^{\perp}/N)(-1).$$
Pour justifier la dernière égalité, on va montrer que $V'^{\perp}/N$ est de torsion. Soit $I_{(\ell)}$ le sous–groupe de I noyau du caractère canonique $I \to \mathbb{Z}_\ell(1)$. On a
$$U/N = U_I = (U_{I_{(\ell)}})_{\mathbb{Z}_\ell(1)} = (U^{I_{(\ell)}})_{\mathbb{Z}_\ell(1)}.$$
Soit σ un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, alors
$$0 \longrightarrow U^I \longrightarrow U^{I_{(\ell)}} \xrightarrow{\sigma - 1} U^{I_{(\ell)}} \longrightarrow (U^{I_{(\ell)}})_{\mathbb{Z}_\ell(1)} \longrightarrow 0.$$
Par conséquent $\mathrm{rg}(U_I) = \mathrm{rg}(U^I) = \mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(V') = 2a + t$, où rg désigne le rang sur $\mathbb{Q}_\ell$. D'où $\mathrm{rg}(V'^{\perp}) = \mathrm{rg}(N) = t + 2u$. □

Soient $\widetilde{I}$, $\widetilde{K}$, $G = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) = I/\widetilde{I}$, $\widetilde{S}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}^\circ$ comme dans la section 5.2. On désigne par $\widetilde{t}$ et $\widetilde{a}$ les dimensions torique et abélienne de $\widetilde{\mathcal{A}}^\circ_k$. Soit K_ℓ la sous–extension maximale de $\widetilde{K}$ de degré une puissance de ℓ. On note a_ℓ, t_ℓ, u_ℓ les dimensions abélienne, torique et unipotente associées au modèle de Néron de A_{K_ℓ}. Donc, $g = \widetilde{t} + \widetilde{a} = t_\ell + u_\ell + a_\ell$.

La filtration $0 \subset \widetilde{W} \subset \widetilde{V} \subset U$, définie dans la section 5.2, induit une filtration de $V'^\perp$:

$$0 \overset{t}{\subset} W \overset{\widetilde{t}-t}{\subset} \widetilde{W} \overset{2(\widetilde{a}-a)}{\subset} \widetilde{V} \cap V'^\perp \overset{\widetilde{t}-t}{\subset} V'^\perp \tag{27}$$

où les quotients successifs sont sans torsion, de rangs indiqués. On obtient par quotient une filtration de Φ_ℓ, dite filtration de Lorenzini,

$$0 = \Phi_\ell^4 \subset \Phi_\ell^3 \subset \Phi_\ell^2 \subset \Phi_\ell^1 \subset \Phi_\ell^0 = \Phi_\ell.$$

On se propose de mesurer la taille des différents quotients de cette filtration. On introduit pour cela la notion suivante :

Définition 5.15 *Soit G un groupe abélien fini d'ordre une puissance de ℓ, de sorte que $G \simeq \oplus_{i\geq 1}\mathbb{Z}/\ell^{a_i}\mathbb{Z}$ avec $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$. On pose*

$$\delta_\ell(G) = \sum_{i\geq 1}(\ell^{a_i} - 1).$$

On utilisera l'estimation suivante sur δ_ℓ :

Lemme 5.16 ([12] corollaire 4.7) *Soient M un $\mathbb{Z}_\ell$–module de type fini et σ un automorphisme de M d'ordre fini. Supposons que $M/(\sigma-1)M$ est fini. Alors,*

$$\delta_\ell(M/(\sigma-1)M) \leq \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}_\ell}(M).$$

L'étape principale dans la preuve du théorème 5.14 est la proposition suivante :

Proposition 5.17 (Edixhoven [12] théorème 3.3) *Avec les hypothèses et notations ci–dessus, on a*

1) *Φ_ℓ^3 est engendré par t éléments;*

2) *$\delta_\ell(\Phi_\ell/\Phi_\ell^1) \leq t_\ell - t$;*

3) *$\delta_\ell(\Phi_\ell^1/\Phi_\ell^3) \leq (t_\ell - t) + 2(a_\ell - a)$.*

Preuve. Le point 1) est évident car $\Phi_\ell^3 = W/W \cap N$ et W est engendré par t générateurs.

Le groupe Φ_ℓ/Φ_ℓ^1 est un quotient de $(V'^\perp/\widetilde{V} \cap V'^\perp)_I$. De plus, I agit par un quotient fini sur $V'^\perp/\widetilde{V} \cap V'^\perp$. On prend $M = (V'^\perp/\widetilde{V} \cap V'^\perp)_{I_{(\ell)}}$ sur lequel $\mathbb{Z}_\ell(1)$ agit par un quotient fini. Soit σ l'automorphisme de M image d'un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$. Alors,

$$M/(\sigma-1)M = ((V'^\perp/\widetilde{V} \cap V'^\perp)_{I_{(\ell)}})_{\mathbb{Z}_\ell(1)} = (V'^\perp/\widetilde{V} \cap V'^\perp)_I$$

est de torsion. En effet,

$$\left(\frac{V'^\perp}{\widetilde{V} \cap V'^\perp}\right)_I \otimes \mathbb{Q} = \frac{(V'^\perp)^I}{(\widetilde{V} \cap V'^\perp)^I} \otimes \mathbb{Q} = \frac{V \cap V'^\perp}{V \cap V'^\perp} = 0.$$

Pour appliquer le lemme 5.16, il faut calculer le rang de M. Soit $0 \subset \widetilde{W}' \subset \widetilde{V}' \subset U'$ la filtration du module de Tate de la variété abélienne duale de A par ses sous–modules essentiels. J'affirme que l'accouplement

$$\left(\frac{\widetilde{W}'}{W'}\right) \times \left(\frac{V'^\perp}{\widetilde{V} \cap V'^\perp}\right) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K}) \tag{28}$$

induit par (22) est non dégénéré. Il suffit pour cela de voir que $\widetilde{W}'^{\perp} = \widetilde{V}$ et que $V' \cap \widetilde{W}' = W'$. La première relation découle du fait que $A'_{\widetilde{K}}$ est semi–stable, et la deuxième du lemme 5.12. Comme (28) est I–équivariant, on se ramème à calculer le rang de

$$\left(\frac{\widetilde{W}'}{W'}\right)_{I(\ell)} = \left(\frac{\widetilde{W}'}{W'}\right)^{I(\ell)} = \frac{\widetilde{W}'^{I(\ell)}}{W'^{I(\ell)}} = \frac{\widetilde{W}'^{I(\ell)}}{W'}.$$

Soit $J = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\ell)$. Alors $I(\ell) \subset J$, et le plus petit sous–groupe de J contenant $I(\ell)$ et $\widetilde{I}$ est J. Il s'en suit que $\widetilde{W}'^{J} = \widetilde{W}'^{I(\ell)}$. Le lemme 5.12 implique alors que $\mathrm{rg}(M) = t_\ell - t$. Le point 2) en découle grâce au lemme 5.16. La preuve de 3) est analogue à celle de 2). □

On établit facilement le résultat suivant :

Lemme 5.18 *Soit $0 \to B \to E \to A \to 0$ une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$–modules finis avec $E \simeq \oplus_{i\geq 1}\mathbb{Z}_\ell/\ell^{e_i}\mathbb{Z}_\ell$. Alors,*

$$\delta_\ell(A) + \delta_\ell(B) \geq 2\sum_{i\geq 1}\left(\frac{\ell^{\lfloor e_i/2\rfloor} + \ell^{\lceil e_i/2\rceil}}{2} - 1\right).$$

Preuve du théorème 5.14. Soit $e_1 \geq e_2 \geq \ldots$ les entiers définis par

$$\Phi_\ell/\Phi_\ell^3 \simeq \oplus_{i\geq 1}\mathbb{Z}/\ell^{e_i}\mathbb{Z}_\ell.$$

Par la proposition 5.17–1), Φ_ℓ^3 est engendré par t éléments. Ceci implique que $e_i \geq r_{i+t}$ pour tout $i \geq 1$, où les r_i sont définis dans le théorème 5.14. Par le lemme 5.18, on a

$$\delta_\ell(\Phi_\ell/\Phi_\ell^1) + \delta_\ell(\Phi_\ell^1/\Phi_\ell^3) \geq 2\sum_{i\geq 1}\left(\frac{\ell^{\lfloor e_i/2\rfloor} + \ell^{\lceil e_i/2\rceil}}{2} - 1\right) \geq 2\sum_{i\geq t+1}\left(\frac{\ell^{\lfloor r_i/2\rfloor} + \ell^{\lceil r_i/2\rceil}}{2} - 1\right).$$

Par ailleurs, la proposition 5.17 implique que

$$2(u - u_\ell) = 2(t_\ell - t + a_\ell - a) \geq \delta_\ell(\Phi_\ell/\Phi_\ell^1) + \delta_\ell(\Phi_\ell^1/\Phi_\ell^3).$$

La preuve du théorème 5.14 est terminée. □

Remarque 5.19 La proposition 5.13 utilise le théorème de réduction semi–stable. Inversement, chacun des énoncés (i) et (ii) de cette proposition implique le théorème de réduction semi–stable. En effet, grâce à la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}_s[\ell](k) \to A[\ell](K) \to \Phi[\ell] \to 0$$

(cf. équation (26)), l'énoncé (i) de la proposition 5.13 montre que si $A[\ell](K) = A[\ell](\overline{K})$ pour $\ell \geq 3$ et $\ell \neq p$, alors A a réduction semi–stable. De même, l'énoncé (ii) montre que si $A[\ell](K) = A[\ell](\overline{K})$ pour $\ell > 2g+1$ et $\ell \neq p$, alors A a réduction semi–stable.

On prend pour A la jacobienne d'une courbe propre lisse et géométriquement irréductible C sur K de genre $g \geq 1$. Par [5] 9.6/1 et la suite exacte (18), le groupe Φ est canoniquement isomorphe au sous–groupe de torsion G_{tor} du groupe G qui apparait dans la section 4.1. Par conséquent, Artin et Winters (cf. théorème 4.7) donnent une preuve combinatoire de la version faible suivante de la proposition 5.13 : *il existe un entier $c(g)$, qui ne depend que du genre g, tel que pour tout nombre premier $\ell > c(g)$, on a*

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell}\Phi[\ell] \leq t.$$

Noter que leur preuve marche aussi pour $\ell = p$. Dans la preuve du théorème de réduction semi–stable, Artin et Winters utilisent l'estimation plus faible : $\mathrm{rang}_{\mathbb{F}_\ell} G[\ell] \leq t + u$. Ceci s'explique par leur usage du modèle régulier minimal, imposé par la proposition 4.1.

A Preuve du théorème 3.3

On commence par démontrer le lemme de pureté suivant :

Lemme A.1 *Soient A un anneau local régulier strictement hensélien (de caractéristique résiduelle différente de ℓ), et $D = \sum_{i \in B} D_i$ un dcn de* $\mathrm{Spec}(A)$ *défini par l'équation $\prod_{i \in B} t_i = 0$ où $(t_i)_{i \in B}$ est une partie d'un système régulier de paramètres de A. Soit $U = \mathrm{Spec}(A) - D = \mathrm{Spec}(A[1/(\prod_{i \in B} t_i)])$. On a*

$$H^q(U, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda & q = 0 \\ (\Lambda(-1))^B & q = 1 \end{cases}$$

Preuve. On va démontrer l'énoncé plus précis suivant :

$$H^0(U, \mu_{\ell^n}) \simeq \mu_{\ell^n}(A) \tag{29}$$
$$H^1(U, \mu_{\ell^n}) \simeq H^0(U, \mathbb{G}_m)/(H^0(U, \mathbb{G}_m))^{\ell^n} \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^B \tag{30}$$

L'isomorphisme (29) découle de la connexité de $U \neq \emptyset$. Le premier isomorphisme de (30) découle de la suite exacte de Kummer quand on observe que $\mathrm{Pic}(U) = 0$ (puisque U est ouvert dans $\mathrm{Spec}(A)$ et A est factoriel). On fixe un isomorphisme $B \simeq \{1, \ldots, a\}$, et on pose $U_i = \mathrm{Spec}(A[1/(\prod_{1 \leq j \leq i} t_i)])$ pour $j = 0, \ldots a$, de sorte que $U_0 = \mathrm{Spec}(A)$ et $U_a = U$. Pour $1 \leq i \leq a$, on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^0(U_{i-1}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^0(U_i, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\rho_i} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\ & \| & & \| & & & \\ & (A[\frac{1}{t_1 \ldots t_{i-1}}])^* & & (A[\frac{1}{t_1 \ldots t_i}])^* & & & \end{array}$$

où pour $a \in (A[\frac{1}{t_1 \ldots t_i}])^*$, $\rho_i(a)$ est l'ordre de a le long de t_i. Pour déduire le deuxième isomorphisme de (30), il suffit de remarquer que A^* est ℓ^n–divisible car A est strictement hensélien et ℓ est différent de la caracteristique résiduelle de A. □

Preuve du théorème 3.3. Soient $X_{(\overline{x})}$ le hensélisé strict de X en $\overline{x}$, $D = \sum_{i \in B} D_i$ la fibre fermée réduite de $X_{(\overline{x})}/S$, $(t_i)_{i \in B}$ une partie d'un système régulier de paramètres dont le produit définit D, et $U = X_{(\overline{x})} - D$. En vue de l'isomorphisme (9), on est amené à calculer les groupes de cohomologie $H^q(U_{\mathrm{t}}, \Lambda)$ pour $q = 0, 1$, et à étudier les actions de I_{t} et de $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$. La dernière action se décrit comme suit : le groupe $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$ agit canoniquement sur $X_{(\overline{x})}$, i.e. il s'identifie au groupe de Galois de $L^{\mathrm{sh}}/L^{\mathrm{s}}$ où L^{sh} (resp. L^{s}) est le corps de fractions de $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$ (resp. $\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{X,x}$). Il s'agit d'étudier l'action induite sur $H^q(U_{\mathrm{t}}, \Lambda)$.

Soit π une uniformisante de R, alors U_{t} est la limite projective des $U(\pi^{1/n})$ pour $(n, p) = 1$. On note pour la suite que le groupe d'inertie modéré I_{t} agit sur tous les $U(\pi^{1/n})$ car $K(\pi^{1/n})/K$ est Galoisienne. Le lemme A.1 ne peut pas s'appliquer aux $U(\pi^{1/n})$ car en général $X_{(\overline{x})}(\pi^{1/n})$ n'est pas normal. On introduit les schémas intermédiaires suivants : soit n un entier positif premier à p. On pose

$$X_n = X_{(\overline{x})}([t_i^{1/n}]_{i \in B}) \qquad \text{et} \qquad U_n = X_n \times_S U.$$

Noter que X_n est le spectre d'un anneau local régulier et que U_n est le complémentaire du dcn défini par $\prod_{i \in B} t_i^{1/n}$. Par le lemme A.1, $H^0(U_n, \Lambda) = \Lambda$ et $H^1(U_n, \Lambda) = \Lambda(-1)^B$. Soient $m = nd$ et $\varphi^n_m : X_m \to X_n$ le morphisme canonique. De la preuve du lemme A.1, on voit que $(\varphi^n_m)^* : H^q(U_n, \Lambda) \to H^q(U_m, \Lambda)$ est la multiplication par d^q pour $q = 0, 1$. Posons $\widetilde{U} = \varprojlim_{(n,p)=1} U_n$, alors

$$H^q(\widetilde{U}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q = 1 \end{cases} \tag{31}$$

Le lemme suivant compare $\widetilde{U}$ et U_{t}.

Lemme A.2 *Le cardinal de l'ensemble* Θ *des composantes connexes de* U_{t} *est* $c = \delta_p(\# H_0(\mathbb{K}))$*. Le schéma* $\widetilde{U}$ *est un prorevêtement Galoisien de groupe* $H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}(1)(k)$ *de chacune des composantes connexes de* U_{t}*. L'action de* I_{t} *sur* Θ *se factorise à travers le caractère* $\chi_c : I_{\mathrm{t}} \to \mu_c(R)$*, inverse du caractère canonique, et* Θ *est un* $\mu_c(R)$*–torseur principal pour cette action. L'action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$ *sur* Θ *se factorise à travers un caractère* $\chi_{\overline{x}} : \mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x)) \to \mu_{c'}(R)$ *où* c' *est un diviseur de* c*.*

Le théorème 3.3 s'obtient à partir de (31), en appliquant la suite spectrale de Hochschild–Serre. Le lemme A.2 s'obtient par limite projective à partir de l'énoncé suivant :

Lemme A.3 *Soient* n *un entier positif premier à* p*. Le cardinal de l'ensemble* Θ_n *des composantes connexes de* $U(\pi^{1/n})$ *est* $c = (n, \# H_0(\mathbb{K}))$*. On pose* $n = cn'$*. Le schéma* $U_{n'}$ *est un revêtement Galoisien de groupe* $H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{n'}(R)$ *de chacune des composantes connexes de* $U(\pi^{1/n})$*. L'action de* I_{t} *sur* Θ_n *se factorise à travers le caractère* $\chi_c : I_{\mathrm{t}} \to \mu_c(R)$*, inverse du caractère canonique, et* Θ_n *est un* $\mu_c(R)$*–torseur principal pour cette action. L'action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$ *sur* Θ_n *se factorise à travers un caractère* $\chi_{\overline{x}} : \mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x)) \to \mu_{c'}(R)$ *où* c' *est un diviseur de* c*.*

Preuve. C'est un calcul local du même genre que celui développé dans la section 1.1.

Considérons d'abord le cas d'un point générique de X_s. Soient A tel que $X_{(\overline{x})} = \mathrm{Spec}(A)$ et α une uniformisante de A. Il existe $u \in A^*$ tel que $\pi = u\alpha^r$. On pose $c = (n, r)$, $n = cn'$ et $r = cr'$. Soit A' la normalisation de $A(\pi^{1/n})$ dans son anneau total de fractions. Alors

$$A' \simeq \prod_{\xi \in \mu_c(R)} \{A[\pi']/(\pi'^{n'} - \xi v \alpha^{r'})\}' \simeq \prod_{\xi \in \mu_c(R)} A[t]/(t^{n'} - \alpha)$$

où v est une racine c–ème de u (noter que $(c, p) = 1$), et $\{\ \}'$ désigne la normalisation.

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(k(\overline{x})/k(x))$. On a $\sigma(\alpha) = h\alpha$ où $h \in A^*$. D'où $\sigma(u) = h^{-r}u$ et $\sigma(v) = \xi' h^{-r'} v$ où $\xi' \in \mu_c(R)$. Donc σ agit sur $\Theta_n = \mu_c(R)$ par multiplication par ξ'. La description de l'action de I_{t} sur Θ_n est aussi évidente.

On considère maintenant le cas d'un point fermé, i.e. $x = \overline{x}$. Le lemme A.3 se ramène à l'énoncé suivant :

Lemme A.4 *Soit* A *un anneau local excellent régulier strictement hensélien plat sur* R *de dimension* 2*. Supposons que* $\pi = u \prod_{i \in B} t_i^{r_i}$ *où* $u \in A^*$ *et* $(t_i)_{i \in B}$ *est une partie d'un système régulier de paramètres de* A*. Soient* n *un entier premier à* p *et* $R' = R[\pi']/(\pi'^n - \pi)$*. L'anneau* $A \otimes_R R'$ *est local réduit, soit* A' *sa normalisation dans son anneaux total de fractions. Alors, le cardinal de l'ensemble* Θ_n *des composantes connexes de* $\mathrm{Spec}(A')$ *est* $c = (n, \# H_0(\mathbb{K}))$*. Chaque composante est isomorphe à*

$$\mathrm{Spec}(A[t_i^{1/n'}])/H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{n'}(R)$$

où $n = cn'$ *et* $H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{n'}(R)$ *agit sur* $\mathrm{Spec}(A[t_i^{1/n'}])$ *via l'inclusion* $H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{n'}(R) \subset \mu_{n'}(R)^B$ *et l'action naturelle de* $\mu_{n'}(R)^B$ *sur* $\mathrm{Spec}(A[t_i^{1/n'}])$*.*

L'action de I_{t} *sur* Θ_n *se factorise à travers le caractère* $\phi_c : I_{\mathrm{t}} \to \mu_c(R)$*, opposé du caractère canonique, et* Θ_n *est un* $\mu_c(R)$*–torseur principal.*

Preuve. 1) Il suffit de démontrer le lemme pour A complet. En effet, A' est fini sur A car A est excellent. Comme de plus A est hensélien, on en déduit que A' est un produit d'anneaux locaux normaux excellents et henséliens. Pour déterminer les composantes connexes de $\mathrm{Spec}(A')$, on peut remplacer A' par son complété le long de son radical. Puisque $A \otimes_R R'$ est local réduit excellent, la completion de A' est isomorphe à la normalisation de $\hat{A} \otimes_R R'$ où $\hat{A}$ est le complété de A (EGA IV 7.8.3).

2) On suppose A complet. Il y a deux cas possibles

$$A \simeq \begin{cases} R[[x,y]]/(\pi - ux^a) & \text{si } \#B = 1 \\ R[[x,y]]/(\pi - ux^a y^b) & \text{si } \#B = 2 \end{cases}$$

où $u \in R[[x,y]]^*$.

On suppose d'abord que $\#B = 1$. On a $\#H_0(\mathbb{K}) = a$, $H_1(\mathbb{K}) = 0$, $c = (n, a)$, $n = cn'$ et $a = ca'$. On fixe $v \in R[[x, y]]^*$ tel que $v^c = u$, alors

$$A' \simeq \prod_{\xi \in \mu_c(R)} \{R'[[x, y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'})\}'.$$

Pour normaliser $R'[[x, y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'})$, on considère le morphisme de R–algèbres suivant

$$\begin{array}{rccc} f: & R'[[x,y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'}) & \longrightarrow & R[[t,y]]/(\pi - ut^{n'a}) \\ & (x, y, \pi') & \longmapsto & (t^{n'}, y, (\xi v)^{1/n'} t^{a'}) \end{array}$$

On voit facilement que f est fini et que $f \otimes_R K$ est un ismorphisme. Il s'en suit que la normalisation de $R'[[x, y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'})$ est isomorphe à $A[x^{1/n'}]$.

On suppose que $\#B = 2$. On a $c = (a, b, n)$ et $a = ca'$, $b = cb'$ et $n = cn'$. On fixe $v \in R[[x, y]]^*$ tel que $v^c = u$, alors

$$A' \simeq \prod_{\xi \in \mu_c(R)} \{R'[[x, y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'} y^{b'})\}'.$$

On considère le morphisme de R–algèbres suivant

$$\begin{array}{rccc} f: & R'[[x,y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'} y^{b'}) & \longrightarrow & R[[t,s]]/(\pi - ut^{n'a} s^{n'b}) \\ & (x, y, \pi') & \longmapsto & (t^{n'}, s^{n'}, (\xi v)^{1/n'} t^{a'} s^{b'}) \end{array}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^B$ une base de $H_1(\mathbb{K})$. Soit $\xi \in H_1(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{n'}(R)$. Grâce à (α, β), on considère $\xi \in \mu_{n'}(R)$. L'action de ξ sur $A([x^{1/n'}, y^{1/n'}]) \simeq R[[t, s]]/(\pi - ut^{an'} s^{bn'})$ décrite dans le lemme est donnée par $t \mapsto \xi^\alpha t$ et $s \mapsto \xi^\beta s$. Il est évident que f a une image contenue dans $\{R[[t, s]]/(\pi - ut^{n'a} s^{n'b})\}^{\mu_{n'}(R)}$ et que ce dernier s'identifie avec la normalisation de $R'[[x, y]]/(\pi'^{n'} - \xi v x^{a'} y^{b'})$. □

B Théorème de monodromie

Il y a au moins deux démonstrations du théorème 1.6, l'une géométrique et l'autre arithmétique. La preuve géométrique (d'après [15] I) utilise les cycles evanescents modérément ramifiés. On fixe un modèle rcn X de C sur S. Par le théorème 3.3 et la suite spectrale de Leray (10), il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout $\sigma \in I_t = I/P$, on a

$$(\sigma^N - 1)^2 = 0 \quad \text{sur} \quad H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)^P.$$

Par exemple, on prend pour N le pgcd des multiplicités des composantes irréductibles de X_s. Comme P est un pro–p–groupe, il agit par un quotient fini sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. On obtient ainsi le résultat plus fort suivant :

Corollaire B.1 *L'action de I sur $H^1(C_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est quasi–unipotente d'échelon* 2.

L'analogue de cette démonstration en dimensions supérieures depend d'un certain nombre de conjectures (voir [15] I). Ce problème ne se pose pas avec la preuve arithmétique. On se limite ici à expliquer ses grandes lignes. On se place d'abord dans la situation suivante : $S = \mathrm{Spec}(R)$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète henselien et ℓ est un nombre premier inversible dans R, tel que l'hypothèse suivante soit verifiée :

($*_\ell$) aucune extension finie de k ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ.

Sous cette hypothèses, on démontre [27] que toute représentation continue ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ dans $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Q}_\ell)$ est quasi–unipotente. Ensuite, on démontre (cf. [15] I) que l'hypothèse ($*_\ell$) est superflue pour les représentations qui proviennent de la géométrie, c'est à dire pour les groupes de cohomologie ℓ–adique $H^*(Y_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$, où Y est un schéma de type fini sur η.

Références

[1] S. S. ABHYANKAR, *Resolution of singularities of arithmetical surfaces*, in Arithmetical Algebraic Geometry, edited by O. F. G. Schilling, Harper and Row, New York (1965), p. 111-152.

[2] M. ARTIN, *Algebrization of formal moduli I*, dans Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press, Princeton University Press (1969), p. 21–71.

[3] M. ARTIN, G. WINTERS, *Degenerate fibres and stable reduction of curves*, Topology **10** (1971), p. 373–383.

[4] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann. **270** (1985), p. 349–379.

[5] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **21**, Springer–Verlag, Berlin (1990).

[6] L. BREEN, *Fonctions thêta et théorème du cube*, L.N.M. 980 (1983).

[7] T. CHINBURG, *Minimal models for curves over Dedekind rings*, dans Arithmetic Geometry, Cornell–Silverman (éditeurs), Springer, p. 309–326.

[8] P. DELIGNE, *Cohomologie étale*, SGA $4\frac{1}{2}$, L.N.M. 569, Springer–Verlag (1977).

[9] P. DELIGNE, N. KATZ, *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique*, SGA 7 II, L.N.M. 340, Springer–Verlag (1973).

[10] P. DELIGNE, D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), p. 75–109.

[11] M. DESCHAMPS, *Réduction semi–stable*, dans Pinceaux de courbes de genre au moins deux, L. Szpiro (editeur), Astérisque **86** (1981), p. 1–34.

[12] B. EDIXHOVEN *On the prime to p–part of the groups of connected components of Néron models*, Compositio Math. **97** (1995), p. 29–49.

[13] D. GIESEKER, *Lectures on moduli of curves*, Tata Inst. Fund. Res. Bombay (1982).

[14] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie ℓ–adique et fonctions L*, SGA 5, L.N.M. 589, Springer–Verlag (1977).

[15] A. GROTHENDIECK, *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique*, SGA 7 I, L.N.M. 288, Springer–Verlag (1972).

[16] U. T. HARTL, *The Picard functor*, dans ce volume.

[17] H. HIRONAKA, *Desingularization of excellent surfaces*, appendice à *Resolution of surface singularities*, par V. Cossart, J. Giraud et U. Orbanz, L.N.M. 1101 (1984).

[18] J. LIPMAN, *Rational singularities*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), p. 195–279.

[19] S. LICHTENBAUM, *Curves over discrete valuation rings*, Amer. J. Math. **25** (1968), p. 380–405.

[20] D. LORENZINI, *On the group of components of a Néron model*, J. Reine Angew. Math. **445** (1993), p. 109–160.

[21] J.–P. MURRE, *On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups.*, Pub. Math. de l'IHES **23** (1964), p. 5–43.

[22] F. OORT, *Sur le schéma de Picard*, Bull. Soc. Fr. **90** (1962), p. 1–14.

[23] M. RAYNAUD, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, L.N.M. **119**, Springer (1970).

[24] M. RAYNAUD, *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES **38** (1974), p. 27–76.

[25] I. SHAFAREVICH, *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Tata Institute Bombay (1966).

[26] T. SAITO, *Vanishing cycles and geometry of curves over a discrete valuation ring*, Amer. J. of Math. **109** (1987), p. 1043–1085.

[27] J.–P. SERRE, J. TATE, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. Math. **88** (1968), p. 492–517.

Ahmed ABBES
CNRS UMR 7539, LAGA, Institut Galilée
Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse (France).
E-mail abbes@math.univ-paris13.fr