UNIVERSITE PARIS VII - DENIS DIDEROT

Thèse de Doctorat
Spécialité : mathématiques

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VII

Présentée par

GAËTAN CHENEVIER

Familles p-adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch-Kato

Thèse dirigée par Michael HARRIS

Soutenue le 13 Juin 2003, devant le jury composé de :

M. Laurent CLOZEL	Rapporteur
M. Pierre COLMEZ	Éxaminateur
M. Jean-Marc FONTAINE	Président
M. Michael HARRIS	Directeur
M. Glenn STEVENS	Éxaminateur

Autre rapporteur : M. Barry MAZUR

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Michael Harris pour ce qu'il m'a appris durant ces trois dernières années, sa disponibilité et son optimisme. C'est lui qui, en acceptant de diriger mon DEA, m'a fait découvrir l'arithmétique des formes automorphes, à laquelle j'ai pris depuis tant de plaisir à réfléchir.

Laurent Clozel et Barry Mazur ont accepté la tâche peu gratifiante de rapporter mon travail, et leurs remarques m'ont permis d'en améliorer la qualité : je leur en suis très reconnaissant. Pierre Colmez a toujours pris le temps de répondre à mes questions, je suis très heureux qu'il fasse partie de mon jury, ainsi que Laurent Clozel, Jean-Marc Fontaine et Glenn Stevens. Je les remercie tous.

Il me serait difficile de surestimer l'importance de ma collaboration avec Joël Bellaïche dans mon apprentissage des mathématiques ces quatre dernières années. Le chapitre III de cette thèse est le fruit d'un travail en commun. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude, et mon amitié.

Mes travaux reposent substantiellement sur ceux de Kevin Buzzard, Robert Coleman, et Barry Mazur, c'est un plaisir de les remercier ici.

Je remercie aussi toux ceux qui, par des discussions que j'ai pu avoir avec eux, m'ont appris des mathématiques. J'en oublie sûrement : Ahmed Abbès, Anne-Marie Aubert, Daniel Barsky, Yves Benoist, Laurent Berger, Christophe Breuil, Emmanuel Breuillard, Kevin Buzzard, Pierre Colmez, Brian Conrad, Jean-François Dat, Mladen Dimitrov, Laurent Fargues, Olivier Guichard, Guy Henniart, Luc Illusie, Jean-Pierre Labesse, Vincent Lafforgue, Vincent Maillot, Ivan Marin, Colette Moeglin, Farid Mokrane, Alban Moreau, Alexandru Oancea, Fabrice Orgogozo, François Pierrot, Olivier Schiffmann, Peter Schneider, Jacques Tilouine, Eric Urban, les élèves de l'ENS et tous mes professeurs. Je remercie tout spécialement Nicolas Tosel, qui m'a appris tant de mathématiques.

Ces deux dernières années, j'ai profité des conditions de travail excellentes et de l'ambiance fort sympathique du département de mathématiques de l'ENS de Paris. J'en remercie tous les membres, et plus spécialement ceux "des toits".

Je remercie tous ceux qui ont contribué aux préparatifs de la soutenance et du pot. Je pense notamment à la bienveillance et à la disponibilité de Michèle Wasse et son équipe, ainsi qu'à l'aide généreuse d'Alex et de Charles Torossian.

Merci à tous mes amis, en particulier Alex, Benjamin, Eliza, Jonathan, Loïc, Mathieu, Maxime, Mona, Olivier, Teodor, Thomas (merci aussi pour la relecture !), Thomas et surtout Valeria, de me rendre chacun la vie plus agréable.

Enfin, je remercie mes parents de m'avoir toujours encouragé à choisir ma voie.

Table des matières

Introduction 7

Chapitre I. Familles p-adiques de formes automorphes pour $U(n)$ 19
1. Introduction 20
2. Modèles pour les représentations algébriques de GL_n 27
3. Famille analytique des représentations de $\Gamma_0(p)$ 30
4. Les formes automorphes pour G 41
5. La série caractéristique de U_p 54
6. Familles de formes automorphes 60
7. Représentations et pseudo-caractères galoisiens 75

Index 89

Chapitre II. Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique 91
1. Introduction 92
2. Systèmes de modules de Banach 93
3. Formes modulaires p-adiques 95
4. Préliminaires de théorie spectrale 101
5. La correspondance de Jacquet Langlands "p-adique" 104
6. La correspondance en familles p-adiques 108
7. Quelques conséquences, remarques et questions 112

Chapitre III. Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato (avec J.Bellaïche) 115
1. Introduction 116
2. Notations et conventions 119
3. Rappel sur la classification de Rogawski 121
4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke 128
5. I-invariants et algèbre d'Atkin-Lehner 132
6. Déformations des représentations cristallines raffinées 135
7. Extensions et pseudo-représentations 141
8. Déformation p-adique de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^{\perp}$ 148
9. Construction de l'extension 163

Annexe : Exemple de ζ de Riemann 169
1. Séries d'Eisenstein critiques et ordinaires de niveau $\Gamma_0(p)$ 170
2. Déformations p-adiques modulaires de $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$, $k \geq 4$ 172

3. Construction d'extensions 174
4. Déformations de représentations cristallines, d'après Kisin 177
5. Digression sur le cas $k = 2$ 182

Bibliographie 187

Introduction

Le thème général de cette thèse est l'étude des déformations p-adiques non ordinaires des formes automorphes et des représentations galoisiennes qui leur sont associées. Elle est composée de trois chapitres d'intérêts indépendants, chacun tiré d'un article soumis à publication, ainsi que d'un annexe à caractère introductif visant à illustrer dans des cas simples des techniques de ce texte, et en particulier les méthodes du chapitre III. Le troisième chapitre est le fruit d'un travail en commun avec J.Bellaïche.

Les résultats principaux sont les suivants. Nous développons au premier chapitre[1] une théorie des familles p-adiques à la manière des travaux de Coleman et Coleman-Mazur ([**29**],[**30**],[**33**]) pour les formes automorphes des groupes unitaires $G/\mathbb{Q}$ tels que $G(\mathbb{R})$ est le groupe unitaire compact $\mathrm{U}(n)(\mathbb{C})$. Dans le second chapitre, nous montrons que la correspondance de Jacquet-Langlands entre formes modulaires usuelles et quaternioniques s'étend aux formes modulaires p-adiques surconvergentes de pente finie de part et d'autre ; cette correspondance étendue passe aux familles p-adiques et provient d'un isomorphisme analytique entre des courbes de Hecke[2] associées. Dans le troisième chapitre, nous appliquons entre autres les résultats du premier chapitre pour $\mathrm{U}(3)$ et à certaines formes non tempérées construites par Rogawski, afin de construire une extension prévue par les conjectures de Bloch-Kato lorsque la fonction L d'un caractère de Hecke "anti-autodual" d'un corps quadratique imaginaire s'annule au centre à l'ordre impair.

Nous allons introduire et décrire plus en détail, ci-dessous, le contenu de chacun des chapitres. Pour des compléments, notamment sur les démonstrations des résultats énoncés, le lecteur pourra se reporter à l'introduction du chapitre en question. Les références précédées d'un A. renvoient à l'annexe.

Familles p-adiques de formes automorphes

Des congruences de Ramanujan aux familles de Coleman. Soient p un nombre premier, $M_k(\Gamma_1(N))$ l'espace des formes modulaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $(N,p)=1$, et considérons

$$f := \sum_{n\geq 0} a_n q^n \in M_k(\Gamma_1(N))$$

une forme propre normalisée ($i.e..$ $a_1 = 1$). Historiquement, déformer p-adiquement f consiste à trouver une autre forme propre normalisée $g = \sum_{n\geq 0} b_n q^n \in M_{k'}(\Gamma_1(N'))$, avec prescription éventuelle de k' et/ou N', telles que

$$\sum_{n\geq 0} a_n q^n \equiv \sum_{n\geq 0} b_n q^n \bmod p\overline{\mathbb{Z}}_p[[q]]$$

[1]Ce chapitre a été soumis pour publication au journal de Crelle, et sa forme actuelle a bénéficié des remarques du référé.

[2]La traduction française littérale de "eigencurve" (resp. "eigenvariety") prêtant à confusion, nous avons adopté le terme "courbe de Hecke" (resp. "variété de Hecke")

On peut aussi réclamer de telles congruences $\bmod p^m\overline{\mathbb{Z}}_p[[q]]$, on écrira $f \equiv g \bmod p^m$. Un exemple célèbre connu de Ramanujan est la congruence modulo $p = 691$ suivante, en poids 12 et niveau 1 (voir A.3.1.2 à ce sujet) :

$$q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} \equiv \sum_{n\geq 1}(\sum_{d|n} d^{11})q^n \bmod 691\,\mathbb{Z}[[q]]$$

Les congruences étudiées au chapitre I de cette thèse sont de nature "moins exceptionnelles" : on cherche g de même niveau que f, mais en poids k' congru à k modulo $p^m(p-1)$. On suppose f parabolique dans ce qui suit. Un résultat important, dû à Hida ([**57**]) dans le cas "ordinaire" où a_p est une unité p-adique, et à Coleman ([**30**]) dans le cas général, est que pour tout entier m, et tout $k' \equiv k \bmod (p-1)p^m$ assez grand, on peut toujours trouver une telle forme $g_{k'}$ parabolique satisfaisant $g_{k'} \equiv f \bmod p^m$.

Mieux, il émerge de leurs travaux (voir aussi [**96**] et A.2.1) que pour toute forme propre normalisée $f \in M_k(\Gamma_1(Np))$, on peut construire une "famille analytique p-adique" de formes $g_{k'} \in M_{k'}(\Gamma_1(Np))$ variant analytiquement avec k'. Cela signifie qu'il existe une boule $B(k,r) \subset \mathbb{C}_p$ de centre k et d'un certain rayon r, un affinoide réduit Ω muni d'un revêtement fini $\kappa : \Omega \to B(k,r)$, $x \in \Omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\kappa(x) = k$, et des fonctions $(a_n)_{n\geq 1} \in A(\Omega)$ bornées par 1, tels que :

$$q + \sum_{n\geq 2} a_n(x)q^n = f,$$

et si $y \in \Omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est tel que $\kappa(y)$ est un entier assez grand,

$$q + \sum_{n\geq 2} a_n(y)q^n \in M_{\kappa(y)}(\Gamma_1(Np))$$

est le q-développement d'une forme propre. Cela entraîne les résultats précédents pour tout m.

Avant de continuer, il faut noter que l'intérêt de ces congruences ne tient pas qu'à leur forme séduisante. Leurs interprétations en termes galoisiens contiennent de profonds renseignements sur les corps de nombres ; le théorème principal du chapitre III ainsi que l'annexe (particulièrement A.3.1.2) illustrent en partie cette idée. Soit

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{Np} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

la représentation galoisienne classiquement attachée à f [3] on peut attacher aux familles de Coleman ci-dessus une représentation continue :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{Np} \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega))$$

dont l'évaluation sur un ensemble dense de points de Ω soit de la forme ρ_g, et qui vaille ρ_f en x. Elles produisent en particulier des déformations p-adiques non triviales de ρ_f, et ce avec des propriétés importantes en p (voir A.4). Dans [**33**], Coleman-Mazur ont montré qu'il existe une courbe analytique rigide p-adique, la courbe de Hecke de GL_2

[3] Elle est semi-simple, continue, non ramifiée hors de Np, et déterminée par les relations $\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l))) = a_l$, Frob_l étant un élément de Frobenius géométrique en $l \nmid Np$.

de niveau modéré N, dont tous les Ω construits ci-dessus sont des ouverts affinoides. Cette courbe porte une (pseudo-)représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{Np}$ dont les évaluations contiennent tous les ρ_f ; faisant varier N, ces courbes sont conjecturalement "universelles" pour les représentations galoisiennes géométriques sur $\mathbb{Q}$, de rang 2 et de pente finie ([**73**]).

Notre apport. Venons en à notre contribution. Dans le chapitre I, nous développons une théorie des familles p-adiques généralisant celle de Coleman pour les formes automorphes des groupes algébriques $G/\mathbb{Q}$ tels que $G(\mathbb{R})$ soit le groupe unitaire compact $U_n(\mathbb{C})$, et pour un premier p tel que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. L'approche utilisée est inspirée des travaux de Buzzard traitant le cas d'une algèbre de quaternions définie sur $\mathbb{Q}$. Le fait que les "variétés de Shimura" associées à nos groupes G soient de dimension 0 a plusieurs conséquences simplificatrices significatives (notamment que toutes leurs représentations automorphes sont cohomologiques, et ce en degré 0) qui jouent un rôle important dans nos démonstrations. Néanmoins, l'étude de ces cas semblait préliminaire au cas général et a fourni à notre connaissance les premiers exemples de familles p-adiques non ordinaires pour des groupes de rang > 1 [4]. De plus, notamment grâce aux travaux de Blasius-Rogawski pour $n = 3$, et à ceux de Clozel, Harris-Taylor et Kottwitz pour n général, les cas étudiés sont suffisants pour avoir des applications arithmétiques non triviales. Nous allons énoncer ci-dessous les résultats les plus signifiants du chapitre I, on pourra se référer à son introduction pour des énoncés plus complets.

Soit $G/\mathbb{Q}$ un groupe unitaire comme plus haut, attaché à un corps quadratique imaginaire noté E, on fixe un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ au moyen d'une place v de E divisant p. Soit $U_0(p)$ un compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ dont la composante en p est un sous-groupe d'Iwahori $\Gamma_0(p)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ Les poids des formes automorphes pour G sont dans ce contexte des n-uples décroissants d'entiers

$$k = (k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n),$$

dont on notera $\mathbb{Z}^{n,+}$ l'ensemble [5].

L'espace des formes automorphes (pour G) de poids k et niveau $U_0(p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel de dimension finie noté

$$S_k(U_0(p))$$

Nous noterons $\mathcal{H}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke globale engendrée par les algèbres de Hecke locales en les places non ramifiées pour G et hyperspéciales pour $U_0(p)$, ainsi que par

[4]Il faut mentionner cependant l'important travail de Hida ([**54**]) sur les familles ordinaires pour une large classe de groupes, les travaux récents de M.Emerton abordant le cas général par la théorie des représentations p-adiques de groupes de Lie p-adiques (et retrouvant en particulier de manière indépendante une partie de nos résultats de ce chapitre) ainsi que les travaux en préparation de Urban dans le cas "semi-ordinaire" pour GSp_4.

[5]Précisément, on identifie $\mathbb{Z}^{n,+}$ aux poids dominants pour GL_n comme en III.2.3. S'il on fixe un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p$, une forme de poids k comme plus haut engendre une somme de copies de V_k^* sous $G(\mathbb{R})$, avec les notations *loc.cit.* .

l'algèbre d'Atkin-Lehner en p, *i.e.* par les fonctions caractéristiques des doubles classes :

$$\Gamma_0(p)u\Gamma_0(p), \quad \text{où} \quad u = \mathrm{diag}(p^{a_1}, ..., p^{a_n}), \ \text{avec} \quad a_1 \leq ... \leq a_n \in \mathbb{Z}$$

On note U_p l'opérateur de Hecke du type ci-dessus avec $u = (1, p, ..., p^{n-1})$. L'anneau $\mathcal{H}$ agit sur les $S_k(U_0(p))$ et U_p de manière inversible. Une forme $f \in S_k(U_0(p))$ sera dite propre si elle est non nulle et vecteur propre de tous les éléments de $\mathcal{H}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note

$$S_k(U_0(p))^\alpha$$

le plus grand sous-espace vectoriel de $S_k(U_0(p))$ sur lequel U_p n'a que des valeurs propres de valuation α. Un élément de $S_k(U_0(p))^\alpha$ est dit de pente α. Un système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ sur $S_k(U_0(p))^\alpha$ est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $\chi : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ tel qu'il existe une forme propre $f \in S_k(U_0(p))^\alpha$ satisfaisant $T(f) = \chi(T)f$ pour tout T dans $\mathcal{H}$.

Théorème 1 : *Soit $f \in S_k(U_0(p))$ une forme propre de pente α, alors il existe :*

- *une boule $B(k, r) \subset \mathbb{C}_p^n$ de centre k de rayon r explicite,*
- *un affinoide réduit Ω défini sur un corps local, muni d'un morphisme fini*

$$\kappa : \Omega \longrightarrow B(k, r),$$

- *un $x_f \in \Omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\kappa(x_f) = k$,*
- *ainsi qu'un morphisme d'anneaux $a : \mathcal{H} \to A(\Omega)$, $T \mapsto a_T$,*

ayant les propriétés suivantes :

a) $\{a_T(x_f)\}_{T\in\mathcal{H}}$ est le système de valeurs propres de f.

b) Si $k' = (k'_1 \geq ... \geq k'_n) \in \mathbb{Z}^n$ est tel que $k'_i > k'_{i+1} + \alpha - 1$ pour chaque $i \in \{1, ..., n-1\}$, l'application

$$\kappa^{-1}(\{k\})(\overline{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-alg}(\mathcal{H}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$$

$$y \mapsto (T \mapsto a_T(x))$$

induit une bijection entre $\kappa^{-1}(\{k\})(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et l'ensemble des systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}$ sur $S_k(U_0(p))^\alpha$.

c) Ω est d'équidimension n, et κ est dominant restreint à chacune de ses composantes irréductibles.

d) L'image de $\mathcal{H}$ dans $A(\Omega)$ est d'adhérence compacte, composée d'éléments bornés par 1 sur Ω. $a(U_p)$ est de valuation constante égale à α.

e) L'application $\mathbb{Z}^{n,+} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$k' \mapsto \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} S_{k'}(U_0(p))^\alpha$$

est constante sur un voisinage (pour la topologie p-adique) explicite de chaque k' satisfaisant l'hypothèse du b) ci-dessus.

Remarques : Ce résultat sous cette forme est la combinaison du §I.6.2.3, du théorème I.6.1, et du corollaire I.5.2 pour le e), ainsi que pour l'explicitation de r. Nous l'énonçons ci-dessus sans hypothèse de netteté sur le niveau (cf. I.4.1) car des résultats en préparation de Buzzard le permettent (cf. [**22**] §2, notamment sa condition (Pr), voir aussi III.8.2 pour un argument *ad hoc*). Nos techniques permettent aussi de démontrer un théorème analogue pour des espaces de formes automorphes avec un type fixé hors de p (voir III.8.2 pour un exemple dans le cas $n = 3$).

Tout comme dans la théorie de Coleman, nous savons interpréter tous les points de $\Omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ en terme de formes automorphes p-adiques. Nous renvoyons à l'introduction du chapitre I pour des détails à ce sujet et des éléments de la preuve. Mentionnons simplement ici qu'un rôle important est joué par la construction d'une famille orthonormalisable des représentations de la série principale p-adique du groupe $\Gamma_0(p)$, ainsi que l'étude de ses propriétés élémentaires.

Notre second résultat concerne la généralisation à ce contexte des constructions rigides analytiques globales de [**33**]. Afin de ne pas multiplier les énoncés, nous nous contentons d'en donner ici une version "galoisienne", sous certaines hypothèses sur le groupe G imposées par les connaissances actuelles en théorie des formes automorphes. On suppose que :

- soit $n \leq 3$,
- soit G est le groupe unitaire attaché à la donnée d'une algèbre à division D/E munie d'une involution de seconde espèce, ayant les propriétés suivantes :
  i) $D \otimes_E E_v$ est non déployée uniquement en des places v de E décomposées sur $\mathbb{Q}$, et en au moins une telle place,
  ii) Pour toute place finie v de E, $D \otimes_E E_v$ est soit déployée, soit une algèbre à division.

Les travaux de Blasius-Rogawski ([**71**], voir aussi III.3) dans le premier cas, et ceux de Clozel, Harris-Taylor et Kottwitz ([**27**],[**51**]) dans le second cas, permettent d'attacher à une forme propre $f \in S_k(U_0(p))$ une représentation galoisienne continue

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

compatible à la correspondance de Langlands locale non ramifiée [6], et telle que $(\rho_f^c)^* \simeq \rho_f(n-1)$ (cf. I.7.3). On dira que f est ancienne en p si elle engendre une représentation automorphe ayant un constituant irréductible non ramifié en p. Dans ce cas, si $D_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est un groupe de décomposition en v, il est connu que $(\rho_f)_{|D_v}$ est cristalline de poids de Hodge-Tate $k_n < k_{n-1} + 1 < ... < k_1 + n - 1$.

Supposons $p > 2$ pour simplifier et considérons l'*espace analytique des poids* $\mathcal{W}$ dont les $\mathbb{C}_p$-points sont l'ensemble

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) := \mathrm{Hom}_{gr-1-an}((\mathbb{Z}_p^*)^n, \mathbb{C}_p^*)$$

[6]C'est même vrai à toutes les places ne divisant pas p dans le cas ii.) d'après [**51**], voir aussi III.3.3 pour $n = 3$. N désigne ci-dessus le produit des nombres premiers en lesquels soit G est ramifié, soit $U_0(p)$ n'est pas maximal hyperspécial.

des morphismes de groupes de restrictions analytiques à $(1+p\mathbb{Z}_p)^n$. À un point $k \in \mathbb{Z}^{n,+}$ vu comme plus haut poids d'une représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (III.2.3) on peut associer un caractère algébrique du tore diagonal de GL_n et en particulier un élément de $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. Enfin, on notera F_i l'opérateur de Hecke-Iwahori "associé" à

$$\mathrm{diag}(1, ..., 1, p, 1, ..., 1),$$

le p étant à la $n-i+1^{ieme}$ place (cf. I.6.1 définition).

Théorème 2 : *Il existe un espace analytique rigide réduit $\mathcal{D}/\mathbb{C}_p$, muni d'un morphisme analytique*

$$\kappa : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{W},$$

d'un pseudo-caractère continu de dimension n

$$t : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \longrightarrow A(\mathcal{D})^0,$$

et de fonctions analytiques globales inversibles $\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_n \in A(\mathcal{D})$, ayant les propriétés suivantes :

i) Pour toute forme propre $f \in S_k(U_0(p))$, il existe un unique $x_f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ tel que l'évaluation en x de t soit la trace de ρ_f, et tel que les $\mathbf{F}_i(x)$ soient les valeurs propres de f sous les F_i.
Un point de $\Omega(\mathbb{C}_p)$ de la forme x_f est dit classique, et ancien en p s'il on peut de plus choisir f de la sorte.

ii) Les points classiques anciens en p sont Zariski-denses dans $\mathcal{D}$.

iii) Si $x = x_f$ est ancien en p avec $f \in S_k(U_0(p))$, alors $\kappa(x_f) = k$ et ρ_f est cristalline de poids de Hodge-Tate

$$k_n < k_{n-1} + 1 < \cdots < k_1 + n - 1,$$

les valeurs propres de son Frobenius cristallin étant les $p^{k_{n-i+1}}\mathbf{F}_i(x)$.

iv) La restriction de κ à chaque composante irréductible T de $\mathcal{D}$ se factorise par un morphisme fini et surjectif vers une hypersurface de Fredholm dans $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{W}$. De plus, T est de dimension n et $\kappa(T)$ est un ouvert Zariski non vide de $\mathcal{W}$.

v) Tout point classique admet un voisinage affinoide Ω dans $\mathcal{D}$ sur lequel κ a les propriétés du théorème 1.

Remarques : Ce théorème est la combinaison du théorème I.6.2, du corollaire I.7.3 pour l'existence de t, de la proposition I.6.7 et de son corollaire I.6.2 pour le iv), de la proposition I.6.9 pour le ii), et du §I.7.5 pour le iii). La formulation du v) est volontairement imprécise, on se référera au §I.6.3 pour plus de détails. Il ne nous a pas semblé nécessaire de formuler ici le théorème 2 en terme de représentations galoisiennes plutôt que de pseudo-représentations, car il semble que dans les applications la donnée du pseudo-caractère est plus fondamentale en général (cf. III.7,A.2.2.2 et voir le corollaire I.7.5).

Par ailleurs, notons que l'irréductibilité de ρ_f lorsqu'on l'attend n'est connue que pour $n \leq 3$, et peut être déduite en générale par les résultats de [**51**] au prix d'une hypothèse locale. La propriété iii) permet dans certains cas non triviaux de montrer l'irréductibilité générique de $(\rho_f)_{|D_v}$ sur toute une composante irréductible de $\mathcal{D}$ (voir III.9.1).

Enfin, il y a toujours au plus $n!$ points classiques $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ attachés à une même représentation ρ_f, ces points étant différents quand les n-uples $(\mathbf{F}_1(x), ..., \mathbf{F}_n(x))$ le sont. Ceci généralise la notion de formes modulaires "jumelles", on l'étudie en détail en I.4.8 et III.5. Cette remarque permet de construire plusieurs déformations d'une même représentation galoisienne ρ_f (en général $n!$ quand f est tempérée et ancienne en p, moins sinon), en "fixant" certaines de ses pentes.

Fonctorialité de Langlands en familles p-adiques

Les formes modulaires p-adiques, initialement introduites par Serre ([**96**]), sont le cadre naturel de l'étude des congruences mod p^m entre formes modulaires.

Fixons $(N,p) = 1$, les points de $X_1(N)(\mathbb{C}_p)$ paramétrant des courbes elliptiques à bonne réduction supersingulière forment une réunion finie de disques analytiques p-adiques ouverts, dont le complémentaire est un affinoide connexe que nous noterons Z. Une forme modulaire p-adique de poids $k \in \mathbb{Z}$ est une section du faisceau usuel ω^k sur Z. Elle a un q-développement qui la détermine et leur ensemble a une structure d'espace de Banach p-adique de dimension infinie, contenant comme sous-espace les formes partout convergentes *i.e.* $M_k(\Gamma_1(N))$. Leur importance vient de ce que le q-développement mod p^m d'une telle forme est toujours celui d'une forme modulaire "classique" [7].

Un raffinement important de cette notion, dû à Katz ([**61**]), est de requérir qu'une telle forme converge de surcroît sur un ouvert affinoide "strictement" plus grand que Z ; on dit alors qu'elle est *surconvergente*. Ces formes ont joué depuis un rôle crucial dans les questions de congruences, en particulier dans les travaux de Coleman sur les familles ([**29**],[**30**],[**33**]).

Dans nos travaux discutés précédemment sur les familles p-adiques, ainsi que dans ceux de Buzzard dans le cas quaternionique ([**21**]), nous sommes conduits à définir des "formes automorphes p-adiques" ayant des propriétés similaires à celles des formes modulaires surconvergentes. Cependant, leur définition est sensiblement différente ; en particulier, elles ne sont "surconvergentes" en aucun sens évident[8] et sont de nature plus "topologique" que "cohérente". Elles proviennent de l'existence de systèmes locaux Banach p-adiques sur les variétés de Shimura finies mises en jeu, qui sont des représentations de la série principale p-adique (localement) analytique de l'Iwahori de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

Dans le second chapitre de cette thèse, nous nous sommes proposés de comparer ces deux constructions, dans le contexte de la correspondance de Jacquet-Langlands entre GL_2 et algèbres de quaternions définies.

Soit $D/\mathbb{Q}$ l'algèbre de quaternions définie de discriminant d (sans facteur carré), $(Np, d) = (N, p) = 1$ et $p > 3$. On note $\mathcal{H}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre de polynômes engendrée par les variables S_l et T_l si l est premier ne divisant pas Npd, U_l si $l|pd$. On fixe un caractère

[7] et ce de même niveau, et de poids $\equiv k \bmod (p-1)p^{m-1}$

[8] On rappelle par exemple que les variétés de Shimura en question sont de dimension 0 !

"modéré"

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}_p^*$$

et l'on note $\mathcal{W}$ le groupe analytique p-adique des poids-caractères sauvages (cf. III.8.4.2, [**33**] §1.4),

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) := \mathrm{Hom}_{gr-cont}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{C}_p^*)$$

Soit $\mathcal{D}_{d,\varepsilon}$ (resp. $\mathcal{D}_{quat,\varepsilon}$) la courbe de Hecke dont les $\mathbb{C}_p$-points *paramètrent* les formes modulaires paraboliques surconvergentes (resp. p-adiques quaternioniques), propres sous $\mathcal{H}$, de pente finie, de niveau modéré Nd et caractère modéré ε, nouvelles en d (resp. de niveau maximal en d). On rappelle que dans les deux cas, il s'agit d'une courbe analytique p-adique réduite, munie d'un morphisme rigide analytique

$$\kappa : \mathcal{D}_* \longrightarrow \mathcal{W},$$

ainsi que d'un morphisme d'anneaux

$$\mathcal{H} \to A(\mathcal{D}_*)$$

permettant de voir les opérateurs de Hecke comme des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}_*$. Le sens précis de la paramétrisation évoquée plus haut est que si $w \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, l'application

$$\kappa^{-1}(\{w\})(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-alg}(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p)$$

définie par $x \mapsto (h \mapsto h(x))$, induit une bijection sur le sous-ensemble des caractères de $\mathcal{H}$ agissant sur l'espace des formes p-adiques en question, de pente finie et poids-caractère w (cf. II.4.1). Parmi ces points, ceux dont le caractère de $\mathcal{H}$ associé est celui d'une forme modulaire usuelle sont appelés *point classiques*, on sait qu'ils sont Zariski-denses dans $\mathcal{D}_*$.

Une version de la correspondance de Jacquet-Langlands classique, vue sous cet angle, est l'existence d'une bijection $\mathcal{H}$-équivariante entre les points classiques de ces deux courbes. Le résultat principal du chapitre II est alors le suivant (cf. II.6.2), répondant à une question posée par Buzzard :

Théorème 3 : *Il existe un unique isomorphisme rigide analytique*

$$\mathrm{JL}_p : \mathcal{D}_{quat,\varepsilon} \to \mathcal{D}_{d,\varepsilon}$$

au dessus de $\mathcal{W}$, coïncidant avec la correspondance de Jacquet-Langlands sur les points classiques. Il satisfait $\forall h \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{D}_{quat,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$,

$$h(\mathrm{JL}_p(x)) = h(x)$$

Remarques : L'idée de la preuve est de comparer l'action des opérateurs de Hecke sur les espaces de Banach p-adiques mis en jeu, en identifiant les traces (et déterminants de Fredholm) de certains opérateurs de Hecke y agissant par endomorphismes compacts. On utilise en particulier les théorèmes fondamentaux de la théorie des familles p-adiques pour D^* et GL_2 ainsi que la correspondance de Jacquet-Langlands usuelle.

On renvoie à l'introduction du chapitre II pour plus de détails, ainsi qu'au sujet de généralisations éventuelles liées aux variétés de Hecke construites au chapitre I. On renvoie de plus en II.7.2 *loc.cit.* pour la discussion de certaines questions non résolues liées au théorème 3.

Applications aux conjectures de Bloch-Kato

Soient F un corps de nombres, p un nombre premier, $L/\mathbb{Q}_p$ un corps local, et

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(L)$$

une représentation irréductible continue, presque partout non ramifiée et potentiellement semi-stable aux places de F divisant p. Des exemples de telles représentations sont fournis par les facteurs irréductibles des

$$H^i_{et}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_p),$$

où X/F est une variété projective lisse. Selon une conjecture de Fontaine-Mazur, on s'attend à ce qu'ils s'obtiennent tous ainsi. On suppose dans ce qui suit que ρ n'est pas le caractère cyclotomique.

Soit $L(\rho, s)$ la fonction L de ρ (dont la définition n'a qu'un sens conjectural en général, ainsi que la convergence pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, [**44**] chap. II§3.4), elle admet conjecturalement un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, holomorphe en 0. Admettant ceci, la conjecture de Bloch-Kato (cf. [**44**] chap. II §3.4.5) relie l'ordre d'annulation de $L(\rho, s)$ en 0, qui est une propriété purement "analytique complexe" de $L(\rho, s)$, à la dimension d'un groupe d'extensions de représentations galoisiennes :

Conjecture : (Bloch-Kato) $\mathrm{ord}_{s=0} L(\rho, s) = \dim_L H^1_f(F, \rho^*(1))$

Le terme de droite est un sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne continue $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), \rho^*(1))$ auquel on a rajouté des hypothèses locales à toutes les places finies v de F, sa définition ne fait pas intervenir de conjectures. Explicitement (cf [**44**] chap. I.3, §3.3.2, 3.3.6 et prop. 3.3.7), c'est le sous-groupe des classes d'extensions :

$$0 \to \rho^*(1) \to U \to 1 \to 0$$

ayant la propriété que pour toute place finie v de F,

$$0 \to (\rho^*(1))^{I_v} \to U^{I_v} \to 1 \to 0, \qquad \text{si } v \text{ ne divise pas } p$$

$$0 \to D_{cris,v}(\rho^*(1)) \to D_{cris,v}(U) \to 1 \to 0, \qquad \text{si } v \text{ divise } p$$

est exacte, I_v (resp. D_v) étant un groupe d'inertie (resp. de décomposition) en v, et $D_{cris,v}(-) := (- \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{D_v}$. Il est connu que $\dim_L H^1_f(F, \rho^*(1)) < \infty$ ([**44**] chap. II.1 §1.2). Moralement, il s'agit du groupe des extensions de 1 par $\rho^*(1)$ qui ne sont "pas plus ramifiées que $\rho^*(1)$".

En ce qui concerne le terme de gauche, il a un sens non conjectural dans des cas non triviaux, par exemple quand $n = 1$ et plus généralement quand ρ est attachée à certaines formes automorphes (en particulier pour des formes modulaires). La conjecture ci-dessus est connue par exemple quand $n = 1$ pour $F = \mathbb{Q}$ ([**58**]). Elle est liée aux conjectures principales d'Iwasawa, démontrées par Mazur-Wiles, Wiles, et Rubin dans le cas $n = 1$, respectivement pour $F = \mathbb{Q}$, F totalement réel et F quadratique imaginaire. Seulement des résultats partiels sont connus dans les cas $n > 1$; on sait par exemple qu'elle entraîne la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer pour une courbe elliptique dont le groupe de Tate-Shaffarevich est fini.

Notre résultat. Dans le chapitre III de cette thèse, qui est un travail en collaboration avec J.Bellaïche, nous prouvons le cas particulier suivant de la conjecture de Bloch-Kato (cf. l'introduction de chapitre III pour plus de détails). Soit $F \subset \mathbb{C}$ un corps quadratique imaginaire, χ un caractère de Hecke algébrique sur F vérifiant la condition d'*anti-autodualité* suivante :

$$\chi(\bar{z})^{-1} = \chi(z)|z|^{-1},\ \forall z \in \mathbb{A}_F^*$$

et dont le type à l'infini est de la forme

$$z \mapsto z^a \bar{z}^{1-a}, \quad \text{avec } a \geq 2 \text{ un entier}$$

D'après Hecke, la fonctions $L(\chi, s)$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier, ainsi qu'une équation fonctionnelle prenant la forme suivante pour la fonction $\Lambda(\chi, s)$ associée [9] :

$$\Lambda(\chi, -s) = \epsilon(\chi, s)\Lambda(\chi, s), \quad \epsilon(\chi, 0) = \pm 1$$

Théorème 4 : *Soit p un nombre premier décomposé dans F et non ramifié pour χ, et $\chi_p : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to L^*$ une réalisation p-adique de χ. Alors, si $\epsilon(\chi, 0) = -1$, on a*

$$\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), \chi_p) \geq 1$$

Ce résultat n'est pas nouveau, et peut se déduire de travaux de Rubin ([**87**]), mais la méthode utilisée ici est complètement différente, et susceptible de généralisations. Elle est basée sur les idées de la thèse [**3**], dans laquelle une extension du type précédent était construite, mais uniquement modulo p, ainsi que sous certaines hypothèses techniques sur p. Notre preuve est une variante de cette dernière dans laquelle nous reprenons une idée issue des travaux récents de Skinner-Urban ([**102**], cf. III.1.2).

La démonstration du théorème est complexe sous de nombreux aspects. Aussi, il nous a semblé intéressant de profiter de l'occasion de cette thèse, afin d'illustrer certaines des idées mises en jeu et faciliter la tâche au lecteur, de redémontrer par une méthode similaire une partie des conjectures de Bloch-Kato pour la fonction ζ de Riemann. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A. à ce sujet. Dans cette annexe, nous prenons le temps en particulier de discuter un résultat récent de Kisin jouant un rôle important dans l'argument final, et nous redonnons l'argument de réseau de Ribet prouvant la réciproque du théorème de Herbrand.

Revenons à la preuve du théorème. Les extensions cherchées sont construites à l'aide de la cohomologie étale p-adique de certaines surfaces de Picard. Le point de départ est

[9]D'après [**104**] p.16, $\Lambda(\chi, s) := (2\pi)^{-s-3/2+a/2}\Gamma(s + a + 1/2)L(\chi, s)$. Noter qu'elle a même ordre d'annulation en 0 que $L(\chi, s)$; cet ordre est impair (resp. pair) si $\varepsilon(\chi, 0)$=-1 (resp. 1)

que sous l'hypothèse d'imparité plus haut, les conjectures d'Arthur sur le spectre automorphe discret des groupes réductifs, connues pour $U(3)$ par les travaux de Rogawski, prédisent l'existence d'une représentation automorphe discrète non tempérée, partout minimalement ramifiée, pour le groupe unitaire à 3 variables $U(3)/\mathbb{Q}$ [10] attaché à F, ayant pour représentation galoisienne p-adique associée "à la Langlands"

$$1 \oplus \chi_p \oplus \chi_p(-1)$$

Nous déformons ensuite p-adiquement la forme automorphe obtenue à l'aide des familles p-adiques fournies par le théorème 1 de cette introduction pour le groupe $U(3)/\mathbb{Q}$. Une étude détaillée des déformations possibles nous montre qu'il est possible de considérer une déformation "la plus éloignée possible de la déformation ordinaire" qui est automatiquement génériquement irréductible par un argument de théorie de Hodge en p (III.9.1). Nous utilisons ensuite un argument de réseaux "à la Ribet" ([**4**],[**5**]) pour tirer de cette déformation une extension non triviale de 1 par χ_p. On récupère la période cristalline manquante à cette extension par une version adéquate des travaux de Kisin (III.6.1). Une remarque importante cependant est que l'argument de réseaux ne nous fournit pas automatiquement l'extension que nous cherchons, mais il peut tout aussi bien nous fournir à la place une extension non triviale de 1 par $\mathbb{Q}_p(1)$. Toutefois, en prenant garde à contrôler la ramification à toutes les places dans la famille, ce qui nous oblige à avoir recours à la théorie des types, nous arrivons à assurer que cette extension serait aussi dans le H^1_f. On élimine ainsi cette possibilité, car une telle extension n'existe pas pour un corps imaginaire ($\zeta_F(0) \neq 0$, A.5.1), ce qui conclut.

En ce qui concerne les généralisations de la méthode, ainsi que pour des compléments, nous renvoyons le lecteur à l'introduction du chapitre III.

[10] Il est quasi-déployé exactement aux places finies.

CHAPITRE I

Familles p-adiques de formes automorphes pour $U(n)$

1. Introduction

En 1995, suite à des travaux de Serre, Katz, Dwork, Hida et Gouvea-Mazur, R. Coleman montre que toute forme modulaire propre de niveau $\Gamma_1(p)$ en p fait partie d'une famille p-adique de formes propres. Sa stratégie, développée dans [**30**] et reposant sur [**29**], consiste à mettre en famille analytique les espaces de formes modulaires surconvergentes et d'appliquer à U_p (agissant analytiquement sur cette famille) la théorie spectrale des opérateurs compacts des modules de Banach orthonormalisables, théorie qu'il établit dans [**30**]. Ses idées sont reprises par Coleman-Mazur dans [**33**] pour aboutir à la construction d'une courbe analytique p-adique ("eigencurve") paramétrant les formes modulaires surconvergentes, propres, de pente finie et de niveau modéré fixé. Rappelons que l'existence des familles p-adiques de formes modulaires paraboliques propres ordinaires en p avait été étudiée tout d'abord par Hida, dans des travaux qu'il a par la suite généralisés à une vaste classe de groupes ([**54**]). Hormis le cas du groupe $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$, pour lequel on dispose aussi d'une construction parallèle à celle de Coleman due à Stevens (non publié, cf. [**103**]), la construction des familles p-adiques non ordinaires en est à un stade peu avancé[1] Dans des travaux non publiés ([**20**]), Buzzard a remarqué que la construction des familles dans le cas des algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$ définies était approchable directement, et ce même par des techniques relativement élémentaires. Bien que nous n'employons pas ces dernières dans ce texte, ce sont ces idées qui sont à l'origine de ce travail.

Dans cet article, nous développons une théorie des familles p-adiques de formes automorphes de pente finie quelconque pour des groupes algébriques $G/\mathbb{Q}$ formes tordues de GL_n, sous la seule hypothèse vraiment restrictive de compacité de $G(\mathbb{R})$. Par exemple, si E est un corps quadratique imaginaire, G peut être le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ dont les points à valeurs dans toute $\mathbb{Q}$-algèbre R sont

$$\{g \in \mathrm{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} R), g\bar{g}^t = 1\}$$

Nous construisons de plus, à la manière de Coleman-Mazur, la zone centrale des variétés de Hecke[2] pour ces groupes. Bien que la plupart de nos résultats se généralisent en d'autres places p, nous choisissons un p tel que $G_{\mathbb{Q}_p} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}_p$, qui est à priori le cas le plus important. Le terme "zone centrale" employé ci-dessus signifie que nous nous restreignons à des formes de niveau $\Gamma_1(p)$ en p.

Outre l'intérêt de comprendre comment se généralise le cas elliptique, l'idée initiale était de produire des déformations p-adiques des représentations galoisiennes de dimension n obtenues dans les travaux de Clozel, Kottwitz ([**27**]) puis Harris et Taylor ([**51**]). Les formes automorphes provenant de certains groupes unitaires compacts à l'infini rentrant dans le champs d'application de leurs travaux, ceci justifiait amplement que l'on

[1] Ceci a sensiblement évolué depuis la rédaction de cet article, notamment grâce à des travaux de M.Emerton proposant une approche au cas général (retrouvant en particulier de manière indépendante certains résultats de ce chapitre), et à des travaux de G.Stevens pour $GL(n)$ non tordu utilisant des méthodes semblables à celles de ce texte.

[2] C'est le terme que nous utiliserons pour "eigenvariety", la traduction littérale prêtant à confusion.

s'intéresse à ces derniers. Ce but est accompli au §7.4. Il semble que ces constructions donnent les premiers exemples de déformations p-adiques raffinées non nécessairement ordinaires de représentations galoisiennes en dimension > 2. Une seconde motivation est de donner un cadre pour une théorie des formes automorphes p-adiques en général, en particulier d'en éclaircir les liens avec la théorie des représentations p-adiques des groupes de Lie p-adiques. Bien que ceci soit loin d'être élucidé dans ce texte, nous nous sommes efforcés à montrer comment l'existence des familles dans notre contexte découle, modulo la théorie de Coleman, d'une mise en famille des séries principales p-adiques de l'Iwahori de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et des propriétés élémentaires de cette famille.

L'avantage principal à considérer des groupes G sous l'hypothèse de compacité à l'infini vient de ce que les difficultés de nature géométrique dues aux places archimédiennes sont mises de côté. En effet, les quotients $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$, K un compact maximal de $G(\mathbb{A})$, sont ici finis, et toutes les formes automorphes pour G sont donc cohomologiques en degré 0. Aussi, nous nous ramenons en général essentiellement à travailler au niveau des systèmes de coefficients. Nous espérons cependant que ce travail permettra de guider l'étude des familles de formes cohomologiques de pente finie pour des groupes G plus généraux. Enfin, nos constructions fournissent une grande quantité de variétés de Hecke, entre lesquelles il est tentant de conjecturer l'existence de morphismes rigides-analytiques prolongeant "en famille" divers transferts de la fonctorialité de Langlands, comme la correspondance de Jacquet-Langlands, le carré symétrique etc... Nous espérons revenir sur certains aspects de cette philosophie de Langlands "en familles p-adiques" dans un travail futur (voir le chapitre II à ce sujet).

Plan détaillé de l'article

Soit $G/\mathbb{Q}$ comme plus haut, il est attaché à un corps quadratique imaginaire $E/\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier impair[3] décomposé dans E tel que $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ce qui vaut pour presque tout p décomposé dans E. On fixe de plus une place complexe de E, une place finie divisant p, ainsi qu'un plongement compatible à ces choix

$$i_p : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p,$$

qui nous permettent en particulier de plonger $G(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et d'identifier $G(\mathbb{Q}_p)$ avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Soit $U_0(p) \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert dont la p-composante est le sous-groupe d'Iwahori $\Gamma_0(p)$ des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ triangulaires supérieurs modulo p. Soit

$$\mathbb{Z}^{n,+} := \{t = (t_1 \geq .... \geq t_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

On peut voir ses éléments comme des caractères du tore diagonal de GL_n par

$$\mathrm{diag}(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1^{t_1} ... x_n^{t_n},$$

ce sont les caractères algébriques dominants pour l'ordre usuel. Les représentations automorphes de G ayant toutes de la cohomologie en degré 0, les plongements fixés plus haut

[3]Cette hypothèse n'est faite dans cette introduction que pour simplifier l'exposition.

nous fournissent un modèle sur $\mathbb{Q}_p$ de l'espace des formes automorphes de poids $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$ et de niveau $U_0(p)$: c'est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des fonctions $U_0(p)$-équivariantes sur

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)$$

à valeurs dans la représentation algébrique irréductible de plus haut poids t de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $U_0(p)$ agissant à travers son quotient $\Gamma_0(p)$. C'est un espace de dimension finie par la finitude du nombre de classes, sur lequel opère l'anneau des correspondances de Hecke de $(G(\mathbb{A}_f), U_0(p))$.

Nous sommes intéressés par faire varier ces espaces continûment p-adiquement en fonction de $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$. La méthode employée consiste à déformer p-adiquement les restrictions à $\Gamma_0(p)$ des représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en fonction de leur plus haut poids. Aussi, nous consacrons les sections 2 et 3 à l'étude de certaines représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et $\Gamma_0(p)$. En particulier, la section 2 est un rappel sur un modèle explicite agréable pour les représentations algébriques de GL_n en caractéristique nulle, en terme d'invariants unipotents.

Tout comme dans la théorie de Coleman, l'interpolation se fait en deux temps : tout d'abord on "inclut" chacune de ces représentations dans une représentation de $\Gamma_0(p)$ sur un espace de Banach p-adique de dimension infinie, puis on montre que ces derniers se mettent en une famille analytique orthonormalisable. Ceci est achevé dans la troisième section. L'idée principale est de considérer l'orbite sous $\Gamma_0(p)$ de l'origine de la variété de drapeaux $L\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, L étant le Borel triangulaire inférieur. Elle admet une structure naturelle de $\mathbb{Q}_p$-points d'un affinoide sur $\mathbb{Q}_p$, noté $\mathcal{F}$ au §3.2. Par le théorème de Borel-Weil-Bott, dont nous reprouvons simplement la partie qui nous intéresse au §3.1, chaque représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est réalisée sur les sections globales d'un fibré en droites sur $L\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Or il se trouve que chaque tel fibré se restreint sur $\mathcal{F}$ en un fibré trivial, que l'on trivialise par un vecteur de plus haut poids, et dont les sections rigides sur $\mathcal{F}$ fournissent la représentation de $\Gamma_0(p)$ désirée. Ces représentations ont un espace de Banach sous-jacent fixé, précisément celui $A(\mathcal{F})$ des fonctions analytiques sur $\mathcal{F}$, mais sont tordues par un produit des 1-cocycles fondamentaux de GL_n "élevés à la puissance t". Cela nous permet de réaliser l'interpolation au §3.6, et de définir une famille orthonormale (cf. §3.7) $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_t\}_{t\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)}$ de représentations de $\Gamma_0(p)$ paramétrée par l'espace rigide "des poids analytiques"[4]

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) := \mathrm{Hom}_{gr-an}((\mathbb{Z}_p^*)^n, \mathbb{C}_p^*),$$

qui est l'ensemble des caractères continus du tore diagonal $(\mathbb{Z}_p^*)^n$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ qui sont analytiques restreints à $(1+p\mathbb{Z}_p)^n$. On peut voir $\mathcal{S}$ comme une famille analytique de séries principales de $\Gamma_0(p)$. Par notre choix de considérer la "grosse orbite sous $\Gamma_0(p)$" dans la variété de drapeaux, $\mathcal{S}$ a la propriété de s'étendre en une représentation du sous-monoïde

[4]Nous avons choisi de ne pas considérer à part l'éventuel caractère modéré en p dans cette introduction, ce qui est plus élégant et permet d'alléger les notations. On prendra garde cependant que l'espace noté $\mathcal{W}$ ici est une réunion de $(p-1)^n$ copies de celui du même nom introduit dans le corps du texte (cf. §3.7.2). De même, la famille notée $\mathcal{S}$ ici est la réunion de celles notées $\mathcal{S}_\chi$ dans le texte.

plus gros $\mathbb{M}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendré par $\Gamma_0(p)$ et les opérateurs diagonaux

$$u^a := \mathrm{diag}(p^{a_1}, \cdots, p^{a_n})$$

avec $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \in \mathbb{Z}^n$. Si a_i est strictement croissante, nous montrons alors que u^a agit de manière compacte sur $\mathcal{S}$.

Les constructions précédentes nous permettent alors de définir la famille analytique des espaces de Banach de *formes automorphes p-adique de type* $(G, U_0(p))$ *et de poids dans* $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, notée $\mathcal{S}(G, U_0(p)) = \{\mathcal{S}_t(G, U_0(p))\}_{t\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)}$, en considérant l'espace des fonctions $U_0(p)$-équivariantes de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)$ à valeurs dans $\mathcal{S}$. Cette famille admet une action de toute l'algèbre de Hecke globale de $U_0(p)$ hors de p, et en p de la sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke-Iwahori constituée des éléments à support dans $\mathbb{M}$. Si $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$, vu comme élément de $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $\mathcal{S}_t(G, U_0(p))$ contient alors comme sous-Hecke-module le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel de dimension finie

$$\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl}$$

des formes automorphes de G de poids t, de niveau $U_0(p)$ et d'un certain caractère modéré en p. On pose

$$U_p := [U_0(p)\mathrm{diag}(1, p, p^2, ..., p^{n-1})U_0(p)],$$

c'est un endomorphisme $\mathcal{W}$-linéaire compact de $\mathcal{S}(G, U_0(p))$. Un élément de $\mathcal{S}_t(G, U_0(p))$ sera dit de *pente finie* α s'il est dans le plus grand sous-espace de dimension finie

$$\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{\alpha}$$

sur lequel U_p n'a que des valeurs propres de valuation α. Un résultat important, bien qu'élémentaire dans notre cas, est la généralisation suivante du résultat principal de [**29**]. Si $t = (t_1 \geq ... \geq t_n) \in \mathbb{Z}^{n,+}$, on pose $\mathrm{Min}(t) := \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(t_i - t_{i+1})$ (cf. prop. 4.8) :

Théorème A : *Soient* $t \in \mathbb{Z}^{n,+}$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}^+$,

$$\textit{si} \quad \mathrm{Min}(t) > \alpha - 1, \ \ \textit{alors} \ \ \mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{\alpha} \subset \mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl}$$

En cinquième section, on étudie en détail la série caractéristique de U_p agissant sur $\mathcal{S}(G, U_0(p))$, donnée par la section 4 et la théorie de Coleman dans [**30**]. Le résultat principal de cette section est le (cf. cor. 5.2)

Théorème B : *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}^+$*, il existe* A *et* B *deux constantes explicites ne dépendant que de* n *telles que si*

$$h = |G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/U_0(p)| \ \textit{ et } m(\alpha) = [h\alpha(A\alpha + B)^{2^n - n - 1}]$$

alors pour tous t, $t' \in \mathbb{Z}^{n,+}$ *tels que* $\mathrm{Min}(t)$, $\mathrm{Min}(t')> \alpha - 1$, si $t \equiv t' \bmod p^{m(\alpha)}$, alors

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_t(G, U_0(p))^{cl,\alpha}) = \dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{t'}(G, U_0(p))^{cl,\alpha})$$

Notons que cet énoncé concerne les formes automorphes "classiques" pour G, il ne fait pas intervenir dans sa formulation les constructions précédentes. Il s'agit d'une version quantitative faible de la conjecture de Gouvêa-Mazur ([**49**] conjecture 1) généralisée à nos groupes G. Les bornes ci-dessus sont analogues à celles obtenues par [**109**] dans le cas des formes modulaires elliptiques, pour lequel la dépendance de $m(\alpha)$ en α est quadratique, ce que l'on retrouve quand $n = 2$ (cas qu'avait déjà retrouvé Buzzard dans [**20**]). La preuve de ce théorème suit essentiellement l'approche de Wan dans [**109**].

La sixième partie consiste en la construction des familles. Soient

$$P(T) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$$

la série de Fredholm de U_p agissant sur $\mathcal{S}(G, U_0(p))$, $Z \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$ l'hypersurface de Fredholm définie par $P(T) = 0$, et

$$pr_1 : Z \longrightarrow \mathcal{W}, \quad pr_2 : Z \longrightarrow \mathbb{A}^1_{rig},$$

les deux projections canoniques. Le résultat suivant (cf. thm. 6.2, prop. 6.7 et prop. 6.8) est une généralisation à nos groupes des constructions de Coleman-Mazur dans [**33**]. Dans ce qui suit, l'anneau $\mathcal{H}$ est un sous-anneau commutatif de l'algèbre de Hecke globale dont la p-composante est le sous-anneau de l'algèbre de Hecke-Iwahori des éléments à support dans $\mathbb{M}$.

Théorème C : *Il existe un espace analytique rigide $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G, U_0(p), \mathcal{H})$ muni d'un morphisme d'anneaux*

$$a : \mathcal{H} \longrightarrow A(\mathcal{D})^0,$$

ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[drr, "\mathbf{U}_p^{-1}"] \arrow[dd, "\kappa"'] & & \\
& Z \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \mathbb{A}^1_{rig} \\
\mathcal{W} & &
\end{tikzcd}$$

ayant les propriétés suivantes :

i) *π est un morphisme fini,*
ii) *$\mathbf{U}_p := a(U_p)$ est inversible sur $\mathcal{D}$,*
iii) *Pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$, il existe un voisinage ouvert affinoide Ω de x tel que :*
   (a) $z \mapsto |a(U_p)(z)|$ est constante sur $\Omega(\mathbb{C}_p)$,
   (b) $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$,
   (c) $\kappa : \Omega \to \kappa(\Omega)$ est fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de Ω,
iv) *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{C}_p) \to \mathrm{Hom}_{ann}(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p), \;\; x \mapsto (\chi_x : h \mapsto a(h)(x)),$$

induit pour chaque $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ une bijection entre les points $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ tels que $\kappa(x) = t$ et les systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}$ agissant sur l'espace des formes automorphes p-adiques de poids $\kappa(x)$ et de pente finie, ces derniers étant comptés sans multiplicité.
v) *$\mathcal{D}$ est emboîté*[5] *et équidimensionnel de dimension n. Chacune de ses composantes irréductibles s'envoie par π de manière finie et surjective sur une composante irréductible*

[5]"nested" dans la terminologie de [**33**], §1.1.

de Z (qui est une hypersurface de Fredholm), et son image par κ est un ouvert Zariski de $\mathcal{W}$.
vi) *L'anneau $a(\mathcal{H})$ est d'adhérence compacte dans $A(\mathcal{D})^0$.*

Un point $x \in \mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ est dit classique si χ_x est le système de valeurs propres d'un élément de $\mathcal{S}_{\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$.
vii) *Les points classiques sont Zariski-denses dans $\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$.*

Dans la dernière section, nous appliquons ces résultats à certains groupes unitaires pour lesquels on sait associer, par les travaux de Clozel, Kottwitz, Harris-Taylor, des représentations galoisiennes de dimension n compatibles à la correspondance de Langlands locale. Le groupe unitaire G doit être pour ceci celui d'une algèbre à division D/E munie d'une involution de seconde espèce, D étant à division partout où elle est ramifiée, et ceci n'arrivant qu'en des places totalement décomposées de $E/\mathbb{Q}$. On fait bien sûr toujours l'hypothèse de compacité à l'infini afin d'utiliser les constructions précédentes, et l'on fixe un tel groupe $G/\mathbb{Q}$. Soient S l'ensemble fini des places v de E au-dessous desquelles G est ramifié ou bien divisant le niveau $U_0(p)$, $G_{E,S}$ le groupe de Galois d'une extension algébrique maximale de E non ramifiée hors de S, et pour $v \notin S$ un représentant $F_v \in G_{E,S}$ du Frobenius géométrique en v. On choisit l'algèbre de Hecke globale $\mathcal{H}$ contenant l'algèbre de Hecke globale hors de S et toujours les doubles classes de $\mathbb{M}$ en p. À chaque forme automorphe $f \neq 0$ de G, propre, de niveau $U_0(p)$, il est connu qu'il existe une unique représentation semi-simple continue

$$\rho(f) : G_{E,S} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

telle que

$$\forall v \notin S, \;\; \mathrm{tr}(\rho(f)(F_v)).f = T_v(f), \tag{1}$$

$T_v \in \mathcal{H}$ étant un opérateur de Hecke déterminé par la correspondance de Langlands non ramifiée, indépendant de f. La trace de $\rho(f)$ fournit un pseudo-caractère continu de Taylor de dimension n :

$$t(f) : G_{E,S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

Soit $\mathbf{D}$ la nilréduction de l'espace $\mathcal{D}(G, U_0(p), \mathcal{H})$, alors (cf. cor. 7.3) :

Théorème D : *Il existe un unique pseudo-caractère continu $t : G_{E,S} \to A(\mathbf{D})$ de dimension n, dont l'évaluation en tout $x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p)$ classique coïncide avec $t(f_x)$, où $f_x \neq 0$ est une forme propre classique de type $(G, U_0(p))$ associée à x par le théorème C.*

Ainsi, si $x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p)$ et $f_x \neq 0$ est une forme propre pour le système de valeurs propres associé à x par le théorème C, non nécessairement classique, on dispose d'un pseudo-caractère continu $t(f_x) : G_{E,S} \to \mathbb{C}_p$, tel que si $v \notin S$, $t(f_x)(F_v)f_x = T_v(f_x)$. Par un résultat de Taylor, ce pseudo-caractère est la trace d'une unique représentation semi-simple continue $\rho(x) : G_{E,S} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$. En particulier, nous avons associé à chaque forme automorphe p-adique propre de pente finie de G une représentation galoisienne p-adique de $G_{E,S}$ continue, semi-simple, de dimension n, satisfaisant (1). On montre alors

que
$$\{x \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_p),\ \rho(x) \text{ est irréductible}\}$$
est l'ensemble des $\mathbb{C}_p$-points d'un ouvert Zariski $\mathbf{D}_{irr}$ de $\mathbf{D}$, puis le (cf. cor. 7.5) :

Théorème E : *Il existe une unique algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{D}_{irr}$ munie d'une représentation continue $G_{E,S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$, dont l'évaluation en tout point classique de $\mathbf{D}_{irr}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ de la représentation galoisienne associée à ce point par Clozel, Kottwitz, et Harris-Taylor.*

Enfin, nous discutons en §7.5 de certaines hypothèses formulées par Mazur dans [**73**] sur la variation p-adique de représentations cristallines. Précisément, à chaque point classique x *ancien en* p de $\mathbf{D}$ (les tels points sont Zariski-denses), nous attachons un raffinement "canonique" au p-motif attaché à x, qui est un ordre sur les racines du Frobenius cristallin ainsi qu'un polynôme-U, qui varie analytiquement en x. De plus, nous comparons la notion naturelle de "non criticité" pour les p-motifs classiques apparaissant dans notre étude avec celle proposée par Mazur *loc.cit.*, la notre s'avère plus restrictive.

Généralisations

Il serait intéressant d'avoir une version du théorème C pour des groupes réductifs G/F plus généraux et leurs formes automorphes cohomologiques en degré donné, F étant un corps de nombres, et en une place p quelconque. Les constructions de ce texte permettent de définir en une place p quelconque l'espace des formes automorphes p-adiques pour nos groupes G (il suffit de plonger $G(\mathbb{Q}_p)$ dans un $\mathrm{GL}_n(k)$ avec k local assez grand). La construction des familles de pente finie dépend alors de l'existence de certains opérateurs compacts agissant sur les espaces de formes p-adiques. Les candidats naturels pour ces opérateurs peuvent ne pas exister (par exemple si $G_{\mathbb{Q}_p}$ est anisotrope), ou alors être compacts seulement dans certaines directions de $\mathcal{W}$ ce qui donnerait quelques variantes. En général nous pourrions donc construire des variétés de Hecke en de tels p, mais de dimension éventuellement inférieure.

Dans un travail futur avec Buzzard, nous étendrons les résultats de ce chapitre aux formes partout compactes à l'infini de GL_n sur un corps totalement réel, en des places quelconques, et nous construirons toute la variété de Hecke *i.e.* sur l'espace global des poids (nous nous sommes restreints au centre de l'espace des poids dans ce texte). Notons que Buzzard a déjà construit cette version forte de la variété de Hecke dans le cas des algèbres de quaternions définies, et ce sur un corps totalement réel.

Remerciements : Je tiens à exprimer ma gratitude à Michael Harris, qui m'a encouragé à travailler sur ce problème, pour les nombreuses discussions éclairantes et stimulantes qui ont accompagné ce projet. Je remercie de plus Kevin Buzzard, dont les travaux sont à l'origine de cet article, Brian Conrad, Guy Henniart, ainsi que les membres du LAGA de Paris 13, en particulier Ahmed Abbès, pour les enrichissantes conversations que j'ai pu avoir avec eux. Enfin, je remercie le référé, dont les remarques ont permis d'améliorer la qualité du texte.

Notations et conventions :

Une action d'un groupe sur en ensemble sera toujours sous-entendue "à gauche". Si V est un groupe abélien muni d'une norme ultramétrique, V^0 désigne le sous-groupe des éléments de norme ≤ 1. Si p est un nombre premier, on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour la norme usuelle, normalisée par $|p| = 1/p$. On désigne par $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} := \mathbb{C}_p^0$. Si K est un corps local, on note $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{m}_K$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$. Si E est un corps de nombres, $\mathbb{A}_E$ (resp. $\mathbb{A}_{E,f}$, resp. $\mathbb{A}_{E,f}^p$) désignera l'anneau des adèles de E (resp. adèles finis, resp. adèles finis hors de p), et on omettra le E quand $E = \mathbb{Q}$. Enfin, si X est un schéma ou un espace rigide, on notera $A(X)$ l'anneau des fonctions globales sur X.

2. Modèles pour les représentations algébriques de GL_n

Soient k un anneau commutatif, N le sous-groupe des unipotents supérieurs de $\mathrm{GL}_n(k)$, $\overline{N}$ celui des unipotents inférieurs, et $R := k[\mathrm{GL}_n] = k[\{X_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}, \det(X_{i,j})^{-1}]$ l'algèbre des polynômes à n^2 variables $X_{i,j}$, vue[6] comme algèbre des fonctions algébriques sur GL_n/k. La multiplication de GL_n/k induit une action[7] de $\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ sur GL_n/k, puis sur R par automorphismes de k-algèbres. Soit $M := (X_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(R)$, $g \in \mathrm{GL}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(R)$, les actions de g par multiplication à gauche et à droite, que l'on note respectivement g_l et g_r, se calculent par les formules :

$$g^{-1}M = (g_l.X_{i,j})_{i,j}, \;\; Mg = (g_r.X_{i,j})_{i,j} \tag{2}$$

Il est clair que ces deux actions commutent.

2.1. Les invariants $Y_{i,j}$ des unipotents inférieurs.

On s'intéresse à la représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$ agissant par multiplication à droite sur la sous-k-algèbre de R fixée à gauche par $\overline{N}$, que l'on note $R^{\overline{N}}$. On commence par exhiber des éléments de $R^{\overline{N}}$, qui s'avèreront être des générateurs. Notons que les fonctions $X_{1,j}$ sont invariantes, cette simple remarque nous en fournit plein d'autres de la manière suivante.

Observation : Si A est un anneau commutatif, pour tout couple d'entiers i et n avec $1 \leq i \leq n$, on dispose d'une représentation fonctorielle en A, $\mathrm{GL}(A^n) \to \mathrm{GL}(\Lambda^i(A^n))$. Si $e_1, ..., e_n$ est la base canonique de A^n, on choisit pour base de $\Lambda^i(A^n)$ les $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_i}$ avec $j_1 < j_2 < ... < j_i$, ordonnés par l'ordre lexicographique sur le i-uple $(j_1, ..., j_i)$. Cette base fournit un morphisme $\rho_i : \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_{\binom{n}{i}}(A)$. Il est immédiat que ρ_i a la propriété d'envoyer les unipotents supérieurs (resp. inférieurs) de $\mathrm{GL}_n(A)$ dans ceux de $\mathrm{GL}_{\binom{n}{i}}(A)$. $\square$

Prenons $A := R$, et appliquons ρ_i à l'identité (2). Nous voyons que $\overline{N}$ est envoyé dans les unipotents inférieurs de $\mathrm{GL}_{d(i,n)}(R)$, et par conséquent qu'il fixe par multiplication à gauche la première ligne de $\rho_i(M)$. Notons $Y_{i,j}$ le coefficient de $\rho_i(M)$ qui se trouve à la première ligne et à la j^{ieme} colonne. Manifestement, à i fixé, les $Y_{i,j}$ sont les mineurs d'ordre i de M formés sur les i premières lignes de M. En particulier, $Y_{1,j} = X_{1,j}$ et $Y_{n,1} = \det(M)$. Par construction, pour i fixé, j est l'indice du j^{eme} i-uple $(j_1 < j_2 <$

[6] Si $n \in \mathrm{M}_n(k)$, $n_{i,j} := X_{i,j}(n)$ est le coefficient sur la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne. On notera $n = (n_{i,j})_{i,j}$.

[7] Dans cet article, "action" de groupe signifiera toujours "action à gauche".

... $< j_i$) dans l'ordre total lexicographique de ces derniers. Pour chaque i, on notera $J(i) := \binom{n}{i}$, c'est le plus grand entier j indice du dernier $Y_{i,j}$.

2.2. L'anneau des représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(k)$. On suppose dorénavant que k est un corps de caractéristique 0. Soit T le tore diagonal de $\mathrm{GL}_n(k)$, T normalise $\overline{N}$ et agit par conséquent à gauche sur $R^{\overline{N}}$.

Si $t = [t_1, ..., t_n] \in \mathbb{Z}^n$, t désignera le poids (caractère) $T \to k^*$ défini par

$$t(\mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)) := \prod_{i=1}^{n} d_i^{t_i}$$

On pose $t_i := [0, .., 1, .., 0]$ où le 1 est à la ième place, notons que si $d \in T$, $d_l.X_{i,j} = t_i^{-1}(d)X_{i,j}$ et $d_r.X_{i,j} = t_j(d)X_{i,j}$. Par conséquent, si j correspond à $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$:

$$d_l.Y_{i,j} = \ \left(\textstyle\prod_{1\leq k\leq i} \ t_i(d)\right)^{-1} Y_{i,j} \tag{3}$$

$$d_r.Y_{i,j} = \left(\prod_{1\leq k\leq i} t_{j_k}(d)\right)Y_{i,j} \qquad \text{et} \qquad d_r.Y_{i,1} = \left(\prod_{1\leq k\leq i} t_i(d)\right)Y_{i,1} \tag{4}$$

Si t est un caractère comme plus haut, $f \in R$ sera dit de poids t à gauche (resp. à droite) si T agit à gauche (resp. à droite) sur $k.f$ par t^{-1} (resp. t). Notons que l'action de T à gauche sur R se diagonalise : $R = \bigoplus_t R_t$, R_t étant le k-vectoriel de dimension finie des éléments de poids t à gauche. De même, T normalisant $\overline{N}$,

$$R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}^n} R_t^{\overline{N}}$$

Cette décomposition commute à l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ par multiplication à droite, ce qui nous fournit des représentations algébriques $R_t^{\overline{N}}$ de $\mathrm{GL}_n(k)$ de dimension finie.

Un poids $t = [t_1, ..., t_n]$ sera dit positif si la suite des t_i est décroissante, on notera $t \geq 0$. L'ordre induit sur les poids est aussi celui donné par N. On a alors la

PROPOSITION 2.1. *On a $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t\geq 0} R_t^{\overline{N}}$. De plus, si $t \geq 0$, $R_t^{\overline{N}}$ est la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n(k)$ de plus haut poids t. Elle est k-engendrée par les monômes en les $Y_{i,j}$ de poids (à gauche) t, le monôme en les $Y_{i,1}$ étant un vecteur de plus haut poids t (à droite).*

Preuve : Un théorème classique ([**46**] §12.1.4) affirme que $R^{\overline{N}}$ est somme directe avec multiplicité 1 de toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(k)$, la sous-représentation de plus haut poids $t \geq 0$ étant le sous-espace de poids t à gauche. Cela implique les deux premières affirmations de l'énoncé. Soit $t \geq 0$, le k-espace vectoriel engendré par les monômes en les $Y_{i,j}$ de poids t à gauche est non vide par la formule (3). Il est stable par l'action à droite de $\mathrm{GL}_n(k)$, car pour chaque i, $\sum_j kY_{i,j}$ est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$. C'est donc $R_t^{\overline{N}}$ tout entier par l'assertion d'irréductibilité. Notons que dans cette représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$ (donc pour l'action à droite), $\prod_{i=1}^{n-1} Y_{i,1}^{t_i - t_{i+1}} Y_{n,1}^{t_n}$ est un vecteur de poids t, et que tous les autres monômes sont de poids inférieurs (voir les formules (4)), c'est donc un vecteur de plus haut poids.□

2.3. Reparamétrisation du poids. Il est clair que $R^{\overline{N}}_t.R^{\overline{N}}_{t'} \subset R^{\overline{N}}_{t+t'}$, ce qui fait de $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{t\geq 0} R^{\overline{N}}_t$ une k-algèbre graduée par les poids positifs. Pour la majeure partie de ce que nous avons en vue, le cas du déterminant $Y_{n,1}$ est un peu à part, nous l'écartons donc pour l'instant. Par la proposition 2.1, $R^{\overline{N}} = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} Y^r_{n,1}(\oplus_{t'} R^{\overline{N}}_{t'})$ où les $t' = [t'_1, ..., t'_n]$ sont positifs tels que $t'_n = 0$. On va donc regarder la sous-k-algèbre S de $R^{\overline{N}}$ définie par

$$S := \bigoplus_{t'} R^{\overline{N}}_{t'},\ \text{la somme étant sur les } t' = [t'_1, ..., t'_n] \text{ positifs tels que } t'_n = 0$$

S est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$ et y apparaissent toutes les représentations algébriques de $\mathrm{GL}_n(k)$ dont le plus haut poids a sa coordonnée t_n fixée à 0. De plus, S est clairement une k-algèbre de type fini, engendrée par les $Y_{i,j}$ avec $i < n$, intègre car R l'est.

Par commodité, on change de paramétrisation pour les poids, on se place dans les coordonnées des poids fondamentaux : au n-uple $[t_1, ..., t_{n-1}, 0]$, on associe le $(n-1)-$*uple* $(m_1, ..., m_{n-1})$ défini par $m_1 := t_1 - t_2$, $m_2 := t_2 - t_3$,..., $m_{n-2} := t_{n-2} - t_{n-1}$ et $m_{n-1} := t_{n-1}$. La condition de positivité du poids dans les premières coordonnées se traduit par $m_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$. On note δ_i le poids $(0, ..., 1, ..., 0)$ où le i est sur la ième case. Dans ces coordonnées, chaque $Y_{i,j}$ est de poids (à gauche) δ_i, ce qui est pratique.

Exemples : - Pour $n = 2$, on pose $X = X_{1,1}$, $Y = X_{1,2}$, alors $S = k[X, Y] = \oplus_{m\geq 0} S_m$ où S_m est l'espace des polynômes homogènes de degré m en X, Y, vu comme représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(k)$, un vecteur de plus haut poids étant X^m.

- Pour $n = 3$, on pose $(X, Y, Z) = (X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3})$ et $(U, V, W) = (Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3})$, alors S est la sous-k-algèbre de R engendrée par X, Y, Z, U, V et W. On pourrait montrer que c'est l'algèbre des polynômes sur ces variables avec pour unique relation $XW - YV + ZU = 0$. On a $S = \bigoplus_{m_1,m_2\geq 0} S_{m_1,m_2}$, S_{m_1,m_2} étant la représentation irréductible de plus haut poids $(m_1, m_2, 0)$. Explicitement, elle est engendrée par les monômes du type M_1M_2 où M_1 (resp. M_2) est un monôme en X, Y, Z (resp. U, V, W) de degré m_1 (resp. m_2). Un vecteur de plus haut poids est $X^{m_1}U^{m_2}$.

À partir d'ici, on ne considérera plus que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur S par multiplication à droite, soulignons que c'est une action à gauche de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur S. On écrira $(g, f) \mapsto g(f)$ cette action, au lieu de $g_r.f$. Un élément de S sera dit de poids t s'il est dans S_t.

2.4. L'anneau Sym($\Lambda(V)$). On exploite dans ce paragraphe que $\mathbb{N}^{n-1}$ est engendré pour l'addition par les "poids fondamentaux" δ_i.

On pose $V := k^n$ la représentation standard de $\mathrm{GL}_n(k)$, avec sa base canonique. Soit $1 \leq i \leq n-1$ fixé, comme dans l'observation 2.1, $\Lambda^i(V)$ a une base canonique ordonnée que l'on note $(Z_{i,j})_{1\leq j\leq J(i)}$. On rappelle que l'ordre est l'ordre total lexicographique sur les i-uples $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$, renumérotés par $j \in \{1, \ldots, J(i)\}$. Par construction, $S_{\delta_i} = \sum_{j=1}^{J(i)} k.Y_{i,j}$ est isomorphe à $\Lambda^i(V)$, via $Y_{i,j} \to Z_{i,j}$, en tant que représentation de $\mathrm{GL}_n(k)$. C'est la représentation irréductible de plus haut poids δ_i. On en déduit un morphisme équivariant à l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$,

$$\varphi : B := \mathrm{Sym}(\oplus_{i=1}^{n-1}(\Lambda^i(V))) \longrightarrow S$$

L'image de φ est une sous-k-algèbre de S contenant les $Y_{i,j}$ $(i < n)$, c'est donc S tout entier par la proposition 2.1. Notons que $B = k[Z_{i,j}]$ a une graduation canonique par le poids $\mathbb{N}^{n-1}$ compatible via φ à celle de S, $B = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}^{n-1}} B_t$. On note J le noyau de φ, il est stable par $\mathrm{GL}_n(k)$ par ce que l'on vient de dire.

Remarques : - φ est un isomorphisme si et seulement si $n = 2$,

- I est engendré par des quadriques en les $Z_{i,j}$, les relations de Plücker (cf [**108**]),

- On ne sait pas en général donner une B-résolution de J en terme des représentations de GL_n.

2.5. Intégralité et opérateurs U. À partir de là, on fixe un nombre premier p, et $k := \mathbb{Q}_p$. On note $\Gamma_0(p)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ composé des éléments triangulaires supérieurs modulo p. Pour chaque suite croissante positive d'entiers $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n)$, on considère

$$u^a := \mathrm{diag}(p^{a_1}, ..., p^{a_n}), \text{ et } \mathbb{T}^a := \Gamma_0(p) u^a \Gamma_0(p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$$

On pose aussi $u := \mathrm{diag}(1, p, p^2, ..., p^{n-1}) = u^{(0,1,...,n-1)}$, $\mathbb{T} := \mathbb{T}^{(0,1,...,n-1)}$ et $\mathbb{M}$ le sous-monoïde de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendré par les éléments de tous les $\mathbb{T}^a$. Il est connu (cf. par exemple [**89**], preuve du lemme 10 §4) que

$$\mathbb{T}^a \mathbb{T}^{a'} = \mathbb{T}^{a+a'}, \text{ et } \mathbb{T}^a \cap \mathbb{T}^{a'} = \emptyset \text{ si } a \neq a' \tag{5}$$

En particulier, $\mathbb{M}$ est la réunion disjointe des $\mathbb{T}^a$, et coïncide avec le sous-ensemble $\Gamma_0(p) U \Gamma_0(p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$, où U est l'ensemble des u^a.

Le lemme ci-dessous précise l'action de $\Gamma_0(p)$ et des u^a sur les $Z_{i,j}$ (et donc sur B). Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $\beta_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$. On fixe un $\gamma \in \Gamma_0(p)$:

LEMME 2.1. – *Pour tout i, $\gamma(Z_{i,1}) \in \mathbb{Z}_p^* Z_{i,1} + p \sum_k \mathbb{Z}_p Z_{i,k}$, et si $1 \leq j \leq J(i)$, $\gamma(Z_{i,j}) \in (\sum_k \mathbb{Z}_p Z_{i,k})$*

– *Pour tout i et $1 \leq j \leq J(i)$, j correspondant au i-uple $(j_1 < j_2 < \cdots < j_i)$, $u^a(Z_{i,j}) = p^{\sum_k a_{j_k}} Z_{i,j}$,*

– *En particulier, $u^a(Z_{i,j}) \in p^{\beta_i} \mathbb{Z}_p Z_{i,j}$, $u(Z_{i,j}) \in p^{i(i-1)/2} \mathbb{Z}_p Z_{i,j}$.*

Preuve : Il faut comprendre l'action de $\Gamma_0(p)$ et des u^a sur $\Lambda^i(R^n)$ comme en 2.1. Les éléments de $\Gamma_0(p)$ s'envoient dans le $\Gamma_0(p)$ correspondant, par l'observation 2.1 (avec $A = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X_{i,j}]$), d'où les deux assertions sur γ. Il reste à voir ce que devient la diagonale u^a. Sur le vecteur $e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_i}$ $(1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq J(i))$, c'est la multiplication par $p^{a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_i}}$, qui est toujours divisible par p^{β_i}. Il y a égalité uniquement pour le premier coefficient. Notons que si $a = (0, 1, ..., n-1)$, $\beta_i = i(i-1)/2$. □

3. Famille analytique des représentations de $\Gamma_0(p)$

3.1. Variété de drapeaux. On a défini en 2.4 l'anneau

$$B = \mathrm{Sym}(\oplus_{i=1}^{n-1}(\Lambda^i(\mathbb{Q}_p^n))) = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sym}(\Lambda^i(\mathbb{Q}_p^n)),$$

qui est l'anneau des coordonnées multihomogènes sur $X := \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}^{J(i)-1}_{/\mathbb{Q}_p}$. Pour chaque $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathbb{P}^{J(i)-1}_{/\mathbb{Q}_p}$ a un système de coordonnées homogènes privilégié, qui est

$$(Z_{i,1} : \cdots : Z_{i,J(i)})$$

Soit J l'idéal multihomogène noyau du morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\varphi : B \to S$ défini en 2.4 ; on note $\widetilde{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux sur X associé à J. On définit F comme étant le sous-schéma fermé de X associé à $\widetilde{J}$ et $i : F \hookrightarrow X$ l'immersion fermée sous-jacente. L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur B induit une opération de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur X par $\mathbb{Q}_p$-automorphismes, qui préserve F car φ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-équivariant.

Par la proposition 2.1, on sait que $S_{(m_1,...,m_{n-1})}$, la partie $(m_1, ..., m_{n-1})$-homogène de S, est la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $(m_1, ..., m_{n-1})$. Soit le faisceau inversible sur X défini par

$$\mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1}) := pr_1^*(\mathcal{O}(m_1)) \otimes \cdots \otimes pr_{n-1}^*(\mathcal{O}(m_{n-1}))$$

où $pr_i : X \to \mathbb{P}(\Lambda^i(V)^*)$ est la projection canonique,

$$\mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}) := i^*(\mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1}))$$

On a alors le :

Lemme 3.1. *L'application canonique*

$$S_{(m_1,...,m_{n-1})} \to H^0(F, \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}))$$

est un isomorphisme.

Preuve : Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ un $n-1$-uple d'entiers tels que $1 \leq \alpha_i \leq J(i)$, on note $Z_\alpha := \prod_{i=1}^{n-1} X_{i,\alpha_i}$, et U_α l'ouvert affine de X défini par $Z_\alpha \neq 0$: les U_α recouvrent X. L'anneau de fractions $S_{\varphi(Z_\alpha)}$ est naturellement gradué par $\mathbb{Z}^{n-1}$ et si $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, l'application canonique :

$$A_{\alpha,t} := \{x \in S_{\varphi(Z_\alpha)}, \deg(x) = t\} \longrightarrow H^0(F \cap U_\alpha, \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1}))$$

est par construction un isomorphisme k-linéaire. Comme S est intègre et $Y_{i,j} = \varphi(Z_{i,j})$ est non nul, l'anneau $S_{\varphi(Z_\alpha)}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau gradué de l'anneau de fractions $S_{\prod_{i,j} Y_{i,j}}$. Notons que chaque $Y_{i,j}$ engendre un idéal premier de S. En effet, c'est un résultat classique que le mineur $Y_{i,j}$ est un irréductible de l'anneau factoriel R, $Y_{i,j}R$ est donc premier dans R. Comme $Y_{i,j}$ est un invariant de $\overline{N}$, il vient que $(Y_{i,j}R) \cap S = Y_{i,j}S$, ce qui conclut. De plus, les $Y_{i,j}S$ sont deux à deux distincts. On en déduit immédiatement que l'intersection des $A_{\alpha,t}$ dans $S_{\prod_{i,j} Y_{i,j}}$ est exactement S_t, ce que l'on voulait. $\square$

Remarques :

- Discutons rapidement du lien avec la variété de drapeaux classique, bien qu'il ne nous sera pas utile pour la suite. Le quotient $\overline{N}\backslash\mathrm{SL_n}$ (qui n'est jamais affine) est un ouvert de $\mathrm{Spec}(S)$. Précisément, c'est l'ouvert sur lequel $T \simeq (\mathbb{G}_m^*)^{n-1}$ agit librement par translation à gauche, ce qui identifie, si $\overline{P}$ désigne le Borel inférieur standard de $\mathrm{SL_n}$, $\overline{P}\backslash\mathrm{SL_n}$ avec F. L'immersion i est alors la composée de $F \simeq \overline{P}\backslash\mathrm{SL_n}$

avec le *plongement canonique de Plücker*, et S l'anneau des coordonnées homogènes de $i(F)$ dans le produit de projectifs en question.

- Le lemme 3.1 est aussi une conséquence du théorème de Borel-Weil-Bott, il a pour unique avantage sur ce dernier de faire le lien avec la théorie des invariants, et en particulier de fournir un modèle explicite.
- L'anneau S est un anneau factoriel. En effet, soient $D = \prod_{i=1}^{n-1} Y_{i,1}$, W l'ouvert de GL_n/k défini par $D \neq 0$, P le Borel supérieur de GL_n/k, $\overline{N}$ le sous-groupe des unipotents inférieurs. Par la "décomposition Lower-Upper", la multiplication de GL_n/k induit un isomorphisme fonctoriel en A, une k-algèbre, et équivariant pour l'action à gauche de $\overline{N}(A)$ (on prend celle évidente sur $\overline{N} \times P$) :
$$\overline{N}(A) \times P(A) \longrightarrow W(A)$$
On a donc un isomorphisme sur k (en fait sur $\mathbb{Z}$) de W avec $\overline{N} \times P$. Ainsi, $S_{1/D} \simeq k[P \cap SL_n]$, et cette dernière est clairement factorielle (de dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$). Par un critère de Nagata, la factorialité de S suit si l'on voit que chaque $Y_{i,1}$ engendre un idéal premier dans S. Ceci est clair (et a déjà été utilisé dans la preuve de 3.1) car ils sont irréductibles dans l'anneau factoriel R, et $(Y_{i,1}R) \cap S = Y_{i,1}S$. On rappelle le critère de Nagata : "Soient A un anneau intègre noethérien, $f \in A$ tel que fA est premier, alors A_f est factoriel si et seulement si A l'est".

3.2. Analytification. Si Z est un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}_p$, on note Z^{an} le $\mathbb{Q}_p$-espace rigide associé. On se place sur l'ouvert affine Ω de X défini par $Z_{i,1} \neq 0$, $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$. Si $1 < j \leq J(i)$, on pose $z_{i,j} = Z_{i,j}/Z_{i,1}$, ce sont des coordonnées sur Ω identifiant ce dernier à $\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{J(i)-1}$. Soit $I := H^0(\Omega, \widetilde{J})$, c'est donc l'idéal définissant $F \cap \Omega$ dans Ω. L'image des $z_{i,j}$ dans $A(\Omega)/IA(\Omega) = A(F \cap \Omega)$ sera notée $y_{i,j}$. On regarde le sous-domaine affinoide $\mathcal{B}$ de $\Omega^{an} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{rig,\mathbb{Q}_p}^{J(i)-1}$ défini par $|z_{i,j}| \leq 1$. L'algèbre affinoide $A(\mathcal{B}) = \mathbb{Q}_p\langle z_{i,j}\rangle$ est munie de sa norme sup. $|.|$ (qui est aussi la norme de Gauss), et a une structure entière canonique qui est $A^0(\mathcal{B}) = \mathbb{Z}_p\langle z_{i,j}\rangle$. On pose $\mathcal{F} := \mathcal{B} \cap F^{an}$, $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{B})/IA(\mathcal{B})$, *on le munit de la norme quotient de* $A(\mathcal{B})$. Notons que le point e de coordonnées $y_{i,j} = 0$ est dans $\mathcal{F}$. L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur X^{an} préserve F^{an}, de plus :

LEMME 3.2. *La restriction à $\Gamma_0(p)$ de cette opération préserve $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, et l'action induite sur $A(\mathcal{B})$ (resp. $A(\mathcal{F})$) préserve $A^0(\mathcal{B})$ (resp. $A^0(\mathcal{F})$).*

Preuve : Explicitons l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur $X(\mathbb{C}_p)$. Elle est définie par
$$\forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), x \in X(\mathbb{C}_p), f \text{ une fonction rationnelle sur } X, f(x\gamma) = \gamma(f)(x)$$
On se place sur le i-ème facteur projectif, les coordonnées homogènes sont $(Z_{i,1} : \cdots : Z_{i,J(i)})$, et $\gamma \in \Gamma_0(p)$ agit sur les $Z_{i,j}$ (lemme 2.1) par
$$\gamma(Z_{i,j}) = \sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,j,k} Z_{i,k},$$
Où $a_{i,j,1}, \cdots, a_{i,j,k}, \cdots, a_{i,j,J(i)}$ sont dans $\mathbb{Z}_p$ avec $a_{i,1,k} \in p\mathbb{Z}_p$ si $1 < k \leq J(i)$ et $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Soit x dans $\mathcal{B}(\mathbb{C}_p)$, on a $Z_{i,1}(x) \neq 0$, on peut donc supposer $Z_{i,1}(x) = 1$ et alors par définition $|Z_{i,j}(x)| \leq 1$ pour $1 < j \leq J(i)$. Comme $\gamma(Z_{i,1}) \equiv a_{i,1,1} Z_{i,1} \bmod p\mathbb{Z}_p$, avec $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$, il vient $|Z_{i,1}(x\gamma)| = 1$. En particulier, il est non nul et les coordonnées de $x\gamma$ sont

$$\left(1, \frac{\sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,2,k} z_{i,k}(x)}{a_{i,1,1} + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k} z_{i,k}(x)}, \dots, \frac{\sum_{k=1}^{J(i)} a_{i,J(i),k} z_{i,k}(x)}{a_{i,1,1} + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k} z_{i,k}(x)}\right)$$

Notons que les conditions $|z_{i,j}(x)| \leq 1$, $a_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_p$, et $a_{i,1,k} \in p\mathbb{Z}_p$ si $1 < k \leq J(i)$, et $a_{i,1,1} \in \mathbb{Z}_p^*$ montrent que $x\gamma$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{C}_p)$ et que pour l'action induite sur $A(\mathcal{B})$, $A^0(\mathcal{B}) = \mathbb{Z}_p{<}x_{i,j}{>} \subset A(\mathcal{B})$ est préservé.

Les assertions analogues relatives à $\mathcal{F}$ en découlent immédiatement, notant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ préserve F^{an} et que l'application canonique $A^0(\mathcal{B}) \to A^0(\mathcal{F})$ est surjective. Cette dernière affirmation vient de ce que $A(\mathcal{F})$ est muni par définition la norme quotient de $A(\mathcal{B})$, dont l'ensemble des valeurs est une partie discrète de $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque : Il est en fait aisé de voir que $\mathcal{F}(\mathbb{Q}_p)$ est l'orbite de e sous $\Gamma_0(p)$. En effet, $F(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} e.w\Gamma_0(p)$, et $\mathcal{F}(\mathbb{Q}_p)$ est une réunion de telles orbites qui ne peut pas contenir $e.w$ si $w \neq 1$.

Il reste à regarder l'action des opérateurs u^a. Par le lemme 2.1, si j désigne le i-uple $(j_1 < j_2 < \dots < j_i)$, alors $u(z_{i,j}) = p^{(\sum_{k=1}^{i} a_{j_k} - a_k)} z_{i,j} \in \mathbb{Z}_p z_{i,j}$. Le monoïde $\mathbb{M}$ stabilise donc $\mathcal{B}$; $A(\mathcal{B})$ et $A^0(\mathcal{B})$ sont ainsi des représentations de tout $\mathbb{M}$. Les assertions du lemme 3.2 sont donc encore vérifiées pour $\mathbb{M}$ à la place de $\Gamma_0(p)$.

LEMME 3.3. – *$A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$ sont orthonormalisables sur $\mathbb{Q}_p$,*
- *$\mathbb{M}$ opère linéairement continûment sur $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$, par des opérateurs de norme ≤ 1.*
- *Les u^a sont complètement continus sur $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$ si a est strictement croissante.*

Preuve : Il est clair que $A(\mathcal{B})$ est orthonormalisable sur $\mathbb{Q}_p$, une base orthonormale étant par exemple donnée par 1 et les monômes en les $z_{i,j}$. Comme $IA(\mathcal{B})$ est un idéal de l'algèbre affinoide $A(\mathcal{B})$, il est fermé. Les $\mathbb{Q}_p$-Banach $IA(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F}) = A(\mathcal{B})/IA(\mathcal{B})$, munis tous deux de la norme induite par $A(\mathcal{B})$, satisfont à l'hypothèse (N) de [**93**] (car $|A(\mathcal{B})| = |\mathbb{Q}_p|$), ils sont donc orthonormalisables d'après *loc. cit.* Il existe même une section isométrique à $A(\mathcal{B}) \to A(\mathcal{F})$, identifiant $A(\mathcal{B})$ avec $IA(\mathcal{B}) \oplus A(\mathcal{F})$.

Les éléments de $\Gamma_0(p)$ préservant $A^0(\mathcal{B})$, qui est la boule unité de $A(\mathcal{B})$, agissent donc par endomorphismes de norme ≤ 1. Par passage au quotient, ils restent de norme ≤ 1 sur $A(\mathcal{F})$ (ils sont même de norme 1). Enfin, u^a est diagonal dans la base des monômes en les $z_{i,j}$ et clairement de norme ≤ 1, complètement continu si et seulement si a est strictement croissante, comme on le voit sur la formule $u(z_{i,j}) = p^{(\sum_{k=1}^{i} a_{j_k} - a_k)} z_{i,j}$. On en déduit le lemme par passage au quotient. $\square$

Pour terminer, nous aurons besoin d'un calcul supplémentaire :

LEMME 3.4. *Soit* $g = \gamma_1 u^a \gamma_2 \in \mathbb{T}^a$, *alors*

$$g(z_{i,j}) = \frac{a_1 + \sum_{k=2}^{J(i)} a_k z_{i,k}}{\lambda + p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k})}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{Z}_p,\ \lambda \in \mathbb{Z}_p^*$$

Tous les a_k *avec* $k > 1$ *sont dans* $p\mathbb{Z}_p$ *si* a *est strictement croissante.*

Preuve : C'est un calcul identique à celui du lemme 3.2. On a $\rho_i(g) = \rho_i(\gamma_1)\rho_i(u^a)\rho_i(\gamma_2)$, où $\rho_i(\gamma_1)$ et $\rho_i(\gamma_2)$ sont triangulaires supérieurs modulo p, $\rho_i(u^a)$ étant de la forme $p^{\beta_i} v$, où v est diagonale à coefficients dans $p^{\mathbb{N}}$. Lorsque a est strictement croissante, v est congrue à $\mathrm{diag}(1, 0, , ..., 0)$ modulo p, par le lemme 2.1.

La matrice $p^{-\beta_i}\rho_i(g)$ est donc congrue modulo p à une matrice triangulaire supérieure avec un inversible en première case. Dans le cas où a est strictement croissante, $p^{-\beta_i}\rho_i(g) \bmod p$ est partout nulle sauf sa première ligne (dont le premier coefficient est non nul et les autres sont quelconques à priori). Le même calcul qu'au lemme 3.2 montre alors que $g(z_{i,j}) =$" $p^{-\beta_i}\rho_i(g)(Z_{i,j})/p^{-\beta_i}\rho_i(g)(Z_{i,1})$", ce qui est le résultat. □

3.3. Représentations analytiques de dimension infinie de $\Gamma_0(p)$.

Soit $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{L}_t := \mathcal{O}(m_1, ..., m_{n-1})$ est localement libre de rang 1 engendré par ses sections globales, qui sont par construction le $\mathbb{Q}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)]$-module B_t. De plus, $\mathcal{L}_t$ est libre sur Ω de rang 1, engendré par $e_t := Z_{1,1}^{m_1} Z_{2,1}^{m_2} \cdots Z_{n-1,1}^{m_{n-1}}$. Il est donc libre sur $\mathcal{B}$ avec la même propriété, on le note $\mathcal{N}^t$. On le munit de la norme définie par $|e_t g| = |g|$. L'application $\psi_t : A(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}^t$ définie par $\psi_t(g) = e_t g$ est alors un isomorphisme isométrique.

De même, $i^*(\mathcal{L}_t) = \mathcal{O}_F(m_1, ..., m_{n-1})$ est un faisceau inversible sur F dont les sections globales sont exactement le $\mathbb{Q}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)]$-module S_t, par le lemme 3.1. Sa restriction à $\mathcal{F}$ est libre de rang 1 sur $A(\mathcal{F})$ avec pour base la section $f_t := Y_{1,1}^{m_1} Y_{2,1}^{m_2} \cdots Y_{n-1,1}^{m_{n-1}}$. On le note $\mathcal{S}^t$. On le munit de la norme définie par $|f_t g| = |g|$. L'application $\psi_t : A(\mathcal{F}) \to \mathcal{S}^t$ définie par $\psi_t(g) = f_t g$ est alors un isomorphisme isométrique.

On peut calculer l'action induite par $\Gamma_0(p)$ et les u^a sur $\mathcal{N}^t$ et $\mathcal{S}^t$, tout comme dans le lemme 3.2, on trouve, pour $\mathcal{N}^t$:

$$\gamma(e_t f) = e_t \prod_{i=1}^{n-1} j_i(\gamma)^{m_i} \gamma(f) \tag{6}$$

où les j_i sont des 1-cocycles $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Q}_p\langle (z_{i,j})_{1<j\leq J(i)}\rangle^* \subset A(\mathcal{B})^*$, dont la restriction à $\Gamma_0(p)$ est indépendante de t et à valeurs dans $\mathbb{Z}_p\langle (z_{i,j})_{1<j\leq J(i)}\rangle^* \subset A(\mathcal{B})^{0*}$. Ils vérifient donc

$$j_i(\gamma_1\gamma_2) = j_i(\gamma_1)\gamma_1(j_i(\gamma_2))$$

Explicitement, on trouve :

$$j_i(\gamma) = a_{i,1,1}(\gamma) + \sum_{k=2}^{J(i)} a_{i,1,k}(\gamma) z_{i,k}$$

Les $a_{i,1,k}(\gamma)$ sont définis comme dans le lemme 3.2, notons qu'ils sont tous dans $p\mathbb{Z}_p$ sauf le premier, $a_{i,1,1}(\gamma) \in \mathbb{Z}_p^*$. Les cocycles pour $\mathcal{S}^t$ s'obtiennent par projection $A(\mathcal{B})^* \to A(\mathcal{F})^*$, en remplaçant les $z_{i,j}$ par des $y_{i,j}$, on les notera encore j_i.

Les formules pour les j_i nous montrent deux choses :

– Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathcal{S}^t$ (resp. $\mathcal{N}^t$) est isomorphe à $A(\mathcal{F})$ (resp. $A(\mathcal{B})$) comme $\mathbb{Q}_p[\Gamma_0(p)]$-module si l'on tord l'action de $\Gamma_0(p)$ sur $A(\mathcal{F})$ (resp. $A(\mathcal{B})$) par le produit de cocycles $j_1^{m_1}\cdots j_{n-1}^{m_{n-1}}$. Précisément, on considère l'action suivante (dite "t-tordue") de $\Gamma_0(p)$ sur $A(\mathcal{B})$

$$[\gamma]_t(f) := \prod_{i=1}^{n-1} j_i^{m_i}(\gamma)\gamma(f) \tag{7}$$

  Les formules (6) et (7) montrent que l'application $\psi_t : A(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}^t$ définie plus haut est $\Gamma_0(p)$-équivariante pour l'action t-tordue sur $A(\mathcal{B})$, et comme plus haut sur $\mathcal{N}^t$. Notons que $[\Gamma_0(p)]_t$ préservant $IA(\mathcal{B})$, l'action t-tordue passe donc au quotient $A(\mathcal{F})$, $\psi_t : A(\mathcal{F}) \to \mathcal{S}^t$ étant encore équivariant par construction.

– L'expression $j_i(\gamma)^s$ a un sens dans $A(\mathcal{B})$ pour s non nécessairement dans $\mathbb{Z}$, mais plus généralement dans un disque ouvert de $\mathbb{C}_p$. Cette observation sera exploitée plus loin.

En ce qui concerne le lien entre S_t et $\mathcal{S}^t$, on a le

LEMME 3.5. *Soit $t = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, l'application canonique $S_t \to \mathcal{S}^t$ est injective.*

Preuve : S_t est une $\mathbb{Q}_p$-représentation irréductible de $gl_n(\mathbb{Q}_p)$. Cette dernière étant aussi l'algèbre de Lie du sous-groupe ouvert $\Gamma_0(p)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, S_t est une représentation irréductible de $\Gamma_0(p)$. Comme la restriction canonique $S_t \to \mathcal{S}^t$ est $\Gamma_0(p)$-équivariante, elle est soit nulle, soit injective. Elle n'est pas nulle car f_t est dans son image. □

Remarque : La même assertion vaut pour $B_t \to \mathcal{N}^t$, mais elle est triviale.

3.4. Torsion par des caractères de $\Gamma_0(p)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on dispose d'un caractère $\det^n : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Q}_p^*$ (même défini sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, bien sûr) par lequel il est possible de tordre toute $\mathbb{Q}_p$-représentation de $\Gamma_0(p)$. Ainsi, si $s = (t, n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, S_s (resp. $\mathcal{S}^s$, B_s ou $\mathcal{N}^s$) désignera la représentation de $\Gamma_0(p)$ sur S_t (resp. $\mathcal{S}^t$, B_t ou $\mathcal{N}^t$) tordue par $\det^n$. Notons que $\det : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Z}_p^*$ peut encore se voir comme un 1-cocycle de $\Gamma_0(p)$ dans $\mathbb{Z}_p^*$ (avec action triviale), ce qui permet de l'étudier en même temps que les cocycles j_i, on pose d'ailleurs $j_n := \det$.

De plus, si $\Gamma_1(p)$ désigne le sous-groupe de $\Gamma_0(p)$ composé des matrices unipotentes modulo p, $\Gamma_1(p)$ est distingué de quotient $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)^n$, ce qui nous fournit un groupe fini de caractères Δ^n, où

$$\Delta := \mathrm{Hom}_{gr}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \mathbb{Z}_p^*)$$

Nous aurons un peu plus loin à tordre certaines représentations de $\Gamma_0(p)$ par des éléments de Δ^n. Si V est une représentation de $\mathbb{Z}_p[\Gamma_0(p)]$, $\chi \in \Delta^n$, nous noterons $V_\chi := V \otimes \chi$

la représentation V tordue par χ. Nous noterons de plus par abus $S_{t,\chi}$ (resp. $B_{t,\chi}$) pour $(S_t)_\chi$ (resp. $(B_t)_\chi$).

3.5. Action et renormalisation des opérateurs U.

Soit $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, l'action des u^a sur $\mathcal{N}^t$ est donnée par le lemme 2.1 :

$$\text{Si } f \in A(\mathcal{B}),\ u^a(e_t f) = e_t\, \nu_t^{-1}(u^a) u^a(f),\ \ \nu_t^{-1}(u^a) := p^{\sum_{i=1}^n m_i(\sum_{k=1}^i a_k)} \in p^{\mathbb{N}}$$

Ceci définit un caractère ν_t du monoïde U. Ce caractère est encore la restriction à U de l'inverse du caractère de plus haut poids de S_t, *i.e.* l'inverse de t. En utilisant la formule (5), il est facile de vérifier que ν_t s'étend de manière unique en un caractère de $\mathbb{M}$ trivial sur $\Gamma_0(p)$. On peut donc tordre la représentation ρ_t de $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{N}^t$ par ν_t, ce qui n'affecte pas l'action restreinte à $\Gamma_0(p)$, mais renormalise les u^a de sorte que

$$(\rho_t \otimes \nu_t)(u^a)(e_t f) = e_t u^a(f)$$

De même qu'au paragraphe précédent, cette action se transporte à $A(\mathcal{B})$ via ψ_t, on la note $[.]_t$, elle est définie par

$$e_t[g]_t(f) = (\rho_t \otimes \nu_t)(g)(e_t f)$$

On renomme alors les cocycles $j_i \otimes \nu_t$ en j_i, ceci n'affecte pas leur restriction à $\Gamma_0(p)$, ils sont indépendants de t. Soit $g \in \mathbb{M}$, on résume ceci en :

$$(8) \quad \begin{cases} [g]_t(f) = \prod_{i=1}^n j_i^{m_i}(g) g(f) \\ \\ \text{Si } i < n,\ j_i(g) = \lambda + p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k}),\ \ b_k \in \mathbb{Z}_p,\ \lambda \in \mathbb{Z}_p^* \text{ (cf. lemme 3.4)} \\ \\ j_n(g) = \det(g) \in \mathbb{Z}_p^* \\ \\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ \ j_i(u^a) = 1 \text{ ("renormalisation")} \end{cases}$$

Quand t est nul, $[.]_0$ coïncide avec l'action naturelle de $\mathbb{M}$ sur $A(\mathcal{B})$ (il n'y a pas de renormalisation en poids 0). En général, $[.]_t$ apparaît comme étant la représentation $[.]_0$ tordue par le 1-cocycle $\prod_{i=1}^n j_i^{m_i}$. Enfin, ces actions préservant $IA(\mathcal{B})$, elles passent au quotient $A(\mathcal{F})$, et proviennent de celles sur $\mathcal{S}^t$ via ψ_t. On les désignera de la même manière pour ne par alourdir les notations.

3.6. Interpolation. Soit $\omega \in \mathbb{C}_p$ tel que $\omega^{p-1} = -p$ si $p > 2$, $\omega := 2$ si $p = 2$. On pose $\mathbf{p} := 4$ si $p = 2$, $\mathbf{p} := p$ si p est impair. Nous aurons à utiliser une petite modification[8] des résultats des paragraphes précédents pour $p = 2$. Précisément, $\Gamma_0(2)$ désignera désormais les matrices triangulaires supérieures modulo 4, et les u^a désigneront les $\mathrm{diag}(2^{a_1}, ..., 2^{a_n})$. On rappelle le :

LEMME 3.6. *Si A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach commutative, $f \in A$ tel que $|f| \leq |\mathbf{p}|$, $s \in A$, alors $(1+f)^s := 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n$ converge dans A si $|s| < |\omega/\mathbf{p}|$. La notation $(1+f)^s$ est consistante avec la définition usuelle lorsque $s \in \mathbb{Z}$.*

[8]Nous aurions pu aussi parsemer les paragraphes précédents de $\mathbf{p}$ et de p...

On a les identités suivantes pour $f, g, s, s' \in A$, tels que $|f|, |g| \leq |\mathbf{p}|$, $|s|, |s'| < |\omega/\mathbf{p}|$:
– $(1+f)^s(1+f)^{s'} = (1+f)^{s+s'}$,
– $(1+f)^s(1+g)^s = ((1+f)(1+g))^s$,
– $(1+f)^s = \exp_p(s \log_p(1+f))$,
– $|(1+f)^s - 1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, *en particulier* $|(1+f)^s| = 1$.

Preuve : Si $|s| \leq 1$, $|\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n| \leq |\mathbf{p}/\omega|^n$ et la série converge car $|\omega| > |\mathbf{p}|$. Si $|s| > 1$, $|\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} f^n| \leq |\mathbf{p}s/\omega|^n |\omega^n/n!|$ qui converge si $|\mathbf{p}s/\omega| < 1$ (séparer le cas $p = 2$), ce que l'on voulait. La vérification des trois identités est un argument classique. La dernière identité vient de ce que si $|f| \leq |\mathbf{p}|$ et $|s| < |\omega/\mathbf{p}|$, alors

$$(1+f)^s = \exp_p(s \log_p(1+f)) = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n (\log_p(1+f))^n}{n!}$$

Le terme général de la série ci-dessus est de norme $< p^{-n(v(|f|)+v(|\omega|/\mathbf{p}) - \frac{1}{p-1}) + \frac{S_n}{p-1}} \leq p^{-\frac{S_n}{p-1}}$, S_n désignant la somme des chiffres de l'écriture de n en base p. □

Soit $\tau : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}_p^*$ le morphisme de Teichmüller. Par les formules (8), les cocycles $j_i : \mathbb{M} \to \mathbb{Z}_p\langle z_{i,j}\rangle^*$ tombent dans $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^*$ modulo $\mathbf{p}$, on peut donc les composer par τ. On définit alors le cocycle modifié :

$$\mathbf{j}_i := \tau(j_i)^{-1} j_i : \mathbb{M} \longrightarrow 1 + \mathbf{p}A^0(\mathcal{B})$$

pour ce dernier on va voir que l'interpolation est possible.

Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}| = p^{\frac{p-2}{p-1}}$ si p est impair, 2 si $p = 2$. La boule affinoide $\mathcal{W}_r$ "des poids" est l'ouvert affinoide de $\mathbb{A}^n$ défini sur tout corps local K_r contenant un élément u_r de norme r par

$$\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p) := \{x = (s_1(x), ..., s_n(x)) \in (\mathbb{C}_p)^n, \forall k, |s_k(x)| \leq r\}$$

On définit

$$\mathcal{N}(r) := A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{B}) = K_r\langle u_r^{-1}s_1, ..., u_r^{-1}s_n, (z_{i,j})_{i,j}\rangle,$$
$$\mathcal{S}(r) := \mathcal{N}(r)/I\mathcal{N}(r) = A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{F}),$$

avec la norme de Gauss sur $\mathcal{N}(r)$ et la norme quotient sur $\mathcal{S}(r)$. On appellera représentation "constante" de $\mathbb{M}$ sur $\mathcal{N}(r)$, celle obtenue à partir de la représentation (non tordue) sur $A(\mathcal{B})$ et en étendant les scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$, on la note

$$\mathbb{M} \times \mathcal{N}(r) \to \mathcal{N}(r), \ (g, v) \mapsto g(v)$$

Une deuxième représentation, plus intéressante, est la suivante. Soit $g \in \mathbb{T}^a$, par le lemme 3.6 et les formules (8), $\mathbf{j}_i(g)^{s_i}$ a un sens dans $A(\mathcal{W}_r) = K_r\langle u_r^{-1}s_1, \ldots, u_r^{-1}s_n\rangle$, car $|s_i| \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$ et $|\mathbf{j}_i(g) - 1| \leq |\mathbf{p}|$. On peut donc poser

$$[g](f) := \prod_{i=1}^{n} \mathbf{j}_i(g)^{s_i} g(f) \tag{9}$$

On verra plus bas que c'est bien une représentation de $\mathbb{M}$. Remarquons que par notre choix de normalisation, $[u^a]f = u^a(f)$: les u^a sont constants. Notons que $[.]$ préserve

$I\mathcal{N}(r)$ (car c'est le cas pour l'action constante) et que l'action de $\mathbb{M}$ passe donc au quotient $\mathcal{S}(r)$, on l'étudie dans la proposition suivante :

Proposition 3.1. – *$\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ sont orthonormalisables sur $A(\mathcal{W}_r)$,*
- *$\mathbb{M} \times \mathcal{N}(r) \to \mathcal{N}(r)$, $(g, v) \to [g].v$ est une représentation de $\mathbb{M}$. De même, les applications $\mathbb{M} \to A(\mathcal{W}_r \times_{K_r} \mathcal{B})^*, g \to \mathbf{j}_i(g)^{s_i}$, sont des 1-cocycles.*
- *$\mathbb{M}$ opère via $[.]$ $A(\mathcal{W}_r)$-linéairement continûment sur $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$, par des opérateurs de norme ≤ 1.*
- *Si a est strictement croissante, les combinaisons $A(\mathcal{W}_r)$-linéaires d'éléments de $\mathbb{T}^a$ sont composées d'opérateurs $A(\mathcal{W}_r)$-linéaires complètement continus.*
- *Si $t = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z} \subset \mathcal{W}_r(K_r)$, $\chi = (\tau^{m_1+\cdots+m_n}, \tau^{m_2+\cdots+m_n}, \cdots, \tau^{m_n}) \in \Delta^n$, la fibre en t de $\mathcal{N}(r)_\chi$ (resp. $\mathcal{S}(r)_\chi$) est naturellement isomorphe à $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ (resp. $\mathcal{S}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$), avec action de $\mathbb{M}$.*
- *Si $r' > r$, la restriction canonique $\mathcal{N}(r')_\chi \to \mathcal{N}(r)_\chi$ commute aux actions de $\mathbb{M}$, et induit un isomorphisme $\mathbb{M}$-équivariant $\mathcal{N}(r')_\chi \otimes A(\mathcal{W}_r) \simeq \mathcal{N}(r)_\chi$, idem avec $\mathcal{S}_\chi(-)$.*

Preuve : $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ sont obtenus par extension des scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$ des $\mathbb{Q}_p$-modules de Banach orthonormalisables $A(\mathcal{B})$ et $A(\mathcal{F})$, ils sont donc orthonormalisables par le lemme 3.3. Via une section isométrique de $A(\mathcal{B}) \to A(\mathcal{F})$, et donc un isomorphisme $A(\mathcal{B}) \simeq IA(\mathcal{B}) \oplus A(\mathcal{F})$ (chacun étant orthonormalisable sur $\mathbb{Q}_p$), on a même un isomorphisme $\mathcal{N}(r) \simeq I\mathcal{N}(r) \oplus \mathcal{S}(r)$, chaque terme étant $A(\mathcal{W}_r)$-orthonormalisable.

L'action constante étant $A(\mathcal{W}_r)$-linéaire, la formule (9) montre que $\mathbb{M}$ agit $A(\mathcal{W}_r)$-linéairement sur $\mathcal{N}(r)$, et donc sur $\mathcal{S}$. Montrons qu'il préservent la boule unité de $\mathcal{N}(r)$. Soit $g \in \mathbb{T}^a$, $f \in \mathcal{N}^0(r)$, on a déjà vu que $g(f) \in \mathcal{N}^0(r)$. Il reste à vérifier que $\mathbf{j}_i(g)^{s_i} \in \mathcal{N}^0(r)$. Or $\mathbf{j}_i(g) = 1 + \mathbf{p}h$, $h \in \mathcal{N}^0(r)$, et on conclut donc par la dernière assertion du lemme 3.6.

Par passage au quotient, g préserve aussi $\mathcal{S}^0(r)$.

L'opérateur u^a étant constant, il est obtenu par extension des scalaires à $A(\mathcal{W}_r)$ de l'opérateur u^a sur $A(\mathcal{B})$ (resp. $A(\mathcal{F})$), il est donc complètement continu sur $\mathcal{N}(r)$ et $\mathcal{S}(r)$ quand le premier l'est, on conclut donc par le lemme 3.3.

L'avant dernière assertion est satisfaite par construction : la fibre en t de $\mathcal{N}(r)$ est $A(\mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ avec $[.]_t$ pour action de $\mathbb{M}$, ce qui est "presque" $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ à ceci près que l'on a modifié les 1-cocycles $\mathbf{j}_i$. L'application ψ_t induit par construction un isomorphisme de cette fibre en t vers $\mathcal{N}^t \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_r$ tordu par

$$\tau(j_1)^{-m_1}\tau(j_2)^{-m_2}\cdots\tau(j_n)^{-m_n} = \tau_1^{-m_1}(\tau_1\tau_2)^{-m_2}\cdots(\tau_1\cdots\tau_n)^{-m_n}$$

où l'on a posé $\tau_i : (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}_p^*,\ (x_1, \ldots. x_n) \mapsto \tau(x_i)$, ce qui conclut (idem pour $\mathcal{S}(r)$).

Vérifions que $[.]$ est une représentation de $\mathbb{M}$. Soient $x, y \in \mathbb{M}$, $v_1 = [xy]$ et $v_2 = [x][y]$ sont deux $A(\mathcal{W}_r)$-endomorphismes de $\mathcal{N}(r)$ qui coïncident en toutes les fibres sur $\mathbb{N}^n \subset \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, car on sait que les $[.]_t$ sont des représentations des $\mathbb{M}$. $\mathcal{N}(r)$ étant orthonormalisable, il suffit de voir que les coefficients matriciels de v_1, v_2 dans une base orthonormale fixée sont tous égaux. Mais ce sont des éléments de $A(\mathcal{W}_r)$ qui prennent la même valeur sur $\mathbb{N}^n$, et donc sur l'ouvert (Zariski dense) $\mathbb{Z}_p^n$. Ils sont donc égaux. Un argument similaire donne l'assertion sur les 1-cocycles de l'énoncé.

La dernière assertion est évidente. □

3.7. Modules de Banach et série principale analytique de $\Gamma_0(p)$ sur $\mathcal{W}$. Nous aurons besoin de quelques définitions concernant certains faisceaux de modules topologiques sur un espace rigide et leurs sections globales. Faute de références adéquates, nous les incluons ci-dessous.

3.7.1. *Généralités.* Soit $X/\mathbb{C}_p$ un espace rigide réduit, on va considérer des faisceaux de modules topologiques sur X du type suivant : soit V un espace de Banach sur $\mathbb{C}_p$ orthonormalisable, on appellera module de Banach (sous-entendu "orthonormalisable") sur X associé à V, le faisceau de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules noté $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$, défini sur tout ouvert affinoide $\Omega \subset X$ par

$$(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega) := V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega))$$

Si Ω est ouvert affinoide, $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}_p$-algèbre de Banach muni de la norme sup., ce qui permet de voir $(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega)$ comme un $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-module de Banach. Si $(e_i)_{i\geq 1}$ est une base orthonormale de V, $(e_i\hat{\otimes}1)_{i\geq 1}$ est une base orthonormale du $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-module de Banach $(V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig})(\Omega)$. Il est clair que $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$ est bien un préfaisceau pour la G-topologie faible sur X. Une conséquence du théorème d'acyclicité de Tate et de la donnée de la base orthonormale globale est que c'est bien un faisceau pour la G-topologie faible. Il s'étend donc canoniquement en un faisceau pour la G-topologie forte de X, que l'on note encore $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}$. Si Ω est un ouvert admissible quelconque de X, on munit $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ de la topologie la plus faible rendant toutes les applications $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega) \to V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega')$ continues, où $\Omega' \subset \Omega$ est un ouvert affinoide de Ω. Il est immédiat que cette topologie coïncide avec celle du Banach sous-jacent lorsque Ω est affinoide. Cela s'applique en particulier à $\mathbb{C}_p\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig} = \mathcal{O}_X^{rig}$, et en fait un faisceau en $\mathbb{C}_p$-algèbres topologiques sur X.

Soit $\mathcal{M}$ le module de Banach orthonormalisable sur X associé à V. L'espace topologique $\mathcal{M}(X)$ contient V comme sous-espace de manière naturelle. Le sous-$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de $\mathcal{M}(X)$ composé des sections dont la restriction à tout ouvert affinoide est de norme ≤ 1 est un fermé que l'on notera $\mathcal{M}(X)^0$; on parlera de *sections entières* de $\mathcal{M}$. Ceci s'applique en particulier aux cas de $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$ et $\mathcal{O}_X^{rig}(X)^0$. Enfin, à chaque $t \in X(\mathbb{C}_p)$, on peut considérer le $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{M}_t$, la fibre de $\mathcal{M}$ en t, défini par $\mathcal{M}(\Omega)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)}\mathbb{C}_p$, avec pour $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega) \to \mathbb{C}_p$ l'évaluation en t et Ω étant un ouvert affinoide de X contenant t. Le $\mathbb{C}_p$-Banach $\mathcal{M}_t$ est isomorphe à V.

Un morphisme $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ de modules de Banach sur X est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules dont la restriction à chaque ouvert affinoide $\Omega \subset X$ induit une application continue $\varphi(\Omega) : \mathcal{M}_1(\Omega) \to \mathcal{M}_2(\Omega)$ (il suffit que ceci soit vérifié sur un recouvrement admissible de X). Il est dit *entier* si les $\varphi(\Omega)$ sont de norme ≤ 1. Le morphisme φ induit une application $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$-linéaire continue $\mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_2(X)$ préservant les sections entières si φ est entier.

Soient K un corps local, V' un K-espace de Banach orthonormalisable, on suppose qu'il existe un isomorphisme $V'\widehat{\otimes}_K\mathbb{C}_p \simeq V$, ce qui fait de V' une K-structure pour V.

Sur chaque ouvert affinoide Ω de X défini sur K, $V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ a une structure sur K donnée par $V'\widehat{\otimes}_K\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega/K)$. Si V et une famille $\mathcal{F}$ d'ouverts affinoides $\Omega \subset X$ ont une structure sur K, on notera $\mathcal{M}(X,K)$ le sous-K-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}(X)$ composé des sections qui se restreignent en des *sections K-rationnelles* sur les $\Omega \in \mathcal{F}$.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des modules de Banach orthonormalisables sur X, avec des structures rationnelles sur K respectives V_1 et V_2, ainsi qu'une donnée $\mathcal{F}$ comme ci-dessus. On dira qu'un $\mathcal{W}$-morphisme $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ est *rationnel* si pour tout ouvert affinoide $\Omega \in \mathcal{F}$ de X, φ envoie $V_1\widehat{\otimes}_K A(\Omega/K) \subset \mathcal{M}_1(\Omega)$ dans $V_2\widehat{\otimes}_K A(\Omega/K) \subset \mathcal{M}_2(\Omega)$.

3.7.2. *Modules de Banach sur $\mathcal{W}$.* Soit $\mathcal{W}$ l'espace rigide sur $\mathbb{C}_p$ réunion croissante des $\mathcal{W}_r$, $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$. On l'appellera *l'espace des poids*. Des exemples de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ sont donnés par les modules $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$, que l'on définit comme étant associés respectivement à $A(\mathcal{F})_\chi$ et à $A(\mathcal{B})_\chi$. Par la proposition 3.1, $\mathbb{M}$ agit par endomorphismes de Banach entiers sur ces espaces, on a la

Définition : Si $\chi \in \Delta^n$, le module de Banach $\mathcal{S}_\chi := \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}A(\mathcal{F})_\chi$, vu comme représentation de $\mathbb{M}$, sera appelé la famille analytique des séries principales de $\Gamma_0(p)$ de caractère χ.

Remarque : Notons que par 3.1, si $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_{\chi,t}$ (resp. $\mathcal{N}_{\chi,t}$), est isomorphe comme $\mathbb{Q}_p[\mathbb{M}]$-module à $\mathcal{S}^t_{\chi\tau_t}$ (resp. $\mathcal{N}^t_{\chi\tau_t}$), où $\tau_t : \Gamma_0(p) \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}_p^*$ vaut

$$(\tau^{-m_1-m_2-..-m_n}, \tau^{-m_2-...-m_n}, ..., \tau^{-m_n})$$

τ étant le caractère de Teichmüller. Ceci explique la notation supérieure provisoire choisie pour les $\mathcal{S}^t$, car ce sont plutôt les $\mathcal{S}_t$ qui varient analytiquement en t.

Nous aurons besoin encore de quelques définitions concernant les modules de Banach sur $\mathcal{W}$. Le lemme suivant, bien qu'important, est immédiat :

LEMME 3.7. – *$\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})$ s'identifie canoniquement à l'anneau des séries convergentes sur tout $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, avec la topologie faible donnée par la famille des normes*

$$|f|_r = \sup_{x \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)} |f(x)|$$

– *$\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0$ s'identifie alors aux séries convergentes bornées par 1 sur $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. C'est un anneau local complet pour la topologie adique donnée par tout idéal I_r, où I_r est la boule fermée de centre 0 de rayon $1/2$ pour $|.|_r$. Si $t_1 := (\mathbf{p}/\omega)s_1, \cdots, t_n := (\mathbf{p}/\omega)s_n$, alors*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[t_1, ..., t_n]]$$

L'idéal $(p, t_1, ..., t_n)$ est un idéal de définition de la topologie de $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0$.

– *La donnée d'une base orthonormale $(e_n)_{n\geq 1}$ de V induit un isomorphisme topologique de $\mathcal{M}(\mathcal{W})^0$ avec $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0)$.*

Si A est un anneau topologique, on désigne par $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A)$ l'anneau des fonctions de $\mathbb{N}$ dans A tendant vers 0 à l'infini. Si A est un anneau linéairement topologisé par une famille d'idéaux I_λ, la famille de sous-A-modules $I'_\lambda := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A), f(\mathbb{N}) \subset I_\lambda\}$ fait de $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A)$ un A-module topologique. Il est complet et séparé si A l'est, I-adique si A l'est et I est de type fini.

Soit $L := \mathbb{Q}_p(\omega) = \mathbb{Q}_p(\mu_p)$, la boule fermée de rayon $|\omega/\mathbf{p}|$ est définie sur L. Les coordonnées $t_i = (\mathbf{p}/\omega)s_i$ ($\mathbf{p}/\omega \in \mathcal{O}_L$) sont définies sur L et identifient $\mathcal{W} \subset \mathbb{A}^n$ à la boule ouverte de centre 0 de rayon 1 sur L. Soit $\mathcal{M} := \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig} \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} V$ un module de Banach sur $\mathcal{W}$, V' une structure sur L de V, on définit comme structure sur L de $\mathcal{W}$ l'unique ouvert affinoide $\mathcal{W}_1$ (il est même défini sur $\mathbb{Q}_p$). On pose

$$\Lambda := \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W}, L) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0$$

et plus généralement

$$\mathcal{M}_\Lambda := \mathcal{M}(\mathcal{W}, L) \cap \mathcal{M}(\mathcal{W})^0$$

$\mathcal{M}_\Lambda$ sera appelé *le module des sections Λ-adiques de $\mathcal{M}$.*

Lemme 3.8. – *L'isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[t_1, ..., t_n]]$ induit un isomorphisme topologique*

$$\Lambda \simeq \mathcal{O}_L[[t_1, ..., t_n]],$$

ce dernier étant muni de sa topologie canonique d'anneau local complet,

– *L'isomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{W})^0 \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})^0)$ induit un isomorphisme de Λ-modules topologiques*

$$\mathcal{M}_\Lambda \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$$

En particulier, notant $\mathfrak{m} := (\omega, t_1, ..., t_n)$ l'idéal maximal de Λ, $\mathcal{M}_\Lambda$ est complet et séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

4. Les formes automorphes pour G

4.1. Le groupe algébrique G. Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ forme tordue de GL_n, *i.e.* tel que $G_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{C}$. Tous ces groupes sont obtenus en considérant une $\mathbb{Q}$-algèbre E étale sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, ainsi qu'une E-algèbre D centrale simple de rang n^2, munie d'une $\mathbb{Q}$-involution $*$ induisant sur E le $\mathbb{Q}$-automorphisme non trivial. Le groupe G sur $\mathbb{Q}$ associé à cette donnée est tel que pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R :

$$G(R) := \{x \in D \otimes_{\mathbb{Q}} R, xx^* = 1\}$$

En particulier, si D et E sont non ramifiés au dessus de p, $G(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ou au groupe unitaire non ramifié $U_n(\mathbb{Q}_p)$ selon que p est totalement décomposé ou inerte dans E. Enfin, $G(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ou un corps quadratique réel, et à $U_{p,q}(\mathbb{C})$ (le groupe unitaire réel de signature (p, q)) si E est un corps quadratique imaginaire. On fera l'hypothèse suivante :

$G(\mathbb{R})$ est compact, autrement dit E est imaginaire et $*$ de signature $(n, 0)$ ou $(0, n)$

Le centre de G est le tore des éléments de norme 1 de $E/\mathbb{Q}$. On aurait aussi pu considérer le cas où $G(\mathbb{R})$ est non compact mais compact modulo son centre, ce qui n'arrive que quand $n = 2$ et G est le groupe des inversibles d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de quaternions définie, pour lequel toutes les techniques de ce texte s'appliqueraient avec peu de modifications.

Exemples : Les obstructions globales liées à l'existence de formes tordues de GL_n d'un type fixé à toutes les places sont discutées dans [**27**] chapitre 2. Par exemple, si n est impair ou multiple de 4 (resp. pair non multiple de 4), il existe un groupe G satisfaisant l'hypothèse ci-dessus qui est quasi-déployé à toutes les places finies (resp. toutes sauf éventuellement une que l'on peut choisir).

Soient p un nombre premier décomposé dans E, w une place de E divisant p fixée dans tout le texte. La donnée de w définit un isomorphisme $\eta_p : G/\mathbb{Q}_p \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}_p$. On fixe de plus un isomorphisme de corps

$$i_p : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

Les données de w et i_p fournissent un plongement distingué $E \hookrightarrow \mathbb{C}$, et permettent de fixer un isomorphisme $\eta_\infty : G/\mathbb{C} \simeq \mathrm{GL}_n/\mathbb{C}$, par $\eta_\infty := i_p^{-1}\eta i_p$. On a alors les diagrammes commutatifs suivants, que l'on considérera par la suite comme des inclusions :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q}_p \arrow[d, hook, "i_p^{-1}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, hook] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(\mathbb{Q}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & G(\mathbb{Q}_p) \arrow[d, hook, "i_p^{-1}\eta_p"] \\ G(\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\eta_\infty"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On se fixe de plus un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{U}$ de $G(\mathbb{A}_f)$, le "niveau", que l'on supposera pour simplifier de la forme $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{(p)} \times \mathcal{U}^p$, où $\mathcal{U}_{(p)}$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathcal{U}^p$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f^p)$.

Par la finitude du nombre de classes généralisée (cf. [**11**] thm. 5.1), l'ensemble quotient $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{U}$ est fini. On pose

$$X(\mathcal{U}) := G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{U} = \{x_1, ..., x_h\}, \ h = |X(\mathcal{U})|, \ G(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} G(\mathbb{Q})x_i\mathcal{U}$$

les x_i étant fixés une fois pour toutes. On supposera de plus que $\mathcal{U}$ est net, c'est à dire que $G(\mathbb{Q}) \times \mathcal{U}$ agit librement sur $G(\mathbb{A}_f)$. Il est équivalent de demander la trivialité des groupes $\Gamma_i := x_i^{-1}G(\mathbb{Q})x_i \cap \mathcal{U}$. Il faut noter que l'hypothèse de compacité à l'infini sur G entraînant que $G(\mathbb{Q})$ est discret dans $G(\mathbb{A}_f)$, Γ_i est toujours fini. Les Γ_i sont triviaux pour tout $\mathcal{U}$ assez petit, d'un point de vue pratique il est intéressant d'avoir des conditions explicites, une assez grossière est la suivante, sa preuve indiquant bien ses raffinements possibles :

Proposition 4.1. *Il existe un entier e, explicite ne dépendant que de n, tel que $\mathcal{U}$ est net dès qu'il existe un l premier, $(l, e) = 1$, tel que l'image de $\mathcal{U}$ dans $G(\mathbb{Q}_l)$ soit pro-l. Ceci vaut en particulier si $(p, e) = 1$.*

Preuve : $G(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_n(E)$, tout élément de N-torsion de ce dernier a pour polynôme minimal sur E un diviseur de $X^N - 1$, et il est de plus divisible par le polynôme minimal de $\omega_N = e^{2i\pi/N}$ sur E, qui est de degré $\varphi(N)$ ou $\varphi(N)/2$. Dans tous les cas, ceci implique que $\varphi(N) \leq 2n$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de N possibles explicitement calculables pour $\mathrm{GL}_n(E)$, et en particulier la torsion de $G(\mathbb{Q})$ a un exposant. Soit e cet exposant, si l est un nombre premier, premier à e, soit $\mathcal{U}_{(l)}$ l'image de $\mathcal{U}$ dans $G(\mathbb{Q}_l)$, alors $\mathcal{U} \cap xG(\mathbb{Q})x^{-1} \subset \mathcal{U}_{(l)} \cap xG(\mathbb{Q})x^{-1}$ est toujours trivial, car pro-l et de e-torsion avec $(e,l) = 1$. $\square$

Remarque : L'hypothèse de netteté sur $\mathcal{U}$ n'intervient dans ce qui suit que pour assurer que certains modules de Banach sont orthonormalisables, plutôt que "points fixes d'un module de Banach sous l'action d'un groupe fini", et ce pour pouvoir leur appliquer la théorie de Coleman [**30**].A. Dans un travail en cours ([**22**]), Buzzard a repris dans un cadre plus général les travaux de Coleman, ses résultats nous permettraient de nous passer de l'hypothèse "net".

4.2. Les formes automorphes pour G. Soit $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, pour tout corps k de caractéristique 0, on note $S_t(k)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(k)$ de plus haut poids t telle qu'on l'a définie en section 2.3, sa formation est compatible à l'extension du corps k. Via i_p, $S_t(\mathbb{Q}_p) \subset S_t(\mathbb{C})$, de même $S_t(\mathbb{R}) \subset S_t(\mathbb{C})$. Par le diagramme plus haut, les "inclusions" $G(\mathbb{R})$, $G(\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ réalisent $S_t(\mathbb{C})$ comme représentation de $G(\mathbb{R})$ et de $G(\mathbb{Q}_p)$ prenant même valeur sur $G(\mathbb{Q})$ et dont la restriction à $G(\mathbb{Q}_p) =_w \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est la représentation $S_t(\mathbb{Q}_p)$.

Notons que $G(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{R}) \times \mathcal{U}$ agit linéairement sur le $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ des fonctions $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, par $((\lambda, g, u).f)(x) = f(\lambda^{-1}xgu)$.

Définition : *Soit $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, l'espace des formes automorphes de poids t et de niveau $\mathcal{U}$ est le $\mathbb{C}$-vectoriel des fonctions à valeurs complexe sur $X_{\mathcal{U}} = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{U}$, engendrant sous $G(\mathbb{R})$ le dual de la représentation $S_t(\mathbb{C})$[9]. On le note $S_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$.*

Ainsi, l'espace des formes automorphes de poids t et de niveau $\mathcal{U}$ pourra être vu comme le $\mathbb{C}$-vectoriel des applications $S_t^*(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{U} \to \mathbb{C}$, telles que

$$\forall x \in X_{\mathcal{U}}, \varphi \mapsto f(\varphi, x) \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire},$$

$$\forall g \in G(\mathbb{R}), \varphi \in S_t^*(\mathbb{C}), x \in X_{\mathcal{U}}, f(g.\varphi, x) = f(\varphi, xg)$$

Nous allons donner un modèle de ces espaces sur $\mathbb{Q}_p$. On considère pour cela l'espace $S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$ des fonctions $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to S_t(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall u \in \mathcal{U}, x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), f(xu) = (u_p)^{-1} f(x)$$

Si $f \in S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$, on définit $\psi(f)$ par

$$\psi(f)(\varphi, x) = \varphi(x_\infty^{-1} x_p f(x_f)), \;\; x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \varphi \in S_t(\mathbb{C})^*$$

Lemme 4.1. *ψ définit un $\mathbb{C}$-isomorphisme $S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C}) \to S_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$*

Preuve : On vérifie immédiatement que si $f \in S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$, $\psi(f) \in S_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$. Soit $g \in S_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$, on va définir $\lambda(g) \in S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$. Soit $x \in G(\mathbb{A}_f)$, la forme linéaire sur $S_t^*(\mathbb{C})$ $\phi \to g(\phi, 1 \times x)$ est représentée par un unique vecteur de $S_t(\mathbb{C})$ que l'on note $x_p(\lambda(g)(x))$, il vérifie $\forall \phi \in S_t^*(\mathbb{C})$, $\phi(x_p \lambda(g)(x)) = g(\phi, 1 \times x)$. On vérifie facilement que $\lambda(g) \in S'_t(G, \mathcal{U}, \mathbb{C})$, et que ϕ et ψ sont réciproques. $\square$

[9]Plus exactement, "engendrant une somme de copies du dual de $S_t(\mathbb{C})$".

En particulier, $S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, l'injection

$$\iota : S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C}) \hookrightarrow S_t(\mathbb{C})^h,\ f \to (f(x_1),...,f(x_h))$$

étant même un isomorphisme car $\mathcal{U}$ est net. Notons maintenant que la définition de $S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p)$ a un sens : c'est le $\mathbb{Q}_p$-vectoriel des fonctions

$$f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to S_t(\mathbb{Q}_p),\ \forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), u \in \mathcal{U},\ f(xu) = (u_p)^{-1}f(x)$$

Enfin, $S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p) \subset S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$ est une structure sur $\mathbb{Q}_p$ de ce dernier, elle correspond via ι à $S_t(\mathbb{Q}_p)^h \subset S_t(\mathbb{C})^h$. On pose donc $S_t(G,\mathcal{U}) := S'_t(G,\mathcal{U},\mathbb{Q}_p)$.

La construction ci-dessus se généralise : pour tout anneau A et tout $A[\mathcal{U}_{(p)}]$-module V, on peut considérer, à la manière du paragraphe précédent, le A-module $V(G,\mathcal{U})$

$$V(G,\mathcal{U}) := \{f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f) \to V,\ \forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), u \in \mathcal{U},\ f(xu) = (u_p)^{-1}f(x)\}$$

Pour chaque tel $V(G,\mathcal{U})$, on dispose d'un A-isomorphisme

$$\iota : V(G,\mathcal{U}) \to V^h,\ \iota(f) = (f(x_1),...,f(x_h)) \tag{10}$$

$V \to V(G,\mathcal{U})$ est un foncteur exact des $A[\mathcal{U}_{(p)}]$-modules dans les A-modules, qui commute à l'extension des scalaires en A. Notons que via ι, si V est un A-module normé, $V(G,\mathcal{U})$ hérite de la norme de V par $|f| = \sup_{i=1}^h |f(x_i)|$, et il est isomorphe à V^h comme A-module normé. Enfin, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X^{rig}[\mathcal{U}_{(p)}]$-module (resp. de Banach) sur un espace rigide X,

$$\mathcal{M}(G,\mathcal{U}) := \{W \to \mathcal{M}(W)(G,\mathcal{U}) = \mathcal{M}(G,\mathcal{U})(W)\}$$

est aussi un $\mathcal{O}_X^{rig}$-module (resp. de Banach).

4.3. Opérateurs diamants en p. À partir de là, on choisit un $\mathcal{U}$ tel que, via η_p, $\mathcal{U}_{(p)}$ soit le sous-groupe $\Gamma_1(p)$ de GL_n composé des unipotents supérieurs modulo $\mathbf{p}$, on le note $U_1(p)$. On pose $U_0(p) = U_1(p)\Gamma_0(p)$, $\Gamma_0(p)$ étant vu comme sous-groupe de $G(\mathbb{A}_f)$ trivial hors de p et via η_p en p.

Pour tout $A[\Gamma_0(p)]$-module V, $\Gamma_0(p)$ opère sur $V(G,U_1(p))$ par $(\gamma, f)(x) = \gamma f(x\gamma)$, sa restriction à $\Gamma_1(p)$ étant triviale. On a donc une action de $((\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^*)^n$ sur $V(G,U_1(p))$. Si A est une $\mathbb{Z}[1/(p-1)](e^{2i\pi/(p-1)})$-algèbre ($\mathbb{Z}[1/2]$-algèbre pour $p = 2$), cette action se diagonalise selon les caractères de $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z}^*)^n$, dont le groupe est Δ^n :

$$V(G,U_1(p)) = \oplus_{\chi\in\Delta^n} V(G,U_0(p))(\chi)$$

$$V(G,U_0(p))(\chi) := \{f \in V(G,U_1(p)),\ \forall\gamma \in \Gamma_0(p),\ f(x\gamma) = \chi(\gamma)\gamma^{-1}f(x)\} = V_\chi(G,U_0(p))$$

Avec ces définitions, pour tout poids entier t,

$$S_t(G,U_1(p)) = \oplus_{\chi\in\Delta^n} S_{t,\chi}(G,U_0(p))$$

$S_{t,\chi}(G,U_0(p))$ est l'espace des formes automorphes sur $\mathbb{Q}_p$ de poids t, niveau $U_0(p)$, et de caractère χ en p.

4.4. Les formes automorphes p-adiques.

On renvoie au §3.7.2 pour les définitions de $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$.

Définitions : Le *module de Banach sur $\mathcal{W}$ des formes automorphes p-adiques pour G de niveau $U_0(p)$, de type $\chi \in \Delta^n$ en p* est le module de Banach sur $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$$

On parlera aussi de formes automorphes p-adiques de *type* $(G, U_0(p), \chi)$. Si $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, la fibre en t de $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ est $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))_t = (\mathcal{S}_\chi)_t(G, U_0(p))$[10], que l'on notera aussi $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$. Le $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ sera appelé *l'espace des formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$ et de poids t.*

Si $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ contient (par 3.5 et 3.1) le $\mathbb{C}_p$-espace $S_{t,\tau_t\chi}(G, U_0(p))$, où τ_t désigne le caractère

$$(\tau^{-m_1-\cdots-m_n}, \tau^{-m_2-\cdots-m_n}, \cdots, \tau^{-m_n}) \in \Delta^n$$

On pose donc

$$\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl} := S_{t,\tau_t\chi}(G, U_0(p)),$$

Ses éléments seront appelés les *formes automorphes p-adiques classiques de poids t et de type $(G, U_0(p), \chi)$.*

Remarque : Avec ces définitions, il faut noter qu'une forme automorphe p-adique classique de poids t et de type χ en p est une forme automorphe de poids t mais de caractère $\tau_t\chi$.

Définition : $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) = \mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))_\Lambda$ est le Λ-module des formes automorphes Λ-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$.

Proposition 4.2. *$\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ et $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$ sont des modules de Banach orthonormalisables sur $\mathcal{W}$. Les Λ-modules $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ et $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ sont plats, complets et séparés, isomorphes non canoniquement à $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$.*

Preuve : $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$) est le module de Banach orthonormalisable sur $\mathcal{W}$ associé à $A(\mathcal{F})(G, U_0(p))$ (resp. $A(\mathcal{B})(G, U_0(p))$). Les Λ-modules topologiques de l'énoncé sont isomorphes à $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$ par le deuxième point du lemme 3.8. L'assertion de platitude est équivalente à celle sur Λ de $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$. Or

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \simeq \Lambda\langle T\rangle$$

comme Λ-module topologique et il est bien connu que ce dernier est plat sur Λ quand Λ est un anneau local noethérien complet. □

4.5. L'algèbre de Hecke.

[10]Ceci vient de ce que ι identifie $V(G, \mathcal{U})$ à V^h fonctoriellement en V, en tant que A-module (avec les notations du §4.2).

4.5.1. *Les opérateurs de Hecke.* Soit ζ un élément de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta_p \in \mathbb{M}$,

$$U_0(p)\zeta U_0(p) = \coprod_{i=1}^{r(\zeta)} \zeta_i U_0(p) \tag{11}$$

pour certains $\zeta_i \in U_0(p)\zeta U_0(p)$. L'action par translation à droite sur de $\Gamma_0(p)$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ préserve les $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ et se factorise par Δ^n, ce qui décompose $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C}) = \oplus_{\chi \in \Delta^n} S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$[11], $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$ étant l'espace propre de caractère χ. Fixons un $\chi : \Gamma_0(p) \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z}^*)^n \to \mathbb{C}^*$. On définit un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$, l'opérateur de Hecke $T(\zeta)$ associé à ζ, par la formule suivante :

$$\forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}), \;\; T(\zeta)(f)(x) := \sum_{i=1}^{r(\zeta)} \chi^{-1}((\zeta_i)_p) f(x\zeta_i) \tag{12}$$

Dans cette formule, χ désigne l'unique caractère du monoïde $\mathbb{M}$ coïncidant avec le χ fixé sur $\Gamma_0(p)$, trivial sur U (cf. 2.5). Cet opérateur est indépendant du choix des ζ_i. L'action déduite sur $S'_t(G, U_1(p), \mathbb{C})[\chi]$ (défini de manière évidente) descend à $S_{\chi,t}(G, U_0(p))$ (qui en est une $\mathbb{Q}_p$-structure), par la formule :

$$\forall x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f), \;\; T(\zeta)(f)(x) = \sum_{i=1}^{r(\zeta)} (\zeta_i)_p . f(x\zeta_i) \tag{13}$$

Noter que les "$\chi(\zeta_i)$" sont compris dans l'action "." de $\Gamma_0(p)$ sur $S_{\chi,t}(\mathbb{Q}_p) = S_t(\mathbb{Q}_p) \otimes \chi$. Soient maintenant ζ tel que $\zeta_p \in \mathbb{M}$, V un A-module venant avec une action A-linéaire de $\mathbb{M}$, alors la formule 13 définit un opérateur A-linéaire $T(\zeta)$ sur les $V(G, U_0(p))$. Ceci nous définit en particulier les opérateurs de Hecke $T(\zeta)$, $\zeta_p \in \mathbb{M}$, agissant sur les $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$ et $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$.

On aura besoin d'une factorisation des opérateurs de Hecke agissant sur les espaces de type $V(G, U_0(p))$. On pose $h := |X(U_0(p))|$, on rappelle que ι est défini par la formule (10).

LEMME 4.2. *Soient $\zeta \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta \in \mathbb{T}^a$, alors $T(\zeta)$ s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{h.r(\zeta)} T_j \cdot \sigma_j$, où via ι, les σ_j sont des opérateurs de permutation des h-coordonnées, composés par la projection sur l'une des coordonnées, et les T_j sont des opérateurs diagonaux dans $\mathbb{T}^a$.*

Preuve : Soient ζ comme dans l'énoncé, ainsi qu'une décomposition $U_0(p)\zeta U_0(p) = \coprod_{i=1}^{r(\zeta)} \zeta_i U_0(p)$. Si i est fixé, alors pour tout $1 \leq s \leq h$, on peut écrire $x_s \zeta_i = d_i(s) x_{\delta_i(s)} u_i(s)$, où δ_i est une application de $\{1, ..., h\}$ dans lui-même, avec $d_i(s) \in G(\mathbb{Q})$ et $u_i(s) \in U_0(p)$. Considérons d'une part l'endomorphisme $\sigma_{i,s}$ de $V(G, U_0(p))$ défini par :

$$\iota.\sigma_{i,s}.\iota^{-1}(v_1, \cdots, v_h) := (0, ..., 0, v_s, 0, ..., 0)$$

[11] On rappelle que l'on identifie $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via i_p

le v_s étant à la $\delta_i(s)^{ieme}$ position, et d'autre part l'endomorphisme $T_{i,s}$ de $V(G, U_0(p))$ défini via ι comme agissant diagonalement par $(\zeta_i u_s^{-1})_p$. Alors

$$T(\zeta) = \sum_{i,s} T_{i,s}\sigma_{i,s}$$

En effet, si $f \in V(G, U_0(p))$, $v = (f(x_1), \cdots, f(x_h))$,

$$\iota.T(\zeta).\iota^{-1}(v) = (T(\zeta)(f)(x_1), \cdots, T(\zeta)(f)(x_h))$$

$T(\zeta)(f)(x_s) = \sum_{i=1}^{r(\zeta)}(\zeta_i)_p.f(x_s\zeta_i)$ et $f(x_s\zeta_i) = (u_i(s)^{-1})_p.f(x_{\delta_i(s)})$ concluent. □

4.5.2. *L'algèbre de Hecke globale.* Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Hecke globale de $(G(\mathbb{A}_f)), U_0(p))$ que l'on choisit :
- à coefficients dans Λ,
- engendrée par la sous-algèbre de l'algèbre de Hecke-Iwahori en p constituée des doubles classes $[\Gamma_0(p)m\Gamma_0(p)]$, avec $m \in \mathbb{M}$,
- et par une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke de $(G(\mathbb{A}_f^p), U_0(p)^p)$.

Alors $\mathcal{H}$ est commutative (cf. [**89**] Lemme 10 §4).

PROPOSITION 4.3. *$\mathcal{H}$ opère par endomorphismes rationnels entiers sur $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$), par conséquent elle préserve $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ (resp. $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$).*

Preuve : Par la proposition 3.1, $\mathbb{M}$ agit par endomorphismes entiers de module de Banach sur $\mathcal{S}_\chi$ et $\mathcal{N}_\chi$, rationnels car ils préservent $A(\mathcal{W}_1/\mathbb{Q}_p \times \mathcal{F})$ et $A(\mathcal{W}_1/\mathbb{Q}_p \times \mathcal{B})$. On en déduit le résultat par la formule (10) et le lemme 4.2. □

On s'intéresse à l'adhérence $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, de l'image de $\mathcal{H}$ dans

$$\mathcal{E}_\chi := \{u \in \mathrm{End}(\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))), \text{ entiers, rationnels}\}$$

La topologie considérée sur $\mathcal{E}_\chi$ est la moins fine pour laquelle les restrictions

$$\mathcal{E}_\chi \to \mathrm{End}^{cont}_{A(\Omega)}(\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))(\Omega)),\ \Omega \subset \mathcal{W} \text{ ouvert affinoide},$$

soient continues, ces derniers étant munis de la norme sup. Via un isomorphisme de Λ-modules topologiques : $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda)$, on vérifie facilement que $\mathcal{E}_\chi$ est topologiquement isomorphe au Λ-module $(\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda))^{\mathbb{N}}$ muni de sa topologique $\mathfrak{m}$-adique, pour laquelle il est complet séparé.

PROPOSITION 4.4. *$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est une Λ-algèbre commutative topologique profinie, semi-locale, telle que $\Lambda \hookrightarrow \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est continue. En particulier, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est compacte.*

Preuve : $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est l'adhérence de l'image de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}_\chi$. Sa topologie est la topologie donnée par la filtration des $(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi) \cap \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, elle est donc complète et séparée pour cette dernière. Sa restriction à Λ est la topologie $\mathfrak{m}$-adique naturelle de ce dernier, car $(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi) \cap \Lambda = \mathfrak{m}^r\Lambda$. Prouvons que $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est profinie. Il suffit de voir que les quotients $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}/(\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi \cap \mathcal{H}_{\chi,\Lambda})$ sont finis. Notons que par le lemme 4.2, $\Lambda/\mathfrak{m}^r\Lambda$ étant fini, il suffit de voir que $\mathbb{M}$ n'agit sur $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}^r\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$ que par un nombre fini d'endomorphismes, ou encore de voir la même chose sur $\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}^r\mathcal{N}_{\chi,\Lambda}$. Mais il est clair (§2.1, lemme 2.1) que le sous-groupe distingué de $\Gamma_0(p)$ d'indice fini $1+p^r\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ y agit trivialement, et que U n'agit que par un nombre fini d'endomorphismes. On conclut par l'égalité $\mathbb{M} = \Gamma_0(p)U\Gamma_0(p)$.

Dans un anneau commutatif A complet séparé pour un topologie donnée par une famille décroissante d'idéaux $\{I_r, r \in \mathbb{N}\}$ telle que $I_rI_s \subset I_{r+s}$, on a $I_1 \subset \mathrm{Rad}(A)$. En particulier A est semi-local si et seulement si A/I_1 l'est. Dans notre cas $A = \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, $I_r = (\mathfrak{m}^r\mathcal{E}_\chi) \cap \mathcal{H}_{\chi,\lambda}$ et A/I_1 est fini. $\square$

En particulier, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est un produit fini d'algèbres locales pro-artiniennes à corps résiduels finis de caractéristique p. Soient $e_{\chi,1}, ..., e_{\chi,r}$ les idempotents minimaux de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$,

$$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \simeq \prod_{i=1}^{r} e_{\chi,i}\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$$

On note $\Psi_{\chi,i} : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \overline{\mathbb{F}}_p$, $i \in \{1, ..., r\}$, les r caractères résiduels.

Proposition 4.5. *L'ensemble des $\Psi_{\chi,i}$ coïncide avec celui des réductions modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ des caractères $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-valués de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ dans la réunion des $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$, $t \in \mathbb{N}^{n-1}\times\mathbb{Z}$.*

Preuve : Les $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$-modules $\mathcal{S}^0_{\chi,t} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \overline{\mathbb{F}}_p$ (resp. $\mathcal{N}^0_{\chi,t} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \overline{\mathbb{F}}_p$), $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ variant, sont (canoniquement) isomorphes entre eux, car d'une part les $\mathbf{j_i}^{s_i}$ sont triviaux modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ par le dernier point du lemme 3.6, et d'autre part les u^a sont constants. Soit $\overline{\mathcal{S}}_\chi$ (resp. $\overline{\mathcal{N}}_\chi$) ce $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$-module commun. Si $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, on peut considérer la composition des applications naturelles $\mathbb{Z}_p[\mathbb{M}]$-équivariantes

$$B^0_{t,\chi\tau_t} \hookrightarrow \mathcal{N}^0_{\chi,t} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{S}}_\chi$$

Elle se factorise par $S^0_{t,\chi\tau_t} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$. Montrons que la réunion des images de ces dernières applications, $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ variant, recouvre $\overline{\mathcal{S}}_\chi$. Cela vient de ce que $\overline{\mathcal{N}}_\chi \to \overline{\mathcal{S}}_\chi$ est surjective, et de ce que la réunion des images des applications naturelles $B^0_{t,\chi\tau_t} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathcal{N}}_\chi$ est tout $\overline{\mathcal{N}}_\chi$. Notons enfin que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$ est une $\mathbb{F}_p$-structure de $\mathcal{S}^0_{\chi,0} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \overline{\mathbb{F}}_p = \overline{\mathcal{S}}_\chi$ stable par $\mathbb{M}$.

Le foncteur $V \to V(G, U_0(p))$ étant exact et commutant à l'extension des scalaires, on en déduit que $\overline{\mathcal{S}}_\chi(G, U_0(p))$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathbb{M}]$ module isomorphe à $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \otimes_\Lambda \overline{\mathbb{F}}_p$, et qu'il est réunion des images des applications $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl,0}$. On conclut par le lemme de Deligne-Serre (cf. [**38**] Lemme 6.11), en notant que ces derniers espaces sont obtenus par extension des scalaires à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ du $\mathcal{O}_L$-module libre de type fini $S_{t,\chi\tau_t}(G, U_0(p))^0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L$, qui est stable par $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$. $\square$

4.6. Opérateurs U_p^a.

Proposition 4.6. *Les $T(\zeta)$ ($\zeta_p \in \mathbb{T}^a$) sont des endomorphismes rationnels et entiers de $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ et $\mathcal{N}_\chi(G, U_0(p))$. Si a est strictement croissante, $T(\zeta)$ est complètement continu au dessus de chaque ouvert affinoide de $\mathcal{W}$.*

Preuve : La première assertion a déjà été vue. Si a est strictement croissante et $\zeta_p \in \mathbb{T}^a$, 4.2 montre que $T(\zeta)$ est une somme d'opérateurs composés d'un opérateur diagonal (via ι) complètement continu (lemme 3.1) et d'opérateurs de norme ≤ 1. □

Définition : Soit $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n)$ croissante positive, on notera $U_p^a \in \mathcal{H}$ l'opérateur de Hecke $T(\zeta)$ sur les $V(G, U_0(p))$, où $\zeta \in G(\mathbb{A}_f)$ est partout trivial sauf en p où il vaut u^a. On pose $U_p := U_p^{(0,1,\dots,n-1)}$. Les U_p^a commutent entre eux 2 à 2 (cf. §4.5.2).

On déduit alors de [**30**] §A.2 (cf. 4.3),

THÉORÈME 4.1. *Il existe des uniques séries entières $P_\chi^a(s,T), Q_\chi^a(s,T) \in A(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ telles que pour tout $s \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$,*

$$P_\chi^a(s,T) = \det(1 - TU^a_{p\,|\mathcal{S}_{\chi,s}(G,U_0(p))}),\ Q_\chi^a(s,T) = \det(1 - TU^a_{p\,|\mathcal{N}_{\chi,s}(G,U_0(p))})$$

Suivant [**33**] §1.3, on rappelle que si X est un espace rigide, $A(X)$ l'anneau des fonctions rigides analytiques globales sur X, $P \in A(X)[[T]]$ est appelée série entière sur X si c'est la série associée à une fonction rigide-analytique sur $X \times \mathbb{A}^1_{rig}$. Si X est un affinoide réduit, et si $P(x,T) = \sum_{i \geq 0} a_i(x) T^n$, il est équivalent de demander que $|a_i| r^i \underset{i\to\infty}{\to} 0, \forall r > 0 \in \mathbb{R}$, $|.|$ étant la norme sup sur X. On note $A(X)\{\{T\}\}$ l'anneau des séries entières sur X, *une série de Fredholm sur X est une série entière F sur X telle que* $F(0) = 1$, soit $F \in 1 + TA(X)\{\{T\}\}$. Par le théorème ci-dessus, $P_\chi^a(T)$ et $Q_\chi^a(T)$ sont des séries de Fredholm sur $\mathcal{W}$.

Si A est un anneau local complet d'idéal maximal m_A, une série entière sur A est un élément

$$F(T) = \sum_{i \geq 1} a_i T^i \in A[[T]],\ \text{tel que si } c_i = \sup\{n \in \mathbb{N}, a_i \in m_A^n\},\ \text{alors } c_i/i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

On note $A\{\{T\}\}$ l'anneau des séries entières sur A. $F \in A\{\{T\}\}$ est appelé série de Fredholm sur A si $F(0) = 1$. Dans notre cas, $A = \mathcal{O}_L[[t_1, ..., t_n]] = \Lambda$ et si $X = \mathcal{W}$, et de toute série de Fredholm sur A on déduit par restriction une série de Fredholm sur $\mathcal{W}$ au sens de 4.6. Des séries de Fredholm sur Λ sont fournies par le lemme suivant, généralisant quelque peu le théorème 4.1 :

LEMME 4.3. *Soient a strictement croissante, $v \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} U_p^a \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, alors il existe une unique série de Fredholm sur Λ dont l'évaluation en $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ coïncide avec* $\det(1 - Tv_{|\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))})$. *En particulier, les P_χ^a sont dans* $1 + T\Lambda\{\{T\}\}$.

Preuve : L'hypothèse sur v implique que sa restriction au $A(\mathcal{W}_r)$-module de Banach orthonormalisable $\mathcal{S}_\chi(r)(G, U_0(p)))$ est complètement continue, la théorie de Coleman nous fournit une série entière sur $\mathcal{W}_r$: $P_{\chi,v,r} = \det(1 - Tv_{|\mathcal{S}_\chi(r)(G,U_0(p))})$. La compatibilité à l'extension des scalaires contractante du déterminant de Fredholm (cf. [**30**] A.2.5) nous donne, faisant grandir r dans $[1, |\omega/\mathbf{p}|[\cap p^{\mathbb{Q}}$ et notant que $\bigcup_r (\mathcal{W}_r \times \mathbb{A}^1_{rig})$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$, un élément $P_{\chi,v}(T) \in 1 + T\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{rig}(\mathcal{W})\{\{T\}\}$. Ses coefficients sont dans Λ d'après 4.2, car ce sont des fonctions sur $\mathcal{W}$ bornées par 1 et rationnelles (4.3). Cela implique alors $P_{\chi,v}(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$.

On sait, par [**30**] A.2.5, que la formation du déterminant de Fredholm est compatible à l'évaluation en $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, l'unicité de la proposition est un argument direct de Zariski-densité de ces points dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. $\square$

Définition : On pose $P_\chi := P_\chi^{(0,1,\dots,n-1)}$ et $Q_\chi := Q_\chi^{(0,1,\dots,n-1)}$.

4.7. Classicité des formes de petite pente.

4.7.1. *Formes de pente finie.* Si V est un $\mathbb{C}_p$-vectoriel de Banach orthonormalisable, $L \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(V)$ complètement continu, $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note V^α le plus grand sous-$\mathbb{C}_p$-vectoriel de dimension finie stable par L sur lequel L a toutes ses valeurs propres de valuation α. Un élément de V sera dit de pente finie pour L s'il est dans $\oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} V^\alpha$.

Si une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ est de pente finie pour un U_p^a avec a strictement croissante, alors elle est de pente finie pour tous les $U_p^{a'}$ avec a' strictement croissante. En effet, U_p^a est un monôme en les $n+1$ opérateurs $U_p^{(0,\dots,0,1,\dots,1)}$, chacun intervenant. Le sous-espace de dimension finie de $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ sur lequel U_p^a est de pente α donnée est stable par tous les $U_p^{a'}$, car ces derniers commutent à U_p^a. Comme U_p^a y est inversible, les $U_p^{(0,\dots,0,1,\dots,1)}$ le sont donc aussi, ainsi donc que tout $U_p^{a'}$ avec a' strictement croissante. La notion d'être "de pente finie" pour une forme automorphe p-adique est donc indépendante de l'opérateur U_p^a choisi.

Proposition 4.7. *Si $p > 2$, une forme automorphe classique de type $(G, U_0(p), \chi)$ est de pente finie.*

Preuve : Dans la traduction exposée au §4.2, il suffit de montrer que si V est une représentation complexe admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ayant un sous-espace non nul sur lequel l'Iwahori $\Gamma_0(p)$ (car $p > 2$) agit par un caractère ψ, alors les $[IuI]$ y sont inversibles. Mais ces endomorphismes sont inversibles dans l'algèbre de Hecke complexe de $\Gamma_0(p)$ pour ce caractère par [**80**] lemme 7.6 (dans les notations de son §3, ψ est de niveau 1 et on a donc $(J,\rho) = (\Gamma_0(p), \psi)$). $\square$

Cette proposition est fausse en général si $p = 2$, et ce même pour $n = 2$.

4.7.2. *Classicité en petite pente.* La notation $V(G, U_0(p))^\alpha$ sous-entendra "pour l'action de l'opérateur U_p" défini plus haut. Si $t = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{Min}(t) := \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i)$ (noter que m_n n'intervient pas).

Proposition 4.8. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ tel que $\alpha < \mathrm{Min}(t) + 1$, alors*

$$\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl,\alpha} = \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^\alpha$$

Plus généralement, soient $a = (a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$ strictement croissante positive, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, tel que $\alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)(m_i + 1)$, alors le sous-espace de $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ sur lequel $u^{(a_1,\dots,a_n)}$ est de pente α est inclus dans $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$.

Preuve : On pose $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} := \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))/\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$, $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl} := B_{t,\tau_t\chi}(G, U_0(p))$ et $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} := \mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))/\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$. On a alors une surjection canonique Hecke équivariante :

$$\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl} \to \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$$

On fixe $(a_1, ..., a_n)$ comme dans l'énoncé, on regarde tout d'abord l'action de $[u^a]_t$ sur $\mathcal{N}_{\chi,t}$. Pour tout monôme M en les $z_{i,j}$ de poids $t' = (m'_1, ..., m'_{n-1})$, on a $[u^a]_t(M) = p^{n(M)}M$ où $n(M)$ est un entier (lemme 2.1). Le monôme de poids t' pour lequel $n(M)$ est minimal est $M' = \prod_{i=1}^{n-1} z_{i,2}^{m'_i}$, pour lequel $n(M')$ vaut $m'_1(a_2 - a_1) + \cdots + m'_{n-1}(a_n - a_{n-1})$.

L'action de U_p^a sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ se décompose sous la forme $U_p^a = \sum_{i=1}^r [T_i]_t \cdot \sigma_i$ où les σ_i sont des opérateurs de norme 1, et les T_i sont dans $\mathbb{T}^a$ agissant diagonalement via ι, par l'action $[.]_t$, sur $\mathcal{N}_{\chi,t}^h$. Nous allons voir que $U_p^a/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}$ est entier sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. Il suffit de le voir pour chacun des T_i, et $\Gamma_0(p)$ agissant par des automorphismes de norme ≤ 1, il suffit de le voir pour $[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i)+1}$. Or $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$ est isométriquement isomorphe (avec action de $[u]_t$) au sous-espace de $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{N}_{\chi,t}^h$ engendré par les vecteurs dont les coordonnées sont des monômes de poids $t' = (m'_1, ..., m'_{n-1})$ tels qu'il existe $i < n$ vérifiant $m'_i > m_i$. Ainsi, $[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}$ est entier sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. Autrement dit, $|[u]_t/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}| \leq 1$, puis

$$|U_p^a/p^{\mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i+1)(a_{i+1}-a_i)}| \leq 1$$

Par passage au quotient, on en déduit la même chose pour U_p^a sur $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$. En particulier, les valeurs propres de U_p^a y sont de pente $\geq \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i + 1)(a_{i+1} - a_i)$. Ainsi, si U_p^a a une valeur propre de pente $\alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i) + 1$, son image dans $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{ncl}$ est nulle, ce que l'on voulait. □

Remarques :

- Les calculs ci-dessus "pour $h = 1$" montrent qu'une section du fibré en droites de poids t sur la variété de drapeaux F qui converge sur l'ouvert affinoide $\mathcal{F}$ et qui est propre pour $\mathrm{diag}(1, p, ..., p^{n-1})$ de pente α est une section globale dès que $\alpha < \mathrm{Min}(t) + 1$.
- Il faut noter que le sous-monoïde de U engendré par les u^a avec $a = (0 = a_1 < a_2 < ... < a_n)$ n'est pas de type fini si $n > 2$. Nous disposons donc, pour $n > 2$, d'une infinité de critères distincts de "classicité en petite pente".

Définitions : Soit $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$, de pente $0 \leq \alpha < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(m_i + 1)(a_{i+1} - a_i)$ pour U_p^a (resp. pour U_p) sera dite *très classique pour* U_p^a (resp. *très classique*). Une forme automorphe p-adique très classique pour un U_p^a est classique.

4.8. Opérateurs U et algèbre de Hecke-Iwahori.

4.8.1. *Notations.* Soient P le Borel supérieur de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, D le sous-groupe du tore diagonal composé des éléments à coefficients dans $p^{\mathbb{Z}}$, $U \subset D$ comme en 2.1, et l'Iwahori I, *i.e.* le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ des éléments triangulaires supérieurs modulo p, $I = \Gamma_0(p)$ si $p > 2$. Si M est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\overline{M}$ désignera sa projection dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Si $0 \leq i \leq n$, on notera

$$u_i := \mathrm{diag}(1, ..., 1, p, ..., p), \quad \text{avec } i \text{ fois le terme } 1,$$

et si de plus $i > 0$,

$$x_i := u_{i-1}/u_i$$

Si M est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $[MgM]$ désignera toujours la double classe associée à g dans l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ relativement à M, notée $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), M)$.

4.8.2. *Rappels.* Soit $\chi := (\chi_1, ..., \chi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \to \mathbb{C}^*$ un caractère continu non ramifié, on le verra aussi par restriction comme un caractère de D, et par extension comme un caractère de P. On note $\mathrm{Ind}(\chi)$ l'induite parabolique lisse normalisée de χ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Explicitement, soit

$$\delta^{1/2} := (|.|^{(n-1)/2}, |.|^{(n-3)/2}, \cdots, |.|^{(1-n)/2})$$

le caractère (non ramifié) "module" de P, $\delta^{1/2}(x_i) = p^{(2i-n-1)/2}$,

$$\mathrm{Ind}(\chi) := \{f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C},\ \text{lisses}, f(bg) = \delta^{\frac{1}{2}}(b)\chi(b)f(g),\ \ \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p),\ \ b \in P\}$$

Le caractère χ étant non ramifié, $\mathrm{Ind}(\chi)^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ et la représentation de l'algèbre de Hecke non ramifiée $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p))$ sur ce dernier est un caractère $\psi = \psi(\chi)$ vérifiant

$$\forall i = 1, ..., n, \quad \psi([\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)u_{n-i}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)]) = p^{\frac{i(n-i)}{2}} \sum_{I \subset \{1,...,n\}, |I|=i} \prod_{j \in I} \chi_j(p)$$

4.8.3. *Action des opérateurs U sur les I-invariants de* $\mathrm{Ind}(\chi)$. Nous examinons dans ce paragraphe l'action de l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ sur $\mathrm{Ind}(\chi)^I$, et plus précisément celle des opérateurs de la forme $[IuI]$, $u \in U$. La décomposition de Bruhat s'écrit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} PwI$, et χ étant non ramifié, il vient que $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ est de dimension $n!$ sur $\mathbb{C}$.

Lemme 4.4. *La semi-simplification de la représentation sur* $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ *de la famille commutative des* $[IuI]$*,* $u \in U$*, est somme directe des* $n!$ *caractères* χ_w*,* $w \in \mathfrak{S}_n$*, définis par* $\chi_w([IuI]) := \delta^{1/2}(u)\chi(w^{-1}uw)$.

Ce résultat est une conséquence d'une description de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ due à Bernstein, dont nous allons brièvement en rappeler certains aspects, en suivant [**81**] §1 et §5.

Soit $w \in D.\mathfrak{S}_n$, $[IwI]$ est un élément inversible de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ (car on est en caractéristique première à p), et l'application $u \in U \mapsto [IuI] \in H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$ est un morphisme injectif de monoïdes $U \longrightarrow H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$. On normalise ce morphisme en le multipliant par $z\delta^{-1/2}$, ou z est le caractère de D défini par $z(x_i) = p^{-1}$ pour tout i, il s'étend donc en un unique morphisme de groupes

$$D \longrightarrow H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)^*$$

On désignera encore par $d \in H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, l'image de $d \in D$ par ce morphisme. En particulier, $x_i = p^{\frac{n-1}{2}-i}[Iu_{i-1}I][Iu_iI]^{-1}$.

La décomposition de Bruhat-Iwahori $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w \in D\mathfrak{S}_n} IwI$ montre que la sous-algèbre

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$$

de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ est l'algèbre des polynômes formels de Laurent en les x_i. Soit $H_{\mathfrak{S}_n}$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$ ayant pour base les $[IwI]$ avec $w \in \mathfrak{S}_n$. C'est une sous-algèbre de $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, isomorphe à $H(\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}, \overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)})$, via $[IwI] \mapsto$

$[\overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} w \overline{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}]$. Le résultat de Bernstein est que $\mathcal{A}$ et $H_{\mathfrak{S}_n}$ engendrent $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), I)$, avec les relations de commutation suivantes ($s_j = (j, j+1) \in \mathfrak{S}_n$) :

$$x_i[Is_jI] = [Is_jI]x_i, \text{ si i} \neq \text{ j, j+1}$$
$$x_i[Is_iI] = [Is_iI]x_{i+1} - (p-1)x_{i+1}, \;\; i = 1, ..., n-1$$
$$x_{i+1}[Is_iI] = [Is_iI]x_i + (p-1)x_{i+1}, \;\; i = 1, ..., n+1$$

Par conséquent, faisant agir $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ sur $\mathcal{A}$ par automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbre et en permutant les coordonnées sur D, on a la formule suivante. Soient $x \in \mathcal{A}$ et $w \in \mathfrak{S}_n$,

$$x[IwI] = [IwI]w^{-1}(x) + \sum_{w' < w} [Iw'I]a_{w',w,x}, \quad \text{avec } a_{w',w,z} \in \mathcal{A}, \tag{14}$$

et $<$ désigne l'ord re de Bruhat associé aux s_j dans la formule ci-dessus.

Prouvons le lemme maintenant. Si $w \in \mathfrak{S}_n$, soit e_w l'unique élément de $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ tel que si $w' \in \mathfrak{S}_n$, $e_w(w') = 0$ ou 1 selon que $w \neq w'$ ou $w = w'$. Si on ordonne la base des e_w de manière croissante avec la longueur de w (par rapport à la famille des s_j), nous allons voir que les $[IuI]$, $u \in U$, sont triangulaires supérieurs.

- Par la décomposition de Bruhat-Iwahori, si $u \in U$ et $w' \in \mathfrak{S}_n$, $(IuI) \cap w'^{-1}(PI) = (IuI) \cap w'^{-1}D.I$ est vide sauf si $w' = 1$, auquel cas il vaut uI. Ainsi $([IuI].e_1)(w') = 0$ si $w' \neq 1$, $e_1(u) = (\delta^{1/2}\chi)(u)$ sinon, soit $[IuI].e_1 = (\delta^{1/2}\chi)(u)e_1$. $\mathcal{A}$ agit donc sur e_1 par un caractère envoyant x_i sur $(z\chi)(x_i) = \chi_i(p)/p$.
- Si $w, w' \in \mathfrak{S}_n$, $(IwI) \cap w'^{-1}PI = (IwI) \cap w'^{-1}I$, qui est vide sauf si $w = w'^{-1}$, auquel cas c'est wI. Ainsi, $[IwI].e_1 = e_{w^{-1}}$.

Par la formule (14), si $x \in \mathcal{A}$ et $w \in \mathfrak{S}_n$,

$$x.e_w = (x.[Iw^{-1}I]).e_1 = (z\chi)(w(x))e_w + \sum_{w' < w^{-1}} (z\chi)(a_{w',w,x})e_{w'^{-1}}$$

On conclut en définissant χ_w comme le caractère de $\mathcal{A}$ sur e_w (modulo les $e_\tau, \tau < w$) ramené aux $[IuI]$ par la relation $[IuI] = \delta^{1/2}(u)z^{-1}(u)u$. □

Définition : Pour $i = 1, ..., n$, on pose

$$F_i := [Iu_{n-i}I][Iu_{n-i+1}I]^{-1}$$

Par le lemme 4.4, $\chi_w(F_i) = p^{\frac{n-1}{2}}\chi_{\omega(n+1-i)}(p)/p^{i-1}$. Soit $P_\chi(T) \in \mathbb{C}[T]$ le polynôme de Hecke de l'unique constituant non ramifié de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans $\mathrm{Ind}(\chi)$, on a

$$P_\chi(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - p^{\frac{n-1}{2}}\chi_i(p)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{\frac{i(i-1)}{2}}\psi([\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)u_{n-i}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)])T^{n-i}$$

On en déduit que "F_1 choisit une racine du polynôme de Hecke". Plus généralement, $\chi_w(F_i)$ est de la forme λ/p^{i-1} où λ est une racine du polynôme de Hecke, et à w fixé on a :

$$P_\chi(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - p^{i-1}\chi_w(F_i))$$

Remarque : Soient $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, $\nu_t : D \to \mathbb{C}^*$ l'inverse du caractère de plus haut poids t (que l'on a introduit au §3.5), si on considère l'action des $[IuI]$ sur $\mathrm{Ind}(\chi)^I$ tordue par ν_t, ce qui sera le cas dans les applications du §7.5, les caractères apparaissant sont les $(\nu_t \chi_w)$ et vérifient, pour une certaine racine λ du polynôme de Hecke :

$$(\nu_t \chi_w)(F_i) = \lambda / p^{i-1+m_n+m_{n-1}+m_{n-2}+\cdots+m_{n-i+1}}$$

5. La série caractéristique de U_p

5.1. Borne inférieure uniforme pour le polygone de Newton.

LEMME 5.1. *Soient $v \in \mathbb{Q}$, $r = p^v$, $1 \leq r < |\omega/\mathbf{p}|$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, si $Q_\chi(t,T) = 1 + \sum_{i \geq 1} a_i T^i$, alors $|a_i| \leq 1$, et son polygone de Newton est minoré indépendamment de t dans $\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ par le graphe de la fonction*

$$x \mapsto C_r(h,N) x (x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$$

avec $C_r(h,N) = \varepsilon_r (N!/h)^{1/N} \frac{2N}{(N+1)(N+2)^2}$, $N = 2^n - n - 1$, $\varepsilon_r = v(\mathbf{p}/\omega) - v$.

Preuve : $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p)) \simeq \mathcal{N}_{\chi,t}^h$, on suppose ici les scalaires étendus à $\mathbb{C}_p$ et on fixe comme base orthonormale sur $\mathbb{C}_p$ celle des $e_{M,a}$, M parcourant l'ensemble des monômes en les $z_{i,j}$, $1 \leq a \leq h$, définie par

$$e_{M,a} := (0, \cdots, 0, M, 0, \cdots, 0)$$

M étant à la a^{ieme} case. $U_p = \sum_{i=1}^r [T_i]_t \cdot \sigma_i$, où T_i agit diagonalement sur $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))^h$ par un élément de $\mathbb{T}$ sur chaque coordonnée, par l'action $[.]_t$. Soit g un tel élément, on montre ci-dessous que $g(e_{M,a})$ a son coefficient en $e_{M',a'}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq \varepsilon_r |M'|$ où $|M'| = m'_1 + \cdots + m'_{n-1}$ si M' est de poids $(m'_1, ..., m'_{n-1})$, ε_r comme dans l'énoncé. Notons que cette minoration est indépendante du couple (M,a), de t, et de g, elle vaut donc aussi par sommation pour U_p, les σ_i étant de simples permutations.

Fixons donc $g \in \mathbb{T}^a$, $M \in \mathcal{N}_{\chi,t}$ un monôme en les $z_{i,j}$. Si $t = (t_1, ..., t_n)$, on a $[g]_t(M) = \prod_{i=1}^n \mathbf{j}_i(g)^{t_i} g(M)$. Notons que $g(M)$ est un produit de $g(z_{i,j})$ pour chaque $z_{i,j}$ intervenant dans M (avec multiplicité bien sûr). On fixe i,j, on sait la forme de $g(z_{i,j})$ par les équations (8) :

$$\frac{a_1 + p(\sum_{k=2}^{J(i)} a_k z_{i,k})}{\lambda + p(\sum_{k=2}^{J(i)} b_k z_{i,k})}, \ \ a_k, b_k \in \mathbb{Z}_p, \ \lambda \in \mathbb{Z}_p^*$$

En particulier, chaque $z_{i,k}$ apparaît avec un multiple de p comme coefficient, et après développement du dénominateur, c'est donc une série de puissances des $z_{i,k}$ $(1 < k \leq J(i))$ telle que chaque monôme en les $z_{i,k}$ de degré total d a son coefficient dans $\mathbb{Z}_p$ divisible par p^d. On en déduit le même résultat pour $g(M)$, qui est un produit de $g(z_{i,j})$. Il reste à examiner les cocycle $\mathbf{j}_i(g)^{t_i}$:

$$\mathbf{j}_i(g) = 1 + \mathbf{p} f_i, \ f_i \in \mathbb{Z}_p + \sum_{i=2}^{J(i)} \mathbb{Z}_p z_{i,j} \text{ si } i < n, \ f_n \in \mathbb{Z}_p$$

$$(1+\mathbf{p}f_i)^{t_i} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{t_i(t_i-1)...(t_i-n+1)}{n!}\mathbf{p}^n f_i^n$$

Notons que $|t_i| \leq r$ et donc que la valuation du coefficient de f_i^n est supérieure à $n(v(\mathbf{p}/\omega) - v) = n\varepsilon_r$. Chaque monôme de degré total d en les $z_{i,j}$ apparaît dans $\mathbf{j}_i(g)^{t_i}$ avec un coefficient dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq d\varepsilon_r$. Puisque $\varepsilon_r \leq 1$, le développement de $[g]_t(M)$ sur la base des monômes en les $z_{i,j}$ est donc tel que chaque monôme de degré total d a un coefficient dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ de valuation $\geq d\varepsilon_r$, ce qui était annoncé.

Ceci nous conduit à ordonner la base $e_{M,a}$ de la manière suivante. Soient $s \geq 0$ et $\mathcal{A}_s$ le sous-$\mathbb{C}_p$-vectoriel de dimension finie engendré par les $e_{M,a}$ tels que $|M| = n$. Alors $\mathcal{N}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ est somme directe topologique "orthogonale" des $\mathcal{A}_s$. On pose $r = 2^n - n - 1$ (qui est la dimension de $\mathcal{B}$, ou encore le nombre des paramètres $z_{i,j}$), on aura besoin des formules suivantes :

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s) = h\#\{(a_1, ..., a_N) \in \mathbb{N}^N, \sum_{i=1}^N a_i = s\} = h\binom{s+N-1}{N-1}$$

$$\sum_{s=0}^{s'} \dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s) = h\binom{N+s'}{N}$$

$$s' \geq 1,\ \sum_{s=0}^{s'} s\cdot\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_s) = hN\binom{N+s'}{N+1}$$

On ordonne totalement la base des $e_{M,a}$ en $(e_i)_{i\geq 1}$ de façon à ce que $e_1, ..., e_h$ engendrent $\mathcal{A}_0$, $e_{h+1}, ..., e_{h(N+1)}$ engendre $\mathcal{A}_1$, et généralement que les e_i avec $h\binom{N+s-1}{N} < i \leq h\binom{N+s}{N}$ engendrent $\mathcal{A}_s$.

Soit donc $1+\sum_{i\geq 1} a_i T^i = \det(1 - TU_{p|\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))})$. Par la majoration des coefficients de la colonne $U_p(e_{M,a})$ donnée plus haut, et l'expression des a_i en fonction des mineurs de la matrice de U_p, on en déduit que

$$\begin{cases} \text{si } s \geq 2, \text{ et si } h\binom{N+s-1}{N} < i \leq h\binom{N+s}{N} \\ v(a_i) \geq \varepsilon_r \sum_{q=0}^{s-1} q\cdot\dim(\mathcal{A}_q) + (i - h\binom{N+s-1}{N})s \geq \varepsilon_r hN\binom{N+s-1}{N+1} \end{cases}$$

On a $hN\binom{N+s-1}{N+1} = N\frac{s(s-1)}{(N+1)(N+s)}h\binom{N+s}{N} \geq N\frac{s(s-1)}{(N+1)(N+s)}i$, de plus de $i \leq h\binom{N+s}{N}$, on tire $N + s \geq (N!i/h)^{1/N}$, d'où

$$v(a_i) \geq \varepsilon_r i(N!i/h)^{1/N}\frac{Ns(s-1)}{(N+1)(N+s)^2}$$

Il est facile de voir que $\frac{s(s-1)}{(N+s)^2} \geq 2/(2+N)^2$ si $s \geq 2$, d'où

$$v(a_i) \geq i^{1+1/N}C_r(h,N),\ \ C_r(h,N) := \varepsilon_r(N!/h)^{1/N}\frac{2N}{(N+1)(N+2)^2}$$

On a écarté le cas où $i \leq h(N+1)$, il est clair qu'alors $v(a_i) \geq 0$. On en déduit que le polygone de Newton de $1 + \sum_{n \geq 1} a_n T^n$ est en dessus du graphe de la fonction

$$f_r(x) = C_r(h,N)x(x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$$

C'est ce que l'on voulait. □

Corollaire 5.1. *Soit $P_\chi(s,T) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n(s)T^n$, alors $a_n(s) = \sum_{m \geq 0} a_{n,m} s^m$ avec $a_{n,m} \in \mathbb{Z}_p$ et $|a_{n,m}| \leq |\mathbf{p}/\omega|^m$. De plus le polygone de Newton de $P_\chi(s,T)$ est uniformément minoré sur $s \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ par le graphe de la fonction f_r.*

Preuve : Soit $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, la suite exacte de $\mathbb{C}_p$-Banach

$$0 \longrightarrow I\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow \mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow \mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p)) \longrightarrow 0$$

est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ d'une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-Banach orthonormalisables, donc scinde topologiquement par [**93**] §1 prop. 2. L'opérateur compact U_p étant un endomorphisme de cette suite, [**93**] §2 lemme 2 assure que :

$$P_\chi(t,T)\det(1 - TU_{p|I\mathcal{N}_{\chi,t}(G,U_0(p))}) = Q_\chi(t,T)$$

En particulier, le polygone de Newton de $P_\chi(t,T)$ est extrait de celui de $Q_\chi(t,T)$, il est donc minoré par celui de ce dernier. On conclut par le lemme 5.1. L'assertion d'intégralité et croissance provient de ce que l'on sait que $\det(1 - TU_{|\mathcal{S}_\chi(1)(G,U_0(p))})$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}_p\langle(s_k)\rangle$, que ses évaluations sur les $\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ sont à coefficients entiers (par la proposition 3.1), et du principe du maximum sur $\mathcal{W}_r$. □

5.2. Une congruence.

Proposition 5.1. *$P_\chi(s,T) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n(s)T^n \in A^0(\mathcal{W})\{\{T\}\}$, soient $s, s' \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $m \in \mathbb{N}$, si $|s - s'| \leq |p^m|$, alors $|a_n(s) - a_n(s')| \leq |\mathbf{p}p^m|$.*

Preuve : Soient $s, s' \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. On identifie $\mathcal{S}_{\chi,s}(G,U_0(p))$ et $\mathcal{S}_{\chi,s'}(G,U_0(p))$ au $\mathbb{C}_p$-espace de Banach $\mathcal{S}_{\chi,0}(G,U_0(p)) = A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)_\chi(G,U_0(p)) \simeq A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^h_\chi$. On s'intéresse aux deux actions de U_p sur cet espace : $[.]_s$ et $[.]_{s'}$. Comme $[u]_s = [u]_{s'}$, il suffit de comparer les actions diagonales de $\Gamma_0(p)$. La boule unité $A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^0_\chi$ est préservée par les opérations $[.]_*$ de $\Gamma_0(p)$, par la proposition 3.1. On fixe un entier $m \geq 0$, $\gamma \in \Gamma_0(p)$, on va montrer que les $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-endomorphismes $[\gamma]_s$ et $[\gamma]_{s'}$ de $A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)^0_\chi/\mathbf{p}p^m A(\mathcal{F}/\mathbb{C}_p)_\chi$ sont égaux.

Par hypothèse, $s = s' + p^m u$, $|u| \leq 1$; si $s = (s_1, ..., s_n)$ et $s' = (s'_1, ..., s'_n)$, alors $s_i = s'_i + p^m u_i$, $u_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. De plus, si $1 \leq i \leq n$, $\gamma \in \Gamma_0(p)$,

$$\mathbf{j}_i(\gamma)^{s_i} = \mathbf{j}_i(\gamma)^{s'_i}(\mathbf{j}_i(\gamma)^{p^m})^{u_i}$$

Notons que $\mathbf{j}_i(\gamma)$ est de la forme $1 + \mathbf{p}f$, $f \in A(\mathcal{F})^0$. On en déduit que, $(1+\mathbf{p}f)^{p^m} = 1 + \mathbf{p}p^m g$, $g \in A(\mathcal{F})^0$, puis que

$$(1+\mathbf{p}f)^{u_i p^m} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{u_i(u_i-1)\cdots(u_i-n+1)}{n!}\mathbf{p}^n p^{nm} g^n$$

$$v(\mathbf{p}^n p^{nm}/n!) = n(v(\mathbf{p}) + m) - \frac{(n - S_n)}{p-1} \geq v(\mathbf{p}) + m, \ \forall n \geq 1, \ m \geq 0$$

On conclut $\mathbf{j}_i(\gamma)^{p^m u_i} \equiv 1 \in A(\mathcal{F})^0/\mathbf{p}p^m A(\mathcal{F})^0$, ce que l'on voulait. On en déduit que les deux opérateurs U_p coïncident sur ce même espace, que leurs séries caractéristiques, qui sont dans $1 + T\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\{\{T\}\}$, sont égales modulo $\mathbf{p}p^m$. □

Remarque : La même preuve vaut pour $Q_\chi(s, T)$.

5.3. Application d'un résultat de Wan.

THÉORÈME 5.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, t et $t' \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, si $|t - t'| \leq |p^{m_r(\alpha)}|$, avec*

$$m_r(\alpha) = [h\alpha(A_r\alpha + B)^N],\ \ A_r = \frac{(N+1)(N+2)^2}{2v(\mathbf{p}/r\omega)N(N!)^{1/N}},\ B = (N+1)^{1/N}$$

alors les parties de pente $\leq \alpha$ des polygones de Newton de $P_\chi(t, T)$ et $P_\chi(t', T)$ coïncident.

Preuve : On applique le lemme 4.1 de [**109**], on le rappelle :

LEMME 5.2. *(Wan) Soient $Q_1(T)$ et $Q_2(T)$ deux éléments de $1 + T\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\{\{T\}\}$, N_i $(i = 1, 2)$ la fonction sur $\mathbb{R}^+$ dont le graphe est le polygone de Newton de Q_i. On suppose que $\mu(x)$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que*

$$\mu(0) \leq 0,\ N_i(x) \geq x\mu(x)\ (1 \leq i \leq 2, x \geq 1),\ \underset{x\to+\infty}{\mu(x)} = \infty$$

On suppose de plus que $x\mu^{-1}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et on pose $m(x) := [x\mu^{-1}(x)]$. Si $Q_1(T) \equiv Q_2(T) \bmod p^{m(\alpha)+1}$ pour un $\alpha \geq 0$, alors N_1 et N_2 coïncident en pente $\leq \alpha$.

Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, on regarde $Q_i(T) = P_\chi(t_i, T)$. Alors s'il on considère $\mu(x) = C_r(h, N)(x^{1/N} - (h(N+1))^{1/N})$ comme dans le corollaire 5.1, $\mu^{-1}(x) = (x/C_r(h, N) + (h(N+1))^{1/N})^N$ et donc $x\mu^{-1}(x)$ est croissante et μ satisfait les hypothèses du lemme de Wan. On en déduit le théorème. Notons que Wan énonce son résultat dans $\mathbb{Z}_p$ mais sa preuve est tout aussi valable dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. □

Exemples : Dans $\mathcal{W}_1$, si $n = 2$, 3 ou 4, on a respectivement $m_1(\alpha) \leq [h\alpha(18\alpha + 2)]$, $[h\alpha(21\alpha + 2)^4]$, ou $[h\alpha(38\alpha + 2)^{11}]$. Si $n > 4$, $m_1(\alpha) \leq [h\alpha(3N\alpha + 2)^N]$.

De l'assertion de classicité (proposition 4.8), on déduit :

COROLLAIRE 5.2. *Soient $\alpha \geq 0$, $t, t' \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, si $\mathrm{Min}(t), \mathrm{Min}(t') > \alpha - 1$, et si $|t - t'| \leq |p^{m(\alpha)}|$, avec*

$$m(\alpha) = [h\alpha(A_1\alpha + B)^N]$$

alors

$$\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl,\alpha}) = \dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t'}(G, U_0(p))^{cl,\alpha})$$

COROLLAIRE 5.3. *Les pentes de U_p agissant sur les formes classiques forment une partie discrète de $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^+$.*

Preuve : Soient $\alpha \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$, par le théorème précédent, il existe un voisinage $\mathcal{U}_t$ de t dans $\mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$ tel que si $s \in \mathcal{U}_t$, la partie de pente $\leq \alpha$ du polygone de Newton des $P_\chi(s, T)$ est indépendante de s, en particulier il n'y a qu'un nombre fini de pentes $\leq \alpha$ possibles sur $\mathcal{U}_t$. Par compacité de $\mathcal{W}_1(\mathbb{Q}_p)$, on conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de pentes $\leq \alpha$ de U_p sur les $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ $(t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z})$, et donc à fortiori sur les $\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^{cl}$. $\square$

5.4. Polygone de Newton sur un affinoide. Soient K un corps local, π une uniformisante de K, A une K-algèbre affinoide réduite, $X := \mathrm{Specmax}(A)$, et $|.|$ la norme sup sur A. On fixe $f = \sum_{i \geq 0} a_i T^i$ dans $1 + TA\{\{T\}\}$. Pour tout $x \in X$, on note f_x l'évaluation en x de f, $f_x \in (A/x)\{\{T\}\}$. On supposera de plus que $A^{00} = \pi A^0$ et que $|.|$ est multiplicative sur A, on note v la valuation associée.

PROPOSITION 5.2. *Soit $s \in \mathbb{Q}$, on suppose que la partie $\mathcal{P}$ de pente $\leq s$ du polygone de Newton de f_x ne dépend pas de $x \in X$, et que $v(K)$ contient les pentes de $\mathcal{P}$. Alors il existe un unique polynôme P dans $1 + TA[T]$ de coefficient dominant inversible et une unique série entière $S \in 1 + TA\{\{T\}\}$ telle que $f = PS$, que le polygone de Newton de P_x soit exactement $\mathcal{P}$, et que $(P, S) = 1$ dans $A\{\{T\}\}$.*

De plus, si $\mathcal{P}$ a r pentes distinctes $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, de longueur respective $N_1,\ldots,N_r$, il existe des uniques polynômes $P_i(T) \in 1 + TA[T]$ de degré N_i, tels que pour tout $x \in X$, le polygone de Newton de $(P_i)_x$ n'a qu'une pente, de longueur N_i, égale à α_i, $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Enfin, $(P_i, S) = 1$ et $(P_i, P_j) = 1$ si $i \neq j$.

Preuve : i) Cas où $\mathcal{P}$ n'a qu'une pente, nulle, de longueur N. Par l'hypothèse sur les f_x, $\forall x \in X$,

$$|a_i(x)| \leq 1, \quad \forall i \geq 1$$
$$|a_N(x)| = 1$$
$$|a_i(x)| < 1, \quad \forall i > N$$

On en déduit par le principe du maximum que $|a_i| \leq 1$ $\forall i$, que $|a_N| = 1$ et que $|a_i| < 1$ si $i > N$. En particulier, f est dans A^0 <T>. De plus, a_N ne s'annulant pas, il est inversible dans A, son inverse est de norme 1 par l'hypothèse "$|.|$ est multiplicative", a_N est donc un inversible de A^0. Enfin, par l'hypothèse $A^{00} = \pi A^0$, on a que $a_i \in \pi A^0$ si $i > N$.

On regarde alors $M = A^0\langle T\rangle/(f(T))$, $M/\pi M = (A^0/\pi A^0)[T]/(\bar{f})$ où $\bar{f}$ est de degré N, de coefficient dominant inversible (par ce qu'on vient de dire).

Ainsi, $M/\pi M$ est fini, ce qui est donc le cas aussi de M (qui est π-complet séparé). On en déduit que $A\langle T\rangle/(f(T))$ est fini sur A. Comme il est plat (lemme 5.4), il est localement libre de rang fini sur A. Son rang se calcule en un point $x \in X$ quelconque, c'est donc $N = \dim_{A/x}((A/x)\langle T\rangle/(f_x))$. La multiplication par T a un polynôme caractéristique Q unitaire de degré N. La surjection canonique

$$A\langle T\rangle/(Q(T)) \to A\langle T\rangle/(f(T))$$

est donc un isomorphisme (les deux modules sont projectifs de même rang N). On conclut que $(f) = (Q)$ dans $A\langle T\rangle$, et il existe $S \in A\langle T\rangle$ inversible tel que $f = QS$. En regardant en $x \in X$, on a $f_x = Q_x S_x$ et S_x inversible dans $(A/x)\langle T\rangle$. Par conséquent les N racines (avec multiplicité) de pente 0 de f_x sont des racines de Q_x, qui est de degré N, et Q_x est donc proportionnel (par un facteur non nul dans A/x) à la partie de pente 0 de f_x, qui est un polynôme unitaire de degré N, dont le polygone de Newton est $\mathcal{P}$. Le coefficient constant b de Q ne s'annule donc jamais, il est inversible dans A. On renormalise ainsi

Q en $P = Q/b$, $P \in 1 + TA[T]$, et pour tout x, P_x n'a qu'une pente, nulle, de longueur N (cela implique comme plus haut que $P \in A^0[T]$). On pose $S' = bS$, $S' \in 1 + TA\langle T\rangle$.

Ainsi, $f = PS'$, et S' est inversible dans $A[T]/(P) = A\langle T\rangle/(P)$. Par le lemme 5.3, on conclut $S' \in 1 + TA\{\{T\}\}$ puis $(P, S') = 1$ (sous-entendu dans $A\{\{T\}\}$), ce que l'on voulait.

ii) Cas où $\mathcal{P}$, n'a qu'une pente, quelconque disons α, de longueur N. Soit u un élément de K tel que $v(u) = \alpha$, on regarde $g(T) = f(T/u)$. C'est encore une série entière dont les évaluations g_x ont pour polygone de Newton celui de f_x moins la droite passant par 0 de pente α. La première pente commune est donc 0 de longueur N. Le i) s'applique et $f(T) = P'(Tu)S'(Tu) = P(T)S(T)$ ou S est entière et premier à Q, et on obtient ce que l'on voulait.

iii) Cas général : par récurrence sur le nombre de pente de $\mathcal{P}$. Par hypothèse, $f(T) = P_1(T)S_1(T)$ ou S_1 est entière, P_1 a pour polygone de Newton uniforme $\mathcal{P}$ privé de sa dernière pente, et $(S_1, P_1) = 1$. Il est clair que S_x a pour première pente la dernière pente de $\mathcal{P}$, pour tout x, par la théorie du polygone de Newton sur un corps (voir [**66**]), et donc qu'on peut appliquer ii) a S_1. Par conséquent, $S_1(T) = P_2(T)S_2(T)$ et $f(T) = P_1(T)P_2(T)S_2(T)$ avec $(P_2, S_2) = 1$ (et $(P_1, P_2S_2) = 1$). Ainsi, S_2 est premier à P_1, P_2, et P_1P_2, et P_1 est premier à P_2. □

Lemme 5.3. *Soient $f \in 1+TA\{\{T\}\}$, $P \in 1+TA\{\{T\}\}$ et $S \in 1+TA\langle T\rangle$ tels que $f = PS$, alors $S \in A\{\{T\}\}$.*

Preuve : Soit $f = 1 + \sum_{n\geq 1} a_nT^n$, par le principe du maximum on choisit $x_n \in X$ tel que $|a_n(x_n)| = \sup_{x\in X} |a_n(x)|$. La série $\sum_{n\geq 0} a_n(x_n)T^n$ est entière sur $\mathbb{C}_p$, car $F \in A\{\{T\}\}$, on note Z son polygone de Newton. Par définition, Z borne inférieurement et uniformément les polygones de Newton de tous les f_x. La formule $f = SP$ et la théorie du polygone de Newton sur un corps (ici A/x) montre que le polygone de Newton de S_x pour tout x est celui de f_x auquel on a "soustrait" celui de P_x. Il est donc à plus forte raison minoré par Z et ceci par conséquent uniformément en x. Ainsi, si $S(T) = 1+\sum_{n\geq 1} b_nT^n$, on a $|b_n| = |b_n(z_n)|$ pour un certain $z_n \in X$ (principe du maximum). Le polygone de Newton de $1 + \sum_{n\geq 1} b_n(z_n)T^n$ est minoré par Z, et donc S est entière. □

Lemme 5.4. *Soient A une algèbre affinoide et $f \in 1 + TA\langle T\rangle$, alors $A\langle T\rangle/(f(T))$ est plat sur A.*

Preuve : On utilise le critère : soient $A \to B$ un morphisme plat entre anneaux noethériens, et f dans B, supposons que pour tout maximal m de A, f est non diviseur de 0 dans B/mB, alors B/fB est plat sur A. Ici $B := A\langle T\rangle$ est plat sur A. Soit $x \in X$, $B/xB = (A/x)\langle T\rangle$ est intègre et f est non diviseur de 0 car il y est non nul (son coefficient constant est 1). □

Remarques : Par la même méthode, on peut montrer que si $f \in 1 + TA\{\{T\}\}$ et que tous les f_x ont même polygone de Newton, alors f se factorise complètement selon les pentes communes. Une petite partie de la démonstration pourrait être remplacée par une préparation de Weierstrass dans le cas (qui nous intéresse) où A est l'anneau des fonctions sur une boule affinoide. Les hypothèses $A^{00} = \pi A^0$ et $|.|$ multiplicatives sont vérifiées dans nos applications mais sont en fait superflues :

PROPOSITION 5.3. *La proposition 5.2 reste vraie sans supposer ni $A^{00} = \pi A^0$, ni $|.|$ multiplicative, et aussi quand $K = \mathbb{C}_p$.*

Preuve : Le point essentiel est de prouver sous ces hypothèses le cas i) de la preuve de 5.2. Pour cela, le modèle de $A\langle T\rangle/(f(T))$ que nous avons choisi ne suffit pas, il faut utiliser la théorie des modèles formels de Raynaud. On conclut par le résultat plus général suivant :

LEMME 5.5. *([**36**] théorème 3.6.9) Soit $f : X \to Y$ plat, quasi-compact, séparé, entre deux espaces rigides X et Y, si f a ses fibres géométriques de degré constant d, alors f est fini de rang d.*

L'argument, dû à B.Conrad, consiste en la généralisation d'un théorème analogue en géométrie algébrique dû à Deligne et Rapoport.

6. Familles de formes automorphes

6.1. Familles ordinaires de Hida. Une forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ est dite ordinaire si c'est un vecteur propre de U_p de valeur propre une unité p-adique. Ces formes ont été largement étudiées par Hida (cf. [**53**], [**54**]), on retrouve certains aspects de sa théorie dans ce paragraphe. Par exemple, notons que si $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, toute forme $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ ordinaire est très classique par 4.8, de plus par 5.1 (avec $\alpha = 0$) la dimension du sous-espace de dimension finie des formes ordinaires classiques de poids $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est indépendante de t.

LEMME 6.1. *La suite $\{U_p^{r!}\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ vers un idempotent noté e_χ^{ord}.*

Preuve : D'après la proposition 4.4, $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ est un anneau topologique profini. Il suffit donc de prouver que dans un tel anneau, une suite de la forme $\{x^{r!}\}_{r\in\mathbb{N}}$ stationne en un idempotent dans chacun de ses quotients finis. On conclut en notant que tout élément d'un monoïde fini admet une puissance qui est un idempotent. □

On a donc un idempotent e_χ^{ord} dans $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, puis une décomposition

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) = e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \oplus (1 - e_\chi^{\mathrm{ord}})\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$$

PROPOSITION 6.1. *Le Λ-module $e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$ est libre de type fini.*

Preuve : On pose $M := \mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))$. Comme $e_\chi^{\mathrm{ord}} \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, il agit continûment sur M, ainsi que $1 - e_\chi^{\mathrm{ord}}$. On en déduit que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M = \ker(1 - e_\chi^{\mathrm{ord}})$ est un sous-Λ-module complet séparé de M. Comme c'est un facteur direct de M qui est plat sur Λ, il est aussi plat sur Λ. La proposition suivra donc après avoir prouvé que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est de type fini. Ayant vu que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est complet séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, il suffit de voir que $e_\chi^{\mathrm{ord}}M/\mathfrak{m}e_\chi^{\mathrm{ord}}M$ est de type fini. On se ramène de suite à montrer que u agit par un opérateur de rang fini sur $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}/\mathfrak{m}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}$, ce qui est immédiat : il est même de rang 1. □

On définit $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))^{\mathrm{ord}} := e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$ comme étant *le Λ-module des formes Λ-adiques ordinaires de type* $(G,U_0(p),\chi)$, on a vu qu'il est libre de rang fini sur Λ et facteur direct topologique de $\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$. L'image de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur $e_\chi^{\mathrm{ord}}\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$ est une Λ-algèbre de rang fini, sans torsion, équidimensionnelle de dimension n, dont chaque composante irréductible s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ (cf. lemme 6.4), c'est *l'algèbre de Hecke Λ-adique ordinaire*, on la note $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}^{\mathrm{ord}}$.

6.2. Construction locale des familles de pentes quelconques.

6.2.1. *Décomposition de Coleman du module de Banach des formes automorphes.* On rappelle le théorème suivant de Coleman (voir aussi [**22**] théorème 3.3) :

PROPOSITION 6.2. *([**30**] théorèmes A4.3, A4.5) Soient A une algèbre affinoide réduite, U un endomorphisme complètement continu d'un A-module de Banach orthonormalisable M, de série caractéristique* $\det(1-TU) = Q(T)S(T)$, $S \in 1+TA\{\{T\}\}$, *$Q \in 1+TA[T]$ de coefficient dominant inversible, Q et S étant premiers entre eux dans $A\{\{T\}\}$, alors M est somme directe de deux sous-A-modules fermés $M = M_1 \oplus M_2$ stables par U tels que :*

– *Si $d := \deg(Q)$, M_1 est localement libre de rang d et* $\det(1-TU_{|M_1}) = Q(T)$,

– *Si $Q^*(T) := T^dQ(1/T)$, $Q^*(U)_{|M_2}$ est inversible.*

Soit V un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$, le $A(V)$-module de Banach $\mathcal{S}_\chi(V)(G,U_0(p))$ est orthonormalisable sur $A(V)$ et U_p y a pour série caractéristique $P_\chi(s,T)$ restreinte à $A(V)\{\{T\}\}$, que l'on note $P_\chi(V)(s,T)$. Supposons que $P_\chi(V)(T) = Q(T)S(T)$ dans $A(V)\{\{T\}\}$, $Q(T) \in 1+TA(V)[T]$ de coefficient dominant inversible, $(Q,S) = 1$. La proposition 6.2 s'applique car $A(V)$ est une algèbre affinoide réduite donc semi-simple, et nous fournit une décomposition

$$\mathcal{S}_\chi(V)(G,U_0(p)) = \mathcal{S}_\chi(V,1)(G,U_0(p)) \oplus \mathcal{S}_\chi(V,2)(G,U_0(p))$$

en sous-modules stables par U_p avec les qualités suivantes :

– i) $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G,U_0(p))$ est un $A(V)$-module localement libre de rang $\deg(Q)$, et U_p y a $Q^*(T)$ pour polynôme caractéristique,

– ii) $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G,U_0(p)) = \ker(Q^*(U_p))$, ce qui le détermine uniquement, et $Q^*(U_p)$ est inversible sur $\mathcal{S}_\chi(V,2)(G,U_0(p))$

– iii) Le commutant de U_p dans $\mathrm{End}_{A(V)}(\mathcal{S}_\chi(V)(G,U_0(p)))$ stabilise $\mathcal{S}_\chi(V,1)(G,U_0(p))$.

6.2.2. *Variétés de Hecke locales.* Nous allons voir dans les paragraphes qui suivent comment la décomposition ci-dessus nous permet de construire des familles de formes automorphes p-adiques. On rappelle que l'on a défini l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ en 4.5.2. Tous les espaces que nous étudierons sont des modules sur cette algèbre. Le qualificatif "propre" pour un élément d'un tel module désignera par défaut "non nul, et vecteur propre pour l'action de tous les éléments de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$". L'anneau $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agit sur un tel vecteur propre par multiplication par un caractère, qu'il est coutume d'appeler *système de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$*.

On reprend $V \subset \mathcal{W}$ et $P_\chi = QS$ comme dans §6.2.1, la construction qui suit ne va dépendre que du couple (V,Q). Soient $M := \mathcal{S}_\chi(V,1)(G,U_0(p))$ défini *loc.cit.*, $A := A(V)$

et $\mathfrak{h}$ l'image de l'algèbre $\mathcal{H} \otimes_\Lambda A$ dans $\mathrm{End}_A(M)$. Le A-module $\mathrm{End}_A(M)$, normé par la norme sup, est complet et de type fini sur l'algèbre de Banach noethérienne A. Il a donc tous ses sous-A-modules fermés et de type fini sur A (cf. [**15**] 3.7.3). Ainsi, $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}_A(M)$ est une sous-A-algèbre de Banach commutative et finie sur A, c'est donc une algèbre affinoide par [**15**] 6.1.1. En particulier, $\mathfrak{h}$ est fermée et l'application continue $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathrm{End}_A(M)$ a son image dans $\mathfrak{h} \cap \mathrm{End}_A(M)^0 = \mathfrak{h}^0$.

Soit $X := \mathrm{Specmax}(\mathfrak{h})$ l'affinoide sous-jacent à $\mathfrak{h}$, on l'appellera la *variété de Hecke locale*, elle ne dépend que de la situation (V, Q) choisie initialement. L'affinoide X est muni d'un morphisme fini κ vers $V \subset \mathcal{W}$. Soient Z, l'hypersurface de rigide de $V \times \mathbb{A}^1$ définie par $Q = 0$, pr_1 et pr_2 les projections respectives de Z sur V et $\mathbb{A}^1$, on a alors la description suivante des points fermés de X :

PROPOSITION 6.3. *Pour tout $t \in V(\mathbb{C}_p)$, l'application*

$$x \in X(\mathbb{C}_p) \mapsto (h \in \mathfrak{h} \to h(x) \in \mathbb{C}_p)$$

induit une bijection entre l'ensemble des points $x = (t, \lambda^{-1}) \in Z(\mathbb{C}_p)$ et l'ensemble des systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur l'espace des formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$ de valeur propre λ pour U_p et de poids t.

LEMME 6.2. *Soient A un anneau commutatif, M un module projectif de type fini sur A, $\mathfrak{h}$ une sous-A-algèbre commutative de $End_A(M)$. Si I est un idéal de A, le noyau du morphisme canonique $\mathfrak{h}/I\mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{A/I}(M/IM)$ est nilpotent.*

Preuve : M étant projectif de type fini sur A, l'application canonique

$$\mathrm{End}_A(M) \otimes_A A/I \longrightarrow \mathrm{End}_{A/I}(M \otimes_A A/I)$$

est un isomorphisme. En effet, M étant de présentation finie sur A, il suffit de le vérifier si A est local et M est libre de type fini, auquel cas c'est évident. Soit $g \in \mathfrak{h}$ tel que son image dans $\mathrm{End}_{A/I}(M \otimes_A A/I)$ est nulle. Comme g est un élément de $\mathrm{End}_A(M)$, avec M projectif de type fini sur A, il admet un polynôme caractéristique, disons de degré r. La formation de ce polynôme commutant à la réduction modulo I, comme le montre l'isomorphisme plus haut, ses coefficients sont dans I. Ainsi, le théorème de Cayley-Hamilton assure que $g^r \in I\mathfrak{h}$, ce que l'on voulait. □

Preuve de la proposition 6.3 : Soit $t \in V(\mathbb{C}_p)$ correspondant à un idéal maximal m de $A(V)$, on applique le lemme 6.2 à $(A, m, M, \mathfrak{h}) := (A(V), m, \mathcal{S}_\chi(V, 1)(G, U_0(p)), \mathfrak{h})$. On en déduit que le morphisme de $\mathbb{C}_p$-algèbres

$$\mathfrak{h}/m\mathfrak{h} \to \mathrm{Im}(\mathcal{H} \otimes_\Lambda \mathbb{C}_p \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_\chi(V, 1)(G, U_0(p))_t)$$

induit un isomorphisme sur les $\mathbb{C}_p$-points, ce que l'on voulait. □

6.2.3. *Construction et définition des familles.* On prouve dans ce qui suit l'existence d'une famille passant par toute forme propre de pente finie.

Définition : Soient $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $f \in \mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))$ une forme propre, on appelle *famille de formes automorphes p-adiques de type* $(G, U_0(p), \chi)$ *passant par* f, la donnée :

(a) d'un ouvert affinoide $V \subset \mathcal{W}$,

(b) d'un affinoide X muni d'un morphisme fini $\kappa : X \to V$, surjectif restreint à chacune des composantes irréductibles de X,

(c) d'un point $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x_0) = t$,

(d) et d'un morphisme continu d'anneaux $a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to A(X)^0$,

ayant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, il existe une forme propre $f_x \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))$ telle que pour tout $T \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, $T(f_x) = a(T)(x)f_x$,

(ii) La forme f convient pour f_{x_0},

On dira alors que la famille est paramétrée par X, et qu'elle est de *pente α (resp. pente finie)* si toutes les formes de la famille ont même pente α (resp. sont de pente finie). Une famille est de pente finie si, et seulement si, $a(U_p)$ est inversible dans $A(X)$. Dans ce cas, le principe du maximum assure que $x \mapsto |a(U_p)(x)|$ est minoré sur X, disons par $p^{-\alpha}$. La proposition 4.8 assure alors que les f_x avec $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{Min}(\kappa(x)) > \alpha - 1$ sont des formes automorphes classiques. Ceci est en particulier valable quand la famille est de pente α.

Un poids $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique* si $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Un point $x \in X(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique* si $\kappa(x)$ est classique, et si l'on peut choisir f_x satisfaisant (i) dans $\mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$. Un sous-ensemble des $\mathbb{C}_p$-points d'un affinoide Y est dit Zariski-dense s'il rencontre les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert Zariski de Y.

PROPOSITION 6.4. *Si une famille de formes automorphes p-adiques de pente finie contient un point classique, les points classiques y sont Zariski-denses.*

Preuve : Soit une famille comme dans l'énoncé, on adopte les notations de la définition ci-dessus. Par hypothèse, $V(\mathbb{C}_p)$ contient un poids classique. Comme $V \subset \mathcal{W}$ est ouvert affinoide, il contient (cf. [**15**] 7.2.5) une boule de centre t de rayon suffisamment petit, ainsi donc que $t + p^N(\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z})$ pour N assez grand. Les poids classiques t de ce type qui satisfont la condition $\mathrm{Min}(t) > \alpha - 1$ sont Zariski-denses dans $V(\mathbb{C}_p)$. Les affinoides étant des anneaux de Jacobson, on conclut par le :

LEMME 6.3. *Soit $X \to Y$ un morphisme fini entre schémas noethériens tel que chaque composante irréductible de X s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de Y, alors toute partie dense de Y a pour image inverse une partie dense de X.*

Preuve : On pose $g : X \to Y$. Soient D' une partie dense de Y, $D := g^{-1}(D')$, il suffit de montrer que l'intersection de D avec chacune des composantes irréductibles de X est dense dans cette dernière. Soit T une composante irréductible (réduite) de X, l'inclusion de T dans X induit un morphisme fini g_T de T vers Y, il est surjectif sur une composante irréductible T' de Y par hypothèse. Comme D' est dense dans Y, et que ce dernier n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, $D' \cap T'$ est dense dans T'. On regarde alors l'adhérence Z dans T de $D \cap T = g_T^{-1}(D')$. Comme g_T est fini, $g_T(Z)$ est fermé, mais il contient $D \cap T'$, d'où $g_T(Z) = T'$. En particulier, le point générique η de T' a un antécédent dans Z. Or il est clair qu'il n'a qu'un antécédent par g_T (qui est fini entre schémas intègres), qui est le point générique de T, d'où $Z = T$. $\square$

THÉORÈME 6.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, et $B \subset \mathcal{W}$ la boule fermée de centre t de rayon $m_{|t|}(\alpha)$ (notations du théorème 5.1). Il existe une famille de formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente α, passant par toutes les formes automorphes p-adiques de ce type, de pente α, et poids dans $B(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve : Soient $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $t \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, et $r \in [1, |\omega/\mathbf{p}|[\cap p^{\mathbb{Q}}$. On définit $B \subset \mathcal{W}$ comme étant la boule fermée de centre t de rayon $p^{-m_r(\alpha)}$ (cf 5.1), et on fixe une forme propre $f \in \mathcal{S}_{\chi,t'}(G, U_0(p))^\alpha$ quelconque avec $t' \in B(\mathbb{C}_p)$.

Le théorème 5.1 assure que pour tout x, y dans $B(\mathbb{C}_p)$, $P_\chi(x,T)$ et $P_\chi(y,T)$ ont même partie de pente $\leq \alpha$ dans leur polygone de Newton. La proposition 5.2, plus précisément son raffinement 5.3 si t n'est pas dans $\mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, fournit alors une décomposition

$$P_\chi(B)(T) = Q(T)S(T) \in A(B)\{\{T\}\},$$

et $Q(T) \in 1 + TA(B)T$ de partie de pente $\leq \alpha$ constante égale à α sur $B(\mathbb{C}_p)$, tels que $(S, Q) = 1$. Cette donnée de B et Q nous permet de construire comme plus haut une variété de Hecke locale, que l'on note X, qui est par construction munie d'un morphisme fini $\kappa : X \to B$.

L'interprétation de $X(\mathbb{C}_p)$ est donnée par la proposition 6.3 ; dans notre cas il est en bijection avec l'ensemble des systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ sur les formes automorphes p-adiques de pente α et de poids $t \in B(\mathbb{C}_p)$. En particulier, il existe un point $x_0 \in X(\mathbb{C}_p)$ correspondant à f, tel que $\kappa(x_0) = t'$.

Enfin, on prend pour a le morphisme continu $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathfrak{h}^0 = A(X)^0$ défini en §6.2.2. Nous avons ainsi prouvé que (B, X, a, x_0) satisfait toutes les conditions requises pour être une famille de formes automorphes p-adiques au sens plus haut, passant par f, à l'assertion de surjectivité du (b) près, qui découle du lemme 6.4. $\square$

Remarques :
- Les familles construites dans le théorème 6.1 ont un "rayon" explicite dans la direction d'un analogue pour le groupe G de la conjecture de Gouvêa-Mazur (cf. [**49**] conjecture 1). Il serait intéressant de formuler une conjecture précise dans notre cas. Cela semble accessible, étant donné la nature combinatoire des espaces de formes mis en jeu.
- Dans le cas particulier où $\dim_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{S}_{\chi,t}(G, U_0(p))^\alpha) = 1$, la démonstration qui précède montre que $X = B$. Ainsi, les $a(T)$ étant bornés par 1, on en déduit des "vraies" congruences : si $k, k' \in B(\mathbb{C}_p)$ et $k \equiv k' \bmod p^N$ alors $a(T)(k) \equiv a(T)(k') \bmod p^N$.

Il ne nous reste qu'à prouver le

LEMME 6.4. *Soit A un anneau commutatif noethérien,*
- *Soient N un module projectif de type fini sur A, B une sous-A algèbre commutative de $End_A(N)$, alors B est sans torsion sur A et ce après tout changement de base plat sur A,*
- *Soit B une A-algèbre finie, sans torsion après tout changement de base plat sur A, alors chaque composante irréductible de* Spec(B) *s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de* Spec(A). *En particulier, B est équidimensionnel de dimension d si A l'est.*

– *De plus, si C est une sous-A-algèbre de B, alors chaque composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(B)$ *s'envoie surjectivement sur une composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(C)$.

Preuve : N étant projectif de type fini sur A, $\mathrm{End}_A(N)$ l'est aussi. B est donc un sous-A-module d'un module libre sur A, ce qui prouve la première assertion.

Prouvons la seconde. Soient $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $f : X \longrightarrow Y$, le morphisme déduit de l'inclusion de A dans B, c'est un morphisme fini. Soit x le point générique d'une composante irréductible de X, il s'envoie sur le point générique y d'un fermé irréductible de Y. Soit $\mathrm{Spec}(B_y) \rightarrow \mathrm{Spec}(A_y)$ le changement de base de $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ à $\mathrm{Spec}(A_y)$, c'est un morphisme fini. Le point x est dans la fibre au dessus de y, et cette dernière étant discrète et fermée dans $\mathrm{Spec}(B_y)$, x est un point fermé de ce dernier. Mais comme x est premier minimal, c'est une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(B_y)$. Une composante irréductible réduite à un point ne peut pas intersecter les autres composantes irréductibles, qui sont en nombre fini par hypothèse de noethérianité. Le point x est donc ouvert dans $\mathrm{Spec}(B_y)$, et B_y est produit direct de deux anneaux dont l'un est celui de la composante irréductible $\{x\}$, donc d'anneau B_y/x^N pour un certain entier N. Comme B_y, ainsi que son sous-anneau B_y/x^N est sans A_y-torsion par hypothèse, et que $yB_y \subset x$, on a $y^N = 0$ dans A_y. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A_y)$ est irréductible de point générique y, y est donc le point générique d'une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$. Ceci montre la seconde assertion.

Pour la dernière, on considère le morphisme canonique

$$\mathrm{Spec}(B) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(C) \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(A)$$

Soit Z une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(B)$, son image dans $\mathrm{Spec}(C)$ est un fermé irréductible Z'. Soit $Z'' \supset Z'$ une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(C)$, on sait par la seconde assertion que $g(Z'')$ est une composante irréductible Z''' de $\mathrm{Spec}(A)$. De même, $g(Z') = (gf)(Z)$ est aussi une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$ incluse dans Z''', donc $g(Z') = Z'''$. Comme g est un morphisme fini, sa fibre au dessus du point générique de Z''' est discrète, ce qui montre $Z'' = Z'$. $\square$

6.3. Construction globale de la variété de Hecke $\mathcal{D}_\chi$. Ce que nous avons appelé variétés de Hecke locales dans le paragraphe précédent est une collection d'affinoides attachés à la donnée $(G, U_0(p), \chi)$. Il se trouve que ces affinoides recouvrent de manière admissible un espace rigide sur $\mathcal{W}$, non quasi-compact, construit par recollement à partir de ces derniers. Cet espace généralise *"the eigencurve"* dans la théorie de Coleman-Mazur (cf. [**33**], précisément celle qu'ils notent D). Nous l'appelons ici *"la variété de Hecke"* (de type $(G, U_0(p), \chi)$), la traduction française directe du terme "eigenvariety" prêtant a confusion. Cette section est dédiée à sa construction.

La géométrie de ces espaces analytiques est encore largement incomprise, autant localement que globalement, et ce même pour GL_2. Elle est liée, par le pseudo-caractère galoisien qu'elle porte (au moins conjecturalement, voir aussi le §7), à des propriétés arithmétiques subtiles des corps de nombres. Nous renvoyons à l'introduction de [**33**] pour une discussion de certains problèmes ouverts, ainsi qu'à [**64**] §11.

Nous nous sommes astreints dans ce texte à ne considérer que des formes automorphes de niveau sauvage $\Gamma_1(p)$ au pire, ce qui est le cas essentiel. Ceci fait que notre espace de paramètre n'est pas $\mathrm{Hom}_{gr-cont}((\mathbb{Z}_p^*)^n, \mathbb{C}_p^*)$ tout entier, mais son ouvert "central" $\mathcal{W}$, formé des caractères de restrictions analytiques à $(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p)^n$, et ce paramétré logarithmiquement. Dans un travail en préparation avec Buzzard, nous expliquerons comment construire la variété de Hecke dans notre contexte sur tout l'espace des poids.

6.3.1. *Un recouvrement admissible des hypersurfaces de Fredholm.* Soit $F(T) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ une série de Fredholm sur un espace rigide réduit $\mathcal{W}$ (quelconque dans ce paragraphe). On lui associe une *hypersurface de Fredholm*, qui est le sous-espace analytique rigide fermé Z_F de $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$ défini par $F(s,t) = 0$. On dira que F, ou Z_F, est Λ-adique si $F \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$. On a

$$\begin{array}{ccccc} Z_F & \hookrightarrow & \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig} & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{A}^1_{rig} \\ & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \\ & & \mathcal{W} & & \end{array}$$

Par le lemme 5.4, $pr_1 : Z_F \to \mathcal{W}$ est plat. Considérons, à la suite de [**30**], l'ensemble $\mathcal{C}$ des ouverts affinoides Y de Z_F tels que :

– i) $pr_1(Y)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$,
– ii) Y est une composante connexe rigide de $pr_1^{-1}(pr_1(Y))$,
– iii) $pr_{1|Y} : Y \to pr_1(Y)$ est fini.

Comme le montre la proposition suivante, dont le sens se précisera dans sa preuve, étudier ces ouverts revient à étudier la factorisation de F :

Proposition 6.5. *La donnée d'un élément de $\mathcal{C}$ est équivalente à celle d'un ouvert affinoide V de $\mathcal{W}$ et d'une factorisation $F(T) = Q(T)S(T) \in 1 + TA(V)\{\{T\}\}$, avec $Q(T) \in 1 + TA(V)[T]$ de coefficient dominant inversible, tel que $(Q,S) = 1$ dans $A(V)\{\{T\}\}$.*

Preuve : Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V := pr_1(Y)$, et $Z_V := Z_F \cap (V \times \mathbb{A}_1^{rig})$. L'affinoide Y est un ouvert de Z_V par le ii), il est donc plat sur V. Par ii) et iii), c'est donc un fermé de Z_V qui est fini et plat sur V. Autrement dit, $A(Y)$ est localement libre sur $A(V)$ engendré par $A(V)$ et l'image de T. La multiplication par T admet un polynôme caractéristique, que l'on note $Q \in A(V)[T]$, évidemment de coefficient constant égal à 1. La surjection canonique $A(V)[T]/(Q) \to A(Y)$ est alors un isomorphisme, car les deux $A(V)$-modules en jeu sont projectifs de même rang sur $A(V)$. On en déduit que Q divise $F(T)$, puis que son coefficient constant est inversible, et que $(F, F/Q) = 1$ dans $A(V)\{\{T\}\}$. De $F(0) = 1$ il vient que l'on peut supposer $Q(0) = 1$, et Q est unique sous cette condition.

Réciproquement, à une donnée comme dans l'énoncé, on définit Y comme le fermé affinoide de Z_V découpé par $Q = 0$. Une relation de Bezout entre S et Q fournit des idempotents montrant que Y est un ouvert fermé de Z_V, il est en particulier ouvert affinoide. Il est donc plat sur V, fini car $Q(T) = 0$ dans $A(Y)$ par hypothèse. □

Il reste essentiellement à comprendre pourquoi F se factorise sur de "gros" ouverts affinoides. Par exemple, ceux que l'on obtiendrait seulement en appliquant la proposition 5.2 ne recouvrent pas en général Z_F de manière admissible. Le résultat essentiel est alors la

PROPOSITION 6.6. *(Coleman, Buzzard) $\mathcal{C}$ est un recouvrement admissible de Z_F.*

Preuve : Voir [**22**]. Le cadre est celui d'une série de Fredholm $F(T) \in A(\mathcal{W})\{\{T\}\}$ où $\mathcal{W}$ est un espace rigide réduit. La preuve suit les lignes de celle de [**30**], en surmontant les difficultés techniques provenant de ce que la base n'est plus de dimension 1. En particulier, un point technique crucial repose sur le résultat de Conrad énoncé dans le lemme 5.5. □

6.3.2. *Application à la construction de la variété de Hecke.* Soit $\chi \in \Delta^n$ fixé, $P_\chi(s,T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$ la série de Fredholm attachée à U_p agissant sur $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ (cf. 4.6), et

$$Z_\chi := Z_{P_\chi} \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig},$$

l'hypersurface de Fredholm qui lui est associée. On considère le recouvrement admissible $\mathcal{C}$ associé à P_χ comme dans le paragraphe 6.3.1.

Soit $Y \in \mathcal{C}$, la proposition 6.5 nous donne une factorisation $P_\chi(T) = Q(T)S(T)$ sur $V =: pr_1(Y)$, on note $\mathcal{D}_\chi(Y)$ la variété de Hecke locale (sur $\mathbb{C}_p$) construite dans 6.2.2 à l'aide de cette donnée. On note de plus $\mathcal{H}(Y)$ l'algèbre affinoide de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. Il faut recoller les $\mathcal{D}_\chi(Y)$ entre eux. Pour cela on a le lemme suivant, tiré de [**33**] (7.2) :

LEMME 6.5. *Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V \subset pr_1(Y)$ un ouvert affinoide, alors $pr_1^{-1}(V) \cap Y \in \mathcal{C}$ et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(pr_1^{-1}(V) \cap Y) \to \mathcal{D}_\chi(Y)$ est une immersion ouverte. Si Y_1 et Y_2 sont dans $\mathcal{C}$, $Y_1 \cap Y_2$ l'est aussi, et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(Y_1 \cap Y_2) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est une immersion ouverte.*

Preuve : Si $Y \in \mathcal{C}$ est associé à $P_\chi = QS$ comme ci-dessus, on désignera par $M(Y)$ le $A(pr_1(Y))$-module

$$\mathcal{S}_\chi(pr_1(Y), 1)(G, U_0(p)),$$

avec les notations du §6.2.1.

Il est clair que $pr_1^{-1}(V) \cap Y$ est dans $\mathcal{C}$. De plus, $\mathcal{H}(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$ est par définition l'image de $A(V) \otimes_\Lambda \mathcal{H}$ dans $M(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$. Par l'unicité de la décomposition de Coleman, ce dernier s'identifie canoniquement à $M(Y) \otimes_{A(pr_1(Y))} A(V)$. On en déduit un morphisme canonique $\mathcal{H}(Y) \otimes A(V) \to \mathcal{H}(pr_1^{-1}(V) \cap Y)$: c'est un isomorphisme (ce qui conclut la première partie du lemme). En effet, $A(pr_1(Y)) \to A(V)$ est plat, $\mathcal{H}(Y) \hookrightarrow \mathrm{End}_{A(pr_1(Y))}(M(Y))$ est injectif et le morphisme canonique

$$A(V) \otimes_{A(pr_1(Y))} \mathrm{End}_{A(pr_1(Y))}(M(Y)) \to \mathrm{End}_{A(V)}(M(Y) \otimes A(V))$$

est un isomorphisme. Si Y_1 et Y_2 sont comme dans l'énoncé, $Y_1 \cap pr_1^{-1}(pr_1(Y_2)) \in \mathcal{C}$ et le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(pr_1^{-1}(pr_1(Y_2)) \cap Y_1) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est une immersion ouverte, par l'étude précédente. On peut donc supposer $pr_1(Y_1) = pr_1(Y_2)$. Il est alors clair que $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{C}$, et que l'on peut supposer $Y_2 \subset Y_1$, qui est alors une immersion ouverte dans une composante connexe. La décomposition de Coleman montre que $M(Y_1)$ est facteur direct de $M(Y_2)$, puis que le morphisme canonique $\mathcal{D}_\chi(Y_2) \to \mathcal{D}_\chi(Y_1)$ est un isomorphisme sur une composante connexe de ce dernier, en particulier une immersion ouverte. □

On montre maintenant que les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$ se recollent en un espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ (on suit [**33**] 7.2). Soient $V, V' \in \mathcal{C}$, on définit $\mathcal{D}_\chi(V, V')$ comme étant l'image de $\mathcal{D}_\chi(V \cap V')$ dans $\mathcal{D}_\chi(V)$ via l'immersion ouverte canonique, notée $i_{V,V'}$. Si $\varphi_{V,V'} := i_{V',V}.i_{V,V'}^{-1}$, on a :

$$\varphi_{V',V}\varphi_{V,V'} = id_{\mathcal{D}_\chi(V,V')}, \;\; \mathcal{D}_\chi(V,V) = \mathcal{D}_\chi(V) \;\text{ et }\; \varphi_{V,V} = id_{\mathcal{D}_\chi(V)}$$

De plus, $\varphi_{V,V'}$ induit un isomorphisme

$$\varphi_{V,V',V''} : \mathcal{D}_\chi(V, V') \cap \mathcal{D}_\chi(V, V'') \to \mathcal{D}_\chi(V', V) \cap \mathcal{D}_\chi(V', V''),$$

tel que

$$\varphi_{V,V',V''} = \varphi_{V'',V',V}\varphi_{V,V'',V'}$$

Cette dernière égalité provenant de ce que $\mathcal{D}_\chi(V, V') \cap \mathcal{D}_\chi(V, V'')$ est l'image de $\mathcal{D}_\chi(V \cap V' \cap V'')$ dans $\mathcal{D}_\chi(V)$ par l'immersion ouverte canonique. Par [**15**] (9.3.2),

$$(\{\mathcal{D}_\chi(V)\}, \{\mathcal{D}_\chi(V, V')\}, \{\varphi_{V,V'}\})_{V,V' \in \mathcal{C}}$$

est une donnée de recollement des $\mathcal{D}_\chi(V)$.

Théorème 6.2. *Il existe un espace analytique rigide $\mathcal{D}_\chi = \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))$ muni d'un morphisme continu de Λ-algèbres topologiques*

$$a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \longrightarrow \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{D}_\chi}(\mathcal{D}_\chi)^0,$$

ainsi qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_\chi \arrow[dr, "\pi"] \arrow[drr, "\mathbf{U}_p^{-1}"] \arrow[dd, "\kappa"'] & & \\
 & Z_\chi \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \mathbb{A}^1_{rig} \\
\mathcal{W} & &
\end{tikzcd}$$

tels que :
i) *π est un morphisme fini,*
ii) $\mathbf{U}_p := a(U_p)$ *est inversible sur $\mathcal{D}_\chi$,*
iii) *Pour tout $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, il existe un voisinage ouvert affinoide Ω de x tel que :*
  (a) $z \mapsto |\mathbf{U}_p(z)|$ est constante sur $\Omega(\mathbb{C}_p)$,
  (b) $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$,
  (c) $\kappa : \Omega \to \kappa(\Omega)$ est fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de Ω,
iv) *L'application*

$$x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p) \mapsto (h \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \mapsto a(h)(x)),$$

induit pour chaque $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ une bijection entre les points $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ tels que $\kappa(x) = t$, et les systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ agissant sur l'espace des formes automorphes

p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente finie et de poids t, ces derniers étant comptés sans multiplicité.

Preuve : On définit l'espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ comme étant l'espace rigide obtenu par recollement à partir de la donnée décrite plus haut. Par définition, il est admissiblement recouvert par les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Commençons par définir π. Soient $Y \in \mathcal{C}$, $V := pr_1(Y)$, et $Q(T) \in 1 + TA(V)[T]$ définissant Y (cf. 6.5). Le théorème de *Cayley-Hamilton* et la proposition 6.2 assurent que $Q^*(U_p) = 0$ dans $\mathcal{H}(Y)$, $T \mapsto U_p^{-1}$ induit donc un morphisme fini $\pi_Y : \mathcal{D}_\chi(Y) \to Y$. Si $Y' \in \mathcal{C}$, il est immédiat de voir que le changement de base à $Y' \cap Y \hookrightarrow Y$ de π_Y est canoniquement isomorphe à $\pi_{Y \cap Y'}$. Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_\chi(\mathcal{C})$ recouvrent respectivement Y et $\mathcal{D}_\chi(Y)$ de manière admissible, ceci définit par recollement un unique morphisme $\pi : \mathcal{D}_\chi \to Z_\chi$ ([**15**] 9.3.3. proposition 1). Par construction, il est fini ([**15**] 9.4.4), ce qui prouve i), et $\kappa := pr_1.\pi$ envoie $\mathcal{D}_\chi(Y)$ sur $pr_1(Y)$, de manière correspondante à l'inclusion $A(pr_1(Y)) \hookrightarrow \mathcal{H}(Y)$.

Soit $T \in \mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, on définit $a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}$ pour tout Y dans $\mathcal{C}$ comme étant l'image de T dans $\mathcal{H}(Y)^0$ par l'application continue $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{H}(Y)$ définie en 6.2.2. On vérifie immédiatement que si $Y' \in \mathcal{C}$, la restriction de $a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}$ à $\mathcal{D}_\chi(Y \cap Y')$ est exactement $a(T)_{|\mathcal{D}_\chi(Y \cap Y')}$, ce qui définit une unique fonction analytique globale notée $a(T)$. On obtient ainsi une application $a : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{O}^{rig}_{\mathcal{D}_\chi}(\mathcal{D}_\chi)^0$, envoyant T sur $a(T)$. C'est un morphisme continu de Λ-algèbres topologiques, car c'est le cas après restriction sur chaque $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Il suffit de vérifier l'assertion ii) sur les $\mathcal{D}_\chi(Y)$, sur lesquels elle découle de ce que $Y \subset \mathcal{W} \times (\mathbb{A}^1_{rig} \backslash \{0\})$. La propriété iv) est une conséquence de la proposition 6.3.

Soit $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, par l'assertion iv) on peut trouver une forme propre $f_x \neq 0 \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))$ ayant même système de valeurs propres que l'évaluation en x. Le théorème 6.1 nous fournit alors une famille de formes automorphes p-adiques de type $(G, U_0(p), \chi)$, de pente $\alpha := v(\mathbf{U}_p(x))$, passant par f_x, qui est par construction (voir le dernier paragraphe de la preuve *loc.cit.*) de la forme $(pr_1(Y), \mathcal{D}_\chi(Y), a_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}, x)$ pour un $Y \in \mathcal{C}$ bien choisi. Ainsi, $\Omega := \mathcal{D}_\chi(Y)$ convient. $\square$

Remarques :
- Soit Λ un anneau local noethérien complet sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ d'un corps local L, de corps résiduel celui de $\mathcal{O}_L$. Soient $\mathcal{W}$ l'espace rigide sur L qui lui est attaché comme dans [**33**](1.1), M un module de Banach orthonormalisable sur $\mathcal{W}$, $\mathcal{H}$ une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}^{cont}_\Lambda(M_\Lambda)$ contenant un endomorphisme compact. Alors si $\mathcal{W}$ est réduit, la construction de ce paragraphe se généralise entièrement et sans aucune modification à cette situation.
- La propriété iv) montre que toutes les variétés de Hecke locales, et en particulier celles du théorème 6.1, sont des ouverts admissibles de $\mathcal{D}_\chi$. Les propriétés i) à v) réalisent $\mathcal{D}_\chi$ comme "une famille p-adique passant par toutes les formes automorphes p-adiques de pente finie, et de type $(G, U_0(p), \chi)$", dans un sens légèrement étendu de la définition du §6.2.3. Cependant, nous ne savons pas si $\mathcal{D}_\chi$ a un nombre fini ou non de composantes connexes.

– L'espace rigide $\mathcal{D}_\chi$ est séparé, emboîté ("nested" dans la terminologie de [**33**], §1.1), car Z_χ l'est et que π est fini.

Nous avons vu que $\mathbf{U}_p$ est une fonctions analytique inversible sur $\mathcal{D}_\chi$. On pose plus généralement pour $u^a \in U$,

$$\mathbf{U}_p^a := a(T(u^a))$$

Soient $i \in \{1, ..., n\}$, $u_i \in U$ comme en 4.8.1, alors $v_i := u^{(0,1,...,n-1)}/u_i \in U$. Si $i > 0$, la relation $T(u_i)T(v_i) = U_p$ implique que $a(T(u_i))$ est inversible sur $\mathcal{D}_\chi$. Il est de plus aisé de voir que $T(u_0)$ est inversible. Ceci nous permet de définir les fonctions :

$$\mathbf{F}_i := a(T(u_{n-i}))/a(T(u_{n-i+1})), \;\; i \in \{1, ..., n\}$$

COROLLAIRE 6.1. *Soit* $a = (a_1 \leq \cdots \leq a_n) \in \mathbb{Z}^n$, *alors* $\mathbf{U}_p^a = \prod_{i=1}^n \mathbf{F}_{n-i+1}^{a_i}$, *c'est une fonction analytique inversible sur* $\mathcal{D}_\chi$.

6.4. Quelques propriétés de $\mathcal{D}_\chi$.

6.4.1. *Composantes irréductibles de* $\mathcal{D}_\chi$. L'étude des composantes irréductibles des espaces rigides a été amorcée dans [**33**] (chapitre 1), et reprise en détail dans [**36**], auquel nous nous réfèrerons. On rappelle qu'une composante irréductible d'un espace rigide X est par définition un fermé analytique réduit de X, image d'une composante connexe de la normalisation de X ([**36**] §2). Si X est un affinoide, ses composantes irréductibles sont les composantes irréductibles au sens usuel du terme, elles sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de $A(X)$. L'espace X est dit irréductible s'il n'a qu'une composante irréductible. C'est un fait que X est recouvert sur les $\mathbb{C}_p$-points par ses composantes irréductibles (qui ne dépendent que de X^{red}) et qu'une composante irréductible est irréductible. Nous renvoyons à [**33**] 1.3 et [**36**] 4 pour la description des composantes irréductible des hypersurfaces de Fredholm.

PROPOSITION 6.7. *$\mathcal{D}_\chi$ est équidimensionnel de dimension n. Chacune de ses composantes irréductibles s'envoie par le morphisme fini π surjectivement sur une composante irréductible de Z_χ. Ces dernières sont toutes des hypersurfaces de Fredholm Λ-adiques.*

Preuve : Soient $Y \in \mathcal{C}$ et $V := pr_1(Y)$. L'algèbre affinoide $\mathcal{H}(Y)$ de $\mathcal{D}_\chi(Y) \subset \mathcal{D}_\chi$ est une sous-$A(V)$-algèbre commutative de $\mathrm{End}_{A(V)}(\mathcal{S}_\chi(V, 1))$, avec les notations du paragraphe 6.2. Il est bien connu que $\mathcal{W}$, et donc V, est équidimensionnel de dimension n (par exemple, [**36**] 2.1.5. Voir aussi [**15**] 7.3.2-8 pour la comparaison "dimension rigide-dimension algébrique"). Le lemme 6.4 s'applique à $A(V) \subset A(V)[a(U_p)^{-1}] \subset \mathcal{H}(Y)$, et montre que V, $\mathrm{Specmax}(A(V)[a(U_p)^{-1}])$ et $\mathcal{D}_\chi(Y)$ ont même équidimension n. En particulier, 6.2 iv) assure que $\mathcal{D}_\chi$ et Z_χ sont équidimensionnels de dimension n.

Le lemme 6.6 montre que l'application canonique $A(Y) \to A(V)[a(U_p)^{-1}]$ induit un isomorphisme sur les nilréductions. Le lemme 6.4 entraîne donc que les morphismes π et pr_1 de la suite

$$\mathcal{D}_\chi(Y) \overset{\pi_{|\mathcal{D}_\chi(Y)}}{\longrightarrow} Y \overset{pr_1}{\longrightarrow} V$$

envoient composantes irréductibles *sur* composantes irréductibles.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme fini entre espaces rigides, tout fermé analytique irréductible de X est envoyé sur un fermé analytique irréductible de Y (pour l'irréductibilité de ce dernier, utiliser [**36**] 2.2.3). Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$, son image $\pi(\Sigma)$ dans Z_χ est donc un fermé analytique irréductible de Z_χ. Par [**36**] 2.2.9, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $\Sigma \cap \mathcal{D}_\chi(Y)$ est soit vide, soit une réunion de composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. Ceci et ce que l'on a vu dans le paragraphe précédent assure que Z_χ et $\pi(\Sigma)$ sont équidimensionnels de dimension n. Cela entraîne que $\pi(\Sigma)$ est une composante irréductible par [**36**] 2.2.7.

Par [**33**] 1.3.11, ou [**33**] 1.3.10 et [**36**] 4.3.2, $P_\chi(T)$ a une unique écriture

$$P_\chi(T) = \prod_i P_i(T)^{n_i}$$

où les $P_i(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$ sont des séries de Fredholm premières, *i.e.* engendrant un idéal premier dans $\Lambda\{\{T\}\}$. Les composantes irréductibles de Z_χ sont alors les hypersurfaces de Fredholm découpées par les $P_i(T)$ (cf. *loc.cit.*), ce qui conclut. □

LEMME 6.6. *Soient A un anneau commutatif, N un module projectif de type fini de rang r sur A, $u \in \mathrm{End}_A(N)$, P le polynôme caractéristique de u sur N, I l'idéal des $Q \in A[T]$ tels que $Q(u) = 0$, alors $I^r \subset (P) \subset I$.*

En particulier, si B désigne la sous-A-algèbre $A[u] \subset \mathrm{End}_A(N)$, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A[T]/(P))$ est une nilimmersion.

Preuve : La formation de P, $\mathrm{End}_A(N)$, B et de I commute à tout changement de base plat sur A, il suffit de prouver la première assertion après changement de base fidèlement plat. On peut donc supposer N libre de rang r sur A et identifier $\mathrm{End}_A(N)$ avec $\mathrm{M}_r(A)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $(P) \subset I$. Soit $Q \in I$, considérons la factorisation $Q(X) - Q(Y) = (X - Y)f(X,Y) \in A[X,Y]$, pour un certain $f \in A[X,Y]$. Substituant u dans X, il vient $-Q(Y) = (u - Y)f(u,Y) \in \mathrm{M}_r(A[Y])$. En multipliant par la transposée de la comatrice de $u - Y$, notée $(m_{i,j}(Y))$, on a

$$-(m_{i,j}(Y))Q(Y) = P(Y)f(u,Y)$$

De là, on tire que $\forall i,j,\ P(Y) \mid m_{i,j}(Y)Q(Y)$. Soient $Q_1, ..., Q_r \in I$, il vient

$$P(Y)^r \mid \det(m_{i,j}(Y))Q_1(Y)\cdots Q_r(Y)$$

Mais $\det(m_{i,j}(Y)) = P(Y)^{r-1}$, et donc $P(Y) \mid Q_1(Y)\cdots Q_r(Y)$. □

COROLLAIRE 6.2. *L'image par κ de chaque composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ est un ouvert Zariski de $\mathcal{W}$.*

Preuve : Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$. Le morphisme κ se factorise par π et π envoie Σ surjectivement sur une hypersurface de Fredholm Λ-adique par 6.7. Ainsi, $\kappa(\Sigma)$ est l'image par la projection pr_1 d'une hypersurface de Fredholm Z_P découpée par $P(T) \in 1 + T\Lambda\{\{T\}\}$, $Z_P \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1_{rig}$. Si $P(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots \in \Lambda\{\{T\}\}$, les points $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ qui ne sont pas dans $pr_1(Z_P)$ sont exactement ceux tels que $\forall i \geq 1,\ a_i(x) = 0$. On en déduit que $pr_1(Z_P)$ est l'ouvert Zariski complémentaire du fermé défini par l'annulation des a_i. □

6.4.2. *Zariski-densité des points classiques.*

Définitions : Un point $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sera dit *classique*, si $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ et si le système de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ associé à x par le théorème 6.2 v) est celui d'une forme propre classique $f_x \in \mathcal{S}_{\chi,\kappa(x)}(G, U_0(p))^{cl}$.

Un point classique $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sera dit *ancien en* p s'il on peut de plus choisir la forme f_x de façon à ce que la forme automorphe complexe associée en §4.2 engendre sous $G(\mathbb{Q}_p)$ une représentation ayant un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant non nul.

On a vu que si $\kappa(x) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Min}(\kappa(x)) > v(\mathbf{U}_p(x)) - 1$, alors x est automatiquement classique, un tel point sera dit *très classique*. De manière générale, un point sera dit *très classique pour* $\mathbf{U}_p^a$ si il est associée à une forme très classique pour U_p^a (cf. §4.7.2).

Un sous-ensemble Z des $\mathbb{C}_p$-points d'un espace rigide X sera dit rigide-Zariski-dense, ou plus simplement *Zariski-dense*, si tout fermé analytique F de X tel que $Z \subset F(\mathbb{C}_p)$ est tel que $F(\mathbb{C}_p) = X(\mathbb{C}_p)$. En particulier, Z est Zariski-dense dans X si et seulement si il l'est dans X^{red}, ou encore si et seulement si son intersection avec chaque composante irréductible est Zariski-dense dans cette dernière (un sens est trivial sachant que X est recouvert par ses composantes irréductibles, pour l'autre utiliser [**36**] 2.2.8). Si X est réduit et si Z est Zariski-dense dans X, toute fonction $f \in \mathcal{O}_X^{rig}(X)$ s'annulant en tout $z \in Z$ est nulle. Si X est irréductible, par [**36**] 2.2.3, les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert affinoide de X sont Zariski-denses. Enfin, un exemple trivial mais important est que $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z} \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$.

Proposition 6.8. *Les points très classiques de chaque composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ y sont Zariski-dense. En particulier, toute composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$ contient une infinité de points très classiques.*

Preuve : Soit Σ une composante irréductible de $\mathcal{D}_\chi$. Par le corollaire 6.2, $\kappa(\Sigma)$ est le complémentaire d'un fermé strict de $\mathcal{W}$. Comme $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$, $\kappa(\Sigma)$ contient au moins un $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Soit $x \in \Sigma(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x) = t$, $\alpha := v(\mathbf{U}_p(x))$. On peut par exemple considérer la famille de formes automorphes p-adiques de pente α passant par x du théorème 6.1, qui est par construction paramétrée par un affinoide de la forme $\mathcal{D}_\chi(Y) \subset \mathcal{D}_\chi$, $Y \in \mathcal{C}$. Par [**36**] 2.2.9, $\Sigma \cap \mathcal{D}_\chi(Y)$ est une réunion non vide (car $x \in \Sigma(\mathbb{C}_p)$) de composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\chi(Y)$. La proposition 6.4 conclut, en rappelant que les $\mathbb{C}_p$-points de tout ouvert affinoide d'un espace rigide irréductible sont Zariski-denses. $\square$

Proposition 6.9. *Soit $p > 2$, l'ensemble des points très classiques de $\mathcal{D}_\chi$ qui sont anciens en p est Zariski-dense.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que pour tout p, $\{t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z},\ \chi\tau_t = 1\}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{W}$. On fixe un tel t, ainsi que $C \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$. L'ensemble

$$\mathcal{X}_{t,C,N} = \{t' = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z},\ \forall i,\ m_i > C,\ \chi\tau_{t'} = 1 \text{ et } t' \equiv t \bmod p^N\mathbb{Z}^n\}$$

est Zariski-dense dans le polydisque fermé de centre t et de rayon p^{-N} dans $\mathcal{W}$. Comme le montre la preuve des propositions 6.8 et 6.4, il suffit, pour prouver la proposition 6.9, de montrer que si $\mathcal{D}_\chi(Y)$, $Y \in \mathcal{C}$, paramètre une famille de pente finie contenant un point classique de poids t tel que $\chi\tau_t = 1$, alors tous ses points de poids dans $\mathcal{X}_{t,C,N}$ sont anciens en p si $C > 0$ et N sont assez grands. On fixe donc un tel $Y \in \mathcal{C}$.

On fixe un entier N assez grand de façon à ce que $\kappa(Y)$ contienne une boule de centre dans $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, de rayon p^{-N}. Soient $C > 0$ et $x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$ tel que $\kappa(x) \in \mathcal{X}_{t,C,N}$. Le système de valeurs propres de $\mathcal{H}$ associé à x par 6.2 est alors celui d'une forme propre $f_x \in S_{t,1}(G, U_0(p))$, par l'hypothèse $\chi\tau_{\kappa(x)} = 1$ (cf. §4.4). Soit π_p un constituent irréductible de la représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par la forme automorphe complexe associée à f_x comme en 4.2. La représentation π_p admet des invariants sous l'Iwahori I (cf. 4.8), car $I = \Gamma_0(p)$ si $p > 2$. Par un théorème de Borel-Casselman (cf. [**12**]), π_p est un sous-quotient d'un $\mathrm{Ind}(\chi)$ (cf. 4.8.3) pour certains caractères complexes, lisses, non ramifiés, $\chi_1,...,\chi_n$ de $\mathbb{Q}_p^*$. Par construction, π_p a de plus un I-invariant sur lequel la sous-algèbre de $H(G, I)$ formée des opérateurs $[IuI]$, $u \in U$, agit par un caractère qui est le même que celui déterminant l'action de cette dernière sur f_x. Par le lemme 4.4 et la remarque qui le suit, ce caractère est de la forme χ_w, et s'il on pose $\kappa(x) = (m_1, ..., m_n)$,

$$\mathbf{F}_i(x) = \iota_p(\nu_{\kappa(x)}\chi_w(F_i)) = \iota_p(p^{(n-1)/2}\chi_{w(i)}(p))/p^{i-1+m_n+m_{n-1}+....+m_{n-i+1}}$$

D'après [**6**] théorème 4.2, la représentation $\mathrm{Ind}(\chi)$ est irréductible si

$$\forall i \neq j,\ \chi_i(p) \neq \chi_j(p)p$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\forall i < j,\ p^{j-i+m_{n-j+1}+...+m_{n-i+1}\pm 1} \neq \mathbf{F}_i(x)/\mathbf{F}_j(x) \tag{15}$$

Si $\mathrm{Ind}(\chi)$ est irréductible, elle est égale à π_p. En particulier, ce dernier a un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant et x est ancien en p. Il n'y a donc qu'à s'assurer que l'on peut trouver $C > 0$ tel que pour tous les points de $\mathcal{D}_\chi(Y)$ de poids dans $\mathcal{X}_{t,C,N}$, la condition ci-dessus est vérifiée.

Par le principe du maximum, les fonctions $\mathbf{F}_i$ sont bornées et atteignent leurs bornes sur $\mathcal{D}_\chi(Y)$, on peut donc trouver $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$ et $\forall i \in \{1, ..., n\}$,

$$0 < u < |\mathbf{F}_i(x)| < v$$

Alors, $\forall x \in \mathcal{D}_\chi(Y)(\mathbb{C}_p)$, $\forall i, j$:

$$uv^{-1} < |\mathbf{F}_i(x)/\mathbf{F}_j(x)|$$

Ainsi, tout $C > -\frac{\log(uv^{-1})}{\log(p)}$ convient. □

Remarque : Il nous semble très probable que le résultat soit encore vrai pour $p = 2$.

6.4.3. *Diverses composantes.* Soit e un idempotent de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, on peut lui associer l'ouvert fermé $\mathcal{D}_{\chi,e}$ de $\mathcal{D}_\chi$ défini par $a_e = 1$. En particulier, la décomposition $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} = \prod_{i=1}^r e_{\chi,i}\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ en produit de Λ-algèbres locales du §4.5.2 nous fournit une partition de $\mathcal{D}_\chi$ en un nombre fini d'ouverts fermés rigides

$$\mathcal{D}_\chi = \coprod_{i=1}^r \mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$$

Si $x \in \mathcal{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$, on notera $\overline{x} : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ la composition du morphisme d'évaluation en x par la surjection canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. On pose $\Psi_{\chi,i} : \mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ le morphisme d'anneaux valant 1 sur $e_{\chi,j}$ si, et seulement si, $i = j$.

Proposition 6.10. *L'application $x \mapsto \overline{x}$ est constante, égale à $\Psi_{\chi,i}$, sur chaque $\mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$.*

Preuve : Si $i \neq j$, $a_{e_{\chi,j}}$ est nulle sur $\mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}$, car $e_{\chi,i}e_{\chi,j} = 0$. Si $x \in \mathcal{D}_{\chi,e_{\chi,i}}(\mathbb{C}_p)$, $\overline{x}$ est donc nul sur tous les $e_{\chi,j}$ tels que $j \neq i$, c'est donc $\Psi_{\chi,i}$. □

Définition : Le *lieu ordinaire de $\mathcal{D}_\chi$* est l'ouvert fermé $\mathcal{D}_\chi^{\mathrm{ord}} := \mathcal{D}_{\chi,e_\chi^{\mathrm{ord}}}$ (cf. 6.1). Dans la traduction du théorème 6.2, ses $\mathbb{C}_p$-points paramètrent exactement les systèmes de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ sur les formes automorphes p-adiques propres sur lesquelles U_p agit par une unité p-adique, ou encore (de manière équivalente) sur lesquelles tous les F_i agissent par une unité p-adique.

Proposition 6.11. *$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda} \to \mathcal{O}_{\mathcal{D}_\chi}^{rig}(\mathcal{D}_\chi^{\mathrm{ord}})$ se factorise par $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}^{\mathrm{ord}}$, le morphisme π : $\mathcal{D}_\chi^{ord} \to \mathcal{W}$ est fini et provient par extension des scalaires du morphisme fini*

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}^{ord}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Lambda)$$

Preuve : La première assertion est immédiate, prouvons la seconde. Soit Z_χ^{ord} l'ouvert admissible de Z_χ défini par $pr_2^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{A}^1_{rig}, |\lambda| = 1\})$, c'est aussi un fermé de Z_χ car sa nilréduction est l'image de $(\mathcal{D}_\chi^{\mathrm{ord}})^{\mathrm{red}}$ par le morphisme fini π. Soit $r \in p^{\mathbb{Q}} \cap [1, |\pi/\mathbf{p}|[$, le morphisme canonique

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p)) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{S}_\chi(\mathcal{W}_r)(G, U_0(p)) \tag{16}$$

s'identifie, via le choix d'une base orthonormée de $A(\mathcal{F})_\chi(G, U_0(p))$ auquel $\mathcal{S}_\chi(G, U_0(p))$ est associé (cf. 4.4), à l'application canonique $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A(\mathcal{W}_r))$. Le lemme 6.7 assure donc que (16) est injective d'image dense. Après application de l'idempotent continu e_χ^{ord} à (16), il vient que

$$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G, U_0(p))^{\mathrm{ord}} \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow e_\chi^{ord}(\mathcal{S}_\chi(\mathcal{W}_r)(G, U_0(p))) \tag{17}$$

est encore injective d'image dense. Cela implique que (17) est un isomorphisme, car son image est de rang fini sur $A(\mathcal{W}_r)$ par 6.1, et qu'elle est donc fermée par [**22**] lemme 2.3. On en déduit facilement que Z_χ^{ord} est l'hypersurface de Fredholm associée au polynôme $\det(1 - TU_{p|\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))^{\mathrm{ord}}})$. En particulier, $pr_1 : Z_\chi^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{W}$ est fini et plat. Cela montre la seconde assertion. La dernière vient de ce que (17) est un isomorphisme, et de la platitude de $\Lambda \to A(\mathcal{W}_r)$ (cf. [**91**] proposition 4.7 avec $G = (\mathbb{Z}_p)^n$). □

Lemme 6.7. *L'application canonique $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda A(\mathcal{W}_r) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, A(\mathcal{W}_r))$ est injective, d'image dense.*

Preuve : La densité de l'image est claire, montrons l'injectivité. Il suffit de voir que si M est un sous-Λ-module de type fini de $A(\mathcal{W}_r)$, muni de la topologie induite, alors l'application canonique

$$\varphi_M : \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda) \otimes_\Lambda M \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M)$$

est injective, où $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M)$ est le Λ-module des suites d'éléments de M tendant vers 0. Rappelons que Λ étant compact séparé, toute application Λ-linéaire entre deux Λ-modules topologiques de type fini est continue. On en déduit d'une part que φ_M est un isomorphisme si M est libre de rang fini, et d'autre part que tout application Λ-linéaire $M \to M'$ entre deux Λ-modules topologiques de type fini induit une application Λ-linéaire $\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M')$. Si M est de type fini quelconque, il est de présentation finie car Λ est noethérien. On fixe $\Lambda^n \to \Lambda^m \to M \to 0$ une telle présentation, de laquelle on déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\langle T\rangle \otimes_\Lambda \Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{\Lambda^n}"] & \Lambda\langle T\rangle \otimes_\Lambda \Lambda^m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{\Lambda^m}"] & \Lambda\langle T\rangle \otimes_\Lambda M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M"] & 0 \\
\mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda^n) \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, \Lambda^m) \arrow[r] & \mathcal{C}^0(\mathbb{N}, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La suite du haut est exacte par exactitude à droite du produit tensoriel, celle du bas est bien définie par ce qui a été dit plus haut. Les deux flèches verticales de gauche étant des isomorphismes, on en déduit immédiatement que φ_M est injective. □

7. Représentations et pseudo-caractères galoisiens

7.1. Prolongement des pseudo-caractères. Soient $X/\mathbb{C}_p$ un espace rigide réduit, $\mathcal{H}'$ un sous-anneau compact de $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$. La topologie sur $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$ est la moins fine pour laquelle les restrictions $\mathcal{O}_X^{rig}(X) \to \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$, Ω ouvert affinoide de X, sont continues. Soient Γ un groupe topologique, S' un ensemble, $(F_v)_{v\in S'}$ une famille d'éléments de Γ, et $(a_v)_{v\in S'}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}'$. On suppose que la réunion des classes de conjugaison des F_v, $v \in S'$, est dense dans Γ. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, faisons l'hypothèse suivante :

(H) Il existe $Z \subset X(\mathbb{C}_p)$ Zariski-dense et des représentations continues

$$\rho(z) : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p),\ z \in Z,$$

$$\text{tels que pour tout } v \in S',\ \mathrm{tr}(\rho(z)(F_v)) = a_v(z)$$

En particulier pour chaque $z \in Z$, $T_z := \mathrm{tr}(\rho(z)(.)) : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ est un pseudo-caractère de dimension n de Γ dans $\mathbb{C}_p$. Pour les généralités sur ces pseudo-caractères, on se référera à [**86**]. Soient $T : \Gamma \to A$ une fonction (resp. un pseudo-caractère) de Γ à valeurs dans un anneau A, $x \in \mathrm{Spec}(A)$, on appellera *évaluation en x de T* la fonction (resp. le pseudo-caractère) $T_x : \Gamma \to A/x$ déduite de T par composition avec $A \to A/x$.

PROPOSITION 7.1. *Sous l'hypothèse (H), il existe un unique pseudo-caractère continu de Γ dans $\mathcal{H}'$, de dimension n, dont l'évaluation en tout $z \in Z$ coïncide avec T_z. De plus, $T(1) = n$.*

Preuve : Soit le morphisme d'anneaux

$$\psi : \mathcal{H}' \longrightarrow \prod_{z\in Z} \mathbb{C}_p, \;\; f \mapsto (f(z))_{z\in Z}$$

On munit $\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p$ de la topologie produit, ψ est alors continue par définition de la topologie sur $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$. Par Zariski-densité de Z dans l'espace réduit X, ψ est injective. Comme $\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p$ est séparé et que $\mathcal{H}'$ est compact, ψ induit un homéomorphisme sur son image, et cette dernière est fermée.

Considérons l'application

$$\varphi : \Gamma \to \prod_{z\in Z} \mathbb{C}_p, \;\; g \mapsto (T_z(g))_{z\in Z}$$

Cette application est continue car les T_z le sont. Ses valeurs sur le sous-ensemble de Γ réunion des classes de conjugaison des F_v, $v \in S'$, sont dans $\psi(\mathcal{H}')$ par hypothèse. La densité ce sous-ensemble dans Γ et le fait que $\psi(\mathcal{H}')$ est fermé assurent alors que $\varphi(\Gamma) \subset \psi(\mathcal{H}')$. L'application continue $T := \psi^{-1}\varphi$, $\Gamma \to \mathcal{H}'$, est donc l'unique application continue dont les évaluations sur Z sont les T_z.

L'application ψ étant un morphisme injectif d'anneaux, T est un pseudo-caractère de dimension n si, et seulement si, ψ en est un. Mais ce dernier est la trace d'une représentation dans $\mathrm{GL}_n(\prod_{z\in Z}\mathbb{C}_p)$ par définition, ce qui conclut. $\square$

7.2. Représentation attachée à un pseudo-caractère absolument irréductible.

7.2.1. *Lieu d'irréductibilité d'un pseudo-caractère.* Soient X un espace rigide, Γ un groupe topologique, et $T : \Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}(X)$ un pseudo-caractère continu de dimension n tel que $T(1) = n$. Soit $x \in X(\mathbb{C}_p)$, $T_x : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ est un pseudo-caractère continu. Un résultat de R.Taylor ([**106**]) implique que c'est la trace d'une unique représentation semi-simple $\rho(x)$ de Γ sur $\mathbb{C}_p$.

Lemme 7.1. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique* 0, Γ *un groupe,* $T : \Gamma \to k$ *un pseudo-caractère de dimension n,* $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(k)$ *une représentation semi-simple de Γ de trace T, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *i) T est absolument irréductible (*[**86**] *§4),*
- *ii) ρ est irréductible,*
- *iii) $\rho(k[\Gamma]) = \mathrm{M}_n(k)$,*
- *iv) Il existe $g_1, ..., g_{n^2} \in \Gamma$, tels que* $(T(g_ig_j))_{1\leq i,j\leq n^2} \in \mathrm{GL}_{n^2}(k)$

Preuve : L'équivalence de *iii*) et *iv*) vient de ce que la trace est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathrm{M}_n(k)$, et donc qu'une famille $m_1, ..., m_{n^2} \in \mathrm{M}_n(k)$ est une base de $\mathrm{M}_n(k)$ si et seulement si $\det((tr(m_im_j))_{1\leq i,j\leq n^2}) \neq 0$. L'équivalence de *ii*) et *iii*) est un théorème de Burnside, et *i*) $\Rightarrow$ *ii*) est triviale. On rappelle que la condition *i*) est par définition : pour toute extension L algébriquement close de k, T ne s'écrit pas $T_1 + T_2$, avec T_1, T_2 des pseudo-caractères $\Gamma \to L$. Par manque de référence, détaillons *ii*) $\Rightarrow$ *i*). Soit L une extension algébriquement close de k telle que $T = T_1 + ... + T_s$, les T_i étant des pseudo-caractères absolument irréductibles de dimension n_i au sens de Rouquier. Chaque T_i, ainsi que T, est la trace d'une unique représentation semi-simple de Γ, et

$\rho \otimes L$ est donc somme de s représentations (en fait irréductibles par [**86**] 4.4). Or $\rho \otimes L$ est encore irréductible (car *iii*) $\Leftrightarrow$ *ii*)) et $s = 1$. $\square$

En vertu du lemme précédent, on définit le lieu de réductibilité de T comme le fermé rigide-Zariski Z de X défini par l'annulation de tous les $\det((T(g_i g_j))_{1 \leq i,j \leq n^2})$, $(g_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ parcourant les familles de n^2 éléments de Γ. Si $x \in X(\mathbb{C}_p)$, $x \notin Z(\mathbb{C}_p)$ si et seulement si T_x est absolument irréductible. L'ouvert complémentaire $X \backslash Z =: X_{\mathrm{irr}}$ est un espace rigide pour la structure induite de X que l'on appellera *lieu d'irréductibilité* de T. Nous allons montrer que sur X_{irr}, T est le pseudo-caractère attaché à une représentation de Γ dans les inversibles d'une algèbre d'Azumaya sur X_{irr}.

7.2.2. *Algèbres d'Azumaya et représentations.* Une algèbre d'Azumaya sur un espace rigide X est une $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre $\mathcal{A}$, cohérente comme $\mathcal{O}_X^{rig}$-module ([**15**] 9.4.3), et telle que sur tout ouvert affinoide Ω, $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathcal{O}^{rig}(\Omega)$-algèbre d'Azumaya au sens classique du terme. Il est équivalent à demander que $\mathcal{A}$ soit une $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre localement libre de rang fini qui est centrale simple sur les corps résiduels des points fermés, ce qui montre que la condition d'être d'Azumaya est locale pour la topologie rigide. Si $\mathcal{A}$ est d'Azumaya sur X, on peut définir sa trace réduite $\mathrm{Trd} : \mathcal{A} \to \mathcal{O}_X^{rig}$, qui est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules. En effet, on peut la définir sur chaque ouvert affinoide V par la trace réduite $\mathcal{A}(V) \to \mathcal{O}_X^{rig}(V)$, et on a la compatibilité à la restriction car la formation de la trace commute à l'extension des scalaires (ici, $\mathcal{O}_X^{rig}(V) \to \mathcal{O}_X^{rig}(W)$ si $W \subset V$ est ouvert affinoide).

LEMME 7.2. *Soit X un affinoide, $T : \Gamma \to A(X)$ un pseudo-caractère continu de dimension n tel que $T(1) = n$. On suppose que $\forall x \in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est absolument irréductible.*

Alors il existe une unique représentation surjective de $A(X)[\Gamma]$ dans une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang n^2 sur $A(X)$, de trace réduite T. Sa restriction à Γ est une représentation continue de Γ dans les inversibles de $\mathcal{A}$.

Preuve : Le théorème 5.1 de [**86**] affirme que si un pseudo-caractère $T : \Gamma \to A(X)$ est tel que pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est absolument irréductible de dimension $n = \dim(T)$, alors T est la trace réduite d'une vraie représentation de $A(X)[\Gamma]$ à valeurs dans une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang n^2 sur $A(X)$, d'image engendrant $\mathcal{A}$ sur $A(X)$. Ceci nous fournit l'existence de la représentation. L'unicité découle du corollaire 5.3 de [**86**]. On note $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}$ la représentation de Γ ainsi construite, prouvons sa continuité.

Soient $g_1, ..., g_s \in \Gamma$ tels que $\rho(g_1), ..., \rho(g_s)$ engendrent $\mathcal{A}$ comme $A(X)$-module, on considère

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow A(X)^s, \text{ défini par } v \longrightarrow (\mathrm{Trd}(\rho(g_1)v), ..., \mathrm{Trd}(\rho(g_s)v)),$$

alors φ est une injection $A(X)$-linéaire car la trace réduite est non dégénérée sur une algèbre d'Azumaya. On munit $\mathcal{A}$ de son unique topologie de module de Banach de type fini sur $A(X)$, de même pour $A(X)^s$. L'injection $A(X)$-linéaire φ est alors un homéomorphisme sur son image, qui est fermée dans $A(X)^s$ ([**15**] 3.7.3). Comme $\mathrm{Trd}(\rho(g)) = T(g)$, on en déduit que T est continue si, et seulement si, ρ l'est, vue comme application de Γ dans $\mathcal{A}$. Ainsi, $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}$ est continue.

La topologie sur $\mathcal{A}^*$ est celle induite par son plongement dans le fermé de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ défini par $xy = 1$. L'application $\rho : \Gamma \to \mathcal{A}^*$ est donc continue si, et seulement si, les deux applications $\Gamma \longrightarrow \mathcal{A}$, $g \mapsto \rho(g)$ et $g \mapsto \rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ le sont. Mais la première est continue comme on l'a vu, et la seconde est la composition de l'inversion de Γ par la première, ce qui conclut. $\square$

Soit $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, la $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbre du groupe Γ, définie sur les ouverts admissibles Ω par $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma](\Omega) := \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)[\Gamma]$. En tant que $\mathcal{O}_X^{rig}$-module, $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$ est une somme directe indexée par Γ de copies du faisceau structural $\mathcal{O}_X^{rig}$. Sa formation commute à la restriction à un ouvert admissible Ω : l'application canonique $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]_{|\Omega} \to \mathcal{O}_\Omega^{rig}[\Gamma]$ est un isomorphisme. Si Ω est un ouvert affinoide, $\mathcal{O}_\Omega^{rig}[\Gamma]$ est le $\mathcal{O}_\Omega^{rig}$-module associé au $A(\Omega)$-module $A(\Omega)[\Gamma]$, au sens de [**15**] 9.4.2. On notera $\underline{\Gamma}$ le faisceau de groupes topologiques Γ constant sur X. On a une injection canonique $\underline{\Gamma} \to \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$.

Si $\mathcal{B}$ est un faisceau en $\mathcal{O}_X^{rig}$-algèbres, un pseudo-caractère $T : \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X^{rig}$ de dimension n est un morphisme de $\mathcal{O}_X^{rig}$-modules tel que pour pour tout ouvert admissible Ω, $T_\Omega : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$ est un pseudo-caractère de dimension n de la $\mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)$-algèbre $\mathcal{B}(\Omega)$ au sens classique du terme. Si $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, la restriction de T à $\underline{\Gamma}$ le détermine entièrement, cette dernière étant à son tour uniquement déterminée par ses sections globales $T_X : \Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}(X)$. La fonction T_X est alors un pseudo-caractère à valeurs dans $\mathcal{O}_X^{rig}(X)$ si, et seulement si, T est un pseudo-caractère au sens ci-dessus. Si $x \in X(\mathbb{C}_p)$, on notera $T_x : \Gamma \to \mathbb{C}_p$ l'évaluation de T_X en x. On définit un sous-faisceau $\ker(T)$ en idéaux bilatères de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, sur les ouverts admissibles Ω de X, par :

$$\ker(T)(\Omega) := \{m \in \mathcal{O}_X^{rig}(\Omega)[\Gamma],\ \forall g \in \Gamma, T(gm) = 0\}$$

Proposition 7.2. *Soient X un espace rigide et $T : \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma] \to \mathcal{O}_X^{rig}$ un pseudo-caractère de dimension n tel que $T(1) = n$. On suppose que pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, T_x est un pseudo-caractère absolument irréductible.*

Alors $\mathcal{A} := \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]/\ker(T)$ est une algèbre d'Azumaya sur X de rang n^2 et de trace réduite T. La représentation déduite $\underline{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ est continue, de trace réduite T.

Preuve : Il s'agit de globaliser [**86**] 5.1. La condition d'être d'Azumaya étant locale sur X, ainsi que la formation de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, $\ker(T)$, et du faisceau quotient, on peut supposer que X est affinoide. Par le lemme 7.2, T_X est alors le pseudo-caractère associé à une représentation $A(X)$-linéaire surjective $\rho : A(X)[\Gamma] \to \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'$ étant d'Azumaya sur $A(X)$ et T coïncidant avec la trace réduite de $\mathcal{A}'$.

Soient $g_1, ..., g_r \in \Gamma$ engendrant $\mathcal{A}'$ sur $A(X)$, considérons les $\mathcal{O}_X^{rig}$-morphismes $T_1, ..., T_r$ de $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$ vers $\mathcal{O}_X^{rig}$, définis sur les ouverts admissibles Ω de X par

$$T_i(f) := T(g_i f), f \in A(\Omega)[\Gamma]$$

Soient $K_i := \ker(T_i)$ le faisceau noyau de T_i et $K := \cap_{i=1}^r K_i$. Par [**15**] 9.4.2 (proposition 2 et corollaire 3), K et les K_i sont respectivement les faisceaux sur X associés aux $A(X)$-modules $K(X)$ et $K_i(X)$. Soit Ω un ouvert affinoide de X, la surjection $A(X)[\Gamma] \to \mathcal{A}'$ induit une surjection $A(\Omega)[\Gamma] \to \mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$, et $\mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$ est d'Azumaya sur $A(\Omega)$, de trace réduite coïncidant avec $T(\Omega)$. En particulier l'image des g_i engendre

$\mathcal{A}' \otimes_{A(X)} A(\Omega)$ sur $A(\Omega)$ et la non dégénérescence de la trace réduite sur cette dernière implique que l'application canonique $\ker(T)(\Omega) \to K(\Omega)$ est un isomorphisme. En particulier, $\ker(T)$ est le faisceau associé à $K(X)$, et [**15**] 9.4.2.2.iii) implique que $\mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]/\ker(T)$ est le faisceau associé à $A(X)[\Gamma]/(\ker(T)(X))$. Comme cette dernière $A(X)$-algèbre coïncide avec $\mathcal{A}'$, cela conclut la première assertion de la proposition.

Soit $\rho : \underline{\Gamma} \to \mathcal{A}^*$, le morphisme canonique déduit de $\underline{\Gamma} \to \mathcal{O}_X^{rig}[\Gamma]$, il reste à voir qu'il est continu. Ceci se vérifie sur les sections sur les ouverts affinoides de X, on est donc ramené à le vérifier sur les sections globales quand X est affinoide, cas qui découle du lemme 7.2. □

COROLLAIRE 7.1. *Soient X un espace rigide, $T : \Gamma \to \mathcal{O}_X^{rig}$ un pseudo-caractère continu, X_{irr} le lieu d'irréductibilité de X. Alors il existe une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X_{irr} qui est une représentation continue surjective de $\mathcal{O}_{X_{\text{irr}}}^{rig}[\Gamma] \to \mathcal{A}$ de trace réduite T. Elle induit une représentation continue de $\underline{\Gamma} \to \mathcal{A}^*$.*

7.3. Certains groupes unitaires.

On considère un groupe unitaire G comme en §4.1. Nous devrons faire quelques restrictions sur G pour assurer l'existence, selon les résultats actuels, de représentations galoisiennes attachées à ses formes automorphes. Rappelons que G est le groupe unitaire d'une algèbre centrale simple D de dimension n^2 de centre une extension quadratique imaginaire E de $\mathbb{Q}$ munie d'une involution de seconde espèce, cette dernière étant de type $(n, 0)$ à l'infini. L'extension des scalaires à E de G est le groupe D^*/E des inversibles de D, qui est une forme intérieure de GL_n/E. On fera les hypothèses suivantes :

- D n'est ramifiée sur E qu'en des places décomposées sur $\mathbb{Q}$, où elle est de surcroît une algèbre à division,
- il existe au moins un telle place.

THÉORÈME 7.1. *(Labesse-Clozel) Soit π une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$, alors il existe une représentation automorphe irréductible* $\mathrm{BC}(\pi)$ *de $D^*(\mathbb{A}_E)$, qui est un changement de base faible de π.*

Ce résultat est une conséquence de [**28**] Appendice A, théorème 5.2, notant que la condition d'être cohomologique à l'infini est satisfaite en degré 0 par l'hypothèse "$G(\mathbb{R})$ compact", et que l'on est dans leur hypothèse (b). On entend par changement de base faible une représentation automorphe qui coïncide en toutes les places où E, D et π sont non ramifiés avec le changement de base local non ramifié. Le plongement distingué $E \subset \mathbb{C}$ défini en 4.1 nous permet de voir π_∞ comme la restriction à $G(\mathbb{R})$ d'une représentation de tout $G(\mathbb{C})$. On notera $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ la représentation de dimension finie $\pi_\infty \otimes \pi_\infty^*$ de $G(\mathbb{C})$. Il est démontré *loc.cit.* que $\mathrm{BC}(\pi)_\infty$ a de la cohomologie dans $(\pi_\infty^{\mathbb{C}})^*$.

On passe de D^*/E à sa forme intérieure déployée GL_n/E par la correspondance de Jacquet-Langlands globale. Cette correspondance est due à Vignéras (cf. [**51**] chapitre VI.1), on en énonce une version un peu affaiblie ci-dessous. Elle utilise l'hypothèse que l'algèbre à division est supposée déployée aux places où elle n'est pas une algèbre à division :

Théorème 7.2. *(Vignéras) Soit π une représentation automorphe irréductible de $D^*(\mathbb{A}_E)$, alors il existe une unique représentation automorphe irréductible* $\mathrm{JL}(\pi)$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$*, intervenant dans le spectre discret, isomorphe à π aux places où D est non ramifiée.*

Enfin, on obtient les représentations galoisiennes par le résultat suivant, dont les premières versions sont dues à Clozel dans [**27**], se basant sur les résultats de Kottwitz, puis amélioré par Harris-Taylor dans [**51**].

Théorème 7.3. *(*[**51**] *théorème VII.1.9) Soit π une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$*, irréductible, telle que :*
- *$\pi^* \simeq \pi^c$,*
- *π_∞ a le même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique complexe de la restriction des scalaires de E à $\mathbb{Q}$ de* GL_n*,*
- *à une place finie v de L, π_v est de carré intégrable.*

Alors il existe un unique système compatible de représentations semi-simples λ-adiques

$$R_\lambda(\pi) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l}),$$

découpées dans la cohomologie l-adique d'une variété algébrique propre et lisse, telles que :
- *$R_\lambda(\pi)$ est non ramifiée en toutes les places finies v de E, $v \neq \lambda$, où π_v est non ramifiée, et correspond en ces même places, par la correspondance de Langlands locale non ramifiée, à $\pi_v \otimes |\det(.)|^{(1-n)/2}$,*
- *$R_\lambda(\pi)$ est potentiellement semi-stable en toutes les places v de E divisant l, et cristalline en ces places si π_v est non ramifiée,*
- *$(R_\lambda(\pi)^c)^* \simeq (R_\lambda(\pi))(n-1)$*

Pour une représentation ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, nous entendons par ρ^c la représentation sur l'espace de ρ définie par

$$g \mapsto \rho(\tau(g)),$$

où τ désigne la conjugaison complexe. Nous faisons agir τ sur $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ par conjugaison, et sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ par son action naturelle sur $\mathbb{A}_E$. Nous normalisons la correspondance de Langlands en faisant correspondre Frobenius géométriques et uniformisantes dans la théorie du corps de classe locale (cf. [**51**] p.2). Le caractère cyclotomique est noté $\mathbb{Q}_p(1)$, la convention que l'on adopte pour son poids de Hodge-Tate est -1. On fixe pour chaque place v, un élément de Frobenius géométrique $F_v \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$.

On considère l'ensemble fini S des places finies v de E divisant p, ou divisant une place v' de $\mathbb{Q}$ en laquelle soit G est ramifié, soit il est non ramifié mais $U_0(p)_{v'}$ n'est pas maximal de type hyperspécial dans $G(\mathbb{Q}_{v'})$ (cf. [**107**] §1.10,3.2). On fixe une algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ (cf. 4.5.2) contenant l'algèbre de Hecke globale hors de S de $(G(\mathbb{A}_f), U_0(p))$. On note S' l'ensemble des places finies de E non dans S, et $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$ le groupe de Galois de la plus grande sous-extension de $\overline{E}/E$ non ramifiée hors de S. On rappelle de plus que nous avons fixé en 4.1 une place décomposée w de E divisant p. On note D_w un groupe de décomposition en w de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$.

Soit $v \in S'$ divisant $l \in \mathbb{Z}$ et décomposé dans E, la donnée de v nous permet d'identifier $G(\mathbb{Q}_l)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_l) = \mathrm{GL}_n(E_v)$, et de considérer l'opérateur de Hecke $T_v \in \mathcal{H}$ donné par la double classe :

$$[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1, 1, .., 1, l)\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_l)]$$

De même, si $v \in S'$ divise un premier $l \in \mathbb{Z}$ inerte dans E, il existe un opérateur de Hecke T_v ayant la propriété suivante : pour toute représentation non ramifiée π_v de $G(\mathbb{Q}_l)$, la valeur propre de T_v sur la droite non ramifiée $\pi_v^{U_0(p)_v}$ est la même que celle de

$$[\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})\mathrm{diag}(1, 1, .., 1, l)\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})]$$

sur la droite non ramifiée $\mathrm{BC}(\pi)_v^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{E_v})}$.

Définitions : Si $f \in S_t(G, U_0(p))$, on dira que f *est ancienne en* p si elle engendre[12] une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ contenant un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-invariant non nul. Un poids $t = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ est dit *régulier* si aucun des m_i, $i \in \{1, ..., n-1\}$, n'est nul.

COROLLAIRE 7.2. *Soient $t \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ régulier, $f \in \mathcal{S}_{t,\chi}(G, U_0(p))^{cl}$ une forme propre pour $\mathcal{H}$, alors il existe une unique représentation semi-simple*

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

potentiellement semi-stable aux places de E divisant p, telle que pour toute place $v \in S'$,

$$T_v(f) = tr(\rho_f(F_v))f$$

La représentation ρ_f ne dépend que du point $x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ attaché à f par le théorème 6.2, on la note $\rho(x)$.

Si f est ancienne en p et π_p est un facteur irréductible non ramifié de la représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par f, alors la restriction de ρ_f à D_w est cristalline, de poids de Hodge-Tate

$$m_n < 1 + m_n + m_{n-1} < \cdots < (n-1) + m_n + ... + m_1$$

et le polynôme caractéristique de son Frobenius cristallin est l'image par i_p du polynôme de Hecke de π_p.

Preuve : Notons encore f l'élément de $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ associé à la forme de l'énoncé comme au paragraphe 4.2. L'espace $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ étant compact, $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ est l'adhérence de la somme directe de ses sous-représentations (automorphes) irréductibles sous l'action de $G(\mathbb{A})$. Soit $A(t, U_1(p))$ le sous-espace vectoriel de $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ somme directe des représentations automorphes irréductibles π de $G(\mathbb{A})$ telles que

$$\pi_\infty \simeq S_t(\mathbb{C})^*, \text{ et } \pi^{U_1(p)} \neq 0.$$

La représentation $A(t, U_1(p))$ est engendrée par $S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$, et se décompose comme somme finie de représentations irréductibles,

$$A(t, U_1(p)) = \oplus_{i=1}^r \pi_i$$

[12] On rappelle que l'on a fixé en §4.1 un isomorphisme $i_p : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, qui nous permet en particulier d'associer à f un élément de $S_t(G, U_0(p), \mathbb{C})$ comme en §4.2.

Soit $f = f_1 + ... + f_r \in S_t(G, U_1(p), \mathbb{C})$ écrite selon cette décomposition. Comme f est propre pour l'algèbre de Hecke non ramifiée hors de S, tous les f_i le sont aussi, avec même caractère. On choisit une quelconque des représentations automorphes irréductibles π_i telle que f_i soit non nulle, on la note $\pi(f)$. On a vu que les $\pi(f)_v$ avec $v \in S'$ sont non ramifiées et que leurs paramètres de Langlands se lisent sur l'action de $\mathcal{H}$ sur f. L'image par i_p de ces derniers se lit donc sur le point $x_f \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ correspondant à f par le théorème 6.2.

Par la discussion précédent 7.3, on peut considérer la représentation automorphe $\pi' := \mathrm{JL}(\mathrm{BC}(\pi(f)))$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, qui est discrète par 7.2. Elle satisfait $(\pi')^* \simeq (\pi')^c$ car c'est vrai aux places finies hors de S, et par le théorème de multiplicité 1 forte dans le spectre discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$. On sait de plus que la représentation $\mathrm{BC}(\pi(f))_\infty$ a de la cohomologie dans $(\pi_\infty^{\mathbb{C}})^*$, et en particulier même caractère infinitésimal que $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ (cf. [**14**] chapitre I corollaire 4.2). Le théorème principal de [**76**] assure qu'il existe un diviseur d de n, ainsi qu'une représentation automorphe cuspidale irréductible π'' de $\mathrm{GL}_{n/d}(\mathbb{A}_E)$, tels que si P est un parabolique de GL_n de Levi $\mathrm{GL}_{n/d}^d$, alors π' est un sous-quotient de l'induite parabolique normalisée de $P(\mathbb{A}_E)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ de la représentation $\pi'' \otimes |\det|^{(1-d)/2} \times \cdots \times \pi'' \otimes |\det|^{(d-1)/2}$. La composante archimédienne de cette induite admet un caractère infinitésimal ([**65**] proposition 8.22), qui est donc aussi celui de tous ses constituants. Si t est un poids régulier, l'identification de ce caractère infinitésimal avec celui de $\pi_\infty^{\mathbb{C}}$ entraîne que $d = 1$, puis que π' est cuspidale (le théorème 6.1 de [**40**] montre même que π'_∞ est tempérée). Un théorème de Shalika ([**92**] corollaire du §5) assure alors que les composantes locales de π' sont génériques en toutes les places finies de E. Soit v une place finie de E telle que D_v est une algèbre à division, il en existe par hypothèse sur G. Une version plus précise du théorème 7.2, énoncée et prouvée en [**51**] (cf. I.3 et théorème VI.1.1 n$^{\text{o}}$ 2), montre qu'il y a deux possibilités à priori pour π'_v (cf. *loc.cit.*). Le théorème 9.7 de [**110**] assure que seule celle de carré intégrable est générique (*non dégénérée* dans sa terminologie). Ainsi, π' est de carré intégrable aux places finies ramifiées pour D, et π' entre dans les hypothèses du théorème 7.3.

La donnée de i_p comme place λ-adique nous fournit en particulier une représentation p-adique semi-simple de dimension n comme dans l'énoncé :

$$\rho_f := R_{i_p}(\pi')$$

Les transferts à D^* puis GL_n sont compatibles avec le transfert non ramifié aux places dans S', $\pi(f) \mapsto \rho_f$ est donc compatible avec la correspondance de Langlands non ramifiée par le théorème 7.3. Ceci détermine les polynômes caractéristiques dans ρ_f des Frobenius de S', le théorème de Cebotarev conclut que ρ_f est indépendante du $\pi(f)$ choisi initialement, puis ne dépend que du point $x_f \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ associé à f.

Si f est ancienne en p on peut choisir un $\pi(f)$ ayant pour composante en p le π_p de l'énoncé, qui est non ramifié. Mais les transferts 7.1 et 7.2 étant compatibles aux transferts locaux non ramifiés en les places non ramifiées pour D, E et π, ils le sont en la place w. Le théorème 7.3 implique alors que la représentation p-adique ρ_f, restreinte à chaque groupe de décomposition aux places v de E divisant p, est cristalline et que le paramètre de Langlands de π'_w est celui de π_p.

L'assertion sur les poids de Hodge-Tate de $(R_{i_p}(\pi'))_{|D_w}$ découle du théorème VII.1.9, n° 4, de [**51**], car π'_∞ a même caractère infinitésimal que $\pi^{\mathbb{C}}_\infty$. La représentation $(\rho_f)_{|D_w}$ obtenue dans [**51**] (cf. §3) est réalisée dans la cohomologie étale p-adique de la fibre générique d'une variété propre et lisse sur $\mathbb{Z}_p$, un de ses multiples étant découpé par une correspondance algébrique (cf. [**51**] chapitre III.2). Un théorème de Katz-Messing ([**62**] théorème 2.2), combiné avec 7.3 et le théorème de changement de base lisse en cohomologie l-adique, assure que le polynôme caractéristique du Frobenius de cristallin de $(\rho_f)_{|D_w}$ coïncide avec l'image par i_p du polynôme de Hecke de $\pi(f)_p$. □

7.4. Applications aux familles de représentations galoisiennes. On conserve dans ce paragraphe les notations du §7.3. Soit $\mathbf{D}_\chi$ la nilréduction de l'espace rigide associé à la donnée $(G, U_0(p), \chi, \mathcal{H}_{\chi,\Lambda})$ par le théorème 6.2. La proposition 7.1 s'applique en prenant :

- $X := \mathbf{D}_\chi$,

- $\mathcal{H}'$ l'image par le morphisme a (6.2) de $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$ dans $\mathcal{O}^{rig}_{\mathbf{D}_\chi}$, elle est compacte par la proposition 4.4,

- $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$ défini en 7.3,

- S' ainsi que les $(F_v)_{v\in S'}$ définis *loc.cit.* (la réunion des classes de conjugaison des F_v est dense dans Γ par le théorème de Cebotarev),

- pour $v \in S'$, $a_v := a(T_v)$, T_v étant défini *loc.cit.*,

- Z l'ensemble des points classiques de poids régulier de $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ (il est Zariski-dense par une modification triviale de 6.8),

- les représentations $\rho(z)$, $z \in Z$, données par le corollaire 7.2.

Corollaire 7.3. *Il existe un unique pseudo-caractère continu, de dimension n,*

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \to \mathcal{O}^{rig}_{\mathbf{D}_\chi},$$

dont l'évaluation en tout point classique de poids régulier de $\mathbf{D}_\chi$ est la trace de la représentation galoisienne associée à ce point par 7.2.

Tout pseudo-caractère continu $\mathbb{C}_p$-valué étant la trace d'une unique représentation continue, semi-simple, de dimension finie ([**106**]), on en déduit le :

Corollaire 7.4. *Soit $t \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $f \in \mathcal{S}_{t,\chi}(G, U_0(p))$ une forme propre pour $\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, de pente finie, il existe une unique représentation semi-simple continue*

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$$

telle que pour tout $v \notin S$, $T_v(f) = tr(\rho_f(F_v))f$.

En utilisant la théorie de Sen développée dans [**100**], ainsi que 7.2, on montrerait facilement que si $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, alors ρ_f a pour poids de Hodge-Tate-Sen

$$(t_n, 1 + t_n + t_{n-1}, ..., (n-1) + t_n + ... + t_1)$$

En particulier, ρ_f n'est pas de Hodge-Tate en général. La théorie de Hodge p-adique de ces représentations peut être comprise à l'aide des travaux récents Kisin dans [**64**] (voir aussi §7.5, ainsi que le chapitre III §5 et §6 de cette thèse).

Enfin, si $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}$ désigne le lieu d'irréductibilité du pseudo-caractère T, le corollaire 7.1 donne :

COROLLAIRE 7.5. *Il existe une unique algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}$ et une représentation continue $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S \longrightarrow \mathcal{A}^*$, dont l'évaluation en tout point classique régulier $x \in \mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}}(\mathbb{C}_p)$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{C}_p$ de la représentation galoisienne associée à ce point par 7.2.*

Remarques :

- L'irréductibilité des représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes du théorème 7.3, bien que conjecturée, n'est connue en générale que si $n \leq 3$ (Ribet, Blasius-Rogawski, cf. [**71**]), ou si elles sont supposées supercuspidales à au moins une place finie (Harris-Taylor [**51**] théorème C). Dans le premier cas, on a donc, $Z \subset \mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}} \neq \emptyset$.

  Expliquons rapidement comment utiliser le second cas. Soit v' une place finie de E décomposée, ne divisant pas p, telle que $D^*(E_{v'}) = \mathrm{GL}_n(E_{v'})$. Soit (J, r) un type d'une supercuspidale fixée de $\mathrm{GL}_n(E_{v'})$ (cf. [**18**] §5), choisissons $U_0(p)$ de façon à ce que $U_0(p)_{v'} = J$. Une modification triviale des constructions faites au §4 nous permettrait de construire des familles de formes automorphes p-adiques de pentes finies pour G avec type $(U_0(p), \chi \otimes r)$. Un exemple est traité en détail pour $n = 3$ dans le chapitre III §8.2 de cette thèse, le cas général est formellement identique. Notant que les transferts 7.1 et 7.2 sont compatibles au transfert local en la place v' ([**69**] 3.4, 4.5.2, 4.6.2), il vient que si π est une représentation automorphe pour G ayant le type (J, r) en v', $\mathrm{JL}(\mathrm{BC}(\pi))$ est supercuspidale en v. On est donc dans le second cas discuté ci-dessus et $\mathbf{D}_{\chi,\mathrm{irr}} = \mathbf{D}_\chi$.

  Enfin, par des techniques de théorie de Hodge p-adique, il est possible de démontrer que sur certaines composantes irréductibles de $\mathbf{D}_\chi$, $(T_x)_{|D_w}$ est la trace d'une représentation irréductible (cf. III.9.1 et III.6.1).
- D'après le lemme 4.8.3, chaque représentation ρ_f avec f classique apparaît jusqu'à $n!$ fois sur $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$. Ce phénomène est l'analogue de l'existence des *formes jumelles* dans le cas du groupe GL_2. Les déformations de ρ_f construites à partir de différents points de $\mathbf{D}_\chi(\mathbb{C}_p)$ sont en général très différentes.

7.5. Variétés de Hecke et p-motifs classiques raffinés.

7.5.1. *p-motifs raffinés de Mazur.* Soient E un corps de nombres, $K \subset \mathbb{C}_p$ un corps local, et $n \geq 1$ un entier. Suivant Mazur dans [**73**], on appelle *p-motif classique de rang n à coefficients dans K*, la donnée d'un K-espace vectoriel W de rang n et d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur W, qui est non-ramifiée hors d'un ensemble fini, et dont la restriction à chaque groupe de décomposition aux places de E divisant p est cristalline.

Soit w une place de E divisant p telle que $E_w = \mathbb{Q}_p$, D_w un groupe de décomposition en w, et W un tel p-motif. À W vue comme représentation de $D_w = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on peut alors associer, suivant Fontaine, un φ-module filtré $D(W)$ faiblement admissible. Comme $E_w = \mathbb{Q}_p$, φ est K-linéaire et on notera $\mathcal{R}(W)$ l'ensemble des n valeurs propres de φ, comptées avec multiplicités. De plus, on note $\mathcal{J}(W) \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des poids de Hodge-Tate de W, et

$$\delta_i := \dim_K(\mathrm{Fil}^i(D(W))/\mathrm{Fil}^{i+1}(D(W)))$$

Mazur définit *loc.cit.* un *raffinement* de W comme étant la donnée $\mathcal{R}$ d'une partition ordonnée de $\mathcal{R}(W)$, soit $\mathcal{R} = \coprod_{i=1}^r I_i$, satisfaisant $|I_i| = \delta_i$. Si W est *régulier*, *i.e.* si $\forall i \in \mathcal{J}(W)$, $\delta_i = 1$, se donner un raffinement équivaut à ordonner les racines de φ. Si $(W, \mathcal{R})$ est un p-motif classique raffiné de rang n, on peut lui attacher les nombres

$$F_i(W) := \lambda_i / p^{k_i}$$

où k_i est le i-ème poids de Hodge-Tate de W, ces derniers étant rangés par ordre croissant, et $\mathcal{R} = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, ainsi que son polynôme-$U \in \overline{\mathbb{Q}}_p[T]$ qui est le polynôme dont les racines sont les $F_i(W)$.

L'intérêt de la notion de raffinement vient de ce que les p-motifs raffinés semblent se déformer p-adiquement "avec leur raffinement", dans le sens où les F_i (et non pas les λ_i) varient analytiquement dans la déformation. Ceci est discuté en détail dans [**73**], et les résultats de cet article (cf. §7.5.2) peuvent être vus comme une confirmation des prédictions faites *loc.cit.* Mazur a proposé de plus une condition de non criticité pour les p-motifs raffinés :

Définition : (Mazur) $(W, \mathcal{R})$ est dit *de pente non critique* si

$$v(\lambda_1) < k_2, \;\; v(\lambda_n) > k_{n-1} \;\; \text{et si}$$
$$\forall i \in \{2, ..., n-1\}, \;\; v(\lambda_i) \in]k_{i-1}, k_{i+1}[$$

Par exemple, si W est ordinaire, il a un unique raffinement de pente non critique $\mathcal{R} = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, satisfaisant $v(\lambda_i) = k_i$; un tel $(W, \mathcal{R})$ sera dit *ordinaire*. Il nous sera utile de définir, si $a = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n)$ est une suite croissante d'entiers, $(W, \mathcal{R})$ un p-motif raffiné comme ci-dessus,

$$U^a(W) := \prod_{i=1}^n F_i(W)^{a_{n-i+1}}$$

Définition : $(W, \mathcal{R})$ sera dit *U^a-non critique* si a est strictement croissante et si

$$v(U^a(W)) < \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)(k_{n-i+1} - k_{n-i})$$

$(W, \mathcal{R})$ sera dit U-non critique si il est U^a-non critique pour au moins une suite a.

PROPOSITION 7.3. *Si $(W, \mathcal{R})$ est U-non critique, il est de pente non critique. La réciproque est vraie si $(W, \mathcal{R})$ est ordinaire, ou si $n = 2$.*

Preuve : Soit $(W, \mathcal{R})$ U^a-non critique, on supposera $a_1 = 0$ et aussi $k_1 = 0$, ce qui est loisible. Si $i \in \{1, ..., n-1\}$, on pose $m_i + 1 := k_{n-i+1} - k_{n-i}$, En terme des $F_i(W)$, la condition de pente non critique s'écrit $F_1(W) < m_{n-1} + 1$, $F_n(W) > -m_1 - 1$ et

$\forall i \in \{2, ..., n-1\}$, $-m_{n-i+1}-1 < F_i(W) < m_{n-i}+1$. Or on a $U^a(W) = \prod_{i=1}^n F_i(W)^{a_{n-i+1}}$, et si pour $j \in \{0, ..., n-1\}$, on pose $v_j = \sum_{i=1}^{n-j} v(F_i(W))$, alors

$$\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) v_i < (m_j + 1)(a_{j+1} - a_j)$$

De ceci et du fait que $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $v_j \geq 0$ (le polygone de Hodge est au dessous du polygone de Newton), on déduit facilement que $(W, \mathcal{R})$ est de pente non critique. Si $(W, \mathcal{R})$ est ordinaire, il est $U^{(0,1,...,n-1)}$-critique. Enfin, l'équivalence quand $n = 2$ est immédiate. □

Exemple : Dans le cas $n = 3$, il est facile de montrer que $(W, \mathcal{R})$ (avec $k_1 = 0$ comme on peut le supposer) est U-non critique si et seulement si il est de pente non critique et si il vérifie la condition :

$$\frac{v(\lambda_1)}{k_2} + \frac{v(\lambda_2)}{k_3} < 1$$

Cette condition ne serait pas vérifiée par exemple pour un $(W, \mathcal{R})$ de poids de Hodge-Tate $(0, 1, 2)$ tel que $v(\lambda_1) = 1/2$, $v(\lambda_2) = 1$, et $v(\lambda_3) = 3/2$ (il n'y a pas d'obstruction locale en p à ce qu'un tel W existe).

7.5.2. *p-motifs raffinés attachés aux formes automorphes non ramifiées en p.*

On se replace dans le cadre du paragraphe 7.3, en particulier E est un corps quadratique imaginaire décomposé en p. On fixe

$$x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p),$$

un point classique de poids régulier ancien en p, de poids $t = \kappa(x) = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Soit $\rho(x)$ la représentation galoisienne attachée à x comme en 7.2, elle prend ses valeurs dans un corps local E. D'après 7.2, on sait que sa restriction à D_w (ainsi qu'à l'autre place divisant p par la dernière assertion de 7.3) est cristalline. Cela nous fournit donc un p-motif classique noté $W(x)$. On sait de plus de 7.2 que $W(x)$ est régulier, de poids de Hodge-Tate :

$$(m_n, m_n + m_{n-1} + 1, m_n + m_{n-1} + m_{n-2} + 2, \cdots, m_n + m_1 + m_2 + ... + m_{n-1} + n - 1)$$

Il est commode de poser

$$k_i := m_n + m_{n-1} + m_{n-2} + ... + m_{n-i+1} + i - 1,$$

c'est le i^{eme} poids de Hodge-Tate de $W(x)$, rangés par ordre croissant.

Ceci nous permet d'associer à $W(x)$ un raffinement canonique de la manière qui suit. D'après 7.2, le polynôme caractéristique du Frobenius de $W(x)$ est $i_p(P(T))$ où $P(T)$ est le polynôme de Hecke d'une certaine représentation non ramifiée π_p de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Fixons $f \in S_t(G, U_0(p), \mathbb{C})$ telle que x est associé à f par 6.2 et §4.2, engendrant π_p. D'après §4.8, lemme 4.4, les opérateurs de Hecke $[IuI]$ opèrent par un caractère χ sur f ayant la propriété que le polynôme de Hecke soit

$$\prod_{i=1}^{n}(T - p^{i-1}\chi(F_i))$$

De plus, par construction et la remarque concluant §4.8, $\iota_p(p^{i-1}\chi(F_i)) = p^{k_i}\mathbf{F}_i(x)$. On pose donc

$$\lambda_i := \mathbf{F}_i(x)p^{k_i}$$

D'après la remarque suivant la définition 4.8.3 §4.8, ceci nous fournit bien un raffinement de $W(x)$, que l'on note $\mathcal{R}(x)$. Son polynôme-U est $\prod_{i=1}^{n}(T-\mathbf{F}_i(x))$, $\mathbf{F}_i(x) = F_i(W(x))$ et pour toute suite croissante positive a, $\mathbf{U}_p^a(x) = U^a(W(x))$. La traduction de non criticité est donc :

$$(W(x), \mathcal{R}(x)) \text{ est } U^a\text{-non critique } \Leftrightarrow x \text{ est très classique pour } U_p^a$$

D'après la proposition 6.9, si $p > 2$, les $x \in \mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))(\mathbb{C}_p)$ très classiques et anciens en p sont Zariski-denses. Ainsi, le couple $(\mathcal{D}_\chi(G, U_0(p)), \{\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_n\})$ peut être vu comme espace rigide d'interpolation de p-motifs raffinés en p. Ceci est un point de départ pour étudier la famille de représentations galoisiennes portée par $\mathcal{D}_\chi(G, U_0(p))$, par exemple à la manière des travaux récents de Kisin [**64**].

Index

$A(X)\{\{T\}\}$, 52
B, B_t, 32
E, 44
F, 33
F_i, 56
G, 44
J, 33
L, 44
N, 29
$P^a_\chi(s,T)$, $Q^a_\chi(s,T)$, 52
P_χ, Q_χ, 53
R, 29
$R^{\overline{N}}$, 30
$R^{\overline{N}}_t$, 31
S, 31
$S_t(G,\mathcal{U})$, 47
$S_t(G,\mathcal{U},\mathbb{C})$, 46
$S_{t,\chi}$, 38
$S_{t,\chi}(G,U_0(p))$, 47
$T(\zeta)$, 49
T_x, 78
U, 33
$U_0(p)$, $U_1(p)$, 47
U_p, U^a_p, 52
$V(G,U_0(p))^\alpha$, 53
$V(G,\mathcal{U})$, 47
$V\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p}\mathcal{O}^{rig}_X$, 42
V_χ, 38
X, 33
X_{irr}, 79
$X_{i,j}$, 30
$Y_{i,j}$, 30
Z_χ, 70
$Z_{i,j}$, 32
$[\cdot]_t$, 38
$[g]$, 40
Δ, 38
$\mathcal{F}$, 35
$\Gamma_0(p)$, 33
$\mathcal{H}$, 50
$\mathcal{H}_{\chi,\Lambda}$, 50
$\mathcal{H}^{\mathrm{ord}}_{\chi,\Lambda}$, 64
$\mathcal{L}_t$, 37
Λ, 44
$\Lambda\{\{T\}\}$, 52
$\mathcal{N}^t$, 37
$\Psi_{\chi,i}$, 51
$\mathcal{S}(r)$, $\mathcal{N}(r)$, 40
$\mathcal{S}^t$, 37
$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))$, 48
$\mathcal{S}_{\chi,\Lambda}(G,U_0(p))^{\mathrm{ord}}$, 63
$\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))$, 48
$\mathcal{S}_{\chi,t}(G,U_0(p))^{cl}$, 48
$\mathcal{S}_\chi$, $\mathcal{N}_\chi$, 43
$\mathcal{S}_\chi(G,U_0(p))$, 48
$\mathbb{T},\mathbb{T}^a$, 33
$\mathcal{W}$, 43
$\mathcal{W}_r$, 40
δ_i, 32
$\mathcal{D}_\chi$,$\mathcal{D}_\chi(G,U_0(p))$, 71
$\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_S$, 83
$\mathrm{Ind}(\chi)$, 55
ι, 47
i_p, 45
$\mathfrak{m}$, 44
$\mathcal{B}$, 35
$\mathcal{C}$, 70
$\mathcal{C}^0(\mathbb{N},A)$, 43
$\mathcal{M}_\Lambda$, 44
$\mathcal{O}(m_1,...,m_{n-1})$, 34
$\mathcal{O}_F(m_1,...,m_{n-1})$, 34
$\mathcal{U}$, 45
$\mathbb{M}$, 33
ν_t, 39
ω, 39
$\overline{N}$, 29
$\pi^{\mathbb{C}}_\infty$, 82
ψ_t, 37
τ, 40
$\widetilde{J}$, 33

e, 35
$e_{\chi,i}$, 51
e_{χ}^{ord}, 63
h, 49
j_i, 37
k, 29
pr_1, pr_2, 69
s_i, 44
t_i, 44
u, u^a, 33
u_i, 54
w, 45
x_i, 45
$y_{i,j}$, 35
$z_{i,j}$, 35
$\mathbf{F}_i$, 72
$\mathbf{U}_p^a$, 72
$\mathbf{j}_i$, 40
$\mathbf{p}$, 39

$\mathrm{Min}(t)$, 53

CHAPITRE II

Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique

1. Introduction

Soient $D/\mathbb{Q}$ l'algèbre de quaternions définie de discriminant d, p un nombre premier et N un entier tels que $(Np, d) = (N, p) = 1$, nous établissons dans ce texte un transfert "à la Jacquet-Langlands" bijectif entre les formes modulaires p-adiques surconvergentes de pente finie ([**61**], [**29**]), propres, cuspidales et nouvelles en d, et les formes modulaires p-adiques quaternioniques pour D de pente finie ([**21**]), en niveau modéré N et poids-caractère quelconque (théorème 5.3). Ce transfert est Hecke-équivariant et coïncide avec la correspondance de Jacquet-Langlands usuelle lorsqu'on le restreint aux formes modulaires "classiques" de part et d'autre. Mieux, il respecte les familles p-adiques, et nous prouvons qu'il provient d'un isomorphisme rigide-analytique entre les courbes de Hecke ("the eigencurves") correspondantes (théorème 6.2).

Notre preuve est basée sur l'existence de systèmes de modules de Banach de part et d'autre (2.1), et de leur comparaison. On démontre en fait un énoncé général (théorème 6.1) sur la comparaison de ces systèmes. Des arguments de Zariski-densité de points "classiques" sur certaines hypersurfaces de Fredholm et sur les variétés de Hecke y jouent un rôle important. On en déduit notre correspondance en utilisant la correspondance de Jacquet-Langlands usuelle, et les assertions de "classicité en petite pente" de part et d'autre.

Un des charmes de cette correspondance est que les objets qu'elle compare sont, dans une large mesure, de natures assez différentes. Les formes modulaires p-adiques surconvergentes usuelles sont des sections de fibrés surconvergentes sur le lieu ordinaire des courbes modulaires, alors que les formes modulaires quaternioniques p-adiques sont purs produits de la théorie des groupes, spécialement des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Nous y voyons plusieurs intérêts, l'un d'entre eux étant la possibilité d'introduire des méthodes de théorie des représentations p-adiques des groupes de Lie p-adiques dans la théorie des formes modulaires surconvergentes. Ceci est par exemple en accord avec une philosphie de Langlands purement p-adique (encore non formulée à notre connaissance). Un autre intêret vient de qu'il reste une multitude de questions non résolues concernant "the eigencurve" (voir l'introduction de [**33**]), l'origine plus combinatoire des formes quaternioniques peut permettre, sinon de les résoudre, de faciliter tout au moins les expériences numériques. Nous discutons de certaines conséquences de notre correspondance, ainsi que de problèmes encore ouverts, dans la dernière partie du texte.

Dans le chapitre 1 de cette thèse, nous avons construit des variétés de Hecke pour tous les groupes algébriques G sur $\mathbb{Q}$ tels que $G(\mathbb{R}) = U_n(\mathbb{C})$, $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, et on peut se demander de manière générale si les transferts usuels se prolongent, et comment, aux formes modulaires surconvergentes pour ces groupes. En ce qui concerne les correspondances de Jacquet-Langlands éventuelles entre de tels groupes, les résultats de ce chapitre s'y appliquent sans modification, du moment que la correspondance classique entre les deux groupes en question est connue pour suffisament de poids (voir le théorème 6.1).

Ce travail repose substantiellement sur ceux de Buzzard, Coleman, et Mazur, nous les en remercions. La question de l'existence ou non d'un morphisme entre les deux courbes de Hecke avait notamment été posée par Buzzard.

Notations : p est un nombre premier. $\mathbb{C}_p$ est le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, muni de la norme telle que $|p| = 1/p$, $v(.)$ est la valuation associée. Si $X/\mathbb{C}_p$ est un espace rigide, $A(X)$ est l'anneau des fonctions rigides analytiques sur X ; si X est de plus affinoide réduit, la norme sup. sur X munit $A(X)$ d'une structure de $\mathbb{C}_p$-algèbre de Banach. $\mathbb{A}^1$ désigne la droite rigide sur $\mathbb{C}_p$. $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$, resp. $\mathbb{A}_f^{(d)}$) est l'anneau des adèles (resp. adèles finies, resp. adèles hors de $\{d, \infty\}$) de $\mathbb{Q}$. Si d et n sont des entiers, on note $d \,\|\, n$ si d divise n et $(d, n/d) = 1$. Si B est un anneau, B^* désigne le groupe multiplicatif de ses inversibles. $\mathrm{diag}(a, b)$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

2. Systèmes de modules de Banach

2.1. Modules de Banach. La notion de systèmes de modules de Banach orthonormalisables est introduite dans [**33**] §4.3.

On appellera *système d'espaces de Banach* la donnée d'un ensemble $E = \{E_n, i_n, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{C}_p$-espaces de Banach orthonormalisables E_n, et d'applications $\mathbb{C}_p$-linéaires compactes $i_n : E_n \to E_{n+1}$, on notera $E^\dagger$ la limite inductive des E_n selon les i_n. Si $\mathcal{W}/\mathbb{C}_p$ est un espace rigide réduit, on appellera *faisceau de modules de Banach orthonormalisables sur* $\mathcal{W}$ la donnée d'un faisceau B sur $\mathcal{W}$ tel que pour tout ouvert affinoide $V \subset \mathcal{W}$, $B(V)$ ait une structure de $A(V)$-module de Banach orthonormalisable, et tel que si $V \subset V'$ sont des ouverts affinoides de $\mathcal{W}$, l'application canonique $B(V')\widehat{\otimes}_{A(V')}A(V) \to B(V)$ soit un isomorphisme de $A(V)$-modules de Banach. Un *système de modules de Banach sur* $\mathcal{W}$ est la donnée d'un ensemble $E = \{E_n, i_n, n \in \mathbb{N}\}$ où E_n est un faisceau de modules de Banach orthonormalisables sur $\mathcal{W}$, et $i_n : E_n \to E_{n+1}$ est un morphisme de faisceaux tel que si V est un ouvert affinoide de $\mathcal{W}$, $i_n(V) : E_n(V) \to E_{n+1}(V)$ soit $A(V)$-linéaire compacte. On notera alors $E(V, n) := E_n(V)$, et on abrégera le tout en $E = (E(V, n))$. Enfin, on dispose d'une notion évidente de sous-système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$.

Exemple : Si $E = \{E_n, i_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un système d'espaces de Banach, on peut lui associer un système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ comme suit. Soit $E_{\mathcal{W},n}$ le faisceau de modules de Banach orthonormalisables sur $\mathcal{W}$ associé à E_n au sens du §I.3.7. On rappelle que si V est ouvert affinoide, on a $E_{\mathcal{W},n}(V) := A(V)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}_p} E_n$ que l'on notera encore $E(V, n)$. i_n nous fournit de plus par extension des scalairs une application compacte $A(V)$-linéaire $i_n(V) : E(V, n) \to E(V, n+1)$. On appellera $(E(V, n))$ *le système de modules de Banach sur* $\mathcal{W}$ *associé à* E.

Fixons $E = (E(V, n))$ un système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$. Si $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, on notera E_x le système d'espaces de Banach déduit de E par évaluation en x : $E_{x,n} := E(V, n)\widehat{\otimes}_{A(V)}\mathbb{C}_p$ pour tout V tel que $x \in V(\mathbb{C}_p)$ ($A(V) \to \mathbb{C}_p$ étant l'évaluation en x), $i_{x,n} : E_{x,n} \to E_{x,n+1}$ l'application compacte déduite. Dans nos applications, les $i_{x,n}$ seront toujours injectives. C'est par exemple le cas si $E_{\mathcal{W}}$ est le système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ associé a un système d'espaces de Banach $\{E_n,\, i_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ tel que les i_n soient injectives.

On appellera endomorphisme de E la donnée, pour chaque $V \subset \mathcal{W}$ ouvert affinoide, et pour tout n assez grand (V étant fixé), d'un endomorphisme continu $A(V)$-linéaire $U(V,n)$ de $E(V,n)$, tel que les $U(V,n)$ commutent aux applications $E(V,n) \to E(V,n+1)$, et aux changements de bases ouverts affinoides $E(V,n) \to E(V',n)$ lorsqu'ils sont définis. On dira que $U := (U(V,n))$ est un endomorphisme de E et on identifiera deux endomorphismes U et U' si pour tout V et n assez grand, $U(V,n) = U'(V,n)$. L'ensemble $\mathrm{End}(E)$ de ces endomorphismes est alors une $\mathbb{C}_p$-algèbre de manière naturelle. Si H est un anneau (resp. G un moinoide), une représentation de H (resp. de G) sur E est la donnée d'un morphisme de $\mathbb{C}_p$-algèbre $H \to \mathrm{End}(E)$ (resp. $\mathbb{C}_p[G] \to \mathrm{End}(E)$). On parlera alors de système de H-modules de Banach sur $\mathcal{W}$.

On note $\mathrm{Comp}(E)$ l'idéal bilatère de $\mathrm{End}(E)$ composé des éléments ayant la propriété suivante : pour $V \subset \mathcal{W}$ un ouvert affinoide fixé, il existe pour tout n assez grand un endomorphisme $A(V)$-linéaire continu $T(V,n) : E(V,n+1) \to E(V,n)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E(V,n) \arrow[r, "U(V,n)"] \arrow[d, "i_n(V)"'] & E(V,n) \arrow[d, "i_n(V)"] \\
E(V,n+1) \arrow[r, "U(V,n+1)"'] \arrow[ur, "T(V,n)"] & E(V,n+1)
\end{tikzcd}$$

En particulier, $U(V,n)$ est compact, et [**30**] A.2.3 assure que $\det(1-U(V,n)_{|E(V,n)}) \in 1+TA(V)\{\{T\}\}$ est indépendant de n assez grand. La formation des séries de Fredholm commutant aux changements de base ouverts affinoides, toutes ces séries proviennent par restriction d'une unique série de Fredholm $\mathrm{Fred}_E(U)$ sur $\mathcal{W}$, $\mathrm{Fred}_E(U) \in 1+TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$.

2.2. L'espace des poids-caractères.

On fixe $p > 2$ dans ce qui suit, Λ est l'anneau local complet $\mathbb{Z}_p[[(1+p\mathbb{Z}_p)]]$, $\mathcal{W}$ la boule ouverte rigide de centre 1 et rayon 1, $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) := \{z \in \mathbb{C}_p,\ |z-1| < 1\}$. L'application $\Lambda \to A(\mathcal{W})$ définie par $[1+p] \mapsto Z$ identifie topologiquement Λ aux fonctions analytiques $\mathbb{Q}_p$-valuées sur $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ bornées par 1 sur tout $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. L'application $\kappa \mapsto \kappa(1+p)$ induit une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{gr-cont}(1+p\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p^*) \simeq \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$$

On dispose d'un caractère "universel" continu déterminé par $\kappa^{univ}(1+p) = Z$:

$$\kappa^{univ} : 1+p\mathbb{Z}_p \to A(\mathcal{W})^*$$

On note $\mu_{p^\infty} := \{\zeta \in \mathbb{C}_p^*,\ \exists r \in \mathbb{N}, \zeta^{p^r} = 1\}$, $\mu_{p^\infty} \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$. Si $\zeta \in \mathbb{C}_p^*$ est tel que $\zeta^{p^r} = 1$, $\zeta.(1+p)^k \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ correspond au caractère $x \to x^k\chi(x)$, χ étant le caractère d'ordre fini de $1+p\mathbb{Z}_p$ tel que $\chi(1+p) = \zeta$, caractère que l'on notera (k,χ). Dans ce cas, on appellera conducteur de κ, noté $\mathrm{cond}(\chi)$, le plus petit entier naturel r tel que χ soit trivial sur $1+p^r\mathbb{Z}_p$.

On aura besoin en 3.2.2 d'introduire pour $r \geq 1$, la boule rigide $\mathcal{W}_r \subset \mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p) := \{\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p),\ |\kappa - 1| < p^{-\frac{1}{p^{r-1}(p-1)}}\}$$

On a par exemple $(1+p)^k\zeta \in \mathcal{W}_r$ quand $\zeta^{p^{r-1}} = 1$. Tout κ dans $\mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$ est un caractère de $1+p\mathbb{Z}_p$ de restriction analytique à $1+p^r\mathbb{Z}_p$. Mieux, si $V \subset \mathcal{W}_r$ est ouvert affinoide, la restriction de κ^{univ} à $A(V)$ est un caractère $A(V)$-valué de $1+p\mathbb{Z}_p$ dont la restriction à $1+p^r\mathbb{Z}_p$ est analytique.

On note $\tau : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère de Teichmüller. On verra en général les caractères de $1+p\mathbb{Z}_p$ comme des caractères de $\mathbb{Z}_p^*$, en les étendant trivialement sur les racines de l'unité.

3. Formes modulaires p-adiques

Nous allons dans ce qui suit rappeler les acteurs essentiels de ce papier. On fixe un nombre premier $p \geq 5$, des entiers N et d, $(N,p) = (N,d) = (p,d) = 1$, d sans facteur carré.

Soit $\mathcal{H}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre commutative de polynômes sur les lettres S_l, T_l, si l est premier et $(l, Ndp) = 1$, et U_l si l premier divise Ndp. On fixe $\varepsilon = \varepsilon_p\varepsilon_N$ un caractère de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On notera aussi, si $n \geq 1$, T_n l'élément de $\mathcal{H}$ obtenu par les formules usuelles :

$$\sum_{n\geq 1} T_n n^{-s} = \prod_{l|Npd}(1 - U_l l^{-s})^{-1} \prod_{l\nmid Npd}(1 - T_l l^{-s} + lS_l l^{-2s})^{-1}$$

3.1. Formes modulaires surconvergentes.

On fait des rappels sur certaines constructions faites dans [**33**] §2.1, [**30**] §4.3 .

Soit $X_1(Np,d)$ la courbe propre et plate sur $\mathbb{Z}_p$ paramétrant les courbes elliptiques généralisées avec structure de niveau de type $\Gamma_1(Np) \cap \Gamma_0(d)$, ω le faisceau inversible habituel sur $X_1(Np,d)$. Si $p > 3$, on rappelle que la série d'Eisenstein normalisée de niveau 1, E_{p-1}, est une section globale de ω^{p-1} sur $X_1(Np,d)/\mathbb{Z}_p$ qui relève l'invariant de Hasse. Si $0 \leq v < 1 \in \mathbb{Q}$, on définit $X_1(Np,d)(v)$ comme étant l'ouvert affinoide de $X_1(Np,d)^{rig}$ sur lequel $|E_{p-1}| \geq p^{-v}$, et $Z_1(Np,d)(v)$ la composante connexe affinoide de ∞ dans $X_1(Np,d)(v)$ ([**33**] §2.1, §4.3). Pour tout $m \geq 1$, on s'intéressera plus généralement ([**33**] §2) à la courbe rigide analytique (lisse irréductible) $Z_1(Np^m,d)(v)$, avec $0 \leq v < 1$, qui est la composante connexe affinoide de ∞ dans $X_1(Np^m,d)(v)$.

$$M_k(p^m,d,v) := H^0(Z_1(Np^m,d)(v), \omega^k)$$

est le $\mathbb{C}_p$-espace de Banach des formes modulaires v-surconvergentes de poids k, de niveau $\Gamma_1(Np^m) \cap \Gamma_0(d)$, il est muni d'une action naturelle de $\mathcal{H}$ ([**33**] §3.2, [**30**] B5). On fixe ici, et pour tout le texte, une suite réelle décroissante $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = p^{-n}v_0 \in [\frac{p}{p^{n+1}(p+1)}, \frac{p}{p^n(p+1)}[\cap\mathbb{Q}$. La construction de nos systèmes de modules de Banach dépend de v_0 d'une manière qui nous importera peu, pour alléger les notations nous omettrons cette dépendance dans ce qui suit. On pourrait fixer $v_0 = \frac{1}{p+1}$.

Si $\kappa = (k, \chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ est de conducteur m, on dispose d'une série d'Eisenstein E_κ, qui est une forme modulaire de poids k sur $X_1(Np^m, d)(v)$ de caractère trivial hors de p, $\chi\tau^{-k}$ en p. Si $0 \le v < \frac{p}{p^{m-1}p+1}$, $Z_1(Np, d)(v)$ s'identifie canoniquement au quotient de $Z_1(Np^m, d)(v)$ par l'action des diamants de $(1 + p\mathbb{Z}_p)/(1 + p^m\mathbb{Z}_p)$, permettant de voir $M_0(p, d, v)$ comme le sous-espace de $M_0(p^m, d, v)$ de caractère trivial sous $(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^m\mathbb{Z}_p)$. La multiplication par E_κ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_p$-Banach de $M_0(p^m, d, v)$ sur $M_k(p^m, d, v)$ multipliant le caractère en p par $\chi\tau^{-k}$. Le q-développement à l'infini de E_κ est la spécialisation en κ d'un q-développement "abstrait" $\mathbb{E}(q) \in 1 + q\Lambda[[q]]$ appelé famille d'Eisenstein restreinte ([**33**], §2.2).

On pose $F := (F(V, n))$, le système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ associé au système d'espaces de Banach $\{A(Z_1(Np, d)(v_n)), \mathrm{res}_n, n \in \mathbb{N}\}$, les applications

$$\mathrm{res}_n : A(Z_1(Np, d)(v_n)) \to A(Z_1(Np, d)(v_{n+1}))$$

étant les restrictions compactes naturelles. Par définition, si $V \subset \mathcal{W}$ est ouvert affinoide, $F(V, n) = A(V \times Z_1(Np, d)(v_n))$. F est de manière naturelle une représentation de $\mathcal{H}$, $U_p \in \mathrm{Comp}(F)$ ([**33**] 3.2, [**30**] B5). Si $\kappa = (k, \chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ est de conducteur m, $n \ge m-1$, $F_{\kappa,n}$ s'identifie, comme représentation de $\mathcal{H}$, au sous-espace de $M_k(p^m, d, v_n)$ de caractère $\chi\tau^{-k}$ sous $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$.

En chaque pointe c dans $Z_1(Np, d)(0)$, la théorie des courbes de Tate (voir [**61**] A1.2) nous fournit un q_c-développement : $F(V, n) \hookrightarrow A(V)[[q_c]]$. De plus, $(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^*$ agit par automorphismes naturels sur $X_1(Np, d)$ en préservant $Z_1(Np, d)(v)$ et donc l'ensemble de ses pointes. Notons $A(Z_1(Np^m, d)(v_n))^{0,\varepsilon}$ le sous-espace de $A(Z_1(Np^m, d)(v_n))$ composé des fonctions de q_c-développement nul pour tout c dans $Z_1(Np, d)(0)$, et sur lequel $(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^*$ agit par le caractère ε fixé plus haut. On s'intéresse au système de modules de Banach $F^{0,\varepsilon}$ associé au système d'espaces de Banach

$$\{A(Z_1(Np, d)(v_n))^{0,\varepsilon}, \mathrm{res}_{n|A(Z_1(Np,d)(v_n))^{0,\varepsilon}}, n \in \mathbb{N}\}$$

C'est un sous-système de modules de Banach de F, préservé par $\mathcal{H}$. Son évaluation $F^{0,\varepsilon}_{\kappa,n}$ en $\kappa = (k, \chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ de conducteur m tel que $n \ge m - 1$ s'identifie au sous-espace de $M_k(p^m, d, v_n)$ composé des formes de caractère $\varepsilon\tau^{-k}\chi$ s'annulant aux pointes de $Z_1(Np^m, d)(0)$ (noter que E_κ est non nulle en chacune de ces pointes).

On définit dans ce qui suit le sous-module de Banach de $F^{0,\varepsilon}$ composé des familles de formes surconvergentes "nouvelles en d" (voir aussi [**30**] B5). Soit l premier divisant d, $ld' = d$, on dispose de morphismes canoniques finis et plats

$$\pi_l : X_1(Np^m, d) \to X_1(Np^m, d')$$

oubliant le sous-groupe d'ordre l. Ces morphismes induisent des morphismes rigides analytiques $\pi_l : Z_1(Np^m, d)(v) \to Z_1(Np^m, d')(v)$, finis et plats de degré $l + 1$ (étale hors des pointes). L'isomorphisme canonique $\pi_l^*(\omega) \simeq \omega$ permet d'en considérer la trace,

$\pi_{l*}\omega \to \omega$, d'où en particulier sur les sections sur $Z_1(Np^m, d')(v)$:

$$tr(\pi_l)_k : M_k(p^m, d, v) \to M_k(p^m, d', v)$$

On étend $tr(\pi_l)_0 : A(Z_1(Np, d)(v)) \to A(Z_1(Np, d')(v))$, linéairement en un $A(V)$-morphisme

$$\mathrm{Tr}_l : A(V \times Z_1(Np, d)(v)) \to A(V \times Z_1(Np, d')(v))$$

Tr_l définit ainsi un endomorphisme du module de Banach $F^{0,\varepsilon}$, il est bien défini pour tous les couples (V, n).

LEMME 3.1. *Soit* $\kappa = (k, \chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $m = cond(\kappa)$, $n \geq m-1$, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} F_{\kappa,n} & \xrightarrow{\times E_\kappa} & M_k(p^m, d, v_n) \\ {\scriptstyle Tr_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle tr(\pi_l)_k} \\ F_{\kappa,n} & \xrightarrow{\times E_\kappa} & M_k(p^m, d', v_n) \end{array}$$

Preuve : Il faut montrer que si $f \in M_0(p^m, d, v)$, $tr(\pi_l)_k(E_\kappa f) = E_\kappa tr(\pi_l)_0(f)$, ce qui découle immédiatement de ce que E_κ est de niveau premier à l. □

On vérifie aisément que Tr_l commute aux correspondances de Hecke hors de l, aux opérateurs diamants, et que $\mathrm{Tr}_l^2 = (l+1)\mathrm{Tr}_l$ (cf. [**30**] B5.1). Notons W_l l'involution d'Atkin sur $X_1(Np^m, d)/\mathbb{Z}_p$ définie modulairement par $(E, H, \alpha) \mapsto (E/H, E[l]/H, \pi \cdot \alpha)$, H étant un sous-groupe d'ordre l de E, π l'isogénie $E \to E/H$, et α une structure de niveau de type $\Gamma_1(Np^m) \cap \Gamma_0(d')$. Elle préserve les $Z_1(Np^m, d)(v)$ et induit par extension des scalaires une involution encore notée W_l sur les $A(Z_1(Np, d)(v) \times V)$.

Définition : Soit $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $f \in F^{0,\varepsilon}_{\kappa,n}$ est dite nouvelle en d si pour tout l divisant d, $\mathrm{Tr}_l(f) = \mathrm{Tr}_l(W_l(f)) = 0$.

On notera $F^{0,\varepsilon,d}$ le système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ associé au système d'espaces de Banach $\{A(Z_1(Np, d)(v_n))^{0,\varepsilon,d}, res_n, n \in \mathbb{N}\}$, où

$$A(Z_1(Np, d)(v_n))^{0,\varepsilon,d} := A(Z_1(Np, d)(v_n))^{0,\varepsilon} \cap (\bigcap_{l|d} \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_l) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_l \cdot W_l))$$

LEMME 3.2. $F^{0,\varepsilon,d}$ *est un sous-système de modules de Banach de* $F^{0,\varepsilon}$ *stable par l'action de* $\mathcal{H}$.

Preuve : Ça n'est pas complètement évident en ce qui concerne les U_l avec $l|d$. Il suffit de vérifier que pour $\kappa = (k, \chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $m = \mathrm{cond}(\kappa)$, $n \geq m-1$, U_l préserve $F^{0,\varepsilon,d}_{\kappa,n}$ dans $F^{0,\varepsilon}_{\kappa,n}$. Sur $M_k(p^m, d, v_n)$, on dispose d'un endomorphisme $W_{l,k}$ défini par $W_{l,k}(f)(E, H, \alpha, \omega) = f(E/H, E[l]/H, \pi.\alpha, (\pi^\vee)^*(\omega))$, avec les notations évidentes. On vérifie que sur le sous-espace de caractère $\varepsilon\chi\tau^{-k}$, on a $W_{l,k}^2 = \varepsilon(l)\kappa(l)$ et

$$tr(\pi_l)_k(f) = f + l\varepsilon(l)^{-1}\kappa(l)^{-1}U_l(W_{l,k}(f)),\ tr(\pi_l)_k(W_{l,k}(f)) = f + l \cdot U_l(f)$$

De plus, si $g \in F^{0,\varepsilon}_{\kappa,n}$ et e_l désigne la fonction inversible sur $X_1(Np,d)(v_n)$ de q-développement $\frac{E_\kappa(q^l)}{E_\kappa(q)}$, alors un calcul montre que

$$E_\kappa^{-1} W_{l,k}(gE_\kappa) = e_l W_l(g)$$

En particulier, la multiplication par E_κ envoie $F^{0,\varepsilon,d}_{\kappa,n}$ isomorphiquement sur l'intersection des $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}(\pi_l)_k) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}(\pi_l)_k \cdot W_{l,k})$ dans le sous-espace de $M_k(p^m,d,v_n)$ de caractère $\varepsilon\chi\tau^{-k}$. Les relations ci-dessus montrent que ce sous-espace est stable par $W_{l,k}$ puis par U_l, qui coïncide avec $-l^{-1}W_{l,k}$ sur ce dernier. □

Si $\kappa = (k,\chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $n \geq \mathrm{cond}(\chi) - 1$, $F^{0,\varepsilon,d}_{\kappa,n}$ est $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}$-isomorphe au sous-espace de Banach de $M_k(p^m,d,v_n)$ constitué des formes s'annulant aux pointes de $Z_1(Np^m,d)(0)$, de caractère $\varepsilon\chi\tau^{-k}$, et annulées par les $\mathrm{tr}(\pi_l)_k$ et $\mathrm{tr}(\pi_l)_k \cdot W_{l,k}$. Ces formes seront appelées *nouvelles en d*. Sur le sous-espace de $M_k(p^m,d,v_n)$ composé des restrictions à $Z_1(Np^m,d)(v_n)$ des formes convergentes sur tout $X_1(Np^m,d)$, cette condition d'être nouvelle en d est précisément la condition usuelle.

Remarques : i) Soit $\kappa = (k,\chi) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ de conducteur m, $r \in \mathbb{N}$, $f \in F^{0,\varepsilon,d}_{\kappa,r}$ propre pour tout $\mathcal{H}$, on note $\chi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_p$ le caractère défini par $T_n(f) := \chi(T_n)f$. f a un q-développement sur la pointe ∞ de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ tel que $a_n = \chi(T_n)a_1$. Le principe du q-développement (i.e l'irréductibilité de $Z_1(Np^m,d)(0)$) montre alors que $a_1 \neq 0$, et donc que l'on peut supposer $a_1 = 1$. Ceci définit donc une bijection entre caractères de $\mathcal{H}$ dans $F^{0,\varepsilon,d}_{\kappa,r}$ et les éléments de ce dernier qui sont propres et de q-développement normalisé à 1 ("multiplicité 1 faible").

ii) Les $\mathbb{C}_p$-espaces de Banach $A(Z_1(Np,d)(v))$, ainsi que tous leurs sous-espaces considérés dans ce paragraphe, sont orthonormalisables. En effet, d'après [**93**] 1.1, tout espace de Banach provenant par extension des scalairs d'un espace de Banach sur un corps local est orthonormalisable. De plus, par [**93**] 1.2, les inclusions $A(Z_1(Np,d)(v_n)) \supset A(Z_1(Np,d)(v_n))^{0,\varepsilon} \supset A(Z_1(Np,d)(v_n))^{0,\varepsilon,d}$ sont scindées dans la catégorie des $\mathbb{C}_p$-espaces de Banach.

3.2. Formes modulaires quaternioniques p-adiques.

Dans ce qui suit, nous nous référerons à [**21**].

3.2.1. *Séries principales p-adiques de l'Iwahori.* Introduisons tout d'abord quelques notations de théorie des groupes :

$$L \text{ désigne le Borel inférieur de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$$

$$N \text{ les unipotents supérieurs de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

$$I(m) \text{ le sous-groupe de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \text{ composé des éléments triangulaires supérieurs modulo } p^m$$

$$I := I(0) \text{ l'Iwahori}, \quad u := \mathrm{diag}(1,p)$$

$$\mathbb{M}(m) \text{ est le sous-monoide de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \cap M_2(\mathbb{Z}_p) \text{ engendré par } I(m) \text{ et } u, \ \ \mathbb{M} := \mathbb{M}(1)$$

La décomposition d'Iwahori s'écrit $I = (L \cap I) \times N$. On identifie N à $\mathbb{Z}_p$ via

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto t$$

La grosse cellule de Bruhat $L\backslash LI \subset L\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est stable par multiplication à droite par $\mathbb{M}$. On note T la coordonnée sur $\mathbb{Z}_p$, l'action de $\mathbb{M}$ par translation à droite sur les fonctions sur $L\backslash LI = \mathbb{Z}_p$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .T = \frac{b + dT}{a + cT}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}_n$ la $\mathbb{C}_p$-algèbre de Banach des fonctions sur $\mathbb{Z}_p$ de restriction analytique aux $a + p^n\mathbb{Z}_p$, $\mathcal{C}_n$ est stable par l'action de $\mathbb{M}$ et $\mathcal{C}_0$ s'identifie à l'algèbre de Tate $\mathbb{C}_p{<}T{>}$. Les restrictions naturelles $i_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_{n+1}$ sont compactes injectives , ce qui fait de $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_n, i_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système d'espaces de Banach tel que $u \in \mathrm{Comp}(\mathcal{C})$. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ le système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ associé à $\mathcal{C}$. Il sera commode de poser $\mathcal{C}_{-n} := \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}(V, -n) := \mathcal{C}(V, 0)$ si $n \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathcal{W}$ ouvert affinoide.

Soit $j : I \to \mathcal{C}_0^*$ le 1-cocycle défini par

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) := \tau^{-1}(a)(a + cT) \in 1{+}p\mathbb{Z}_p{<}T{>} \subset \mathcal{C}_0^*$$

Il se prolonge à $\mathbb{M}$ en le prenant trivial sur u. Si $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $\gamma \in \mathbb{M}$, on définit un cocycle $\kappa(j) : \mathbb{M} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n^*$ par

$$(\kappa(j)(\gamma))(t) := \kappa(j(\gamma)(t)), \;\; t \in \mathbb{Z}_p$$

Si $\gamma \in \mathbb{M}(m)$ et $\kappa \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, $\kappa(j)(\gamma) \in \mathcal{C}_{r-m}^*$. On notera ρ_κ la représentation de $\mathbb{M}$ sur l'espace $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ tordue par $\kappa(j)$, i.e $\rho_\kappa(v) := \kappa(j)(\gamma)\gamma.v$. Cette torsion n'affecte pas u et si $\kappa \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, $\mathbb{M}(m)$ préserve $\mathcal{C}_n$ dès que $n \geq r - m$. Plus généralement, si $V \subset \mathcal{W}$ est un ouvert affinoide, on dispose d'un 1-cocycle $\kappa^{univ}(j) : \mathbb{M} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(V, n)^*$, tel que $\kappa^{univ}(j)_\kappa = \kappa(j)$ si $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ et $\kappa^{univ}(j)(\gamma) \in \mathcal{C}_{r-m}^*$ si $\gamma \in \mathbb{M}(m)$ et $V \subset \mathcal{W}_r$. On dispose donc d'une représentation ρ^{univ} de $\mathbb{M}$ sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(V, n)$, en tordant par $\kappa^{univ}(j)$ la représentation naturelle obtenue par extension complète des scalairs à $A(V)$ de celle sur $\mathcal{C}_n$. Si $V \subset \mathcal{W}_r$, $\mathbb{M}(m)$ préserve $\mathcal{C}(V, n)$ dès que $n \geq r - m$.

Ainsi, le système de modules de Banach $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ sur $\mathcal{W}$ est muni d'une représentation $\rho^{univ} : \mathbb{M} \to \mathrm{End}(\mathcal{C}_{\mathcal{W}})$. Si $V \subset \mathcal{W}_r$, $\mathbb{M}(m)$ préserve $\mathcal{C}(V, n)$ dès que $n \geq r - m$, et on a $u \in \mathrm{Comp}(\mathcal{C}_{\mathcal{W}})$. On appelle $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ *la famille analytique des séries principales p-adiques de I.*

Remarques : i) $\mathcal{C}^\dagger = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ est l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$, muni de sa topologie localement convexe c'est un espace de type compact au sens de [**90**] §1 [1]. La représentation ρ_κ de I sur $\mathcal{C}^\dagger$ est la série principale localement analytique de I de caractère κ ([**90**] §5, noter que leur B est l'Iwahori opposé à I).

[1]Strictement, il faudrait plutôt prendre des fonctions K-valuées avec K sphériquement complet.

ii) Les assertions de ce paragraphe sont détaillées dans [**21**] §4, §7, noter qu'il a des actions à droites, non à gauche. A cette modification près, on a dans ses notations : $\mathcal{A}_{\kappa,p^{-n}} = \mathcal{C}_{\kappa,n}$ et $M_m \supset \mathbb{M}(m)$; d'autre part si $\kappa \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)\backslash\mathcal{W}_{r-1}(\mathbb{C}_p)$, "$m$ is good for (κ, p^{-n})" équivaut à $n \geq r - m$.

3.2.2. *Formes modulaires.* Soit $D(\mathbb{Q})$ une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$, on fixe $D(\mathbb{Z})$ un ordre maximal de $D(\mathbb{Q})$, et on note D le schéma en anneaux sur $\mathbb{Z}$ associé, D^* son groupe des inversibles. On suppose que D est définie. Soit $d = \operatorname{disc}(D)$ le produit des premiers ramifiés, on fixe un isomorphisme au dessus de $\mathbb{Z}[1/d]$,

$$\varphi : D/\mathbb{Z}[1/d] \simeq \mathbb{M}_2/\mathbb{Z}[1/d]$$

Si M est un entier premier à d, on notera $U_1(M)$ (resp. $U_0(M)$) le sous-groupe ouvert compact de $D^*(\mathbb{A}_f) \simeq D^*(\mathbb{A}_f^{(d)}) \times \prod_{l|d} D^*(\mathbb{Q}_l)$, décomposé selon ce produit, valant le compact maximal $D^*(\mathbb{Z}_l)$ en les premiers l divisant d, égal à $\varphi^{-1}(\Gamma_1(M))$ (resp. $\varphi^{-1}(\Gamma_0(M))$) sur l'autre facteur, avec :

$$\Gamma_1(M) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}[1/d]}),\ g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod M\},$$

$$\Gamma_0(M) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}),\ g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod M\}$$

On verra les caractères de $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ comme des caractères de $U_0(M)$ par l'étoile supérieure gauche. Si $M \geq 5$, $D^*(\mathbb{Q}) \times U_1(M)$ agit librement sur $D^*(\mathbb{A}_f)$, et l'ensemble

$$D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f)/U_1(M)$$

est fini de cardinal noté $h_1(M)$. On choisit $M = Np$ comme en 3.

On note F^D le système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ tel que si $V \subset \mathcal{W}$ est ouvert affinoide, $n \in \mathbb{N}$, $F^D(V,n)$ est le $A(V)$-module de Banach des fonctions $f : D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f) \to \mathcal{C}(V,n)$ satisfaisant

$$f(xu) = j(u_p^{-1})^{-2}\rho^{univ}(u_p^{-1})f(x),\ \forall (x,u) \in D^*(\mathbb{A}_f) \times U_1(Np)$$

et i_n est l'application déduite de la restriction canonique $\mathcal{C}(V,n) \to \mathcal{C}(V,n+1)$. L'orthonormalisabilité vient de ce que $F^D(V,n)$ s'identifie à $\mathcal{C}(V,n)^{h_1(Np)}$ car $Np \geq 5$ (voir aussi [**21**] §7, §4).

On a une représentation naturelle sur F^D de $U_0(Np)/U_1(Np) \simeq (\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^*$, définie par $(<\gamma> .f)(x) = j(\gamma)^{-2}\rho^{univ}(\gamma)f(x\gamma)$. On notera $F^{D,\varepsilon}$ le sous-système de modules de Banach de F^D sur lequel $(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^*$ agit par ε^{-1}. On dispose d'une représentation naturelle $\mathcal{H} \to \operatorname{End}(F^{D,\varepsilon})$ telle que $U_p \in \operatorname{Comp}(F^{D,\varepsilon})$. Les doubles classes considérées ici pour les opérateurs de Hecke sont (avec les abus évidents) les $\operatorname{diag}(1,l)$, pour T_l et U_l si $l \nmid d$, $\operatorname{diag}(l,l)$ pour S_l si $l \nmid Npd$, comme en 5.1 pour U_l avec $l|d$. Si $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $F^{D,\varepsilon}_{\kappa,n}$ s'identifie à l'espace des fonctions $D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f) \to \mathcal{C}_n$ telles que

$$f(xu) = \varepsilon^{-1}(u)j(u_p^{-1})^{-2}\rho_\kappa(u_p^{-1})f(x),\ \ \forall\,(x,u) \in D^*(\mathbb{A}_f) \times U_0(Np)$$

$(F^{D,\varepsilon}_\kappa)^\dagger$, vu avec sa structure de $\mathcal{H}$-module, est *l'espace des formes modulaires p-adiques quaternioniques de poids-caractère κ, de niveau modéré N, de caractère ε.*

Soient n, m, r des entiers tels que $n \geq r-1 \geq 0$, $n \geq m-1 \geq 0$, et $\kappa \in \mathcal{W}_r(\mathbb{C}_p)$, considérons l'espace annexe $F^{D,\varepsilon}_{\kappa,n}[m]$ des fonctions $f : D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f) \to \mathcal{C}_{\kappa,n}$ satisfaisant

$$f(xu) = \varepsilon^{-1}(u)j(u_p^{-1})^{-2}\rho_\kappa(u_p^{-1})f(x),\ \forall (x,u) \in D^*(\mathbb{A}_f^{(d)}) \times U_0(Np^m)$$

C'est un $\mathcal{H}$-module, en prenant cette fois-ci des doubles classes par rapport à $U_0(Np^m)$ (ce qui ne change que U_p, encore défini par la double classe de $\mathrm{diag}(1,p)$). D'après [**21**] (§5 lemme 3,iv), $F^{D,\varepsilon}_{\kappa,n-m+1}[m]$ et $F^{D,\varepsilon}_{\kappa,n}$ sont isomorphes comme $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}_p$-modules. Si de plus $\kappa = (k,\chi)$ est de conducteur m, et $k \geq 2$, $F^{D,\varepsilon}_{\kappa,0}[m]$ contient comme sous-$\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}_p$-module l'espace des fonctions à valeurs polynomiales en T de degré $\leq k-2$, ce dernier est isomorphe comme $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}_p$-module à l'espace des fonctions $f : D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}_p^2)$ telles que

$$f(xu) = \varepsilon(u)^{-1}\chi(u_p)^{-1}\tau^k(u_p)u_p^{-1}f(x),\ \forall\ (x,u)\ \in\ D^*(\mathbb{A}_f)\times U_0(Np^m)$$

Ce $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}_p$ module est $S_k^D(Np^m, \varepsilon\chi\tau^{-k}, \mathbb{C}_p)$ dans la notation du §5.2.

4. Préliminaires de théorie spectrale

4.1. Semi-simplification en dimension infinie. Soit K un corps valué complet non archimédien (non discret), V un K-espace de Banach orthonormalisable, U un endomorphisme compact de V. La série caractéristique $P(T) = \det(1-TU)$ de U se décompose sous la forme

$$P(T) = \prod_{i\geq 0} P_i(T)^{n_i}$$

où les $P_i(T)$ sont des irréductibles de $1+TK[T]$ deux à deux distincts tels que $|P_i(T) - 1| \underset{i\to\infty}{\to} 0$ pour la norme $|.|$ sur $K[T]$ du sup des coefficients. Par [**93**], on sait que V est somme directe topologique de $Ker(U)$ et des espaces de dimension finie $V(P_i) := \mathrm{Ker}(P_i^*(u)^{n_i})$, $Q^*(T)$ désignant le polynôme réciproque de $Q(T)$, sur lesquels U a pour polynôme caractéristique $P_i^*(T)^{n_i}$. Soit H une K-algèbre, $\rho : H \to \mathrm{End}_K(V)$ une représentation telle que $\rho(H)$ contienne U et lui commute, alors $\rho(H)$ stabilise les $V(P_i)$, que l'on peut semi-simplifier.

Définition : On notera $\mathcal{X}_U(V)$ l'ensemble des représentations irréductibles de H apparaissant dans la réunion des semi-simplifications des $V(P_i)$, comptées avec multiplicité (qui sont nécessairement finies).

Notons que $\mathcal{X}_U(V)$ dépend de U, mais que $\mathcal{X}_U(V) = \mathcal{X}_{U'}(V)$ si $U' \in \rho(H)$ est un autre endomorphisme compact de V commutant à $\rho(H)$ et à U tel que $\mathrm{Ker}(U') = \mathrm{Ker}(U)$. Si $\mathcal{X}$ est un ensemble de représentations d'une algèbre, on notera $|\mathcal{X}|$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations apparaissant dans $\mathcal{X}$ (autrement dit, on oublie les multiplicités).

Proposition 4.1. *Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2), des représentations d'une K-algèbre H dans les endomorphismes continus de V_1 et V_2, telles que V_i $(i = 1,2)$ est muni d'un endomorphisme compact U_i commutant à $\rho_i(H)$.*

On suppose de plus que pour tout $h \in H$, $\det(1 - T\rho_1(h)U_1) = \det(1 - T\rho_2(h)U_2) \in K\{\{T\}\}$. *Alors* $\mathcal{X}_{U_1}(V_1) = \mathcal{X}_{U_2}(V_2)$.

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, V_i^α le plus grand sous-espace de dimension finie de V_i stable par U_i sur lequel le polygone de Newton du polynôme caractéristique de U_i est de pente α. Soit $h \in H$, $\rho_i(h)$ stabilise les V_i^α, et ses valeurs propres sur ces derniers sont toutes bornées par $||\rho_i(h)|| < \infty$, $||.||$ désignant la norme d'opérateur sur V_i. Soit $x \in K^*$ tel que $|x| < 1$, on peut trouver par conséquent un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_i(1 + x^N h)$ ait toutes ses valeurs propres de norme 1 sur les V_i^α $(i = 1,2)$. On pose $h' = 1 + x^N h \in H$. En co-trigonalisant U_i et $\rho_i(h')$ sur V_i^α, on en déduit :

$$\det(1 - TU_i\rho_i(h'))^\alpha = \det(1 - TU_i\rho_i(h')_{|V_i^\alpha})$$

Si $Q \in 1 + TK\{\{T\}\}$, Q^α désigne le polynôme $\in 1 + TK[T]$ divisant Q tel que le polygone de Newton de Q/Q^α n'a pas la pente α. Ainsi, $\det(1 - T\rho_1(h')U_1) = \det(1 - T\rho_2(h')U_2)$ donne

$$\det(1 - T\rho_1(h')U_{1|V_1^\alpha}) = \det(1 - T\rho_2(h')U_{2|V_2^\alpha})$$

$\rho_i(h)U_i$ étant injectif sur V_i^α, notons que cela implique que $\dim(V_1^\alpha) = \dim(V_2^\alpha)$, et que $\rho_1(h')U_{1|V_1^\alpha}$ et $\rho_2(h')U_{2|V_2^\alpha}$ ont même polynôme caractéristique. Ceci reste vrai pour les même raisons en remplaçant h' par $h' + \lambda$ pour (une infinité de) $\lambda \in K$ assez petit. Si A et B sont deux endomorphismes qui commutent d'un K-espace vectoriel de dimension finie r, avec A inversible, la donnée de

$$\det(X.1 - A(B + Y.1)) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_iY - b_i) \in \overline{K}[X,Y]$$

permet de retrouver $\det(X.1 - B) = \prod_{i=1}^{r}(X - (b_i/a_i))$ (ici $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K). On en déduit $\det(T - \rho_1(h')_{|V_1^\alpha}) = \det(T - \rho_2(h')_{|V_2^\alpha})$, puis la même chose en remplaçant h' par h. Ainsi, V_1^α et V_2^α sont deux représentations de H ayant même polynômes caractéristiques, on sait alors que leurs semi-simplifications sont isomorphes, ce qui conclut. □

Terminons cette partie par une légère amélioration de 4.1. Soient E^i, $i = 1,2$, deux systèmes d'espaces de Banach, munis de représentations $\rho_i : H \to \mathrm{End}(E^i)$ et d'endomorphismes compacts $U_i \in \mathrm{Comp}(E^i)$, $U_i \in \rho_i(H)$ commutant à $\rho_i(H)$. $E^{i,\dagger}$ est muni d'une opération de $\rho_i(H)$ et U_i. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé et $E_n^{i,\alpha}(U_i)$ désigne le sous-espace de E_n^i sur lequel U_i est de pente α, i_n induit pour tout n assez grand une bijection $E_n^{i,\alpha}(U_i) \to E_{n+1}^{i,\alpha}(U_i)$ qui commute à U_i. Cet espace définit donc un sous-espace de dimension finie $E^{i,\alpha}(U_i)$ de $E^{i,\dagger}$ qui hérite d'une représentation de H. Ceci permet de définir à nouveau $\mathcal{X}_{U_i}(E^i)$ comme étant l'ensemble des représentations (comptées avec multiplicités) de H apparaissant dans les semi-simplifications des $E^{i,\alpha}(U_i)$, α variant dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.1. *Sous ces hypothèses, supposons que pour tout* $h \in H$, $\det(1 - T\rho_1(h)U_1) = \det(1 - T\rho_2(h)U_2) \in K\{\{T\}\}$. *Alors* $\mathcal{X}_{U_1}(E^1) = \mathcal{X}_{U_2}(E^2)$.

Preuve : Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$, $E^{i,\alpha}(U_i)$ est de dimension finie, H agit donc sur $E^{1,\alpha}(U_1) \oplus E^{2,\alpha}(U_2)$ à travers un quotient de dimension finie. Considérons une sous-K-algèbre H_0 de H de type fini sur K engendrant toute l'image de H dans ce quotient ; pour n assez grand, H_0 et U_i agissent alors par endomorphismes sur E^i_n, $i = 1, 2$. On applique la proposition 4.1 avec $V_i = E^i_n$, il vient $\mathcal{X}_{U_1}(E^{1,\alpha}(U_1)) = \mathcal{X}_{U_2}(E^{2,\alpha}(U_2))$, ce qui conclut. □

4.2. Un critère de densité. On fixe M un système de modules de Banach comme en §2.1, $\dim(\mathcal{W}) > 0$, muni d'une action d'une $\mathbb{C}_p$-algèbre H, et d'un endomorphisme compact U lui commutant, on notera (M, H, U) une telle donnée. On rappelle que si $T/\mathbb{C}_p$ est un espace rigide, un sous-ensemble $X \subset T(\mathbb{C}_p)$ est dit Zariski-dense si pour tout fermé analytique F de T tel que $X \subset F(\mathbb{C}_p)$, alors $F(\mathbb{C}_p) = T(\mathbb{C}_p)$. Soit $X \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ un sous-ensemble Zariski-dense, tel que pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert affinoide irréductible V de x dans $\mathcal{W}$, $V(\mathbb{C}_p) \cap X$ est Zariski-dense dans V. On dira alors que X est **très Zariski-dense dans $\mathcal{W}$**. C'est par exemple le cas des points de la forme $\zeta(1+p)^k$, avec $\zeta^{p^m} = 1$ et $k, m \in \mathbb{N}$, dans la boule ouverte de centre 1 de rayon 1 de $\mathbb{C}_p$.

On se fixe de plus une "structure classique sur X", on entendra par là la donnée pour tout $x \in X$ d'un sous-espace vectoriel de dimension finie M_x^{cl} de $M_x^\dagger$ stable par l'action de H. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $M_x^{\leq\alpha}$ (resp. M_x^α) le sous-espace de dimension finie de $M_x^\dagger$ sur lequel U est de pente au plus α (resp. exactement α). On fera de plus l'hypothèse de "contrôle" :

(Cl) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $U \subset \mathcal{W}$ ouvert affinoide, alors pour tout $x \in X \cap U(\mathbb{C}_p)$ sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, $M_x^{\leq\alpha} \subset M_x^{cl}$

PROPOSITION 4.2. *Soient (M_1, H, U) et (M_2, H, U) deux systèmes de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ relativement factoriel. On se donne $X \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ un ensemble très Zariski-dense, et une structure très classique sur X pour M_1 et M_2, chacune de ces structures satisfaisant (Cl). Soit $h \in H$, supposons*

$$\forall x \in X, \quad \det(1 - ThU_{|M_{1,x}^{cl}}) = \det(1 - ThU_{|M_{2,x}^{cl}}) \in \mathbb{C}_p[T]$$

Alors $\mathrm{Fred}_{M_1}(hU)$=$\mathrm{Fred}_{M_2}(hU)$.

Preuve : Soit $Z_i \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ l'hypersurface de Fredholm de $P_i :=\mathrm{Fred}_{M_i}(hU)$, p_i la première projection $Z_i \to \mathcal{W}$. On dira que $z \in Z_i(\mathbb{C}_p)$ est classique si $z = (x, \lambda)$ avec $x \in X$ et si λ^{-1} est valeur propre de hU sur $M_{i,x}^{cl}$. On montrera plus bas que les points classiques sont Zariski-denses dans $Z_i(\mathbb{C}_p)$, admettons le pour l'instant. Par hypothèse, P_1 s'annule sur les points classiques de $Z_2(\mathbb{C}_p)$, donc sur $Z_2(\mathbb{C}_p)$ par Zariski-densité. Par symétrie, il vient $Z_1^{\mathrm{red}} = Z_2^{\mathrm{red}}$ et on déduit de [**36**] 4.3.2 que P_1 et P_2 ont même facteurs irréductibles, il reste à prouver que ces derniers ont même multiplicités.

Soit Π un de ces facteurs irréductibles, de multiplicité n_i dans P_i, $Z(\Pi)_i \subset Z_i$ la composante irréductible associée. Soit W_i l'ouvert de $Z(\Pi)_i$ dont le complémentaire est l'ensemble points de $Z(\Pi)_i$ qui sont dans au moins deux composantes irréductibles de Z_i. Admettons pour l'instant que l'on puisse trouver $x \in X$ et $z = (x, \lambda) \in W_1(\mathbb{C}_p) = W_2(\mathbb{C}_p)$ tels que λ soit une racine de $\det(1 - ThU_{|M_{i,x}^{cl}})$ mais pas de $P_i(x, T)/\det(1 - ThU_{|M_{i,x}^{cl}})$. Par le choix de W_i, λ est une racine de $P_i(x, T)$ qui est en fait une racine de $\Pi(x, T)$

mais pas des autres facteurs irréductibles. La multiplicité de λ comme racine de $P_i(x,T)$ est donc de la forme $n_i n$ où n est la multiplicité de λ comme racine de $\Pi(x,T)$. Mais, par le choix de z, nn_i est aussi la multiplicité de λ comme racine de $\det(1 - ThU_{|M_{i,x}^{cl}})$, qui ne dépend pas de i. Ainsi, $n_1 n = n_2 n$, puis $n_1 = n_2$.

Il reste à trouver un tel z et à prouver que les points classiques sont Zariski-denses dans $Z_i(\mathbb{C}_p)$. Par hypothèse sur $\mathcal{W}$ et [**36**] 4.3.2, les composantes irréductibles de Z_i sont des hypersurfaces de Fredholm. Ces dernières étant d'image Zariski-ouverte dans $\mathcal{W}$, elles contiennent toutes des points d'image (par p_i) dans X. Soit z_i un de ces points, appartenant a une composante irréductible T_i de Z_i, et soit $\Omega_i \in \mathcal{C}(Z_i)$ contenant z_i. $\mathcal{C}(Z_i)$ désigne le recouvrement canonique de l'hypersurface de Fredholm Z_i (voir la discussion au début de 6.1). Ω_i étant fini et plat sur son image $V_i \subset \mathcal{W}$ (que l'on peut supposer irréductible), chacune de ses composantes irréductibles se surjecte sur V_i. hU et U sont des endomorphismes de $M_i(V_i,n)$ pour un n assez grand que l'on fixe, et $P_i(T)_{|V_i} = \det(1 - ThU_{|M_i(V_i,n)}) \in 1 + A(V_i)T\{\{T\}\}$. Par choix de $\Omega_i \in \mathcal{C}(Z_i)$ et un théorème de Coleman ([**33**] §7.1, [**30**] A.4.3), on peut trouver un sous-$A(V_i)$-module N_i de $M_i(V_i,n)$ localement libre de rang fini, stable par U et hU, tel que Ω_i soit le fermé des zéros de $\det(1 - ThU_{|N_i})$ dans $V_i \times \mathbb{A}^1$. hU est un endomorphisme inversible de N_i, ainsi donc que U, et ils sont automatiquement continus ([**15**] 3.7.3 proposition 2). En particulier, les valeurs propres de U^{-1} sur les $N_{i,x}$, $x \in V_i(\mathbb{C}_p)$, sont bornées par une constante ne dépendant que des V_i. Ceci et (Cl) impliquent que pour tout $x \in X \cap V_i(\mathbb{C}_p)$ sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, $\Omega_i(\mathbb{C}_p) \cap p_i^{-1}(\{x\})$ est composé de points classiques. $X \cap V_i(\mathbb{C}_p)$ étant Zariski-dense dans $V_i(\mathbb{C}_p)$, et $\Omega_i \to V_i$ étant fini et plat, on en déduit que les points classiques sont Zariski-denses dans chaque composante irréductible de Ω_i, et en particulier dans $Z_i(\mathbb{C}_p)$ et $T_i(\mathbb{C}_p)$ ([**36**] 2.2.3). Plus exactement, on en déduit que l'ensemble des points $z = (x,\lambda)$ tels que $M_{i,x}^{hU=\lambda^{-1}} \subset M_{i,x}^{cl}$ est Zariski-dense dans $T_i(\mathbb{C}_p)$. $M_{i,x}^{hU=\lambda^{-1}}$ désigne ici le sous-espace de $M_{i,x}$ qui est l'espace caractéristique pour la valeur propre λ^{-1} de l'endomorphisme compact hU.

On appliquant cela à $T_i := Z(\Pi)_i$. $\Omega_i \cap W_i$ est un ouvert de Ω_i et contient donc des points du type précédent. Si (x,λ) en est un, λ est une racine de $\det(1 - ThU_{|M_{i,x}^{cl}})$ mais pas de $P_i(x,T)/\det(1 - ThU_{|M_{i,x}^{cl}})$, c'est juste ce qui nous manquait pour conclure. □

5. La correspondance de Jacquet Langlands "p-adique"

5.1. Rappels sur la correspondance classique. Si $M \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K_1(M) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}),\ g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod M\},$$

$$K_0(M) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}),\ g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod M\}$$

On pourra voir, par l'étoile inférieure droite, les caractères complexes de $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ comme des caractères de $K_0(M)$. On fixe ε un tel caractère, ainsi qu'un entier $k \geq 2$.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $S_k(M,\varepsilon)$ des formes modulaires paraboliques de poids k, de niveau M, de caractère $\varepsilon : (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}$ s'identifie à l'espace des fonctions complexes sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K_1(M)$, de caractère central $|.|^{2-k}\varepsilon^{-1}$, de caractère ε^{-1} sous $K_0(M)$, satisfaisant les conditions usuelles de croissance aux pointes et holomorphie, en associant à f (voir par exemple [**55**] §3.1 pour des détails) [2]

$$g = (g_\infty, g_f) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times K_0(M) \mapsto |\det(g)|^{1-k/2} f_{|_k g_\infty}(i)\varepsilon^{-1}(g_f)$$

Cette identification préserve l'action des opérateurs de Hecke usuels (non renormalisés du côté adélique). Soit l premier, l'opérateur de Hecke T_l si $(l, M) = 1$, U_l sinon, est donné par la double classe $U_0(M)\mathrm{diag}(l, 1)U_0(M)$; si $(l, M) = 1$, $S_l = l^{k-2}\varepsilon(l)$ est l'action de $\mathrm{diag}(l, l)$ (ici, on voit $\mathrm{diag}(a, b) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ partout trivial sauf en l où il vaut effectivement $\mathrm{diag}(a, b)$).

On notera $S_k(M, \varepsilon)^{d-new}$ le sous-espace de $S_k(M, \varepsilon)$ composé des formes d-nouvelles au sens usuel.

On fixe un entier d sans facteur carré, ayant un nombre impair de diviseurs premiers, tel que $d \parallel M$ et que ε soit trivial sur $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$. On reconsidère $D(\mathbb{Q})$ l'algèbre de quaternions de discriminant d introduite en 3.2.2. $K_1(M)$ (resp. $K_0(M)$) est le compact ouvert de $D^*(\mathbb{A}_f)$ décomposé place par place, qui vaut $D(\mathbb{Z}_p)^*$ aux places $p|d$, $\varphi^{-1}(K_1(M))$ (resp. $\varphi^{-1}(K_0(M))$) hors de d (cf. 3.2.2), noter que $K_1(M) \neq U_1(M)$.

On note $S_k^{*,D}(M, \varepsilon)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes sur

$$D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A})/K_1(M),$$

de caractère ε^{-1} sous $K_0(M)$, de caractère central $|\det(g)|^{2-k}\varepsilon^{-1}$, engendrant sous $D^*(\mathbb{R})$ un multiple du dual de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$. Si $k = 2$ et $\varepsilon = 1$, on note S la droite des fonctions constantes sur $D^*(\mathbb{A})$ dans $S_2^{*,D}(M, 1)$, elle est stable par $D^*(\mathbb{A})$.

Théorème 5.1. *(Arthur, Jacquet, Langlands) Si $k > 2$ ou $\varepsilon \neq 1$, les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $S_k^{*,D}(M, \varepsilon)$ et $S_k(M, \varepsilon)^{d-new}$ sont isomorphes en tant que modules sous l'algèbre de Hecke de $GL_2(\mathbb{A}_f^{(d)})$. Si $k = 2$, $\varepsilon = 1$, c'est encore vrai en remplaçant $S_2^{*,D}(M, 1)$ par $S_2^{*,D}(M, 1)/S$.*

L'action des opérateurs de Hecke dans cette correspondance se précise de plus en $l|d$, en faisant correspondre à U_l, l'opérateur de Hecke de $S_k^{*,D}(M, \varepsilon)$ donné par la double classe $K_0(M)\pi_l K_0(M)$, où $\pi_l \in D^*(\mathbb{A}_f)$ est partout trivial sauf en l où il vaut une (quelconque) uniformisante de $D(\mathbb{Z}_l)$. On notera encore U_l cet opérateur de Hecke pour D^*.

Il se trouve que nous n'allons pas considérer exactement l'espace $S_k^{*,D}(M, \varepsilon)$, mais un autre légèrement différent (ce qui explique la notation $*$ provisoire), qui lui est isomorphe comme module sous l'algèbre de Hecke. Soit

$$\omega_M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$$

[2] $f_{|_k g}(z) := f(g(z))j(g, z)^{-k}\det(g)^{k/2}$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, en particulier, si $g \in Z(\mathbb{R})$, $f_{|_k g} = f$

on le voit comme un élément de $D^*(\mathbb{A})$ trivial aux places divisant d et à l'infini, diagonalement ω_M dans $D^*(\mathbb{A}_f^{(d)}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^{(d)})$. ω_M normalise $K_0(M)$ et agit par $\mathrm{diag}(a,b) \mapsto \mathrm{diag}(b,a)$ sur le tore diagonal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^{(d)})$.

L'application $f \mapsto \omega_M.f$ induit un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $S_k^{*,D}(M,\varepsilon)$ sur l'espace des fonctions complexes sur $D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A})/U_1(M)$ de caractère ε^{-1} sous $U_0(M)$, de caractère central $|\det(g)|^{2-k}\varepsilon^{-1}$, engendrant sous $D^*(\mathbb{R})$ un multiple du dual de $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$.

On note $S_k^D(M,\varepsilon)$ ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni de l'action de l'algèbre de Hecke obtenue par transport. Explicitement, si l est premier ne divisant pas d, l'opérateur de Hecke T_l si $(l,M)=1$, U_l sinon, est donné par la double classe $U_0(M)\mathrm{diag}(1,l)U_0(M)$; si $(l,M)=1$, $S_l = l^{k-2}\varepsilon(l)$ est l'action de $\mathrm{diag}(l,l)$, U_l est inchangé si $l|d$.

Comme en 3, $\mathcal{H}$ désigne la $\mathbb{Z}$-algèbre de polynômes sur les lettres T_l, S_l si l premier ne divise pas M, U_l si $l|M$. Par ce que l'on vient de dire plus haut, $S_k^D(M,\varepsilon)$ et $S_k(M,\varepsilon)^{d-new}$ sont deux $\mathcal{H}$-modules isomorphes, avec la même exception pour $k=2$ que dans 5.1.

5.2. Structures p-adiques des espaces de formes classiques.

Nous allons introduire une $\mathbb{Q}_p$-structure sur les espaces $S_k^D(M,\varepsilon)$ et $S_k(M,\varepsilon)$. On fixe pour cela p premier, $\iota : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$ un isomorphisme de corps, $K \subset \mathbb{C}_p$ un sous-corps complet, et $M = Npd$ avec N, p et d comme en §3.

La courbe modulaire $X_1(M)$ a une structure naturelle sur $\mathbb{Q}_p$, préservée par les correspondances de Hecke. Soit $S_k(M,\varepsilon,K)$ le sous K-espace vectoriel de $H^0(X_1(M)/K, \omega^k)$ composé des formes paraboliques de caractère ε. Notons que par "*GAGA* rigide analytique", ce $\mathcal{H}$-module est canoniquement isomorphe à son analogue sur $X_1(M)^{rig}/K$. La formation du $\mathcal{H}$-module $S_k(M,\varepsilon,K)$ commute à l'extension des scalaires sur K et la donné de ι identifie $S_k(M,\varepsilon,\mathbb{C}_p)$ et $S_k(M,\varepsilon)$.

$S_k^D(M,\varepsilon,K)$ le K-espace vectoriel des fonctions $f : D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A}_f) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)$ satisfaisant

$$f(xu) = \varepsilon(u)^{-1}u_p^{-1}f(x), \quad \forall (x,u) \in D^*(\mathbb{A}_f) \times U_0(M)$$

c'est un $\mathcal{H}$-module de manière naturelle. La formation du $\mathcal{H}$-module $S_k^D(M,\varepsilon,K)$ commute à l'extension des scalaires sur K et la donnée de ι identifie $S_k^D(M,\varepsilon,\mathbb{C}_p)$ et $S_k^D(M,\varepsilon)$, on rappelle comment dans ce qui suit.

A une fonction $f \in S_k^D(M,\varepsilon)$ est associé par définition un morphisme φ_f équivariant sous $D^*(\mathbb{R})$ de $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)^*$ vers l'espace des fonctions complexes sur

$$D^*(\mathbb{Q})\backslash D^*(\mathbb{A})/U_1(M)$$

Si $x \in D^*(\mathbb{A})$,

$$v \mapsto \varphi_f(v)(x)$$

définit par dualité un unique élément $F_f(x) \in \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$. On considère alors l'application qui à f associe l'élément de $S_k^D(M,\varepsilon,\mathbb{C}_p)$ défini par

$$x_f \mapsto x_p^{-1}\iota^{-1}(F_f(1 \times x_f))$$

c'est l'isomorphisme cherché comme on le vérifie immédiatement.

Si $S_k(M,\varepsilon,\mathbb{Q}_p)^{d-new}$ désigne le sous-espace de $S_k(M,\varepsilon,\mathbb{Q}_p)$ composé des formes nouvelles en d de $S_k(M,\varepsilon,\mathbb{Q}_p)$, il vient

PROPOSITION 5.1. *Si $k>2$ ou $\varepsilon\neq 1$, les $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p$-modules $S_k(M,\varepsilon,\mathbb{Q}_p)^{d-new}$ et $S_k^D(M,\varepsilon,\mathbb{Q}_p)$ sont isomorphes. $S_2(M,1,\mathbb{Q}_p)$ est $\mathcal{H}$-isomorphe au quotient de $S_2^D(M,1,\mathbb{Q}_p)$ par la droite des fonctions constantes.*

5.3. La correspondance p-adique à poids-caractère fixé. On reprend les notations du § 3, et on s'intéresse aux systèmes de modules de Banach sur $\mathcal{W}$,

$$M^1 := F^{0,\varepsilon,d} \quad et \quad M^2 := F^{D,\varepsilon}$$

Comme on l'a vu, ils sont munis d'une action de l'algèbre $H:=\mathcal{H}$, et $U_i:=\rho_i(U_p)\in \mathrm{Comp}(M^i)$ commute à $\rho_i(H)$. On pose $X:=\{\zeta(1+p)^k, k\geq 2, \zeta\in\mu_{p^\infty}\}\subset\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, il est très Zariski-dense dans $\mathcal{W}$. On munit M^1 et M^2 de structures classiques sur X en posant pour $M^{i,cl}_{\zeta(1+p)^k}$, $k\geq 3$, $\zeta^{p^m}=1$,

- le sous-espace de $F^{0,\varepsilon,d}_{\zeta(1+p)^k,n}$, avec n quelconque tel que $n\geq m-1$, des restrictions à $X_1(Np^m,d)(v_n)$ des sections de ω^k convergentes sur tout $X_1(Np^m,d)/\mathbb{C}_p$, s'annulant à *toutes* les pointes de $X_1(Np^m,d)/\mathbb{C}_p$, si $i=1$.
- le sous-espace $S_k^D(Np^m,\varepsilon\chi\tau^{-k},\mathbb{C}_p)$ de $F^{D,\varepsilon}_{\zeta(1+p)^k,n}$, $n\geq m-1$ quelconque, défini à la fin du paragraphe 3.2.2.

Ce sont bien des structures classiques, satisfaisant (Cl) en $(1+p)^k\zeta$ dès que $\alpha<k-1$ par les assertions connues de classicité en pente petite devant le poids ([**29**] §8, [**31**] 1.1,[**21**] §4). Il faut noter qu'une forme modulaire de poids k sur $X_1(Np^m,d)$ qui est propre pour U_p de pente strictement inférieure à $k-1$, et qui s'annule en toutes les pointes de $Z_1(Np^m,d)(0)$, est en fait parabolique. On est alors dans les hypothèses de la proposition 4.2 par le théorème 5.1. On en déduit le

THÉORÈME 5.2. *Soit $h\in\mathcal{H}$, alors $Fred_{F^{0,\varepsilon,d}}(hU_p)=Fred_{F^{D,\varepsilon}}(hU_p)$*

Remarques :
- Il est aisé de voir que le membre de droite de cette égalité est en fait dans $1+T\Lambda\{\{T\}\}$, ainsi donc que le premier.
- On aurait pu se restreindre, dans notre choix de l'ensemble X, à celui de $\{(1+p)^k, k\geq 3\}$ pour obtenir le même résultat 5.2. Via le théorème 6.2 (qui n'utilise que le résultat de 5.2), on peut alors déduire de la propriété (Cl) pour les formes quaternionique, et de [**29**], une nouvelle preuve du théorème principal de [**31**].

Soit $\kappa\in\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, on dispose de deux systèmes d'espaces de Banach $F^{0,\varepsilon,d}_\kappa$ et $F^{D,\varepsilon}_\kappa$, munis de représentations de $\mathcal{H}$. Le corollaire 4.1 implique le

THÉORÈME 5.3. $\mathcal{X}_{U_p}(F^{0,\varepsilon,d})=\mathcal{X}_{U_p}(F^{D,\varepsilon})$

Autrement dit, l'espace des formes modulaires paraboliques surconvergentes de pente finie, de poids-caractère κ, de niveau modéré Nd, nouvelles en d, de caractère ε et l'espace des formes modulaires quaternioniques p-adiques de pente finie, poids-caractère κ, de niveau modéré N, de caractère ε, ont même semi-simplification comme $\mathcal{H}$-module.

6. La correspondance en familles p-adiques

6.1. Une propriété d'unicité pour les variétés spectrales attachées aux systèmes de modules de Banach. Soit $\mathcal{W}/\mathbb{C}_p$ un espace rigide réduit, soit M la donnée d'un système de modules de Banach orthonormalisables sur $\mathcal{W}$, muni d'une représentation d'une $\mathbb{C}_p$-algèbre commutative $\rho : H \to \mathrm{End}(M)$, et d'un $U \in H$ tel que $\rho(U) \in \mathrm{Comp}(M)$. A une telle donnée (M, U, H), on peut attacher la série de Fredholm $\mathrm{Fred}_M(U) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$, et l'hypersurface de Fredholm associée $Z \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ définie par $\mathrm{Fred}_M(U)$=0, munie de ses deux projections $(pr_1, pr_2) : Z \to \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$. On sait alors que Z a un recouvrement admissible canonique $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathrm{Fred}_M(U))$, composé des ouverts affinoides $\Omega \subset Z$ finis et plats sur leur image $pr_1(\Omega)$, et ouverts fermés dans $pr_1^{-1}(pr_1(\Omega))$ ([**30**] A5.8, ce qui suffit pour nos applications, [**22**] §4 pour le cas général). On sait de plus construire par recollement à l'aide de $\mathcal{C}$, un espace rigide D ([**33**] §7 [3], ainsi que I.6.3), la "variété spectrale attachée à (M, U, H)", muni d'un morphisme fini $\pi : D \to Z$. On dispose de plus d'un morphisme d'anneaux $a : H \to A(D)$, ainsi que d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "\pi"] \arrow[drr, "a(U)^{-1}"] \arrow[dd, "\kappa"'] & & \\
& Z \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[dl, "pr_1"] & \mathbb{A}^1_{rig} \\
\mathcal{W} & &
\end{tikzcd}$$

H, $U \in H$ et $\mathcal{W}$ étant fixés, on note $\mathcal{E}$ la catégorie dont les objets sont les couples (π, a) formés d'un morphisme d'espaces rigides $\pi : D \to Z$ au dessus de $\mathcal{W}$, ainsi que d'un morphisme d'anneaux $a : H \to A(D)$ tel que $a(U)^{-1} = pr_2 \cdot \pi$. Les morphismes $\mathrm{Hom}((\pi_1, a_1), (\pi_2, a_2))$ sont ceux $(\varphi_D, \varphi_Z) : \pi_1 \to \pi_2$ au dessus de $\mathcal{W}$ tels que $\forall h \in H, a_2(h) \cdot \varphi_D = a_1(h)$. Si $X = (\pi, a)$ est un objet de $\mathcal{E}$, on notera $D(X)$ (resp. $Z(X)$) l'espace rigide D source (resp. Z but) de π, $a(X) := a$, $\pi(X) := \pi$. Si (M, U, H) est comme plus haut, on notera $\mathcal{E}(M)$ l'objet de $\mathcal{E}$ associé à M par la construction précédente. On notera de plus $\mathcal{E}(M)^{\mathrm{red}}$, la réduction de $\mathcal{E}(M)$, l'objet $(\pi^{\mathrm{red}}, a^{\mathrm{red}})$ de $\mathcal{E}$, défini par

$$\pi^{\mathrm{red}} : D^{\mathrm{red}} \overset{can}{\hookrightarrow} D \xrightarrow{pi} Z, \;\; a^{\mathrm{red}} : H \xrightarrow{a} A(D) \xrightarrow{can} A(D)/\mathrm{Nilrad}(A(D))$$

Proposition 6.1. *Soient (M^1, U, H) et (M^2, U, H) comme plus haut, on suppose*

$$\forall h \in H, Fred_{M^1}(hU) = Fred_{M^2}(hU)$$

Alors $\mathcal{E}(M^1)^{red}$ et $\mathcal{E}(M^2)^{red}$ sont canoniquement isomorphes.

Preuve : Par hypothèse, $Z(\mathcal{E}(M^1)) = Z(\mathcal{E}(M^2))$, on la note Z, elle est munie de sa première projection $pr_1 : Z \to \mathcal{W}$, on pose de plus $D_i = D_i(\mathcal{E}(M^i))$, $\mathcal{E}(M^i) = (\pi_i, a_i)$. Soit $\mathcal{C}$ le recouvrement canonique de $Z \to \mathcal{W}$, $\Omega \in \mathcal{C}$, $V := pr_1(\Omega)$ est un ouvert

[3]Il s'agit de la construction "D" de la courbe de Hecke dans [**33**], uniquement basée sur de la théorie spectrale, nous ne nous occupons pas dans ce texte de la "C"

affinoide de $\mathcal{W}$, et par hypothèse $\Omega \to pr_1^{-1}(V)$ est un ouvert fermé fini sur V. Pour n assez grand, $M^i(V,n)$ contient alors un sous-$A(V)$-module localement libre de rang fini, "indépendant de n", dont on note $M^i(\Omega)$ l'image dans $M_i(V)^\dagger$. $M^i(\Omega)$ hérite d'une action de H, $\rho_i(U)$ ayant pour polynôme caractéristique le polynôme associé à la donnée de Ω (cf. par exemple I.6.5). Soit $H_V := H \otimes_{\mathbb{C}_p} A(V)$, par construction $D_i(\Omega)$ est l'affinoide d'algèbre l'image de H_V dans $\mathrm{End}_{A(V)}(M^i(\Omega))$.

Soit $h \in H$, montrons que si $P_{i,h}(X) := \det(h_{|M^i(\Omega)} - X.1)$, alors $P_{1,h}(X) = P_{2,h}(X)$. $V \subset \mathcal{W}$ étant réduit, il suffit de le faire après évaluation en tout $x \in V(\mathbb{C}_p)$. Soit $x \in V(\mathbb{C}_p)$, alors le corollaire 4.1 s'applique à (H,U) agissant sur les systèmes de modules de Banach M_x^i, on en conclut que les même caractères de H apparaissent dans les semi-simplifications de ces deux espaces (avec multiplicités). $M^i(\Omega)_x$ est par définition le sous-espace de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M^i_{x,n}$ sur lequel $\rho_i(U)$ a ses valeurs propres d'inverse dans $pr_1^{-1}(\{x\}) \cap \Omega$, et ces dernières ne dépendent pas de i, la série caractéristique de U n'en dépendant pas. Il vient donc $P_{1,h}(X)(x) = P_{2,h}(X)(x)$, puis $P_{1,h}(X) = P_{2,h}(X)$. Si plus généralement $h \in H_V$, on a encore $P_{1,h}(X) = P_{2,h}(X)$ car par l'argument précédent on a cette égalité après évaluation en tout $x \in V(\mathbb{C}_p)$.

Soit I_i l'idéal de H_V noyau du morphisme $H_V \to \mathrm{End}_{A(V)}(M^i(\Omega))$, prouvons que $\sqrt{I_1}=\sqrt{I_2}$. Soit $f \in I_1$, alors $P_{1,h}(X) = X^d$, d étant le rang de $M^1(\Omega)$ (égal au rang de $M^2(\Omega)$), on en déduit que $P_{2,h}(X) = X^d$ puis que $I_1^d \subset I_2$. Il vient $\sqrt{I_1} \subset \sqrt{I_2}$, puis par symétrie $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$, ce que l'on voulait. On en déduit l'existence d'un isomorphisme d'anneau H_V-linéaire : $\varphi^*(\Omega) : A(D_2(\Omega)^{\mathrm{red}}) \to A(D_1(\Omega)^{\mathrm{red}})$. Un tel morphisme H_V-linéaire est nécessairement unique s'il existe, il est au dessus de $A(\Omega)$.

Soit alors $\varphi(\Omega) : D_1(\Omega)^{\mathrm{red}} \to D_2(\Omega)^{\mathrm{red}}$ l'isomorphisme induit au dessus de Ω. Vérifions que si $\Omega' \subset \Omega \in \mathcal{C}$, φ_Ω envoie $D_1(\Omega')^{\mathrm{red}}$ dans $D_2(\Omega')^{\mathrm{red}}$. Soit $V = pr_1(\Omega) \subset \mathcal{W}$, $V' = pr_1(\Omega')$, alors $\Omega_{V'} := \Omega \cap pr_1^{-1}(V') \in \mathcal{C}$ et $D_i(\Omega_{V'})$ est l'ouvert $D_i(\Omega)^{\mathrm{red}} \times_V V'$ de $D_i(\Omega)^{\mathrm{red}}$. $\varphi(\Omega)$ induit un $H_{V'}$-isomorphisme $D_1(\Omega_{V'}) = D_1(\Omega)^{\mathrm{red}} \times_V V' \to D_2(\Omega)^{\mathrm{red}} = D_2(\Omega')^{\mathrm{red}}$, ce qui conclut le cas $\Omega' = \Omega_{V'}$. Il reste donc le cas $V = V'$. On a $D_i(\Omega)^{\mathrm{red}} = D_i(\Omega')^{\mathrm{red}} \coprod D_i(\Omega \backslash \Omega')^{\mathrm{red}}$. φ_Ω étant $A(\Omega)$ et H_V-linéaire sur les fonctions, elle envoie $D_1(\Omega')^{\mathrm{red}}$ isomorphiquement sur $D_2(\Omega')^{\mathrm{red}}$ au dessus de H_V et $A(\Omega')$. On conclut par unicité d'un tel morphisme que les φ_Ω se recollent en un isomorphisme $D_1^{\mathrm{red}} \to D_2^{\mathrm{red}}$ au dessus de Z par [**15**] 9.3.3/1. $\square$

Remarque : Il est bien sur faux en général que sous les hypothèses de la proposition 6.1, M^1 et M^2 soient des H-modules isomorphes ; 6.1 est la généralisation naturelle de 4.1.

Nous pouvons énoncer un résultat général combinant 4.2, 6.1 et 4.1. Fixons $\mathcal{W}$ réduit de dimension > 0 et relativement factoriel, (M^1, H, U) et (M^2, H, U) des systèmes de H-modules de Banach sur $\mathcal{W}$ munis de structures classiques sur un sous-ensemble très Zariski-dense $X \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ comme en 4.2, satisfaisant (Cl) :

Théorème 6.1. *Supposons pour tout $h \in H$, $x \in X$,*

$$\det(1 - ThU_{|M_x^{1,cl}}) = \det(1 - ThU_{|M_x^{2,cl}}) \in \mathbb{C}_p[T]$$

alors,

– $Fred_{M^1}(hU) = Fred_{M^2}(hU) \in 1 + TA(\mathcal{W})\{\{T\}\}$,
– $\mathcal{E}(M^1)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{E}(M^2)$,
– *Pour tout* $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $\mathcal{X}_U(M^1_x) = \mathcal{X}_U(M^2_x)$.

Nous allons énoncer, pour terminer ce paragraphe, un critère sur (M, U, H) assurant que $D(\mathcal{E}(M))$ est réduit. Ce passage peut être omis en première lecture, et apparaît ici par manque de référence satisfaisante. On fera les hypothèses suivantes sur $\mathcal{W}$: $\mathcal{W}$ est relativement factoriel ([**36**] §4), de dimension > 0, et pour tout $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ est intègre. On suppose de plus que l'on dispose de $X \subset \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ un ensemble très Zariski dense, et une structure classique sur X au sens de §4.2, satisfaisant (Cl). On fait de plus l'hypothèse de type "multiplicité 1" suivante :

"Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour presque tout $x \in X$, H agit de manière semi-simple sur $M_x^{cl} \cap M_x^{\leq\alpha}$"

Proposition 6.2. *Sous ces hypothèses,* $D(\mathcal{E}(M))$ *est réduit.*

Rappels : Si A est une algèbre affinoide, $x \in \mathrm{Specmax}(A)$, on notera A_x (resp. A_x^{rig}) le localisé Zariski (resp. rigide) en x ([**15**] 7.3.2). Ils sont tous deux locaux noethériens, ont des complétés canoniquement isomorphes, et A_x, A_x^{rig} et $\widehat{A_x}$ sont simultanément réduits ([**15**] 7.3.2/8). Notons que si $A \to A'$ est un morphisme plat entre anneaux noethériens, alors si A' n'a pas d'idéaux premiers associés immergés, il en va de même pour A. Ceci vaut en particulier pour $A_x \to A_x^{rig} \to \widehat{A_x^{rig}} = \widehat{A_x}$. Par exemple, si tous les A_x^{rig} sont sans composantes associées immergées, alors A est sans composante associée immergée. Enfin, pour qu'un anneau noethérien A sans composante associée immergée soit réduit, il suffit que pour un ensemble $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathrm{Specmax}(A)$ tel que chaque composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$ contienne un des x_i, chacun des A_{x_i} soit réduit. En effet, sous ces hypothèses l'application canonique $A \to \oplus_{i=1}^r A_{x_i}$ est injective. En particulier, si un tel anneau A a son spectre irréductible, soit il est réduit, soit aucun des A_x, $x \in \mathrm{Specmax}(A)$ n'est réduit.

Preuve : On reprend les notations du début du §6.1, un point $z \in D(\mathbb{C}_p)$ sera dit classique si $\kappa(z) \in X$, et si le caractère de H obtenu par évaluation en z sur $D(\mathbb{C}_p)$ est dans la semi-simplification du H-module $M^{cl}_{\kappa(z)}$. Les points classiques sont alors très Zariski denses car $\mathcal{W}$ est relativement factoriel de dimension > 0, et par (Cl).

Soit $\Omega \in \mathcal{C}$ tel que $D(\Omega)$ contienne un point classique, il en contient alors un ensemble Zariski-dense. Soit $M(\Omega)$ le $A(V)$-module projectif de type fini associé à Ω comme dans la preuve de 6.1. Soit $u \in A(D(V)) \subset \mathrm{End}_{A(V)}(M(\Omega))$ nilpotent, par hypothèse de multiplicité 1, les évaluations de u sont nulles en presque tout x de $X \cap V(\mathbb{C}_p)$, et u est donc nul ; $D(V)$ est donc réduit s'il contient un point classique.

Soit $\Omega \in \mathcal{C}$ quelconque, montrons que les complétés des anneaux locaux aux points fermés de $D(\Omega)$ n'ont pas de composantes associées immergées. C'est en fait une propriété générale des sous-A-algèbres B de $\mathrm{End}_A(P)$ où A est intègre noethérien tel que les $\widehat{A_m}$, $m \in \mathrm{Max}(A)$, soient intègres, et P projectif de type fini sur A. En effet, si $m \in$

$\mathrm{Max}(A)$ est fixé, $A' := \widehat{A_m}$, la platitude de $A \to A'$ entraîne que $B_m := B \otimes_A A'$ est canoniquement isomorphe à son image dans $\mathrm{End}_{A'}(P \otimes_A A') \simeq M_r(A')$, où $r := \mathrm{rg}_A(P)$. A' étant hensélien, B_m est un produit d'algèbres locales B^i_m finies sur A', sans A'-torsion, car incluse dans $M_r(A')$. En particulier si Q est un idéal premier associé de B^i_m, $Q \cap A'$ est un idéal premier de A' de même hauteur que Q annulant un élément de B^i_m, donc $Q \cap A' = 0$ et cette hauteur commune est nulle, ce que l'on voulait.

Les $D(\Omega)$ recouvrant D de manière admissible, tous les $\mathcal{O}^{rig}_{D,x}$, $x \in D$, sont sans composantes immergées associées, on conclut par le lemme suivant. $\square$

Lemme 6.1. *Soit $X/\mathbb{C}_p$ un espace rigide dont les anneaux locaux n'ont pas de composantes associées immergées, et ayant un ensemble Zariski dense de x tels que $\mathcal{O}^{rig}_{X,x}$ soit réduit, alors X est réduit.*

Preuve : Soit X^0 l'ensemble des x de X qui sont dans une seule composante irréductible de X, X^0 est un ouvert admissible de X. Soit $\mathrm{Red}(X) := \{x \in X, \mathcal{O}^{rig}_{X,x} \text{ est réduit } \}$, c'est (sans condition sur X) un ouvert admissible de X, on définit de même $\mathrm{Red}(X^0)$. $\mathrm{Red}(X)$ est Zariski-dense dans X, comme il est ouvert il y est aussi très Zariski-dense. On en déduit que $\mathrm{Red}(X^0)$ est Zariski-dense dans X^0. Les rappels ci-dessus assurent que $\mathrm{Red}(X^0)$ est un ouvert fermé admissible de X^0, on a donc $X^0 = \mathrm{Red}(X^0)$. Si V est un ouvert affinoide de X, $V \cap X^0$ est Zariski-dense dans V, et les rappels montrent que $V \subset \mathrm{Red}(X)$. $\square$.

6.2. L'isomorphisme rigide analytique $\mathbf{JL}_p$. Soient $\mathcal{W}, N, p, d$ comme en §3,

$$D^{0,\varepsilon,d} := D(\mathcal{E}(F^{0,\varepsilon,d}))^{\mathrm{red}}, \quad D^{D,\varepsilon} := D(\mathcal{E}(F^{D,\varepsilon}))^{\mathrm{red}}$$

On note $Z \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ l'hypersurface de Fredholm associée à $\mathrm{Fred}_{F^{0,\varepsilon,d}}(U_p)$, qui est encore $\mathrm{Fred}_{F^{D,\varepsilon}}(U_p)$ par le théorème 5.2 ; et l'on pose

$$a := a(\mathcal{E}(F^{0,\varepsilon,d})),$$
$$a_D := a(\mathcal{E}(F^{D,\varepsilon}))$$

On dispose aussi de morphismes naturels $D^{0,\varepsilon,d} \to \mathcal{W}$ et $D^{D,\varepsilon} \to \mathcal{W}$ que l'on notera par le même nom κ.

Théorème 6.2. *Il existe un unique isomorphisme rigide analytique $JL_p : D^{D,\varepsilon} \to D^{0,\varepsilon,d}$ au-dessus de $\mathcal{W}$, coïncidant avec la correspondance de Jacquet-Langlands sur les points classiques différents du point non tempéré. Il satisfait $\forall h \in \mathcal{H},\ a(h).JL_p = a_D(h)$.*

Avant de prouver ce théorème, rappelons qu'un point x de $D^{0,\varepsilon,d}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$) est dit **classique** si :

i) $\kappa(x) = (1+p)^k\zeta$, où $k \geq 2$ est un entier, $\zeta \in \mu_{p^\infty}$,

ii) le caractère $\mathcal{H} \to \mathbb{C}_p$ obtenu par l'évaluation en x apparaît dans la semi-simplification du $\mathcal{H}$-module $F^{0,\varepsilon,d,cl}_{(1+p)^k\zeta}$ (resp. $F^{D,\varepsilon,cl}_{(1+p)^k\zeta}$).

On notera x_0 le point de $D^{D,1}(\mathbb{C}_p)$ correspondant au caractère de $\mathcal{H}$ sur la droite des fonctions constantes dans $F^{D,1,cl}_{(1+p)^2}$, on l'appellera le **point non tempéré**.

Preuve : L'assertion d'unicité de 6.2 découle de la Zariski-densité des points classiques de $D^{D,\varepsilon}$. Le théorème 5.2 combiné à la proposition 6.1 assure l'existence d'un isomorphisme canonique $\phi : \mathcal{E}(F^{D,\varepsilon})^{\mathrm{red}} \to \mathcal{E}(F^{0,\varepsilon,d})^{\mathrm{red}}$. On définit alors

$$\mathrm{JL}_p : D^{D,\varepsilon} \to D^{0,\varepsilon,d}$$

comme étant l'isomorphisme induit par ϕ. Par construction, il est au dessus de $\mathcal{W}$ et satisfait $a = \mathrm{JL}_p.a_D$.

Prouvons que JL_p induit la correspondance de Jacquet-Langlands sur les points classiques tempérés (i.e. différents du point non tempéré). Rappelons (cf. par exemple I.6.3 et I.6.2) que si $w \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, l'application qui a un point $x \in D^{0,\varepsilon,d}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$) tel que $\kappa(x) = w$ associe le caractère $\mathbb{C}_p$-valué de $\mathcal{H}$ d'évaluation en x induit une bijection entre $\kappa^{-1}(w)$ et $|\mathcal{X}_{U_p}(F_w^{0,\varepsilon,d})|$ (resp. $|\mathcal{X}_{U_p}(F_w^{D\varepsilon})|$, voir §4.1 pour la notation $|.|$). En particulier, si $x \in D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$ est un point classique tempéré, la relation $a = \mathrm{JL}_p.a_D$ assure que $\mathrm{JL}_p(x)$ correspond au même caractère de $\mathcal{H}$ que x. Or la correspondance de Jacquet-Langlands usuelle nous assure l'existence d'une forme classique de poids $\kappa(x)$ ayant ce caractère sous $\mathcal{H}$; par unicité (i.e par la bijection rappelée ci-dessus) le point de $D^{0,\varepsilon,d}(\mathbb{C}_p)$ correspondant est nécessairement $\mathrm{JL}_p(x)$, ce qui prouve le théorème. □

Remarques : i) Par des techniques usuelles, on peut montrer que l'adhérence $\overline{\mathcal{H}}$ de la Λ-algèbre engendrée par l'image de $\mathcal{H}$ dans $A(D^{D,\varepsilon})$ est compacte. De ceci et de l'existence des représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires classiques résulte facilement (voir par exemple I.7.1) l'existence d'un unique pseudo-caractère continu de dimension 2

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{Npd} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}} \subset A(D^{0,\varepsilon,d})$$

tel que si l est premier avec $(l, Npd) = 1$, $T(\mathrm{Frob}_l) = a(T_l)$.

ii) $\mathrm{JL}_p(x_0)$ correspond à la forme modulaire parabolique surconvergente de poids 2, nouvelle en d, de q-développement $q + \sum_{n\geq 2} a_n q^n$ avec $a_l = l + 1$ si $(l, pd) = 1$, 1 si $l|d$, et p si $l = p$. Elle n'est pas classique au sens strict précédent, mais elle est quand même convergente sur tout $X_1(Np, d)$, bien que non cuspidale. Elle est "critique", car de pente 1 et de poids 2. On rediscute de cette forme en A.5.2.

En prenant $X := \{(1+p)^k, k \geq 2 \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)\}$, les structures classiques sur X ci-dessus, $N = 1$, l'hypothèse de multiplicité 1 pour $\mathcal{H}$ agissant sur $M^{cl}_{(1+p)^k} \cap M^{\leq\alpha}_{(1+p)^k}$ sont vérifiées dès que $\frac{k-1}{2} > \alpha$ et 6.2 donne la

Proposition 6.3. *Si $N = 1$, $D(\mathcal{E}(F^{0,\varepsilon,d}))$ et $D(\mathcal{E}(F^{D,\varepsilon}))$ sont réduits.*

7. Quelques conséquences, remarques et questions

7.1. Opérateurs thêta. Soit $\kappa = (k, \chi)$ de conducteur m, $k \geq 2$, il existe un opérateur d'entrelacements surjectif

$$\mathcal{C}^{\dagger}_{(1+p)^{-2}\kappa} \longrightarrow (\mathcal{C}^{\dagger}_{(1+p)^{-2}\kappa^*}) \otimes \det^{k-1}, \quad f \mapsto (\frac{d}{dT})^{k-1}(f), \quad \kappa^* := (2-k, \chi)$$

en tant que représentations de $\mathbb{M}$ (cf. [**21**] §6, voir aussi [**90**] 5.5). Son noyau est l'espace des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-2$. Il induit un opérateur $\Theta^{1-k} : F^{D,\varepsilon}_{\kappa,0}[m] \to F^{D,\varepsilon}_{\kappa,0}[m]$ avec les notations de 3.2.2, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ T_n(\Theta^{1-k}(f)) = n^{1-k}\Theta^{1-k}(f)$. Le noyau de Θ^{1-k} est le $\mathcal{H}$-module $S^D_k(Np^m, \varepsilon\chi\tau^{-k}, \mathbb{C}_p)$.

Du côté des courbes modulaires, on peut définir via l'application de Kodaira-Spencer ([**29**] §4, [**31**]) un opérateur $M_{2-k}(Np^m, d)^\dagger \to M_k(Np^m, d)^\dagger$ noté Θ^{k-1}, qui agit sur les q-développements par $(\frac{d}{dq})^{k-1}$, et satisfait donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\Theta^{k-1}(f)) = n^{k-1}\Theta^{k-1}(T_n(f))$. Les formes modulaires classiques propres, de pente finie, de poids k et de niveau Np^md ne sont pas dans l'image de θ^{1-k}.

Si $x \in D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$ est non classique mais de poids κ, il existe une forme $f_x \in F^{D,\varepsilon}_{\kappa}[m]$ propre, non classique, ayant pour système de valeurs propres celui associé à x. $\Theta^{1-k}(f_x) \in F^{D,\varepsilon}_{\kappa^*}[m]$ est propre et non nul, et correspond donc à un point que l'on notera $\Theta^{1-k}(x) \in D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$. On définit de même $\Theta^{k-1}(x)$ pour tout $x \in D^{0,\varepsilon,d}(\mathbb{C}_p)$ de poids κ^*, 6.2 implique la :

Proposition 7.1. *Soit $x \in D^{D,\varepsilon}(\mathbb{C}_p)$ non classique de poids $\kappa(x) = (k,\chi)$, alors*

$$\Theta^{k-1}(JL_p(\Theta^{1-k}(x))) = x$$

7.2. Questions.

(Q1) Nous n'avons pas montré que les systèmes de modules de Banach $F^{0,\varepsilon,d}$ et $F^{D,\varepsilon}$ sont isomorphes. Est-il vrai, par exemple, que si $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$, les sous-espaces de $(F^{D,\varepsilon}_\kappa)^\dagger$ et de $(F^{0,\varepsilon,d}_\kappa)^\dagger$ composés des vecteurs de pente finie sont des $\mathcal{H}$-modules isomorphes ? Cette version "non semi-simplifiée" de notre correspondance serait par exemple intéressante pour des questions de multiplicité 1 mieux comprises du côté GL_2 (essentiellement par la présence du q-développement).

(Q2) Existe-t'il une réalisation géométrique de la correspondance donnée ? Cette question semble prématurée pour l'instant puisqu'on ne dispose pas à notre connaissance d'isomorphismes de comparaisons "naturels" (par exemple faisant intervenir des périodes p-adiques appropriées) entre les espaces de formes modulaires p-adique surconvergentes et les espaces de Banach p-adiques de cohomologie Betti introduits par Stevens dans [**103**].

(Q3) Plusieurs autres espaces de "formes modulaires p-adiques" naturels peuvent être définis autant au niveau quaternionique que pour GL_2. Par exemple, on peut remplacer les séries principales de I dans notre définition des formes quaternioniques p-adiques par des restrictions des séries cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui apparaissent aussi en familles sur $\mathcal{W}$ et contiennent les représentations de dimension finie usuelles aux poids-caractères arithmétiques : à quoi correspondent-elles du côté GL_2 ?

Nous espérons revenir aussi sur l'étude d'une autre famille d'espaces de Banach (construite du côté elliptique cette fois-ci), obtenue en considérant les sections de ω^k sur la réunion finie des disques supersinguliers de $X_1(N)/\mathbb{C}_p$ (N premier à p disons). Ces espaces sont aussi liés à des espaces de formes modulaires quaternioniques pour D ramifiée en p et l'infini cette fois-ci (cf. une lettre de Serre à Tate [**97**] pour une correspondance modulo p).

CHAPITRE III

Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato (avec J.Bellaïche)

1. Introduction

1.1. Énoncé du théorème principal. Soit E/F une extension CM, (ρ, V) une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, continue, irréductible, et géométrique (cf. [**44**, page 650]). On note τ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\rho^{\perp}$ la représentation sur V^* donnée par $g \mapsto {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$. On suppose que la représentation ρ vérifie[1]

$$\rho^{\perp} = \rho(-1), \tag{18}$$

où $\rho(-1)$ est un twist à la Tate de ρ.

Il est conjecturé que la fonction L de ρ, notée $L(\rho, s)$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en zéro si ρ n'est pas le caractère cyclotomique, ce que nous supposerons. Sous l'hypothèse (18), la fonction $\Lambda(\rho, s)$ déduite de L admet une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(\rho, -s) = \epsilon(\rho, s)\Lambda(\rho, s), \text{ avec } \epsilon(\rho, 0) = \pm 1,$$

En particulier, l'examen des facteurs Γ à l'infini montre que $\epsilon(\rho, 0) = -1$ si et seulement si la fonction $L(\rho, s)$ s'annule en 0 à l'ordre impair.

À la suite de Janssen, Bloch-Kato, Fontaine-Perrin-Riou, notons $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ le sous groupe de $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ paramétrant les extensions U de la représentation triviale 1 par ρ

$$0 \to V \to U \to 1 \to 0$$

qui ont bonne réduction en toute place, ce qui signifie que les suites

$$0 \to V^{I_w} \to U^{I_w} \to 1 \to 0$$

sont exactes pour toute place w de E ne divisant pas p, I_w désignant un sous-groupe d'inertie en w, et que les suites

$$0 \to D_{cris,w}(V) \to D_{cris,w}(U) \to 1 \to 0$$

sont exactes pour toute place w divisant p. La conjecture de Bloch et Kato (cf. [**44**, 3.4.5]) implique que

Conjecture 1.1. *Si* $\epsilon(\rho, 0) = -1$, *alors* $\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho) \geq 1$.

Cet article propose une nouvelle méthode pour aborder cette conjecture, basée sur des congruences entre formes automorphes non tempérées et tempérées. Son but est d'en démontrer le cas particulier suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que E est un corps quadratique imaginaire. Soit χ un caractère de Hecke algébrique sur E, qui vérifie*

$$\chi^{\perp} = \chi|.|^{-1}$$

[1]Notons par exemple que si ρ_F est une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ vérifiant $\rho_F^* \simeq \rho_F(-1)$, sa restriction ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ vérifie 18. C'est la cas par exemple d'un twist convenable des représentations attachées aux formes modulaires.

et dont le type à l'infini est de la forme

$$z \mapsto z^a \bar{z}^{1-a},$$

avec $a \geq 2$. *Soit* p *un nombre premier décomposé dans* E *et non ramifié pour* χ, *et* $\chi_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to L^*$ *une réalisation* p*-adique de* χ *sur un corps* L. *Alors, si* $\epsilon(\chi, 0) = -1$, *on a*

$$\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \chi_p) \geq 1.$$

Autrement dit, il existe une extension non triviale ayant bonne réduction partout de la forme

$$0 \to \chi_p \to U \to 1 \to 0. \tag{19}$$

Notons que ce théorème peut se démontrer facilement à partir de la conjecture d'Iwasawa pour les corps quadratiques imaginaires, prouvée par Rubin ([**87**]). Cependant, notre méthode est différente (Rubin utilise des systèmes d'Euler et non des formes automorphes), susceptible de généralisations ultérieures (voir plus bas) et donne une information supplémentaire : elle prouve que *les réductions modulo* m^n, *(*m *idéal maximal de* $\mathcal{O}_L$, n *entier arbitraire) de l'extension (*19*) dont le théorème affirme l'existence apparaissent comme sous-quotient de la cohomologie étale de variétés algébriques sur* E. Cet énoncé est prédit par la conjecture de Fontaine-Mazur et ne découle pas de la preuve de Rubin.

1.2. La méthode.

1.2.1. Le théorème 1.1 est une généralisation du théorème principal de la thèse d'un des auteurs (cf. [**3**] théorème VIII.1.7.2), où il est prouvé, sous les mêmes hypothèses, l'existence d'une extension non triviale ayant bonne réduction partout sur $\mathcal{O}_L/m$ de la forme $0 \to \bar{\chi}_p \to U \to 1 \to 0$, et ce pour un ensemble de densité non nulle de p. La méthode utilisée ici est similaire à celle de cette thèse, à une variante près (l'emploi de familles p-adiques combinées avec un résultat de Kisin, au lieu d'augmentation du niveau) dont l'idée est due à Urban et Skinner. Ils ont en effet récemment annoncé (cf. [**102**]) un analogue du théorème 1.1 pour des formes modulaires ordinaires de niveau 1, par une méthode semblable. Il nous a semblé bon de reprendre cette idée dans notre cas, notamment parce qu'elle nous permet de se passer d'hypothèses sur p, que les familles p-adiques pour $U(n)$ sont construites dans le chapitre 1 de cette thèse, et qu'elle est plus simplement généralisable (voir 1.3).

1.2.2. Expliquons le principe de la méthode employée. La première idée est d'utiliser les formules de multiplicités, données par des conjectures d'Arthur, des représentations automorphes dans le spectre discret. Pour certaines représentations non tempérées, ces formules font apparaître le signe de certains facteurs ϵ. Plus précisément, dans le cas du groupe unitaire U(3) compact à l'infini attaché au corps quadratique imaginaire E, ces formules sont démontrées par Rogawski et affirment que pour χ un caractère de Hecke comme dans l'énoncé du théorème, il existe dans le spectre discret de E une représentation $\pi(\chi)$, minimalement ramifiée[2], dont la représentation galoisienne associée $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(L)$ est de la forme $\rho = \chi_p \oplus 1 \oplus \chi_p(-1)$ si, et seulement si, $\epsilon(\chi, 0) = -1$.

[2]Voir la proposition 4.1 pour plus de détails.

1.2.3. Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose donc de $\pi(\chi)$ et de sa représentation galoisienne associée ρ. L'étape suivante est d'obtenir une déformation génériquement irréductible ρ' de ρ, i.e. une représentation ρ' de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur un anneau de valuation discrète R de corps résiduel L avec $(\rho' \otimes_R L)^{ss} = \rho$, et $\rho' \otimes_R Frac(R)$ irréductible ; il faut également contrôler la ramification de ρ' ainsi que son comportement aux places divisant p. Le méthode[3] utilisée pour construire ρ' consiste à placer $\Pi(\chi)$ dans une famille p-adique de formes automorphes[4].

Pour contrôler la ramification de ρ' aux places w de E ne divisant pas p, en particulier aux places où χ est ramifié, on est obligé d'imposer aux formes de la famille p-adique construite de contenir certains types de Bushnell et Kutzko. Pour traduire l'existence de ces types en termes de la ramification de ρ', on bute sur la difficulté suivante : il ne semble pas connu [5] que la construction de la représentation galoisienne ρ attachée à une forme automorphe pour U(3) est compatible, en chaque place, avec la correspondance de Langlands locale. Nous montrons comment contourner cette difficulté. Pour contrôler le comportement de ρ' aux places w divisant p, on utilise une forme convenable d'un résultat récent de Kisin.

1.2.4. La dernier étape consiste à appliquer une vieille idée de Ribet (cf. [**79**]) : l'existence d'une déformation de ρ comme ci-dessus implique l'existence d'extensions non triviales entre les facteurs de ρ. Dans le cas de Ribet, ρ n'avait que deux facteurs et Ribet montrait qu'on pouvait obtenir les extensions d'un facteur par l'autre dans les deux sens possibles. Mais c'est un fait incontournable (cf. [**5**]) que quand ρ a plus de deux facteurs irréductibles, on ne peut assurer l'existence de toutes les extensions entre ces facteurs. On obtient seulement une disjonction d'assertions d'existence. Autrement dit, pour montrer l'existence de l'extension cherchée, on est ramené à montrer la non-existence de certaines autres extensions, non-existence qui a une signification arithmétique globale, étant aussi un cas des conjectures de Bloch-Kato. Dans [**3**] ainsi que dans la méthode décrite dans [**102**] (voir *loc. cit.* dernier paragraphe), la preuve de ces cas de non-existence repose sur des résultats récents et difficiles de Rubin ([**87**]) et de Kato (p-adic Hodge theory and values of Zeta functions of modular forms, prépublication) respectivement. Dans cet article, le seul cas de non-existence que nous avons à vérifier est celui d'une extension ayant bonne réduction partout du caractère trivial par le caractère cyclotomique, qui est une application élémentaire de la théorie de Kummer.

1.3. Généralisations. Tout d'abord, l'hypothèse sur p dans le théorème 1.1 est inessentielle, et devrait être supprimée lorsque les familles p-adiques seront disponibles

[3]Mentionnons ici que l'utilisation systématique des formes automorphes sur les groupes compacts à l'infini dans les questions de congruences semble due à R.Taylor

[4]C'est là la principale différence avec [**3**] où l'on ne construisait qu'une déformation de $\bar{\rho} \simeq \bar{\chi}_p \oplus 1 \oplus \bar{\chi}_p(1)$ à l'aide d'un théorème d'augmentation du niveau. Notons cependant que l'on pourrait aussi prouver le théorème 1.1 à l'aide de cette méthode, en construisant des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont congrues à ρ modulo m^n, à l'aide de théorèmes d'augmentation du niveau modulo m^n. On obtiendrait ainsi des extensions modulo m^n, puis on passerait à la limite sur n. Cette méthode fera l'objet d'un travail ultérieure, dans un cadre un peu différent.

[5]On ne peut appliquer à nos formes le résultat principal de [**51**] car elles n'en vérifient pas l'hypothèse, à savoir d'être de carré intégrable en au moins une place finie.

aux places non décomposées et en niveau sauvage (travail en cours d'un des auteurs avec K.Buzzard).

La méthode que nous avons esquissée ci-dessus se prête à des généralisations aux groupes unitaires $\mathrm{U}(n)$ compact à l'infini associé à un corps quadratique imaginaire E. Cependant, on ne dispose pas pour l'instant pour ces groupes, si $n \geq 4$, de la construction d'une représentation galoisienne attachée à chaque forme automorphe et vérifiant les propriétés attendues en presque toute place, pas plus que l'on ne dispose des cas nécessaires des formules de multiplicités d'Arthur (cependant des progrès ont été fait récemment dans le cas $n = 4$). Nous avons néanmoins pris garde à énoncer et à démontrer la plupart des lemmes que nous utilisons sous une forme générale, en vue de leur utilisation pour le cas de $\mathrm{U}(n)$. Nous comptons revenir sur ce cas dans un avenir proche.

Enfin, il semble par contre plus délicat de généraliser cette méthode au cas où E est un corps CM quelconque, et non quadratique imaginaire (voir à ce propos la remarque 9.1).

1.4. Plan de l'article. Indiquons brièvement le contenu des différentes parties de cet article. Dans la partie 2, nous fixons les conventions (concernant essentiellement les normalisations de la théorie du corps de classes et de la correspondance de Langlands locales) et les principales notations que nous utiliserons. La partie 3 décrit la construction par Blasius et Rogawski du système de représentations l-adiques attaché aux formes automorphes pour $\mathrm{U}(3)$. Nous démontrons quelques résultats concernant la compatibilité de cette construction avec la correspondance de Langlands locale. La partie 4 construit et décrit la représentation non tempérée $\pi(\chi)$ discutée plus haut.

Les parties 5, 6 et 7 sont rédigées dans une plus grande généralité. La partie 5 fait, pour GL(n), la théorie des différents choix possibles d'une forme propre ancienne de niveau Iwahorique en p, attachée à une forme non ramifiée en p. La partie 6 traite des raffinements des représentations p-adiques cristallines, contrepartie galoisienne de la théorie précédente, et des familles de telles représentations raffinées. On y énonce en particulier, sous une forme adaptée à notre usage, un résultat récent de Kisin. La partie 7 contient les résultats nécessaires sur les pseudo-caractères et les représentations galoisiennes, ainsi que la généralisation adéquate du lemme de Ribet.

Dans la partie 8 nous revenons aux groupes unitaires à trois variables, et construisons des familles p-adiques passant par $\pi(\chi)$. Enfin, la partie 9 montre le théorème principal.

Les auteurs[6] sont heureux de remercier Laurent Berger, Laurent Clozel, Pierre Colmez, Michael Harris, Guy Henniart et Éric Urban pour de nombreuses et utiles conversations durant la réalisation de cet article.

2. Notations et conventions

2.1. Corps et groupes de Galois. Dans tout cet article, on note $E \subset \mathbb{C}$ une corps quadratique imaginaire, $\bar{E}$ la clôture algébrique de E dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{A}_E$ l'anneau des adèles de E, W_E et $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ les groupes de Weil et de Galois de $\bar{E}$ sur E. Pour v place de E on notera D_v un sous-groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ en v, I_v le sous-groupe

[6]Durant la rédaction de cet article l'un des auteurs (Joël Bellaïche) a bénéficié de l'aide du Bell fund et du Ellentuck Fund

d'inertie de D_v, et $\mathrm{Frob}_v \in D_v$ un Frobenius géométrique. On note $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe, $\tau^2 = 1$.

2.2. Anti-auto-duale. Soit ρ une représentation de W_E ou de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ dans $\mathrm{GL}_n(A)$, où A est un anneau commutatif. On notera $\rho^\perp$ la représentation définie par

$$\rho^\perp(g) = {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$$

2.3. Représentations algébriques. Soit $w = (k_1 \geq \cdots \geq k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note V_w la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ de plus haut poids w relativement au Borel supérieur de GL_n. C'est l'unique représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ telle que le tore diagonal de GL_n agissent sur la droite stable par le Borel supérieur par $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$. On note

$$\mathbb{Z}^{n,+} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 \geq ... \geq k_n\}$$

$$\mathbb{Z}^{n,--} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 < k_2 < ... < k_n\}$$

Si $w = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$-w = (-k_n, ..., -k_1) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad \delta(w) = \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(k_i - k_{i+1}) \in \mathbb{Z}$$

Si $w \in \mathbb{Z}^{n,+}$, $-w \in \mathbb{Z}^{n,+}$ et $\delta(w) \in \mathbb{N}$. Le dual de V_w est alors V_{-w}. Si F est un corps de caractéristique 0, on notera $V_w(F)$ la représentation de GL_n/F extension des scalaires à F de V_w.

2.4. Correspondance de Langlands locale. Nous précisons dans ce paragraphe les conventions choisies pour fixer l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes ainsi que la correspondance de Langlands locale pour GL_n. Soit F un corps de nombres, on normalise l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classes globale

$$\mathrm{rec}_F : \mathbb{A}_F^*/\overline{F^*(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{0,*}} \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab}$$

en demandant qu'il envoie toute uniformisante locale π_v en une place finie v sur le Frobenius *géométrique* de D_v/I_v, avec l'abus de langage évident. Pour toute place v de F, on dispose alors par restriction de rec_F, d'un isomorphisme du corps de classes local

$$\mathrm{rec}_{F_v} \ : \ F_v^* \longrightarrow W_F^{ab}$$

compatible à l'isomorphisme global.

Supposons maintenant que F est un corps local non archimédien. On choisit la normalisation *à la Langlands* pour la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(F)$, notée L (voir par exemple [**50**] p.2). Ainsi, pour π une représentation irréductible lisse de $\mathrm{GL}_n(F)$, $L(\pi)$ est une représentation complexe Φ-semisimple de dimension n du groupe de Weil-Deligne WD_F (cf. [**104**, 4.1]). Pour $n = 1$, π est un caractère de $\mathrm{GL}_1(F) = F^*$ et $L(\pi)$ est le caractère de W_F qui s'en déduit via l'isomorphisme rec_{F_v} ci-dessus. Par exemple, L envoie le quotient de Langlands de l'induite parabolique attachée à deux représentations lisses irréductible π_1 et π_2 sur la somme directe $L(\pi_1) \oplus L(\pi_2)$.

Soit l un nombre premier, on fixe $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ un isomorphisme de corps. Pour π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, F un corps local non archimédien, on peut voir $L(\pi)$, par transport de structure via ι_l comme une représentation sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ en fait définie sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, et on peut donc lui associer une représentation notée $L_l(\pi)$ du groupe de Weil ordinaire W_F sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, comme en [**104**, 4.2.1].

2.5. Caractères de Hecke. Soit $\chi : E^*\backslash\mathbb{A}_E^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère de Hecke de E, pour toute place v de E on note χ_v la restriction de χ à E_v^* et χ_f sa restriction aux idèles finies $\mathbb{A}_{f,E}^*$. On identifie $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ via l'inclusion $E \subset \mathbb{C}$. On suppose dans ce qui suit que χ est algébrique, i.e $\chi_\infty(z) = z^a \bar{z}^b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, et on fixe encore l et ι_l comme dans la section précédente en supposant de plus $l = v_1 v_2$ totalement décomposé dans E, v_1 étant la place définie par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$. À (χ, ι_l) on peut alors associer un caractère continu $\overline{E^*}\backslash\mathbb{A}_{f,E}^* \to \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ défini par la formule :

$$x \mapsto \iota_l(\chi_f(x)))x_{v_1}^a x_{v_2}^b$$

Par composition avec rec_E, on en déduit un caractère l-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ que nous noterons χ_l (à ne pas confondre avec une composante locale de χ, mais c'est sans ambiguïté).

2.6. Poids de Hodge. Dans ce paragraphe, p est un nombre premier fixé, μ_{p^n} désigne le $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-module des racines p^n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note ω le caractère cyclotomique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(\lim_{n\leftarrow\infty} \mu_{p^n}) = \mathbb{Z}_p^*$. On note $\mathbb{Q}_p(1)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le caractère cyclotomique. Notre convention est que cette représentation est de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate -1 (cf. [**98**]). Si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Q}_p(n) := \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes n}$, et si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, $V(n) := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(n)$.

Si F est un corps local et V un F-espace vectoriel de dimension finie qui est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, nous noterons $D_{cris}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ (cf. [**42**] §2.3, 3.1). Il hérite de B_{cris} d'un endomorphisme K-linéaire φ, le Frobenius cristallin, et lorsque nous parlerons des valeurs propres de ce dernier, ce sera toujours vu comme K-endomorphisme. On rappelle que V est dite cristalline sur $\dim_K D_{cris}(V) = \dim_K(V)$ (cf. [**43**] 5.4). On parlera parfois, par abus, du Frobenius cristallin de V pour celui de $D_{cris}(V)$.

2.7. Géométrie rigide. Si X/F est un affinoide sur un corps local F, on notera $A(X)$ la F-algèbre affinoide de X. Si X est réduit, la norme sup. sur X fait de $A(X)$ une F-algèbre de Banach commutative. On notera $A(X)^0$ les éléments de $A(X)$ de norme ≤ 1. $\mathbb{A}^n$ désigne l'espace affine rigide analytique de dimension n sur $\mathbb{Q}_p$.

3. Rappel sur la classification de Rogawski

3.1. Les groupes unitaires considérés. Soit f la forme hermitienne sur E^3 de matrice

$$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

Comme Rogawski ([**82**] p. 66,67), on note $\mathrm{U}(2,1)$ le groupe unitaire sur $\mathbb{Z}$ défini par cette forme, il est quasi-déployé. On fixe $\mathrm{U}(3)$ une forme intérieure de $\mathrm{U}(2,1)$ compacte à l'infini, inchangée aux places finies ([**27**, lemme 2.1]).

3.2. Classification de Rogawski.

3.2.1. Suivant Rogawski, et comme prédit par les conjectures d'Arthur, les représentations automorphes discrètes des groupes $\mathrm{U}(2,1)$ et $\mathrm{U}(3)$ sont regroupées en A-paquets de 5 types ([**82**, 2.9]). Chaque A-paquet Π possède un changement de base π_E qui est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(3)/E$ ([**82**, 2.8]).

3.2.2. Étant donné un nombre premier l et un isomorphisme de corps $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, on peut associer, grâce aux travaux de Rogawski, à un A-paquet Π de $\mathrm{U}(3)$ (resp. de $\mathrm{U}(2,1)$ s'il est cohomologique à l'infini) une représentation l-adique continue, semi-simple, découpée dans la cohomologie l-adique des surfaces de Picard :

$$\rho_l(\Pi) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_l),$$

caractérisée par la propriété suivante, pour toute place finie w de E :

(20) Si w ne divise pas $l\mathrm{disc}(E)$ et si $(\pi_E)_w$ est non ramifiée, $\rho_l(\Pi)_{|D_w} \simeq L_l((\pi_E)_w)$

Autrement dit ρ_l est non ramifiée en w, et le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique Frob_w est égal à celui de la matrice de Hecke de $(\pi_E)_w$. En conséquence, $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$. Lorsque Π est sous-entendu, on notera ρ_l pour $\rho_l(\Pi)$. Bien que le choix de ι_l n'est pas apparent dans la notation ρ_l, il sera toujours sous-entendu.

3.2.3. Nous nommons et décrivons ci-dessous les 5 types de A-paquets, ainsi que les propriétés des représentations galoisiennes associées quand elles existent. Quand le A-paramètre a et le L-paramètre ϕ du changement de base π_E du paquet considéré ont un sens non conjectural (i.e. se factorise par le quotient $W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ du groupe conjectural $L_E \times SL_2(\mathbb{C})$), nous les donnons.

L'existence de ρ_l satisfaisant 20 résulte, dans les cas non triviaux, du théorème 1.9.1 de [**8**] (voir aussi [**82**] §4.4), mais le lecteur prendra garde que la définition de ρ_l que nous prenons (motivée par la vérification de 20 §3.2.2) ne coïncide pas avec la représentation appelée ρ_l *loc. cit.*, que nous noterons $\rho_{l,rog}$ ci-dessous (qui d'ailleurs n'est pas toujours de dimension 3).

- Cas stable tempéré ; l'existence de ρ_l résulte de [**8**, théorème 1.9.1 (a)]. Notre ρ_l est $\rho_{l,rog}(1)$ avec les notations de *loc. cit.* La représentation ρ_l est irréductible[7] et satisfait $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(2,1)$; l'existence de ρ_l résulte de [**8**, théorème 1.9.1 (b)] (on définit ρ_l comme $\rho_{l,rog}(1) \otimes \chi_l^{-1} \oplus \chi_l(1)$ avec les notations de *loc. cit.*).
  On a $\rho_l \simeq \tau_l \oplus \chi_l$, avec τ_l irréductible de dimension 2, $\tau_l \simeq \tau_l^\perp$, $\chi_l = \chi_l^\perp$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(1,1,1)$; le A-paramètre a est trivial sur facteur $SL_2(\mathbb{C})$, et l'on a
$$a_{|L_E} = \phi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3,$$

[7]Nous ne nous servirons pas de ce fait. Voir la remarque suivant la proposition 9.1

$\psi_i : W_E \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $\psi_i = \psi_i^\perp$. Les A-paquets de ce type sont cohomologiques quand les caractères de Hecke ψ_i sont algébriques, on définit ρ_l par $(\psi_1)_l \oplus (\psi_2)_l \oplus (\psi_3)_l$.

– Cas endoscopique non tempéré ; le A-paramètre a vérifie

$$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix}$$

où χ et ψ sont des caractères de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$, $\psi = \psi^\perp$, et

$$a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Nous noterons le A-paquets correspondant $\Pi(\chi, \psi)$. Le L-paramètre ϕ vérifie donc

$$\forall w \in W_E,\ \phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|w|^{1/2} & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w)|w|^{-1/2} \end{pmatrix},$$

et l'on pose, si $\chi|\ |^{1/2}$ et ψ sont algébriques, auquel cas ϕ est cohomologique à l'infini

$$\rho_l = (\chi|\ |^{1/2})_l \oplus \psi_l \oplus (\chi|\ |^{-1/2})_l.$$

Nous analyserons les A-paquets de ce type de manière beaucoup plus détaillée dans la section suivante.

– Cas stable non tempéré ; le A-paramètre a vérifie

$$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix},$$

où χ est un caractère de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$ et $a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ est la représentation irréductible de dimension 3. On a donc pour L-paramètre

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|.|^{-1} & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w)|.| \end{pmatrix},$$

où $\chi \simeq \chi^\perp$. Les A-paquets correspondants sont des singletons, composés des représentations automorphes de dimension 1.

3.3. Propriétés de ρ_l. On conjecture naturellement que la construction $\Pi \mapsto \rho_l$ est compatible avec la correspondance de Langlands locale. Plus précisément, on s'attend à ce que l'énoncé suivant soit vérifié :

(COMP) *Si Π est un A-paquet, de changement de base π_E, alors pour tout l, et pour toute place finie v de E ne divisant pas l, la Frobenius-semi-simplifié de la représentation galoisienne $(\rho_l)_{|D_v}$ est isomorphe à $L_l((\pi_E)_v)$.*

Il est vrai pour les places finies v ne divisant pas disc(E) et où le A-paquet local Π_v est non ramifié (c'est la propriété (20), §3.2.2). De plus, les travaux de Harris-Taylor [**51**, théorème C] montrent qu'il est vrai à pour tout v si π_E est de carré intégrable à au moins une place finie[8]. Malheureusement cette hypothèse ne sera jamais vérifiée dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous allons démontrer dans ce qui suit les cas particuliers de (COMP) dont nous aurons besoin. La propriété suivante est une extension de la propriété (20) aux places divisant disc(E). Il sera utile de nous placer dans un contexte un peu plus général : soit F un corps totalement réel, $\mathrm{U}(3)/F$ le groupe unitaire à trois variables associé à l'extension EF/F, compact à toutes les places à l'infini. Pour Π un A-paquet de $\mathrm{U}(3)/F$, les travaux de Rogawski définissent encore, tout comme dans le cas $F = \mathbb{Q}$, un changement de base π_{EF} à $\mathrm{GL}(3)/EF$, et des représentations galoisiennes ρ_l de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/EF)$, vérifiant l'analogue de (20) §3.2.2.

Proposition 3.1. *Si Π est un A-paquet de $U(3)_F$, de changement de base π_{EF}, alors pour tout l, et pour toute place finie v de EF ne divisant pas l où π_{EF} est non ramifiée, $\rho_l|D_v$ est non ramifiée.*

Preuve : Soit v une place finie de EF ne divisant pas l et telle que $(\pi_{EF})_v$ est non ramifiée, on veut montrer que ρ_l est non ramifiée en v. On note w la place de F que divise v. Montrons d'abord le résultat si w ne divise pas le discriminant relatif de EF/F.

Soit G'_F une forme intérieure de $\mathrm{U}(3)_F$ quasi-déployée à toutes les places finies de F et à une seule place infinie. Par [**82**, théorème 2.6.1], le A-paquet Π se transfère en un A-paquet Π' cohomologique du groupe G'_F. Le groupe G'_F satisfait les hypothèses de [**82**] §4, et d'après *loc.cit.* §4.4, $\rho_l(-1)$ est construite dans la cohomologie à coefficients de la variété de Shimura associée à G'_F. Comme $(EF)_v/F_w$ est non ramifiée, ainsi que $\Pi'_w = \Pi_w$, le choix d'un membre non ramifié en w du A-paquet Π' assure que $\rho_l(-1)$ est construite dans la cohomologie à coefficients d'une surface de Picard de niveau fini hyperspécial en w. Or cette variété de Shimura a bonne réduction en v : cela résulte d'un simple calcul de déformation du problème de modules dont cette variété de Shimura est l'espace de module, comme celui fait en [**3**, proposition II.2.1.5]. Cela conclut.

Nous n'allons traiter en détail le cas restant que quand Π est stable, les cas endoscopiques se ramenant à des cas stables[9] pour le groupe $U(2) \times U(1)$ par la classification de Rogawski du §3.2. On suppose donc Π stable. D'après [**85**, théorème 13.3.3(b)], soit π_{EF} est cuspidale, soit Π est le A-paquet d'une représentation de dimension 1. Dans ce dernier cas, la proposition découle de la théorie du corps de classes, on supposera donc que π_{EF} est cuspidale dans ce qui suit.

[8]Plus exactement, qu'il est vrai à semi-simplification de l'opérateur de monodromie près.

[9]Strictement, il aurait fallut aussi traiter en parallèle, dans le second paragraphe de la preuve de la proposition, le cas du groupe $U(2) \times U(1)$, mais qui n'est que plus facile. De manière générale, nous ne traiterons en détails dans cette section que le cas stable tempéré, car c'est le seul dont nous ayons réellement besoin dans les applications au §9. Par exemple, utilisant la proposition 9.1, il est aisé de vérifier que les ρ_z, $z \in Z$, de la proposition 8.3 ii) sont attachées à des représentations automorphes de $U(3)$ qui sont stables tempérées.

Supposons que v divise le discriminant de EF/F, en particulier v divise un premier $p \in \mathbb{Z}$ ramifié dans E, $p \neq l$. Soit F' un corps quadratique réel ramifié en p et tel que EF'/F' est décomposé en l'unique place de F' au-dessus de p. Il est aisé de voir qu'un tel corps existe toujours. Par exemple si $p \neq 2$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{pD})$ avec $-D \in \mathbb{N}$ sans facteur carré, alors il existe $D' \in \mathbb{N}$ premier à p et sans facteur carré tel que DD' est un carré modulo p, $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{pD'})$ convient. Alors EF ne contient pas F', FF' est totalement réel et ramifié au dessus de w, en une place que l'on note w', et EFF'/FF' est alors décomposé au dessus de w'.

Notons $\pi_{EFF'}$ le changement de base d'Arthur-Clozel ([**1**], théorème III.4.2) de π_{EF} à EFF'. La représentation $\pi_{EFF'}$ est cuspidale par le théorème 4.2 (a) *loc.cit.*, car EFF'/EF est quadratique et $n = 3$. De plus, $\pi_{EFF'}$ est anti-autoduale car c'est déjà le cas de π_{EF}, et par multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de $\mathrm{GL}(3)_{EFF'}$. D'après Rogawski [**85**, théorème 13.3.(a)], $\pi_{EFF'}$ descend en un A-paquet stable $\Pi_{FF'}$ du groupe unitaire à trois variables quasi-déployé $\mathrm{U}(2,1)_{FF'}$ sur FF', et même à $\mathrm{U}(3)_{FF'}$ par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur-Clozel ([**1**] théorème III.5.1) et [**81**] théorème 2.6.1. Mais s'il on suit les constructions précédentes, un groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EF)$ s'identifie à un groupe de décomposition en w' de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EFF')$, et $\pi_{EFF'}$ est toujours non ramifiée en w'. On applique alors le premier paragraphe à FF' et $\Pi_{FF'}$, ce qui conclut. $\square$

PROPOSITION 3.2. *Soit Π un A-paquet de $U(3)$, l un nombre premier, v une place finie de E ne divisant pas l, telle que $L((\pi_E)_v) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3$, où les ϕ_i sont des caractères continus $E_v^* \to \mathbb{C}^*$. Soit $I' := \mathrm{rec}_v(Ker((\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3)_{|\mathcal{O}_{E_v}^*}))$, alors $\rho_l(I') = 1$.*

Preuve : Nous n'allons traiter en détail que le cas où Π est stable, les cas endoscopiques se traitant de manière analogue en se ramenant à des cas stables pour le groupe $U(2) \times U(1)$ par la classification de Rogawski du §3.2. D'après [**85**, théorème 13.3.3(b)], soit π_E est cuspidale, soit Π est le A-paquet d'une représentation de dimension 1. Dans ce dernier cas, la proposition découle de la théorie du corps de classes, on supposera donc que π_E est cuspidale dans ce qui suit.

Nous allons appliquer le changement de base d'Arthur-Clozel à π_E. On rappelle, d'après [**1**, théorème III.4.2 (a)], que si k'/k est une extension cyclique de degré premier et π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n)/k$, alors π admet un changement de base faible à $\mathrm{GL}(n)/k'$, qui est cuspidale si π n'est pas isomorphe à $\pi \otimes \chi$, χ étant un caractère non trivial de $\mathbb{A}_k^*/k^*$ attaché à k'/k. Notons que dans notre cas ($n = 3$), cette dernière condition est donc automatiquement satisfaite si $[k' : k] \neq 3$, ou encore si k'/k est ramifié en une place où π ne l'est pas.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier au dessous de v, considérons l'extension abélienne finie de E_v définie par

$$M := \overline{E_v}^{\mathrm{rec}_{E_v}(\mathrm{Ker}(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3))}$$

Supposons que l'on sache trouver un corps de nombres $F/\mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :

i. F est totalement réel,

ii. Il existe une tour d'extensions $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_r = F$, telle que F_{i+1}/F_i soit cyclique d'ordre premier et telle que le changement de base de π_{EF_i} à EF_{i+1}, noté $\pi_{EF_{i+1}}$, soit cuspidal.

iii EF admet une place w divisant v telle que $(EF)_w/E_v$ soit isomorphe à M/E_v.

En particulier, on dispose d'un changement de base cuspidale π_{EF} de π_E à EF, qui est en fait fort, *i.e.* compatible au changement de base local en toutes les places, d'après [**1**, théorème III.5.1]. Appliquant ceci à l'extension $(EF)_w/E_v$, l'hypothèse iii. assure que $(\pi_{EF})_w$ est non ramifiée. La représentation π_E étant anti-autoduale, le théorème de multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de $\mathrm{GL}(3)_{EF}$ entraîne qu'il en va de même pour π_{EF}. D'après [**85**, théorème 13.3.3 (a)], π_{EF} descend donc en un A-paquet (stable) du groupe $\mathrm{U}(2,1)_F$, puis à $U(3)_F$ par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur-Clozel. La proposition 3.1 appliquée à ce paquet conclut.

Il reste à trouver un corps de nombres F comme plus haut. Fixons $F_1/\mathbb{Q}$ un corps quadratique réel ayant une place v' divisant p tel que $(F_1)_{v'} \simeq E_v$. L'extension EF_1/E étant quadratique, une remarque faite plus haut assure que π_{EF_1} est cuspidal. Considérons une tour $G_1 = (F_1)_{v'} = E_v \subset G_2 \subset ... \subset G_r = M$ avec des G_{i+1}/G_i cycliques d'ordre premier noté q_i. Nous allons construire les F_i satisfaisant ii. récursivement tels que F_{i+1} admette une place w_{i+1} divisant w_i, $(F_i)_{w_i} \simeq G_i$, et $w_1 = v'$. Supposons un tel F_i construit. Fixons une place finie u de EF_i telle que $(\pi_{EF_i})_u$ est non ramifiée, que u ne divise pas $\mathrm{disc}(E)$, et telle que $(F_i)_u$ admette une extension ramifiée (par exemple modérément) de degré q_i. Appliquons Artin-Tate [**2**, théorème 5, page 103] à F_i et l'ensemble fini de places S composé de w_i, u et des places infinies. On en déduit l'existence d'une extension abélienne k/F_i, finie de degré q_i ou $2q_i$, totalement réelle, ayant une place w' (resp. u') divisant w_i (resp. u) telle que $k_{w'}/(F_i)_{w_i} \simeq G_{i+1}/G_i$ (resp. $k_{u'}/(F_i)_u$ est ramifiée de degré q_i). Si q_i est impair, il est clair que l'on peut supposer que $[k : F_i] = q_i$. Dans ce cas, $F_{i+1} := k$ et $w_{i+1} := w'$ conviennent car EF_{i+1}/EF_i est ramifié en une place où π_{EF_i} ne l'est pas. Si $q_i = 2$, alors prend pour F_{i+1}/F_i une sous-extension quadratique de k/F_i telle que $(F_{i+1})_{w'} = G_{i+1}$, $w_{i+1} := w'_{|F_{i+1}}$. Comme EF_{i+1}/EF_i est quadratique, F_{i+1} satisfait aussi ii. □

PROPOSITION 3.3. *Soit l un nombre premier décomposé dans E, ι_l comme plus haut, Π un A-paquet pour $U(3)$ de changement de base π_E, v une place de E divisant l telle que $(\pi_E)_v$ est non ramifiée, alors :*

1. *$(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est cristalline en v.*
2. *Le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est l'image par ι_l de celui de $L((\pi_E)_v)(\mathrm{Frob}_v)$, Frob_v étant un Frobenius géométrique de W_{E_v},*
3. *Si le L-paramètre de Π_∞ a sa restriction à $W_\mathbb{C} = \mathbb{C}^*$ de la forme $(z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}$ avec $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$, $a_1 > a_2 > a_3$, alors les poids de Hodge-Tate de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ sont les $-a_i$ si v est la place de E induite par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$, les a_i sinon.*

Preuve : La proposition est immédiate si le L-paramètre de Π est somme de trois caractères, il ne reste donc qu'à traiter les cas où Π est stable tempéré ou endoscopique tempéré de type $(2,1)$ (cf. §3.2). Nous nous placerons par exemple dans le premier cas, le second se traitant de manière identique.

Soit F un corps quadratique réel. Un argument déjà donné dans la preuve de la proposition 3.1 montre que le changement de base d'Arthur-Clozel de π_E à EF est une représentation automorphe cuspidale qui descend en un A-paquet stable Π_F de $\mathrm{U}(3)_F$. D'après [**82**, théorème 2.6.1], ce paquet se transfère en un A-paquet Π'_F cohomologique stable du groupe G'/F suivant : G'/F est une forme intérieure du groupe quasi-déployé sur $\mathrm{U}(2,1)/F$, non quasi-déployé uniquement à l'une des deux places infinies. Notons que les variétés de Shimura attachées à G'/F [10], les *surfaces de Picard*, ont des modèles canoniques qui sont des variétés quasi-projectives lisses sur EF (cf. [**47**] §6), et même projectives car G'/F est anisotrope. On fixe un élément $\pi \in \Pi'_F$, ainsi qu'un ouvert compact net $U \subset G'(\mathbb{A}_{F,f})$ tel que $\pi^U \neq \{0\}$. D'après [**82**] §4.3, §4.4 ("Case 2" dans le cas stable tempéré), la représentation

$$\rho'_l := \rho_l(\pi)(-1)_{|\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)},$$

apparaît dans la cohomologie l-adique en degré 2 d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse, noté $\mathcal{F}$ *loc.cit*[11], sur la surface de Picard de niveau fini U, que l'on note X_U/EF. Afin de construire un motif de Grothendieck dont ρ'_l est une réalisation l-adique, il nous faut tout d'abord nous débarrasser du coefficient $\mathcal{F}$. Comme il est coutume, nous réalisons ce motif dans la cohomologie l-adique à coefficient constant d'une variété de Kuga sur X_U. Soit $\mathcal{A} \to X_U$ le schéma abélien universel sur X_U, on note $\mathcal{A}^m$ le produit fibré m-fois de $\mathcal{A}$ au dessus de X_U ; $\mathcal{A}^m$ est en particulier propre et lisse sur EF. Le $\overline{\mathbb{Q}}_l[\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)]$-module $H^2_{et}(X_U \times \overline{EF}, \mathcal{F})$ est alors un facteur direct découpé par une correspondance algébrique idempotente de

$$H^{2+m_{\mathcal{F}}}_{et}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}} \times \overline{EF}, \overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}}),$$

pour des entiers $m_{\mathcal{F}}$ et $t_{\mathcal{F}}$ bien choisis. Ceci est expliqué en détail dans [**51**, chap. III.2 p.98]. Notons pour finir que d'après [**82**]§4.3 (fin du paragraphe), la multiplicité 1 dans le spectre discret de G' assure même que l'on peut découper exactement ρ'_l par des correspondances de Hecke, plutôt que simplement un de ses multiples.

On supposera par la suite que $l = uu'$ est décomposé dans F, et on note $v \times u$ le plongement $EF \to \mathbb{Q}_l$ déduit de v et u. Ces données nous permettent en particulier de fixer un isomorphisme $G'(F_u) \to \mathrm{GL}(3)(\mathbb{Q}_l)$, d'identifier Π_l avec $(\Pi'_F)_u$, et D_v au groupe de décomposition en $v \times u$ de $\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)$. Par hypothèse de l'énoncé, $(\Pi'_F)_u$ est non ramifié et on peut donc choisir un compact ouvert net U égal à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)$ en u, ainsi que $\pi \in \Pi'_F$ tel que $\pi^U \neq \{0\}$. Dans ce cas, $\mathcal{A}_U \to X_U$ a un modèle propre et lisse sur $\mathcal{O}_{(EF)_{v\times u}}$ (cf. par exemple [**67**] §5), ainsi donc que $\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}}$. L'assertion 1 découle de ce que la cohomologie l-adique à coefficient dans $\mathbb{Q}_l$ d'un schéma propre et lisse sur $\mathbb{Z}_l$ est cristalline (cf. [**43**] théorème 6.1.4, [**41**]).

[10] Plus précisément, celles attachées au groupe de similitudes unitaires contenant G'/F ([**47**]§6), cf. [**82**] §2.5 pour le lien entre A-paquets de G' et du groupe de similitudes.

[11] Il ne dépend que de Π_∞, sa construction est par exemple expliquée en détail dans [**51**] chapitre III.2

La propriété 2 découle de manière standard de la construction motivique de ρ'_l explicitée ci-dessus et d'un théorème de Katz-Messing ([**62**, théorème 2.2]), combinés à (20) §3.2.2 et [**101**, corollaire 2.2]. Prouvons la propriété 3. La construction motivique ci-dessus et le théorème de comparaison *DeRham-étale* de Faltings (cf. [**41**][12], [**43**, §6.1]) appliqué à $H^{2+m_{\mathcal{F}}}_{et}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}}\times\overline{EF},\overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}})$, entraînent que les poids de Hodge-Tate de $(\rho'_l)_{|D_v}$ sont les poids de Hodge de la réalisation de De Rham de ρ'_l associée au plongement complexe $\iota_l^{-1}(v\times u)$. L'identification de ces derniers en terme des a_i est une conséquence de [**51**] proposition III.2.1 (6), la preuve étant détaillée *loc.cit.* dans les pages 99 à 104. Précisons que les arguments du §III.2 *loc.cit.* sont aussi valables pour notre groupe unitaire G'/F (qui ne diffère des leurs qu'en des places finies), à l'unique "modification" près suivante. La référence à Kottwitz en bas de la page 103 (au sujet de la formule de Matsushima) peut être remplacée par un appel à Rogawski [**82**] §4.3 page 89. □

4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke

4.1. Hypothèses sur le caractère de Hecke. Soit χ_0 un caractère de Hecke de E, vérifiant

$$\chi_0(z\bar{z})=1,\ \forall z\in\mathbb{A}_E^*,\qquad \text{et}\qquad \chi_{0,\infty}(z_\infty)=z_\infty^k/|z_\infty|_{\mathbb{C}}^{k/2},\ k \text{ est un entier impair positif}$$

Par la première hypothèse, sa fonction L complète $L(\chi_0,s)$ a pour équation fonctionnelle ([**104**] 3.6.8 et 3.6.1)

$$L(\chi_0,1-s)=\varepsilon(\chi_0,s)L(\chi_0,s),\ \ \varepsilon(\chi_0,1/2)=\pm 1$$

On utilisera de plus le caractère algébrique $\chi:=\chi_0|.|^{1/2}$, dont on note χ_v la composante locale en une place v de E. On a $\chi^\perp=\chi|.|^{-1}$, et si ∞ désigne $E\subset\mathbb{C}$, $\chi_\infty(z)=z^{(k+1)/2}\bar{z}^{(1-k)/2}$. On notera $\mathrm{cond}(\chi_0)$ le conducteur de χ_0, qui est aussi celui de χ, et $\mathrm{disc}(E)$ le discriminant de E.

Dans les sous-parties qui suivent, nous décrivons, suivant Rogawski, les composantes locales du A-paquet endoscopique non tempéré $\Pi(\chi,1)$.

4.2. Composantes locales en p décomposé.

4.2.1. Soit $p=v_1v_2$ un nombre premier décomposé dans E, la donnée des v_i nous fournit un isomorphisme $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{GL}_3(E_{v_i})=\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Il faut noter que ces deux isomorphismes diffèrent d'un automorphisme extérieur de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Fixons celui avec v_1 par exemple.

4.2.2. Soit $P=MN$ le parabolique standard de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)=\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de type $(2,1)$, considérons le caractère complexe lisse λ_p de $M=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ défini par $\lambda_p(x,y)=\chi_{0,v_1}(\det(x))$. L'induite parabolique normalisée de λ_p est irréductible ([**83**] p.196), on la note $\pi_p^n(\chi_0)$.

[12]Ainsi qu'il est discuté dans [**43**] §6.1, il y a un *point obscur* dans la preuve de C_{dR}. Nous n'utilisons ici les résultats de *loc.cit.* que dans le cas de la cohomologie l-adique à coefficient constant d'un schéma propre et lisse sur $\mathbb{Z}_l$, pour lequel l'objection ne s'applique pas.

4.2.3. Si χ est non ramifié en p (décomposé), $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée, et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal. On en choisit un, noté K_p, égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ pour p assez grand ([**107**, 3.9.1]).

4.3. Composantes locales en p inerte ou ramifié.

4.3.1. Suivant Rogawski ([**83**] p. 396), définissons pour p un nombre premier inerte ou ramifié dans F, une représentation lisse irréductible $\pi_p^n(\chi_0)$ de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ de la manière suivante :

On voit $\chi_{0,p}$ comme caractère du tore diagonal de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_{0,p}(\alpha)$$

L'induite parabolique normalisée de $\chi_{0,p}$ a deux facteurs de Jordan-Hölder, dont l'un est non tempéré, qu'on note $\pi_p^n(\chi_0)$ (ou bien $\pi^n(\chi_{0,p})$), l'autre de carré intégrable $\pi_p^s(\chi_0)$ (ou bien $\pi^s(\chi_{0,p})$). ([**85**] p. 173, [**63**] p. 126)

4.3.2. Si p est inerte et χ non ramifié en p, $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal hyperspécial. Là encore, on en choisit un K_p, que l'on prend égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ quand on le peut (pour presque tout p, cf. [**107**, 3.9.1]).

4.3.3. Si p est ramifié, le groupe $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe unitaire ramifié. Il a deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux, mais aucune d'entre elles n'est hyperspéciale. D'après [**26**, prop. 2.4.7], l'une de ces deux classes, dont on fixe un représentant K_p, est telle que pour tout caractère non ramifié η du tore diagonale (*i.e.* trivial sur le compact maximal de ce tore), la représentation $\pi_p^n(\eta)$ définie en 4.3.1 admet un vecteur non nul fixé par K_p, mais n'admet pas de vecteur non nul fixé par l'autre classe de conjugaison[13]. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4.1. *Soit π une représentation automorphe irréductible de $U(3)$ telle que $\pi_p^{K_p} \neq 0$. Alors le changement de base π_E de π est non ramifié en la place de E au-dessus de p.*

Preuve : Comme π_p a un vecteur invariant non nul par K_p, elle a un vecteur invariant non nul par un sous-groupe d'Iwahori. D'après [**25**, prop 2.6], c'est donc une sous-représentation d'une induite parabolique normalisée $I(\eta)$, pour un certain caractère non ramifié η du tore diagonal de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ (*i.e.* trivial sur le compact maximal de ce tore). Rappelons, suivant [**63**, page 126] et [**26**, th. 2,4.6 et prop. 2.4.7], la structure de ces induites $I(\eta)$. Quand elles ne sont pas irréductibles, les représentations $I(\eta)$ sont de longueur 2, et ont comme facteurs de Jordan-Hölder soit la représentation triviale et la Steinberg, soit deux représentations que l'on note (comme dans [**63**], [**85**]) $\pi^n(\eta)$ et $\pi^s(\eta)$. De plus, d'après [**26**, prop. 2.4.7], $\pi^n(\eta)$ a un vecteur invariant non nul par K_p, et $\pi^s(\eta)$ n'en a pas. Enfin, la représentation de Steinberg n'a pas de vecteur non nul invariant par un compact maximal.

[13] On peut voir, à l'aide de [**68**, prop 3.6.2] que K_p est *très spécial*, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

Soit v la place de E au-dessus de p. Le changement de base π_E de l'unique A-paquet global Π auquel π appartient est (par définition, cf. [**85**, page 201], juste avant le théorème 13.3.3) tel que $(\pi_E)_v$ est le changement de base local (défini [**85**, page 200]) du A-paquet local Π_p, composante en p de Π. Le paragraphe précédent assure que π_p est soit la triviale, soit une induite irréductible d'un caractère non ramifié, soit de la forme $\pi^n(\eta)$. Le changement de base $(\pi_E)_v$ de Π_p est donc non ramifié par définition sauf peut-être si Π_p est le A-paquet $\Pi_p = \{\pi^n(\eta), \pi^s(\eta)\}$, avec $\pi_p = \pi^n(\eta)$. Mais dans ce cas, $(\pi_E)_v$ est non ramifié par [**85**, prop. 13.2.2(d)]. □

REMARQUE 4.1. *Le même lemme serait faux si K_p était remplacé par un sous-groupe compact maximal de l'autre classe de conjugaison. En effet, on pourrait avoir alors $\pi_p = \pi^s(\eta)$, et la représentation $\pi^s(\eta)$ appartient à deux A-paquets locaux (cf.* [**85**, page 199]*) : le A-paquet $\{\pi^s(\eta), \pi^n(\eta)\}$ dont le changement de base est bien non ramifié, et un autre A-paquet, dont le changement de base* est ramifié.

4.4. Composantes locales à l'infini. Tout L-paramètre "relevant" de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ a sa restriction à $W_\mathbb{C} = \mathbb{C}^*$ de la forme :

$$z \mapsto (z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}, \quad a_1 > a_2 > a_3 \in \mathbb{Z}^3$$

Si $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \in \mathbb{Z}^3$, On note $\pi_{1,\infty}(k_1, k_2, k_3)$ la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ sur $V_{k_1,k_2,k_3}(\mathbb{C})$ (2), déduite de l'inclusion $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R}) \subset \mathrm{U}(3)(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ donnée par $E \subset \mathbb{C}$. Son L-paramètre a pour changement de base à $\mathbb{C}^*$ le morphisme plus haut avec $(a_1, a_2, a_3) := (k_1 + 1, k_2, k_3 - 1)$ ([**82**] §3.1).

4.5. Existence de $\pi(\chi_0)$.

PROPOSITION 4.1. *Supposons que $k > 1$, et que $\varepsilon(\chi_0, 1/2) = -1$, alors il existe une unique représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de $U(3)$ dont le changement de base à E a pour L-paramètre le morphisme $W_E \to GL_3(\mathbb{C})$ défini par*

$$\begin{pmatrix} \chi_0|.|^{-1/2} & & \\ & 1 & \\ & & \chi_0|.|^{1/2} \end{pmatrix}$$

et telle que
- *Pour toute place $v, \pi(\chi_0)_v = \pi_v^n(\chi_0)$,*
- *$\pi(\chi_0)_\infty = \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.*

Preuve : D'après [**83**], page 397, le A-paquet $\Pi(\chi, 1)$ existe pour $\mathrm{U}(3)$, car $k > 1$. D'après [**83**], page 395 et 396, les A-paquets locaux correspondants sont les singletons $\{\pi_p^n(\chi_0)\}$ quand p est décomposé (cf. 4.2.2) et des paires $\{\pi_p^n(\chi_0), \pi_p^s(\chi_0)\}$ quand p est inerte ou ramifié (où π_p^n a été définie en 4.3.1). Enfin, d'après [**83**] page 397, le A-paquet local à l'infini est un singleton $\{\pi(\chi_0)_\infty\}$ avec $\pi(\chi_0)_\infty := \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.

Considérons la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$:

$$\pi(\chi_0) = (\bigotimes_{p \text{ premier}} \pi_p^n(\chi_0)) \otimes \pi(\chi_0)_\infty.$$

D'après [**83**], théorème 1.2, la multiplicité de π dans le spectre automorphe de U(3) est $(1+\varepsilon(\chi_0, 1/2)(-1)^N)/2$, où N, défini dans [**85**] page 243, est le nombre de places à l'infini de $\mathbb{Q}$ où U(3) est compact ; on a donc $N = 1$, et la multiplicité de $\pi(\chi_0)$ est donc 1. □

4.6. Types.

PROPOSITION 4.2. *Pour p un nombre premier divisant disc(χ_0), il existe un groupe $K_J = K_J(p)$ de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$, et une représentation irréductible $J = J(p)$ de K_J tels que*
- *$Hom_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det)) \neq 0$.*
- *Pour toute représentation lisse irréductible π de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant $Hom_{K_J}(J, \pi) \neq 0$, pour toute place v de E au-dessus de p, notant π_{E_v} le changement de base de π à E_v, il existe trois caractères lisses non ramifiés ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3 : {E_v}^* \to \mathbb{C}^*$, tels que*
$$L(\pi_{E,v}) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3 \chi_0^{-1}.$$
En particulier, si $l \neq p$, $I' := \ker(\chi_l)_{|I_v}$, et si π est la composante en p d'une représentation automorphe irréductible π' de $U(3)$, alors $\rho_l(\pi')(I') = 1$.

Preuve : Supposons d'abord que $p = v_1 v_2$ est décomposé dans E. On note $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ (l'isomorphisme dépendant de la place v_1, comme en 4.2.1), P le parabolique standard de type $(2, 1)$, $M = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ son Levi (comme en 4.2.2), N son radical unipotent, $\chi_0 = \chi_{0,v_1}$ et m la p-valuation du conducteur de χ_0.

Notons K_J le sous-groupe de G des matrices dont la réduction modulo p^m est de la forme
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$
et notons J le caractère complexe lisse de ce groupe qui à une matrice comme ci-dessus associe $\chi_0(y)^{-1}$.

Par définition (cf. 4.2.2 pour la définition de λ_p), $\pi_p^n(\chi_0) \otimes \chi_0^{-1} \circ \det$ est la représentation de G sur l'espace
$$V := \{f : G \to \mathbb{C},\ f \text{ lisse},\ \forall b \in P, \forall g \in G,\quad f(bg) = \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))f(g)\}$$
donnée par $(g.f)(x) = f(xg)$. Définissons $f : G \to \mathbb{C}$ par
$$\begin{aligned} f(bk) &= \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))\chi_0(k) \quad \forall b \in P,\ k \in K_J, \\ f(g) &= 0 \quad \forall g \in G \backslash PK_J \end{aligned}$$
On vérifie aisément que f est bien définie, et qu'elle définit un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det))$.

Inversement, soit π une représentation lisse irréductible de G, et supposons que
$$\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0.$$

Notons $B_J \subset K_J$ l'ensemble des matrices de K_J qui sont triangulaires supérieures modulo p. On a alors $B_J \cap M = B \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ ou B est le sous-groupe d'Iwahori standard (constitué des matrices triangulaires supérieures modulo p) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La restriction de J à $B_J \cap M$ étant simplement le caractère χ_0^{-1} sur le second facteur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$, le couple $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$ est un $\mathfrak{s}_M$-type de B_J, où $\mathfrak{s}_M \in \mathcal{B}(M)$ (le spectre de Bernstein de M, cf. [**17**, page 772]) est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}), T désigne le tore maximal standard de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et χ_0^{-1} le caractère de T envoyant $\mathrm{diag}(x, y, z)$ sur $\chi_0^{-1}(z)$.

Il résulte immédiatement de la définition de *recouvrement (cover)* ([**18**, 8.1]) que $(B_J, J_{|B_J})$ est un G-recouvrement de $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$. Le corollaire [**18**, 8.4] (ou bien [**19**, page 55]) assure alors que $(B_J, J_{|B_J})$ est un $\mathfrak{s}$-type pour G, où $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}). Comme π contient (K_J, J), elle contient aussi (B_J, J), est son support cuspidale est donc de la forme $(\phi_1, \phi_2, \chi_0^{-1}\phi_3)$, où les ϕ_i sont des caractères lisses non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^*$. Autrement dit, d'après les propriétés de la correspondance de Langlands locale, $L(\pi)$ a pour semi-simplification $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$. Nous voulons maintenant montrer que $L(\pi)$ est semi-simple. Comme $\chi_0^{-1}\phi_3$ est ramifié, mais pas ϕ_1 et ϕ_2, on peut en tous cas écrire $L(\pi) = r \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$, où $r^{ss} = \chi_1 \oplus \chi_2$, et nous voulons montrer que r est semi-simple.

D'après ce qui précède et les propriétés de L, il existe une représentation lisse irréductible (ρ, W) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de support cuspidal (ϕ_1, ϕ_2) telle que

$$\pi \simeq \mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3 \chi_0^{-1})), \quad L(\rho) = r$$

où $\rho \otimes (\phi_3 \chi_0^{-1})$ désigne la représentation du parabolique standard sur W qui à $(x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M$ associe $\phi_3(y)\chi_0(y)^{-1}\rho(x) \in \mathrm{End}(W)$. L'espace de cette induite est l'ensemble des fonctions $f : G \to W$, lisses, vérifiant $\forall m = (x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M, \forall u \in N, \forall g \in G$,

$$f(mug) = \delta_P^{1/2}(m)\chi_0^{-1}(y)\phi_3(y)\rho(x)f(g). \tag{21}$$

Comme $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$, il existe une fonction non nulle $f : G \to W$ dans l'espace de $\mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3 \chi_0^{-1}))$ qui vérifie

$$(k.f)(g) = f(gk) = f(g)J_K(k) = f(g)\chi_0(k)^{-1}. \tag{22}$$

Choisissons $v = f(g) \in W$ non nul. Combinant les équations 21 et 22, il vient

$$\forall x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \rho(x)v = v.$$

La représentation ρ est donc non ramifiée si bien que $r = L(\rho)$ est semi-simple, et finalement $L(\pi) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3 \chi_0^{-1}$.

Le "en particulier" découle alors de la proposition 3.2

Le cas où p est inerte ou ramifié dans E est plus simple, grâce aux travaux de L.Blasco ([**7**]) : $\pi_p^n(\chi_0)$ appartient à la série principale, et son type défini en [**7**, partie 7, page 181] fait l'affaire. □

5. I-invariants et algèbre d'Atkin-Lehner

5.1. Notations.

5.1.1. Dans toute cette section, p est un nombre premier fixé. T désigne le tore diagonale de $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, B son Borel supérieur, $K := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $W \simeq \mathfrak{S}_n \subset K$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori composé des éléments triangulaires supérieurs modulo p, Δ le sous-groupe de T des éléments à coefficients dans $p^{\mathbb{Z}}$, Δ^+ le sous-monoïde de Δ des éléments de la forme $\mathrm{diag}(p^{a_1}, \cdots, p^{a_n})$ avec $a_1 \leq \cdots \leq a_n \in \mathbb{Z}$. Si X est un groupe topologique localement compact, δ_X désigne le caractère module de X.

5.1.2. Si U est un sous-groupe compact ouvert de G, l'algèbre de Hecke de G relativement à U, $\mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$, est l'algèbre de convolution des fonctions complexes lisses à support compact sur G invariantes à droite et à gauche par U. Si $g \in G$, on note $[UgU] \in \mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$ la fonction caractéristique de de $UgU \subset G$, on prend la convention que $[U]^2 = [U]$. $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$ est l'algèbre de Hecke-Iwahori, on note $\mathcal{A}(p)$[14] son sous-anneau engendré par $\mathbb{Z}$ et les fonctions caractéristiques $[IuI]$, $u \in \Delta^+$. Il est connu (par exemple [**84**] §1) que $\mathcal{A}(p)$ est commutative, et que pour chaque $u, u' \in \Delta^+$, $[IuI]$ est inversible dans $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$, $[IuI][Iu'I] = [Iuu'I]$ et $IuIu'I = Iuu'I$. On pose

$$u_i := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p, \ldots, p) \in \Delta^+, \text{ où } p \text{ apparaît } i \text{ fois}, \ 0 \leq i \leq n$$

5.2. I-invariants des représentations non ramifiées.

5.2.1. Soit $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \to \mathbb{C}^*$ un caractère lisse et non ramifié, $X(\psi)$ la représentation complexe lisse irréductible non ramifiée de G de L-paramètre valant sur le Frobenius géométrique :

$$\begin{pmatrix} \psi_1(p) & & \\ & \cdots & \\ & & \psi_n(p) \end{pmatrix}$$

Voyant ψ comme un caractère complexe lisse de B trivial sur les unipotents supérieurs, on pose

$$\mathrm{Ind}_B(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{ lisses}, f(bg) = \delta_B^{1/2}(b)\psi(b)f(g) \ \forall b \in B\}$$

vue comme représentation lisse de G par translation à droite les fonctions. On sait alors que $X(\psi)$ est l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. Le caractère de l'algèbre de Hecke non-ramifiée de G sur la droite des K-invariants de $X(\psi)$ (ou encore de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$, ce qui est la même chose) est bien connu : si $t_{p,i}$ est la valeur propre de l'opérateur de Hecke $T_{p,i} := [Ku_iK]|\det(u_i)|^{(n-1)/2}$ comme plus haut, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(1 - \psi_i(p)T) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{i(i-1)/2} t_{p,i} T^i$$

[14]C'est cette algèbre que nous appelons *algèbre d'Atkin-Lehner*, reprenant la terminologie de X.Lazarus (thèse, Orsay, 2000). Ses générateurs $[IuI]$, $u \in \Delta^+$, sont la généralisation naturelle à GL_n de l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner dans la théorie classique des formes modulaires.

5.2.2. Nous allons commencer par décrire la représentation de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. On verra les caractères de T par restriction comme des caractères de Δ^+, puis de $\mathcal{A}(p)$. Pour tout caractère $\theta : T \to \mathbb{C}^*$, $\sigma \in W$, on dispose d'un caractère θ^σ défini par $\theta^\sigma(t) = \theta(\sigma^{-1}t\sigma)$; ainsi $(\psi_1, ..., \psi_n)^\sigma = (\psi_{\sigma(1)}, ..., \psi_{\sigma(n)})$.

LEMME 5.1. *(cf. I.4.4) La semi-simplification de $\mathrm{Ind}_B(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma\in W}\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$$

Remarques : Le calcul ci-dessus et la formule pour le polynôme de Hecke de X montrent que si $\sigma \in W$, $\psi^\sigma(U_i)$ (noter la disparition du $\delta_B^{1/2}$) est un produit de i valeurs propres "distinctes" du Frobenius géométrique dans la représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ attachée à X par la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

En particulier, supposons $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ irréductible, dans ce cas $\mathrm{Ind}_B(\psi) = X(\psi)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que $\dim_{\mathbb{C}}(X(\psi)^I) = n!$ et l'action de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de X est calculée par le lemme. Ceci se produit en particulier quand ψ est essentiellement tempérée (i.e $|\psi_i(p)|$ indépendant de i, [**110**] 4.2) mais pas pour la représentation $\pi_p^n(\chi_0)$ introduite en §4.2.2 (p décomposé dans E et ne divisant pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$). Pour traiter ce cas là, nous aurons besoin du résultat général suivant, impliquant par ailleurs le lemme précédent.

5.2.3. Soit $P = MN \subset G$ un parabolique de Levi M, $\psi : M \to \mathbb{C}^*$ un caractère non ramifié, $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ l'induite parabolique lisse normalisée :

$$\mathrm{Ind}_P(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{lisses}, f(pg) = \delta_P^{1/2}(p)\psi(p)f(g)\ \forall p \in B\}$$

Soit $W_P \subset W$ le sous-groupe de Coxeter correspondant à $P \subset G$, pour chaque $\sigma \in W$ on choisit l'unique élément dans $W_P.\sigma$ de longueur minimale ([**59**] prop. 1.10 c)), et on note $W(P)$ l'ensemble des représentants de $W_P\backslash W$ obtenu. On pose $z := \delta_P/\delta_B = \delta_{B\cap M}$.

LEMME 5.2. *La semi-simplification de $\mathrm{Ind}_P(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma\in W(P)}\delta_B^{1/2}(z^{1/2}\psi)^\sigma$$

Remarques : Le lemme montre que l'unique sous-quotient non ramifié de $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est isomorphe à $X(\psi.z^{1/2})$. Si $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est irréductible (voir [**110**] 3.2,4.2), il coïncide donc avec $X(\psi.z^{1/2})$ dans ce cas.

Preuve : On pose $X' = \mathrm{Ind}_P(\psi)^I$, c'est un module sous l'algèbre de Hecke-Iwahori de G, en particulier sous $\mathcal{A}(p)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori $G = \coprod_{\sigma\in W(P)} P\sigma I$ montre que $\dim_{\mathbb{C}}(X') = |W|/|W_P|$. On considère la $\mathbb{C}$-base de X' suivante : si $\sigma \in W(P)$, e_σ est l'élément de X' nul hors de $P\,\sigma\,I$ et tel que $e_\sigma(\sigma) = 1$. $e_\sigma(\sigma') = 0$ ou 1 selon que $\sigma' \in W_P.\sigma$ ou non . Si $\sigma' \in W$, on commence par calculer $[I\sigma' I](e_1)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori, ainsi que la multiplication des cellules, montre que $(I\sigma' I)\cap(\sigma^{-1}PI) = \emptyset$ à moins que $\sigma \in W_P\sigma'^{-1}$. En particulier, $[I\sigma' I](e_1) = a_{\sigma'}e_{\sigma'^{-1}}$ où $a_{\sigma'} \in \mathbb{C}^*$ (car $[I\sigma' I]$ est inversible dans l'algèbre de Hecke-Iwahori).

La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que si $u \in \Delta^+$, $(IuI)\cap\sigma^{-1}PI$ est vide à moins que $\sigma \in W_P$, ce qui implique que e_1 est propre sous l'action de $\mathcal{A}(p)$, de caractère

$[IuI] \mapsto (\delta^{1/2}\psi)(u)|(IuI \cap PI)/I|$. Quand $u_i = u$, on peut calculer $|(IuI \cap PI)/I| = |(I^u \cap PI)/(I^u \cap I)|$, $I^u := u^{-1}Iu$, on vérifie qu'il vaut $z^{1/2}(u)$.

Par les relations de Bernstein ([**84**] §1, §5), on en déduit que si l'on ordonne la base des e_σ, $\sigma \in W(P)$, par ordre croissant avec la longueur de σ, l'action de $\mathcal{A}(p)$ est triangulaire supérieure. Toujours par les relations de Bernstein, on trouve alors les caractères de l'énoncé (voir par exemple I.4.8.3 pour des détails supplémentaires, noter que ce que nous avons appelé u_i dans ce paragraphe y est noté u_{n-1+i}). $\square$

5.2.4. L'exemple qui nous intéresse est le cas de la représentation non ramifiée $X(\psi) := \pi_p^n(\chi_0)$ définie en 4.2.2, $\pi_p^n(\chi_0)$ est l'induite du parabolique standard P de type $(2,1)$ du caractère $\chi_0(\det(.)) \times 1$. On trouve $W(P) = \{1, (3,2), (3,2,1)\}$. Si $\sigma \in W(P)$, le triplet $(\psi^\sigma(u_1), \psi^\sigma(u_2/u_1), \psi^\sigma(u_3/u_2))$ associé à σ est alors explicitement donné par :

$$\sigma = 1,\ (1, \chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p))$$
$$\sigma = (3,2),\ (\chi_{v_1}^{\perp}(p), 1, \chi_{v_1}(p))$$
$$\sigma = (3,2,1),\ (\chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p), 1)$$

6. Déformations des représentations cristallines raffinées

6.1. Raffinement d'une représentation cristalline.

6.1.1. Soit F un corps local, V un F-espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Nous supposerons que V est cristalline, que ses poids de Hodge-Tate $k_1 < \ldots < k_n$ sont tous distincts et que les valeurs propres du Frobenius de $D_{cris}(V)$ sont dans F (cf. 2.6 pour les conventions). Imitant Mazur ([**73**]), on appellera *raffinement* de V la donnée d'un ordre $\mathcal{R} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in F^n$ sur les valeurs propres du Frobenius de $D_{cris}(V)$. On notera $(V, \mathcal{R})$ la représentation V munie de son raffinement $\mathcal{R}$.

6.1.2. La donnée d'un raffinement $\mathcal{R}$ de V nous permet de définir des $F_i(\mathcal{R}) := \varphi_i/p^{k_i} \in F^*$ et des $U_i(\mathcal{R}) := \prod_{j=1}^{i} F_j$, $1 \leq i \leq n$. La donnée de tous les $F_i(\mathcal{R})$, ou encore celle des $U_i(\mathcal{R})$, est bien sur équivalente à celle de $\mathcal{R}$. Notons que $F_i(\mathcal{R})$ est encore une valeur propre du Frobenius de $D_{cris}(V(k_i))$, et $U_i(\mathcal{R})$ en est une de celui de $\Lambda^i(D_{cris}(V)) \simeq D_{cris}(\Lambda^i(V))$. On rappelle que la formation de D_{cris} commute aux opérations tensorielles sur les représentations cristallines ([**43**] 1.5.2, 5.1.2).

6.1.3. *Remarques :* i) Si le polynôme caractéristique du Frobenius de $D_{cris}(V)$ a $n = \dim_F(V)$ racines distinctes, alors V admet exactement $n!$ raffinements. C'est la cas par exemple si V est ordinaire (cf. [**78**]). Dans ce cas, on dispose de plus d'un raffinement canonique donné par $|\varphi_i| = p^{-k_i}$, appelé raffinement "ordinaire" (il ne nous sera pas utile dans la suite).

ii) Un des intérêts essentiels de la notion de raffinement dans ce texte vient de ce que la théorie des familles p-adiques de formes automorphes produit des déformations de représentations cristallines raffinées de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il faut bien noter que de telles déformations d'une même représentation V mais partant de raffinements distincts sont en général très différentes (par exemple l'une peut être génériquement irréductible, l'autre non).

6.2. Raffinements et algèbre d'Atkin-Lehner.

6.2.1. Par commodité d'exposition, nous nous restreignons à U(3) plutôt qu'à un groupe unitaire quelconque, c'est de toutes façons suffisant pour les objectifs de ce texte. Soit p un nombre premier décomposé dans E, $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un isomorphisme de corps, v_1 la place de E au dessus de p donnée par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{Q}}_p$, v_2 l'autre place, $p = v_1 v_2$. La donnée de v_1 nous permet de plus d'identifier $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme en 4.2.2. Fixons Π une représentation automorphe irréductible de U(3) telle que Π_p est non ramifiée et $\Pi_\infty = \pi(k_1 \geq k_2 \geq k_3)$. Comme dans 5.2.1, $\Pi_p = X(\psi)$ pour un certain caractère non ramifié $\psi : T \to \mathbb{C}^*$.

6.2.2. On a vu dans 3.2.2 que la donnée de ι permet d'associer à Π une représentation semi-simple continue $\rho_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(F) = \mathrm{GL}_F(V)$, V étant un espace vectoriel de dimension 3 sur un certain corps local F. On rappelle que D_{v_i} est un groupe de décomposition dans $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ associé à la place v_i de E, et on note V_i la représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur V obtenue par restriction de V à D_{v_i}. Puisque $\rho_p^\perp \simeq \rho_p$, on sait que $V_2 \simeq V_1^\perp$. De plus, par la proposition 3.3 §3.2, V_1 est cristalline de poids de Hodge-Tate $-k_1 - 1 < -k_2 < -k_3 + 1$, et son Frobenius cristallin a même polynôme caractéristique (modulo ι) que l'image du Frobenius géométrique de $W_{\mathbb{Q}_p}^{nr}$ dans le L-paramètre de $X(\psi)$, i.e $\prod_{i=1}^{3}(X - \iota(\psi_i(p)))$. Nous allons donner une interprétation automorphe de certains raffinements de V_1 en terme de Π_p.

6.2.3. La semi-simplification de $\mathcal{A}(p)$ agissant sur Π_p^I a été calculée en 5.2.2, c'est une somme de caractères de $\mathcal{A}(p)$ de la forme $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$, pour certains $\sigma \in W$. On dira que σ est *accessible* pour Π si $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$ apparaît, cela ne dépend que de Π_p, et il est équivalent de demander qu'il existe un vecteur $v \in \Pi^I$ sur lequel $\mathcal{A}(p)$ agisse par $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$. Pour tout $\sigma \in W$, le lemme 5.1 §5.2.2 montre que l'on construit un raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ de V_1 en posant

$$\mathcal{R}(\sigma) := (\psi_{\sigma(3)}(p), \psi_{\sigma(2)}(p), \psi_{\sigma(1)}(p))$$

Un raffinement de V_1 sera dit *accessible* s'il est de la forme $\mathcal{R}(\sigma)$ avec σ accessible pour Π. Si Π_p est irréductible, on a vu en 5.1 que tous les raffinements de V_1 sont alors accessibles. Cela se produit en particulier quand Π_p est tempérée. Par contre, si $\Pi = \pi(\chi_0)$, les raffinements accessibles sont ceux donnés dans 5.2.4. Dans ce cas précis, on remarque par exemple que V_1 est ordinaire mais que le raffinement ordinaire n'est pas accessible.

6.2.4. Soit $s = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, notons ν_s le caractère $\Delta \to p^{\mathbb{Z}}$ sur le vecteur de plus haut poids de $V_s^*(\mathbb{Q}) = V_{-s}(\mathbb{Q})$. D'après 6.2.2 et 2.3, si $1 \leq i \leq 3$, $(\delta_B^{-1/2}\nu_s)(u_i/u_{i-1})$ est une puissance de p d'exposant le i^{ieme} poids de Hodge-Tate (rangés par ordre croissant) de V_1. On pose

$$U_i^s := \frac{[Iu_iI]}{\nu_s(u_i)} \in \mathcal{A}(p)[1/p]$$

Avec ces notations, $\mathcal{R}(\sigma)$ est encore le raffinement de V_1 défini par ses $U_i(\mathcal{R}(\sigma))$ avec la formule $U_i(\mathcal{R}(\sigma)) := (\delta_B^{1/2}\psi^\sigma)(U_i^s)$.

6.3. Variation de représentations cristallines raffinées, d'après M.Kisin.

6.3.1. Soit $F \subset \mathbb{C}_p$ un corps local, X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, la norme réduite de $A(X)$ en fait une algèbre de Banach. Soit $M := A(X)^n$, G un groupe topologique, $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(M)$ une représentation continue. Si $F \subset E \subset \mathbb{C}_p$ est un sous-corps complet, $x \in X(E)$, on note $M_x := M \otimes_{A(X)} E$, $A(X) \to E$ étant l'évaluation en x, et $\rho_x : G \to \mathrm{GL}_n(E) = \mathrm{GL}_E(M_x)$.

6.3.2. Soit X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, on se donne

– a) $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n) : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, un F-morphisme analytique,

– b) $Z \subset X(F)$ un sous-ensemble Zariski-dense tel que $\kappa(Z) \subset \mathbb{Z}^n$,

– c) $M := A(X)^n$, et $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_{A(X)}(M)$ une représentation continue,

– d) $F_1, ..., F_n$ des éléments inversibles de $A(X)$,

On suppose de plus que :

i) Pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z, \kappa_{i+1}(z) > C + \kappa_i(z)\ \forall i \in \{1, ..., n-1\}\}$ est Zariski-dense dans $X(F)$,

ii) Pour tout $x \in X(F)$, $\kappa(x) \in F^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate-Sen de M_z, rangés par ordre strictement croissant si $x \in Z$, *i.e.* $\kappa_1(x) < \kappa_2(x) < ... < \kappa_n(x)\ \forall x \in Z$,

iii) Pour tout $z \in Z$, M_z est cristalline,

iv) Si $z \in Z$, $(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), ..., p^{\kappa_n(z)}F_n(z))$ est un raffinement de M_z,

v) Pour tout i, il existe $\lambda_i \in F^*$ tel que $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$,

vi) Deux éléments de $\kappa(Z)$ diffèrent d'un élément de $(p-1)\mathbb{Z}^n$.

Faisons quelques remarques sur ces hypothèses. L'existence de κ satisfaisant ii) n'est pas directement conséquence des travaux de Sen ([**98**], [**99**]), à cause de l'hypothèse "rangés par ordre croissant sur Z". Nous ne savons pas dans quelle mesure l'existence de F_i satisfaisant iv) est automatique (condition sur κ ?), cf. [**64**] à ce sujet. Nous ne savons pas non plus si vi) est automatique. Dans la pratique (cf. §8), ces hypothèses seront satisfaites et κ sera un morphisme fini sur son image, dominant restreint à chaque composante irréductible de X. La condition v) est de nature technique, et intervient dans les travaux de Kisin (elle implique en ses termes que X est "F_i-small").

6.3.3. On se place sous les hypothèses a), b), c), ii), iii) et iv) de 6.3.2. On notera $A(X)(\kappa_i)$ le $A(X)$-module $A(X)$ sur lequel on fait agir continûment $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le composé du caractère cyclotomique par le caractère suivant de $\mathbb{Z}_p^*$:

$$x \to (x/\tau(x))^{\kappa_i}\tau(x)^{n_i} \in A(X)^*$$

où $n_i = \kappa_i(z)$ est un entier bien défini modulo $(p-1)\mathbb{Z}$ indépendamment de $z \in Z$ par l'hypothèse vi), et $\tau : \mathbb{Z}_p^* \to \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$ la réduction modulo p composée par le caractère de Teichmüller. Si $z \in Z$, $A(X)(\kappa_i)_z$ est l'élévation à la puissance $\kappa_i(z)$ du caractère cyclotomique, en particulier c'est un caractère cristallin de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Si N est un $A(X)$-module de libre type fini muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on notera $N(\kappa_i) := N \otimes_{A(X)} A(X)(\kappa_i)$ vue comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On a donc défini les $M(\kappa_i)$, leurs évaluations en $z \in Z$ sont cristallines de poids $(\kappa_1(z) - \kappa_i(z), ..., \kappa_n(z) - \kappa_i(z)) \in \mathbb{Z}^{n,--}$.

6.3.4. On se place dans les hypothèses de 6.3.2 :

Proposition 6.1. *Soit* $x \in X(F)$, $\kappa(x) = (k_1, ..., k_n)$ *alors*

$$D_{cris}((\Lambda^i V_x)(k_1 + ... + k_i))^{\varphi = F_1(x)\cdots F_i(x)} \quad \textit{est non nul.}$$

Si de plus les k_i *sont entiers, alors*

$$D_{cris}(\Lambda^i(V_x))^{\varphi = \prod_{j=1}^i p^{k_j} F_j(x)} \quad \textit{est non nul}$$

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 6.1.

6.3.5. La seconde assertion découle de la première. On se ramène dans ce paragraphe au cas $i = 1$ et $\kappa_1 = 0$. Soit $i \in \{1, ..., n\}$ fixé, on pose $N := \Lambda^i(M)(\kappa_1)\cdots(\kappa_i)$. Si $J = (m_1 < ... < m_i)$ est une partie à i éléments de $\{1, ..., n\}$, on pose $\kappa_J := \sum_{j=1}^i (\kappa_{m_j} - \kappa_j)$ et $F_J := \prod_{j=1}^i F_{m_j}$. On ordonne de plus les $r := \binom{n}{i}$ telles parties $J = (m_1 < ... < m_i)$ par l'ordre lexicographique. Rappelons que, comme dit plus haut (6.1.2), la formation de $D_{cris}(V)$ commute aux opérations tensorielles sur la catégorie des représentations cristallines. Ainsi, si $x \in Z$, on en déduit que N_x est cristalline, que ses poids de Hodge-Tate sont les κ_{J_i}, et que les racines de son Frobenius cristallin sont les $F_{J_i}(x)$. Cela montre que les conditions a), b), c), d), iii), iv), v) et vi) de 6.3.2 sont satisfaites pour la donnée de N, des κ_{J_i}, et des F_{J_i} respectivement à la place de M, des κ_i et des F_i. L'hypothèse ii) entraîne que $\kappa_{J_i}(z) > 0$ si $i > 1$ et $z \in Z$. Enfin, l'hypothèse i) entraîne que pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z, \forall i > 1,\ \kappa_{J_i}(z) > C\}$ est Zariski-dense dans $X(F)$.

Il suffit donc de prouver la proposition pour M, $i = 1$, et $\kappa_1 = 0$, sous les hypothèses suivantes :

i') Pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z,\ \forall i > 1,\ \kappa_i(z) > C\}$ est Zariski-dense dans X,

ii') Pour tout $x \in X(F)$, $\kappa(x) \in F^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate-Sen de M_z, et satisfont $\kappa_i(x) > 0$ pour tout $i > 0$ et $x \in Z$,

iii') Pour tout $z \in Z$, M_z est cristalline et $D_{cris}(M_z)^{\varphi = F_1(x)} \neq 0$,

v') Il existe $\lambda \in F^*$, $|F_1/\lambda - 1| < 1$.

6.3.6. Nous allons déduire cela de deux résultats démontrés par Kisin ([**64**]), à la manière de la preuve de son théorème 6.3 *loc. cit.*. On fixe une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide $\mathcal{R}$, ainsi qu'un $\mathcal{R}$-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini et équipé d'une représentation continue $\mathcal{R}$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Soit $P_\phi \in \mathcal{R}[T]$ le polynôme de Sen de $\mathcal{M}$ (cf. *loc. cit.* §2.2), on suppose que $P_\phi = TQ(T) \in \mathcal{R}[T]$ et pour tout entier k on pose $P(k) = \prod_{j=0}^{k-1} Q(-j)$. Soit $Y \in \mathcal{R}$ un élément inversible, on suppose qu'il existe un corps local $F'/\mathbb{Q}_p$ et $\lambda \in F'$ avec la propriété que $Y\lambda^{-1} - 1$ est topologiquement nilpotent dans $\mathcal{R}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} F'$ (dans la terminologie de *loc. cit.*, $\mathcal{R}$ est *"Y-small"*).

LEMME 6.1. *(Kisin [**64**, Cor. 5.15]) Soit $\{\mathcal{R}_x\}_{x\in I}$ un ensemble de $\mathcal{R}$-algèbres affinoides. Supposons que pour tout entier $k>0$, il existe un sous-ensemble $I_k \subset I$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(1) Pour tout $x \in I_k$, toute application $\mathcal{R}_x$-linéaire $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*-équivariante*

$$\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x \longrightarrow (B_{dR}^+/t^k B_{dR}^+)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R}_x,$$

se factorise à travers $(B_{cris}^+\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{R}_x)^{\varphi=Y}$. (Ici Y désigne par abus l'image de Y dans $\mathcal{R}_x$, et $\mathcal{M}^*$ le $\mathcal{R}$-dual de $\mathcal{M}$.)

(2) Pour tout $x\in I_k$, l'image de $P(k)$ dans $\mathcal{R}_x$ est inversible.

(3) Pour tout k, l'application $\mathcal{R}\longrightarrow \prod_{x\in I_k}\mathcal{R}_x$ est injective.

Alors si $E\subset \mathbb{C}_p$ est un sous-corps fermé, $f:\mathcal{R}\to E$ un $\mathbb{Q}_p$-morphisme d'algèbre continu, il existe une application E-linéaire non nulle et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*-équivariante :*

$$\mathcal{M}^*\otimes_{\mathcal{R}} E \to (B_{cris}^+\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} E)^{\varphi=f(Y)}.$$

Le second résultat dont nous aurons besoin est le suivant. Soient $\mathcal{R}'$ une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach noethérienne, et $\mathcal{M}'$ un $\mathcal{R}'$-module libre de rang fini muni d'une représentation continue $\mathcal{R}'$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On fait encore l'hypothèse que le polynôme de Sen $P_\phi(T)$ de $\mathcal{M}'$ est de la forme $TQ(T)\in\mathcal{R}'[T]$, et on définit $P(k)$ comme plus haut.

LEMME 6.2. *([**64**, Cor. 2.6.(1)]) Soit $k>0$ un entier, alors*

$$((B_{dR}^+/t^i B_{dR}^+)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{M}')^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}[\frac{1}{P(k)}]$$

est un $\mathcal{R}'[\frac{1}{P(k)}]$-module projectif de rang 1.

6.3.7. Terminons la preuve de 6.1. On pose $\mathcal{R} := A(X)$, vue comme $\mathbb{Q}_p$-algèbre, $\mathcal{M} := M$, et $Y := F_1$. Vérifions que nous sommes dans les hypothèses du paragraphe précédent l'énoncé du lemme 6.1. Soit $P_\phi \in A(X)[T]$ le polynôme de Sen de M. Avec notre convention que le poids de Hodge-Tate de $\mathbb{Q}_p(1)$ est -1, l'évaluation en $x\in Z$ de P_ϕ a pour racines les opposés des poids de Hodge-Tate de ρ_x, *i.e.* les $-\kappa_i(x)$ par l'hypothèse ii'). Comme Z est Zariski-dense dans X qui est réduit, il vient que

$$P_\phi(T) = \prod_{i=1}^n (T+\kappa_i) \in A(X)$$

De plus, $\kappa_1 = 0$ par hypothèse, de sorte que $P_\phi(T) = TQ(T)\in A(X)[T]$, ce que l'on voulait. Enfin, l'hypothèse v') nous assure que X est "F_1-small". Cela conclut.

On pose $I := Z$, et si $x\in I = Z\subset X(F)$, on pose $\mathcal{R}_x := F$, vue comme $\mathcal{R}$-algèbre par le morphisme d'évaluation en x. Si $k>0$ est un entier, on définit I_k comme étant l'ensemble des points x de Z tels que $\kappa_i(z) > k$ si $i>1$, et tels que $v(F_1(x)) \leq k$. Vérifions que nous sommes bien dans les hypothèses du lemme 6.1. L'assertion (3) vient de ce que I_k est Zariski-dense dans X par l'hypothèse i') appliquée à $C = k$, et de ce que X est réduit. Soit $x \in I$, par l'hypothèse ii') l'image $P(k)(x)$ de $P(k)$ dans $\mathcal{R}_x = F$ est

$$\prod_{j=0}^{k-1} \prod_{i=2}^{n} (\kappa_i(x) - j), \tag{23}$$

c'est un entier strictement positif si $x \in I_k$. Cela prouve (2). Pour vérifier (1), fixons $x \in I_k$. Rappelons que M_x a pour plus petit poids de Hodge-Tate 0, car $\kappa_1 = 0$ et par l'hypothèse ii'). D'après l'hypothèse iii'), $D_{cris}(M_x)^{\varphi=F_1(x)}$ est non nul. Écrivant que M_x est égal à son bidual F-linéaire, cela signifie encore qu'il existe une application $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariante non nulle

$$\psi_x : M_x^* \longrightarrow (\mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}$$

Il se trouve que l'on peut remplacer $\mathrm{Fil}^0(B_{cris})$ par B_{cris}^+ dans la formule ci-dessus. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, comme $F_1(x) \in F^*$ par 6.3.2 d), $\varphi^n(\mathrm{Im}(\psi_x)) = F_1(x)^n \mathrm{Im}(\psi_x) = \mathrm{Im}(\psi_x) \subset \mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$, et donc $\mathrm{Im}(\psi_x) = \varphi(\mathrm{Im}(\psi_x))$ est inclus dans

$$\varphi(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)) = (\varphi(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}))) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$$

Mais $\varphi(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}))) \subset B_{cris}^+$ d'après [**42**] 5.3.7 (i), cela conclut.

Vérifions maintenant que ψ_x ne se factorise pas par $\mathrm{Fil}^k(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$. Par faible-admissibilité de $D_{cris}(M_x)$ ([**43**] proposition 5.4.2.(i)), le sous-φ-module filtré

$$\mathrm{Fil}^k(D_{cris}(M_x))^{\varphi=F_1(x)}$$

a son polygone de Newton au dessus de son polygone de Hodge. Mais le premier n'a qu'une pente $v(F_1(x)) < k$ par l'hypothèse $x \in I_k$, et le second n'a que des pentes $\geq k$ par construction. Ainsi, $\mathrm{Fil}^k(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F = \{0\}$ et ne contient donc pas ψ_x, ce que l'on voulait.

Considérons enfin le F-espace vectoriel des applications :

$$M_x^* \longrightarrow (B_{dR}^+/t^k B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F. \tag{24}$$

Il est non nul car nous avons montré que la réduction modulo $t^k B_{dR}^+ \cap B_{cris}$ de ψ_x en fait partie. Le lemme 6.2 s'applique à $\mathcal{R}' := \mathcal{R}_x = F$, $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x = M_x$, et montre que l'espace des applications ci-dessus est un F-espace vectoriel de dimension 1, car si $x \in I_k$, (23) assure que $P(k)(x) \in F^*$. Ainsi, toute application du type (24) est F-proportionnelle à ψ_x, et se factorise donc par $(B_{cris}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}$. Cela montre que (1) est vérifiée[15].

Soit $x \in X(F)$, l'évaluation en x détermine un $\mathbb{Q}_p$-morphisme d'algèbre continu $\mathcal{R} \to F$. Si $M_x^* := \mathrm{Hom}_F(M_x, F)$, le F-espace vectoriel

$$D_{cris}(M_x)^{\varphi=F_1(x)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(M_x^*, B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi=F_1(x)}$$

[15]Noter que si W et U sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces de Banach, avec U de dimension finie, l'application canonique $W \otimes_{\mathbb{Q}_p} U \longrightarrow W \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} U$ est un isomorphisme.

est donc non nul par le lemme 6.1. □

6.3.8. *Remarques :* En général, il est bien sûr faux que sous les hypothèses de la proposition 6.1, $D_{cris}(V(k_i))^{\varphi=F_i(x)}$ est non nul si $i > 1$. La considération d'une famille p-adique de formes modulaires passant par une forme modulaire parabolique propre de niveau $\Gamma_0(p)$ qui est p-nouvelle en donne un contre-exemple. De plus, ce que l'on a fait pour les Λ^i vaut de même aussi naturellement pour n'importe quel foncteur de Schur de $\mathrm{GL}(n)$. Si $n = 3$, l'isomorphisme canonique $V^* \otimes \det(V) \simeq \Lambda^2(V)$ permet de reformuler la proposition pour $i = 2$ en terme de V^*. Elle montre alors que $D_{cris}(V(k_1))^{\varphi=F_1(x)}$ et $D_{cris}(V^*(-k_3))^{\varphi=F_3(x)^{-1}}$ sont non nuls.

7. Extensions et pseudo-représentations

7.1. Existences de réseaux stables.

7.1.1. Soit K un corps de caractéristique 0, $V = K^r$, G un groupe, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation semi-simple. Soit $(\rho = \oplus_{i=1}^n \rho_i, V = \oplus_{i=1}^n W_i)$ la décomposition isotypique de (ρ, V) : pour chaque i, (W_i, ρ_i) est somme directe de n_i copies d'une représentation irréductible (V_i, ρ'_i), et $\rho'_i \not\simeq \rho'_j$ si $i \neq j$.

On dira que V satisfait la condition (ABS) si les ρ'_i sont *absolument* irréductibles.

On suppose dès maintenant et dans tout §7.1 que V satisfait (ABS). On fixe de plus A un sous-anneau intègre noethérien de K tel que $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset A$.

7.1.2. Si B est un sous-anneau de K, on appelle B-réseau de V un sous-B-module libre Λ tel que $K.\Lambda = V$. Si V est une représentation de G, on dit qu'un B-réseau est stable s'il est stable sous l'action de G.

LEMME 7.1. *i) L'image de $A[G]$ dans $End_K(V)$ est de type fini sur A.*

ii) Si A est normal, $tr(\rho'_i(G)) \subset A$.

iii) Si A est principal, V_i admet un A-réseau stable.

iv) Plus généralement, si $P \in Spec(A)$ tel que A_P est de valuation discrète, il existe $g \in A \backslash P$ tel que V_i admet un A_g-réseau stable.

v) Supposons de plus que A est soit une algèbre affinoide, soit local complet, G un groupe topologique, si $T : G \to A$ est continue, alors les $g \to tr(\rho'_i(g))$ sont continus. De plus, tout A-réseau stable est une représentation continue de G.

Preuve : Par la théorie des modules semi-simples, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(V)$ est somme directe de ses images dans les $\mathrm{End}(W_i)$. De plus, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(W_i)$ est l'action diagonale de $\mathrm{End}(V_i)$ dans $\mathrm{End}(W_i)$. En particulier, on dispose d'un $e_i \in K[G]$ tel que $\rho(e_i)$ est le projecteur G-équivariant sur W_i. Aussi,

$$\exists f \in K^*,\ \forall g \in G,\ \mathrm{tr}(\rho_i(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g)) \in fA$$

On déduit la même assertion pour ρ'_i, en remplaçant f par f/n_i.

Soit i fixé, $d = \dim(V_i)$, on fixe une base de V_i nous permettant de l'identifier à K^d. La représentation ρ'_i étant absolument irréductible, un théorème de Wedderburn assure l'existence de $g_1, ..., g_{d^2} \in G$, tels que les $\rho'_i(g_k)$ engendrent $\mathrm{End}(V_i)$ comme K-espace vectoriel. Ainsi,

$$M := ((\mathrm{tr}(\rho'_i(g_k g_l)))_{1\leq k,l\leq d^2}) \in \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

Soit $f' \in K^*$ tel que M^{-1} et les $\rho'_i(g_k)$ soient à coefficients dans $f'A$, alors pour tout $g \in G$ on a $\rho'_i(g) \in ff'/n_i M_d(A)$. Autrement dit,

$$A^d \subset \rho'_i(G).A^d \subset ff'/n_i A^d \tag{25}$$

En particulier, $A[\rho'_i(G)]$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_A(A^d, (ff'/n_i)A^d)$. Comme A est noethérien, cela prouve i). De plus, si A est principal, (25) montre que $A[\rho'_i(G)].A^d$ est un réseau stable, cela montre iii). On en déduit ii) car un anneau normal noethérien est intersection, dans son corps de fractions, de ses localisés en ses idéaux premiers de hauteur 1, qui sont de valuation discrète ([**72**] théorèmes 11.4 et 11.5).

Montrons l'assertion iv). Par iii), V_i admet un A_P-réseau stable, disons Λ_i. Fixons $e_1, ..., e_{r_i}$ une A_P-base de Λ_i, ainsi que des éléments $g_1, ..., g_s$ de G tels que les $\rho(g_j)$ engendrent comme A-module l'image de $A[G]$ dans $\mathrm{End}_K(V)$, ce qui est loisible par i). Chaque $\rho(g_j)(e_k)$ étant une A_P-combinaison linéaire finie des e_l, on peut trouver un dénominateur commun $g \in A\backslash P$ tel que le A_g-réseau $\sum_k A_g e_i$ soit stable par G, cela conclut.

La première assertion de v) découle de $n_i \mathrm{tr}(\rho'_i(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g))$, prouvons la seconde. Si Λ est un réseau stable de V, il suffit de vérifier que $\psi : G \to \mathrm{End}_A(\Lambda)$ est continue, car alors $g \mapsto \psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$ le sera aussi. On rappelle que si A est affinoide ([**15**] 3.7.3) ou local complet, tout A-module de type fini a une topologie canonique de A-module complet, et que toute application A-linéaire entre deux tels modules est continue et fermée. Par i), on peut trouver $g_1, ..., g_s \in G$ engendrant $M := A[\rho(G)]$, on munit M de la topologie discutée ci-dessus. Il suffit de montrer que $\psi^* : G \to M$ est continue. Par semi-simplicité de V comme G-représentation, l'application $\psi^{**} : G \to A^s$, $g \to (\mathrm{tr}(g_i g))$, induit une injection A-linéaire $M \to A^s$, nécessairement continue et fermée. La continuité de ψ^{**} conclut. $\square$

7.2. Représentations attachées aux pseudo-caractères.

7.2.1. Soit G un groupe, A un anneau commutatif, on rappelle qu'une fonction $T : G \longrightarrow A$ est un pseudo-caractère sur G, de dimension $n \in \mathbb{N}$, à coefficients dans A si

$$\forall g, h \in G, \ \ T(gh) = T(hg)$$

$$\forall g = (g_1, ..., g_{n+1}) \in G^{n+1}, \qquad \sum_{\sigma = c_1...c_r \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{r} f(c_i(g)) = 0$$

n est le plus petit entier ayant la propriété ci-dessus

Ici $\sigma = c_1...c_r$ est la décomposition en cycles de σ, et si $c = (j_1, ..., j_s)$ est un cycle $c(g) = \prod_{i=1}^s g_{j_i}$, cf. [**106**] §1, [**86**] §2.

La trace d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ est en particulier un pseudo-caractère sur G, à coefficients dans A (cf. *loc. cit.*) ; il est de dimension n si A est intègre de caractéristique 0 (cf. [**86**] 2.4). On discute de l'assertion réciproque dans les paragraphes qui suivent.

7.2.2. Si $A = F$ est un corps, il est connu que quitte à faire une extension séparable finie de F, T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(F)$, unique à isomorphisme près, satisfaisant la propriété (ABS) de 7.1.1 (voir [**106**] §1 théorème 1, [**86**] 4.2 dans cette généralité). On dira que T est absolument irréductible si cette représentation l'est.

Soient F un corps, $B \subset F$ un sous-anneau, $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ une représentation de G, on suppose de plus que $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset B$, la discussion ci-dessus implique immédiatement le :

Corollaire 7.1. *Sous ces hypothèses, si m est un idéal maximal de B de corps résiduel k de caractéristique 0, alors la réduction modulo m de $tr(\rho)$ est la trace d'une représentation semi-simple*

$$\rho_m^{ss} : G \to GL_n(\overline{k})$$

ρ_m^{ss} est unique à isomorphisme près, définie sur une extension finie de k.

Notons qu'il est clair que si $\rho(G) \subset \mathrm{GL}_n(B)$, cela a un sens de réduire ρ modulo m, et qu'alors ρ_m^{ss} est la semi-simplification de cette réduction. Dans le cas où $B = A(X)$ est une algèbre affinoide, $x \in X$, m l'idéal maximal de B défini par x, on notera aussi ρ_x^{ss} pour ρ_m^{ss}.

7.2.3. Supposons A quelconque, mais que pour tout $m \in \mathrm{Specmax}(A)$, la réduction modulo m de T, $T_m : G \to A/m$ est absolument irréductible. Quitte à remplacer A par une extension étale finie, il est encore vrai que T est la trace d'une unique représentation $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ ([**86**] 5.1).

Supposons finalement que A est intègre, que $T : G \to Frac(A)$ déduit de T soit absolument irréductible, mais que les T_m ne sont pas tous absolument irréductibles. On ne peut plus alors attacher canoniquement de représentation à T mais, au moins sous certaines hypothèses développées plus bas, un ensemble de représentations non toutes isomorphes en général. Pour nos applications, le cas intéressant sera celui où A est une algèbre affinoide intègre de dimension 1.

Lemme 7.2. *Soient F un corps local, X un F-affinoide intègre de dimension 1, et $T : G \to A(X)$ un pseudo-caractère de dimension n, il existe :*

i) Un F-affinoide Y régulier intègre, de dimension 1, fini et surjectif sur X,

ii) Une représentation semi-simple $\rho_{K(Y)} : G \to GL_n(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS).

Preuve : En considérant la composée $T : G \to A(X) \to K(X)$, §7.2.2 assure que T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(L)$ satisfaisant (ABS) (cf. 7.1.1), pour une extension finie $L/K(X)$. Soit A' la normalisation de A dans L, c'est un anneau de Dedekind car A est intègre noethérien de dimension 1. D'après [**15**] 6.1.2, proposition 4, A' est une F-algèbre affinoide finie sur A, on l'écrit $A(Y)$, en particulier $L = K(Y)$. Ceci prouve i) et ii). $\square$

7.2.4. Soit Y un F-affinoide intègre de dimension 1, $y \in Y(F)$ un point régulier, G un groupe et $T : G \to A(Y)$ un pseudo-caractère qui est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(K(Y))$ satisfaisant (ABS). D'après 7.1 iv), $K(Y)^n$ a un $A(Y)_g$ réseau stable Λ_0, pour $g \in A(Y)$ ne s'annulant pas en y.

On note $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de $A(Y)$ en y, c'est un anneau de valuation discrète (voir [**15**] 7.3.2 proposition 8), on pose $L := \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$. Le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}\Lambda_0$ est un $\mathcal{O}$-réseau de $L^n := K(Y) \otimes_{K(Y)} L^n$ stable par G. On supposera que l'anneau local algébrique en y est principal d'idéal maximal engendré par $z \in A(Y)$, on peut toujours faire cette hypothèse quitte à rétrécir Y. Disons que deux $\mathcal{O}$-réseaux stables Λ_1 et Λ_2 sont homothétiques si il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $z^r \Lambda_1 = \Lambda_2$. On note S l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{O}$-réseaux stables pour la relation d'homothétie, et $[\Lambda]$ la classe dans S du $\mathcal{O}$-réseau stable Λ.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts affinoides connexes de Y contenant y, Λ_i un $A(\Omega_i)$-réseau stable de L^n pour $i = 1, 2$. On dira que Λ_1 et Λ_2 sont équivalents s'il existe $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un ouvert affinoide connexe de Y contenant y, et un entier $r \in \mathbb{Z}$, vérifiant

$$z^r A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2 \subset L^n$$

On note S' l'ensemble des classes pour cette relation d'équivalence, et $[\Lambda_i] \in S'$ la classe du $A(\Omega_i)$-réseau stable Λ_i.

LEMME 7.3. – *S et S' sont non vides.*
- *L'application naturelle $S' \longrightarrow S$, $[\Lambda] \mapsto [\mathcal{O}\Lambda]$, est une bijection.*
- *Si $s = [\Lambda] \in S'$, les représentations de G sur les F-espaces vectoriels $\Lambda/z\Lambda$ et $(\mathcal{O}\Lambda)/z(\mathcal{O}\Lambda)$ sont isomorphes.*

Cette dernière classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de Λ tel que $s = [\Lambda]$, on l'appelle la représentation résiduelle de s.

Preuve : L'ensemble S est non vide car contient $[\mathcal{O}\Lambda_0]$. De même, si Ω est un ouvert affinoide connexe de Y contenant y et tel g ne s'annule pas sur Y (ce qui existe car $g(y) \neq 0$), alors la classe de $A(\Omega)\Lambda_0$ est un $A(\Omega)$-réseau stable, ce qui prouve la première assertion.

L'application de l'énoncé est clairement bien définie. Montrons l'injectivité. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, supposons que $\mathcal{O}\Lambda_1 = z^p\mathcal{O}\Lambda_2$, $p \in \mathbb{N}$. On peut supposer $p = 0$. Si $e_1^i, ..., e_n^i$ une $A(\Omega_i)$-base de Λ_i, on note $M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ la matrice des e^1 dans la base des e^2. On peut trouver $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un ouvert affinoide connexe de Y contenant y tel que $M \in \mathrm{GL}_n(A(\Omega_3))$. Alors $A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2$.

Pour la surjectivité, considérons Λ un $\mathcal{O}$-réseau stable par G quelconque dans L^n. On sait que l'image C de $A(Y)[G]$ dans $\mathrm{End}_{K(Y)}(K(Y)^n) \subset \mathrm{End}_L L^n$ est de type fini sur $A(Y)$ par le lemme 7.1 i). C est de plus trivialement un sous-$A(Y)$-module de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$. On choisit m_1,...,m_r une famille $A(Y)$-génératrice de C, ainsi que e_1,...,e_n une $\mathcal{O}$-base du $\mathcal{O}$-réseau Λ. On peut trouver un voisinage affinoide Ω de y dans Y tel que l'ensemble de tous les m_i soient à coefficients dans $A(\Omega)$ dans la base des e_i. Le $A(\Omega)$-réseau $\oplus_{i=1}^n A(\Omega)e_i$ est alors stable, et sa classe est un antécédent de $[\Lambda]$.

Les autres assertions sont immédiates. □

On rappelle que pour tout affinoide Y réduit, $A(Y)$ est canoniquement normé par sa norme du sup. Conservant les hypothèses de tout ce paragraphe, supposant de plus que G est un groupe topologique et que $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $A(\Omega)$-réseau stable comme plus haut, le lemme 7.1 v) montre que la représentation déduite $G \to \mathrm{GL}_n(A(\Omega))$ est continue. En corollaire du lemme 7.3, on obtient alors le

COROLLAIRE 7.2. *Si $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $\mathcal{O}$-réseau stable Λ de L^n, la représentation résiduelle de G sur $\Lambda/z\Lambda$ est continue.*

7.3. Variante d'un lemme de Ribet. Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, m un idéal maximal de A, et $k = A/m$. Soit G un groupe, τ un automorphisme de K. Pour ρ une représentation de G sur un espace V de dimension finie sur K, et Λ un A-réseau stable (dans la suite nous dirons simplement un *réseau stable*), on note $\bar{\rho}_\Lambda$ la représentation sur $\Lambda/m\Lambda \simeq k^n$. Par le théorème de Brauer-Nesbitt ([**37**, 30.16]), $\bar{\rho}_\Lambda^{ss}$ ne dépend pas du réseau stable Λ (s'il en existe un), on la note $\bar{\rho}^{ss}$. Pour ρ une représentation sur K ou k on note $\rho^\perp$ la représentation $g \mapsto \rho(\tau(g))^*$.

PROPOSITION 7.1. *Soit ρ une représentation de G de dimension n sur K admettant un réseau stable. On suppose que $\rho \simeq \rho^\perp$ est absolument irréductible et que $\bar{\rho}^{ss} \simeq \phi \oplus \phi^\perp \oplus \psi$ où ϕ, $\phi^\perp$ et ψ sont trois représentations irréductibles deux à deux non isomorphes. Alors :*

a. Soit il existe un réseau stable Λ tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ admette un sous-quotient r qui est une extension non triviale de $\phi^\perp$ par ϕ, et qui vérifie $r \simeq r^\perp$.

b. Soit il existe un réseau stable Λ tel que $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}_\Lambda^\perp$, et tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ admette une unique sous-représentation r de longueur 2 et un unique sous-quotient r' de longueur 2, avec r extension non triviale de ψ par ϕ, r' extension non triviale de $\phi^\perp$ par ψ, et $r' \simeq r^\perp$.

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 7.1.

7.3.1. Notons d'abord que l'on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète complet, ce que l'on fait. En effet, si A' est le complété de A en m, K' le corps des fractions de A', A' est de valuation discrète complet de corps résiduel k. L'extension ρ' de ρ à K' vérifie encore toutes les hypothèses du théorème. Si Λ' est un A'-réseau stable, $\Lambda = \Lambda' \cap V$ est un A-réseau stable de V, et $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}'_{\Lambda'}$, si bien que la conclusion du théorème pour K' entraîne la conclusion pour K.

7.3.2. Nous prouverons la proposition en utilisant le dictionnaire de [**4**] et [**5**]. Rappelons quelques notions et résultats utiles de ces articles, auquel nous renvoyons au lecteur pour de plus amples détails. Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_n(K)$, X l'ensemble de ses sommets. Soit $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ fixe par $\rho(G)$, l'ensemble de sommets $S := \mathcal{S} \cap X$ est l'ensemble des classes d'homothétie de réseaux stables (cf. [**4**, lemme 3.1.2]). Pour $x \in S$ on note $\bar{\rho}_x$ une réduction $\bar{\rho}_\Lambda$ pour Λ un représentant de x, ce qui ne dépend pas du choix de Λ, à isomorphisme près.

LEMME 7.4. *i) $\mathcal{S}$ est clos, i.e. convexe et réunion d'adhérence de facettes.*
ii) $\mathcal{S}$ est contenu dans un sous-appartement $\mathcal{A}$ de dimension 2, d'intérieur non vide.
iii) $\mathcal{S}$ est borné et S est fini.

Preuve : D'après [**4**, prop. 3.1.3], $\mathcal{S}$ est clos, ce qui prouve i). La représentation $\bar{\rho}^{ss}$ est sans multiplicité. D'après i) et [**5**, prop. 3.1.1], $\mathcal{S}$ est donc contenu dans un appartement de $\mathcal{X}$. Comme $\bar{\rho}^{ss}$ a trois facteurs de Jordan-Hölder, [**4**, prop. 2.4.1 et 3.3.2] assurent que $\mathcal{S}$ engendre un sous-appartement de $\mathcal{X}$ de dimension 2, ce qui prouve ii). Par [**4**, prop. 3.2.1], ρ étant irréductible, $\mathcal{S}$ est borné. Comme il est dans un appartement de $\mathcal{X}$ par ii), S est fini. $\square$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc un polygone convexe d'intérieur non vide dans le sous-appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, qui est un plan. Un exemple possible est représenté par la figure ci-après.

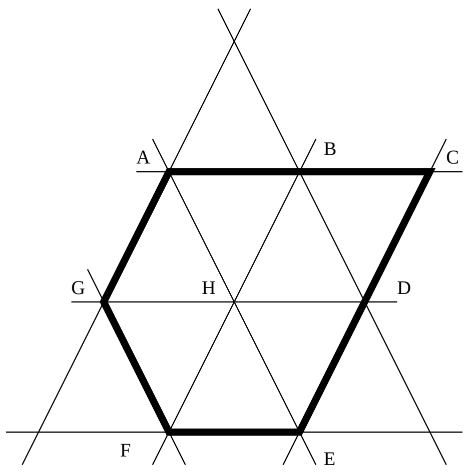

FIG. 1. Un exemple de partie $\mathcal{S}$

L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$ est l'enveloppe convexe de la ligne polygonale foncée, $S = \{A, B, C, ..., H\}$, et les *côtés* de $\mathcal{S}$ sont les segments $[AC], [CE], [EF], [FG]$ et $[GA]$ (par exemple $[BC]$ n'est pas considéré comme un côté). De manière générale, $\mathcal{S}$ a de trois à six côtés. Avant d'énoncer précisément le lemme nous dont aurons besoin, nous allons discuter de la description donnée dans [**5**] des extensions non triviales apparaissant comme sous-quotients des $\bar{\rho}_x$, $x \in S$, en terme des côtés de $\mathcal{S}$.

7.3.3. Il est prouvé *loc. cit.* que pour chaque côté γ de $\mathcal{S}$, il existe une unique extension non triviale r_γ entre deux éléments distincts de $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$ qui apparaît comme sous-quotient de tous les $\bar{\rho}_x$, $x \in \gamma \cap S$. Ils montrent alors que si pour un sommet x, $\bar{\rho}_x$ admet r_γ comme sous-quotient, c'est que ce sommet est dans c. Enfin, l'application $\gamma \mapsto r_\gamma$ est une bijection de l'ensemble des côtés de $\mathcal{S}$ sur l'ensemble des extensions non triviales qui apparaissent comme sous-quotient d'un $\bar{\rho}_x$ avec $x \in S$. En particulier, une remarque importante dans le cas où $\mathcal{S}$ a strictement moins de six côtés, est qu'au moins un des six types possibles d'extensions non triviales (par exemple de ϕ par $\phi^\perp$) n'apparaît comme sous-quotient d'aucun des $\bar{\rho}_x$ avec $x \in S$. L'énoncé correct d'existence d'extensions non triviales se traduit plutôt par la connexité d'un certain *graphe orienté* *des extensions non triviales*, comme l'explique le lemme suivant, dans lequel on récapitule en partie ce que l'on vient de dire.

LEMME 7.5. *Il existe un graphe orienté d'ensemble de sommets $\{\phi, \phi^{\perp}, \psi\}$, d'ensemble d'arêtes $A \subset (\{\phi, \phi^{\perp}, \psi\}^2 - \Delta)$ (Δ est la diagonale), qui est connexe en tant que graphe orienté, muni d'une bijection c de A sur les côtés de $\mathcal{S}$, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) Pour toute arête $a = (u, v) \in A$, il existe une extension $r_{c(a)}$ de v par u, non triviale, telle que pour tout x dans $c(a) \cap S$, $r_{c(a)}$ apparaît comme sous-quotient de $\bar{\rho}_x$.

ii) Réciproquement, si $x \in S$, et si $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient une extension non triviale de v par u, alors cette extension est isomorphe à $r_{c((u,v))}$, et x est sur $c((u, v))$.

iii) Si (u, v) et (v, w) sont deux arêtes de A, avec u, v, w deux à deux distincts, les côtés $c((u, v))$ et $c((v, w))$ du polygone $\mathcal{S}$ se coupent si et seulement si $(u, w) \notin A$.

Preuve : Considérons le graphe orienté d'ensemble de sommets $\{1, 2, 3\}$ attaché à la partie close $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$ dans [**5**] §2.2. On identifie $\{1, 2, 3\}$ à $\{\phi, \phi^{\perp}, \psi\}$ comme en *loc. cit.* 3.3.2. La proposition 2.3.1 de [**5**] donne une bijection entre les arêtes de $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$ et les côtés de $\mathcal{S}$, que l'on note c. Ce graphe est connexe en tant que graphe orienté parce que ρ est irréductible ([**5**, prop. 3.4.1]). Soit $a = (u, v) \in A$, $r_{c(a)}$ est définie comme étant l'unique extension non triviale de v par u qui est un sous-quotient d'un $\bar{\rho}_x$, avec $x \in S$ (cf. corollaire 3.3.7 *loc. cit.*). Les assertions i) et ii) résultent de la remarque suivant le théorème 3.3.3. *loc. cit.*. La propriété iii) résulte de la remarque de *loc. cit.* §2.3. $\square$

7.3.4. À partir d'ici, nous allons traduire la condition d'anti-autodualité $\rho = \rho^{\perp}$. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de K-espaces vectoriels φ de V dans V^* tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(\tau(g)) = \varphi^{-1}\rho^*(g)\varphi. \tag{26}$$

Si Λ est un réseau de V, on note Λ^* le réseau dual dans V^*. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ passe au quotient et définit une bijection naturelle b entre l'ensemble des sommets de l'immeuble X de $\mathrm{PGL}(V)$ et celui de l'immeuble X^* de $\mathrm{PGL}(V^*)$, qui s'étend en un morphisme d'immeubles de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. Il est clair que si $\mathcal{S}^*$ désigne la partie de $\mathcal{X}^*$ stable par ρ^*, on a

$$S^* = b(S).$$

Par ailleurs l'application φ induit un isomorphisme d'immeubles φ_* de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. On déduit immédiatement de (26) que

$$\varphi_*(S) = S^*.$$

L'isomorphisme $t := b^{-1}\varphi_*$ de $\mathcal{X}$ laisse donc stables $\mathcal{S}$ et S. Si $x \in S$, φ induit par passage au quotient un isomorphisme

$$\bar{\rho}_x^{\perp} \simeq \bar{\rho}_{t(x)}. \tag{27}$$

7.3.5. Terminons la preuve de la proposition 7.1. Comme le graphe du lemme 7.5 est connexe en tant que graphe orienté, il y a un chemin qui va de ϕ à $\phi^\perp$. Il y a donc deux possibilités :

Soit $(\phi,\phi^\perp)\in A$, pour $x\in c((\phi,\phi^\perp))\cap S$, le lemme 7.5 i) assure que $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient $r_{c((\phi,\phi^\perp))}$ qui est une extension non triviale de $\phi^\perp$ par ϕ. Montrons que $r^\perp_{c((\phi,\phi^\perp))}\simeq r_{c((\phi,\phi^\perp))}$. La représentation $r^\perp_{c((\phi,\phi^\perp))}$ est aussi une extension non triviale de $\phi^\perp$ par ϕ, qui apparaît comme sous-quotient de $\bar{\rho}_{t(x)}$ d'après (27). L'assertion ii) du lemme 7.5 conclut. On est donc dans le cas a. de la proposition 7.1.

Soit $(\phi,\phi^\perp)\notin A$, auquel cas (ϕ,ψ) et $(\psi,\phi^\perp)$ sont dans A. L'assertion iii) du lemme 7.5 implique qu'il existe $x\in c((\phi,\psi))\cap c((\psi,\phi^\perp))\cap S$. Ainsi, $\bar{\rho}_x$ contient une extension non triviale de ψ par $\phi^\perp$, et une extension non triviale de ϕ par ψ. Cela entraîne que la première (resp. la seconde) est l'unique sous-extension (resp. quotient) de longueur 2 de $\bar{\rho}_x$. Pour conclure que l'on est bien dans le cas b. de la proposition 7.1, il suffit donc de voir que $t(x)=x$ (cf. formule (27)). Mais par le lemme 7.5 ii) et (27), $t(c((\phi,\psi)))=c((\psi,\phi^\perp))$, car $\psi\simeq\psi^\perp$. De même, $t(c((\psi,\phi^\perp)))=c((\phi,\psi))$. En particulier, $t(x)=x$. $\square$

8. Déformation p-adique de $\chi\oplus 1\oplus\chi^\perp$

8.1. Notations pour les espaces de formes automorphes.

8.1.1. On fixe encore $p=v_1v_2$ décomposé dans E, N un entier premier à p, ainsi qu'un isomorphisme de corps $\iota:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La donnée de v_1 nous permet d'identifier canoniquement $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme dans 4.2.1. Soit K_f un compact ouvert de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$, décomposé place par place, égal à un compact maximal hyperspécial aux places ne divisant pas $pN\mathrm{disc}(E)$, et à l'Iwahori I des éléments triangulaires supérieurs modulo p de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$ en p. On notera de plus K_f^p le sous-groupe des éléments de K_f de p-composante égale à 1.

On fixe une représentation irréductible complexe lisse J de K_f définie sur $\overline{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C}$, triviale restreinte aux places ne divisant pas N. La représentation J est de dimension finie, ι nous permet de la voir à coefficients dans un corps local fixé F_0 et de considérer $J(F)$ pour chaque $F_0\subset F\subset\overline{\mathbb{Q}}_p$ comme étant une F-représentation lisse de K_f. On note $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions complexes lisses sur $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$, vu comme représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$ par translation à droite.

8.1.2. Si $w=(k_1\geq k_2\geq k_3)\in\mathbb{Z}^3$, *l'espace des formes automorphes pour* $U(3)$ de "poids automorphes" w et de type (K_f,J) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$S_w(K_f,J,\mathbb{C}):=\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})\times K_f}(V_w(\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}J,\mathcal{B})$$

On note $\mathcal{H}'$ l'algèbre de Hecke globale (sur $\mathbb{Z}$) hors de pN, et $\mathcal{H}:=\mathcal{H}'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}(p)$, où $\mathcal{A}(p)$ est l'algèbre d'Atkin-Lehner introduite en 5.1. C'est un anneau commutatif, et on notera $\mathcal{H}_A:=\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}A$, pour tout anneau commutatif A. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel[16] $S_w(K_f,J,\mathbb{C})$

[16]La représentation $V_w(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ est définie en 2.3. On la voit ici comme une représentation de $U(3)(\mathbb{R})$ par le plongement $U(3)(\mathbb{R})\subset\mathrm{GL}_3(E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, la dernière flèche étant donnée par le plongement de E dans $\mathbb{C}$ suivant : $E\overset{v_1}{\to}\overline{\mathbb{Q}}_p\overset{\iota^{-1}}{\to}\mathbb{C}$.

est de manière naturelle un module sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Si V est un $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module, on notera $H^0(V)$ le $\mathcal{H}_A$-module des fonctions

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) \to V, \text{ telles que } \ \forall x \in \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f),\ \forall u \in K_f,\ u.f(xu) = f(x)$$

Notons que $H^0(V)$ dépend aussi de K_f, bien que la notation ne le laisse pas apparaître. C'est une vérification classique que la donnée de ι permet de voir $H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$ comme une F_0-structure de $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$, et ce comme $\mathcal{H}_{F_0}$-module. On pose[17]

$$S_w^{cl} := H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$$

8.1.3. Par la finitude du nombre de classes ([**11**] 5.1), $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$ s'écrit comme réunion finie

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i K_f$$

de plus $\Gamma_i := (x_i \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i^{-1}) \cap K_f$ est un groupe fini car compact discret. Pour un $A[I\Delta^+I, K_f]$-module V, l'application A-linéaire

$$\varphi_V : H^0(V) \to \oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}, \quad f \to (f(x_1), ..., f(x_h))$$

est un isomorphisme A-linéaire fonctoriel en V. On en déduit que sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, le foncteur $V \mapsto H^0(V)$ est exact et commute à l'extension des scalaires en A.

Enfin, on en déduit aussi que S_w^{cl} est de dimension finie sur F_0. De plus, si V est normé par $|.|$, on munit $H^0(V)$ de la norme par

$$|f| := \mathrm{Sup}_{i=1}^h |f(x_i)|$$

8.2. Familles p-adiques typées pour $\mathrm{U}(3)$.

8.2.1. Soit $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$, on note $S_w^{cl,\alpha}$ le plus grand sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module de $S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ sur lequel chaque U_i^w (cf. 6.2.4), $1 \leq i \leq 3$, n'a que des valeurs propres de valuation α_i. On dira que w est α-régulier si $\delta(w) > \alpha_1 + \alpha_2 - 1$. On rappelle que pour tout $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$, on a défini en 6.2.4 un caractère $\nu_{w'} : \Delta^+ \to p^{\mathbb{Z}}$. Si $r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{C}_p^3$, on note $B(x,r)$ la boule fermée de $\mathbb{C}_p^3$ de centre x de rayon r.

8.2.2. Fixons $f \neq 0 \in S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ une forme propre pour $\mathcal{H}$.

Proposition 8.1. *Il existe un corps local F, $r \in |F| \cap]0,1[$, X un F-affinoide réduit, $\pi : X \to B(w,r)$ un F-morphisme fini, un morphisme d'anneau $a : \mathcal{H} \to A(X)^0$, et $x_f \in X(F)$ tels que :*

i) Pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, $a([Iu_iI])$ est un inversible de $A(X)$ et $x \mapsto v(a([Iu_iI])(x)) \in \mathbb{Q}$ est constante sur $X(\mathbb{C}_p)$, disons égale à α_i. On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

ii) Si $w' \in B(w,r) \cap (w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+})$ est α-régulier, l'application $X(\mathbb{C}_p) \longrightarrow Hom(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p)$,

$$x \mapsto (\chi_x : [IuI] \otimes h' \in \mathcal{A}(p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}' \mapsto \nu_{w'}(u) a([IuI]h')(x))$$

[17] Noter le $-w$ dans la définition

induit une bijection entre $\pi^{-1}(w')(\mathbb{C}_p)$ et l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$-valués de $\mathcal{H}$ apparaissant dans $S_{w'}^{cl,\alpha} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$, comptés sans multiplicité,

iii) χ_{x_f} est le caractère de $\mathcal{H}$ sur f.

iv) L'image de $\mathcal{H}$ dans $A(X)^0$ est d'adhérence compacte.

v) La restriction de π a chaque composante irréductible de X est surjective sur $B(w,r)$. Cette propriété est de plus encore vérifiée pour le changement de base de π à tout fermé irréductible de $B(w,r)$.

vi) $\pi^{-1}(B(w,r)(\mathbb{Q}_p)) \subset X(F)$.

8.2.3. Un point de $X(F)$ sera dit *classique* si $\pi(x) \in w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ et si le caractère χ_x de $\mathcal{H}$ qui lui correspond par le ii) de la proposition 8.1 est réalisé dans $S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$.

Corollaire 8.1. *Les points classiques sont Zariski-denses dans $X(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve : L'ensemble des points $w' \in (w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+}) \cap B(w,r)$ qui sont α-réguliers est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(A(B(w,r)))$. Les propriétés ii) et v) de la proposition 8.1, ainsi que le lemme I.6.3 concluent. $\square$

8.2.4. La proposition 8.1 est essentiellement une conséquence des techniques du chapitre I, à ceci près que nous expliquons ici comment gérer la présence du type J, et le fait que le niveau n'est pas nécessairement net (cf. I.4.1). Le reste de cette section est consacré à sa preuve. Afin de faciliter le travail du lecteur, nous reprenons en détail certaines des constructions faites au chapitre I.

Le cheminement de la preuve est le suivant. On commence par rappeler au §8.2.5 les propriétés essentielles de la famille des séries principales p-adiques de l'Iwahori de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, que l'on note M. Cette dernière nous permet de définir au §8.2.8 la famille S des espaces de formes automorphes p-adiques de type J et niveau K_f. La famille de formes automorphes recherchée est obtenue, à la Coleman, en découpant dans S une famille de "vecteurs propres" pour l'opérateur compact U_p, ce qui est achevé au lemme 8.9.

8.2.5. Soit $B := B(0,1)/\mathbb{Q}_p$ d'algèbre affinoide $A(B) := \mathbb{Q}_p\langle X_1, X_2, X_3\rangle$. Si $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$, nous avons défini en §6.2.4 un caractère $\nu_{w'} : \Delta^+ \to p^{\mathbb{Z}}$. Comme $I\Delta^+I = \coprod_{u\in\Delta^+} IuI$ (cf. I.2.5, ce qui est noté ici I, Δ^+ et $I\Delta^+I$, est respectivement noté $\Gamma_0(p)$, U et $\mathbb{M}$ *loc.cit.*), ce caractère se prolonge de manière unique en un caractère $I\Delta^+I \to p^{\mathbb{Z}}$ trivial sur I, que l'on notera encore $\nu_{w'}$.

Lemme 8.1. *Il existe un $A(B)$-module de Banach orthonormalisable M, muni d'une opération $A(B)$-linéaire du monoïde $I\Delta^+I$, tel que :*

(i) La spécialisation $M_{w'}$ de M en tout $w' \in w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+} \subset B(\mathbb{Q}_p)$ contient un sous $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$-module $M_{w'}^{cl}$ qui a la propriété que $M^{cl}_{w'} \otimes \nu_{w'}$ est $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$-isomorphe à $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$.

(ii) Les éléments de $I\Delta^+I$ agissent par des endomorphismes continus de norme ≤ 1 de M. Si $a<b<c \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{diag}(p^a,p^b,p^c)$ agit par un endomorphisme compact.

(iii) Soient $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ et $s := 1 + \mathrm{Min}(k'_1 - k'_2, k'_2 - k'_3)$, alors $\frac{\mathrm{diag}(1,p,p^2)}{p^s}$ est de norme ≤ 1 sur $M_{w'}/M_{w'}^{cl}$.

Preuve : Soit M' le $A(B)$-module noté

$$\mathcal{S}(1)_\chi, \;\; \chi = (\tau^{-k_3}, \tau^{-k_2}, \tau^{-k_1})$$

en I.3.6. On le munit de la représentation $A(B)$-linéaire de $I\Delta^+I$ notée [.] *loc. cit.*. Remarquons que si $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3)$, le plus haut poids de $V_{-w'}$ est $(k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2, -k'_1) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$ dans les notations *loc. cit.* C'est pourquoi l'on considère le $A(B)$-module $M := M' \otimes_{A(B)} A(B)$, l'application $A(B) \to A(B)$ étant le $\mathbb{Q}_p$-isomorphisme $(X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_2 - X_3, X_1 - X_2, -X_1)$. Ainsi $M_{(k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3)} = M'_{(k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2, -k'_1)}$.

L'orthonormalisabilité de M, ainsi que l'assertion (ii), découlent de la proposition I.3.1. L'assertion (i) est une conséquence de la combinaison du lemme I.3.5 et du cinquième point de la proposition I.3.1, la présence de la torsion par $\nu_{w'}$ étant expliquée en §I.3.5. Il reste à prouver iii). Soit $t = (k'_2 - k'_3, k'_1 - k'_2)$, il s'agit de démontrer, dans les notations du chapitre I §I.3.3 et §I.3.5, que $\frac{\mathrm{diag}(1,p,p^2)}{p^s}$ est de norme ≤ 1 sur $(\mathcal{S}^t/S_t) \otimes \nu_t$. Il suffit de démontrer la même assertion sur le $\mathbb{Q}_p$-Banach $(\mathcal{N}^t/B_t) \otimes \nu_t$, dont c'est un quotient. Mais ce dernier admet une base orthonormale explicite propre pour $\mathrm{diag}(1, p, p^2)$, formée de monômes en les $z_{i,j}$, $i > 1$, sur lesquels l'action est donnée par le lemme I.2.1. Un calcul immédiat conclut (ce calcul est de plus explicité dans la preuve du lemme I.4.8). □

8.2.6. Soient A une $\mathbb{Q}$-algèbre et V un $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module, on aura à considérer la suite :

$$\begin{tikzcd} H^0(V) \arrow[r, "\varphi_V", "\sim"'] & \oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i} \arrow[r, hook, bend left, "i_V"] & V^h \arrow[l, two heads, bend left, "p_V"] \end{tikzcd} \tag{28}$$

où φ_V est l'isomorphisme A-linéaire introduit en 8.1.3, i_V l'inclusion canonique, et $p_V := (\frac{\sum_{x\in\Gamma_i} x}{|\Gamma_i|})_i$ la projection $(\prod_i \Gamma_i)$-équivariante canonique, bien définie car V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On a $p_V.i_V = id$, ce qui identifie le A-module $H^0(V)$ à un facteur direct de V^h, et ce fonctoriellement en le $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module V, si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Le lemme qui suit donne une description (non canonique) de l'action des opérateurs de Hecke sur $H^0(V)$ en terme de φ_V et d'endomorphismes de V^h :

LEMME 8.2. *Soit $\zeta \in U(3)(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta_l = 1$ si $l|N$ et $\zeta_p \in IuI$, avec $u \in \Delta^+$. Notons $T(\zeta)$ l'opérateur de Hecke associé à la double classe $K_f\zeta K_f$, c'est un endomorphisme A-linéaire de $H^0(V)$. Il existe un entier r, ainsi que des $\sigma_j : V^h \to V^h$ et $T_j : V \to V$, $j = 1...r$, chacun dépendant de ζ, tels que :*

(i) σ_j est la composée d'une permutation des h-coordonnées sur V^h par la projection sur l'un des h facteurs V,

(ii) T_j est la multiplication par un élément de $(IuI)K_f^p$,

(iii) $\sum_{j=1}^{r} T_j.\sigma_j$ *est un endomorphisme de* V^h *préservant* $\oplus_i V^{\Gamma_i}$*, dont la restriction à ce dernier est* $\varphi_V.T(\zeta).\varphi_V^{-1}$.

Preuve : La preuve est identique à celle du lemme I.4.2 du chapitre I, auquel nous renvoyons donc le lecteur. □

8.2.7. On suppose dans ce qui suit que A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach A noethérienne commutative ultramétrique (cf. [**30**] A.1) dont la norme induit la norme usuelle sur $\mathbb{Q}_p$, et que V est un A-module de Banach normé par $|.|$, muni d'une action de $(I\Delta^+I)K_f$ par endomorphismes A-linéaires continus de V. La norme sup. sur V^h en fait un A-module de Banach, orthonormalisable si V l'est.

Lemme 8.3. *Sous les hypothèses ci-dessus,* $H^0(V)$ *est un* A*-module de Banach facteur direct topologique de* V^h.

Preuve : La norme de V^h induit la norme de $H^0(V)$ définie en 8.1.3. L'inclusion i_V est continue par définition, et p_V l'est aussi car les éléments de $\Gamma_i \subset K_f$ le sont. On en déduit que $H^0(V)$ est un facteur direct topologique de V^h, et donc que c'est un sous-A-module de Banach de V^h.

8.2.8. Fixons une norme de F_0-espace vectoriel sur $J^*(F_0)$ telle que $|J^*(F_0)| = |F_0|$. Notons $A(B/F_0) := F_0\langle X_1, X_2, X_3\rangle$. On munit M (resp. $J^*(F_0)$) de l'unique action de $(I\Delta^+I)K_f$ prolongeant celle de $I\Delta^+I$ (resp. de K_f), triviale sur K_f^p (resp. sur $I\Delta^+I$). Cela munit naturellement $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ d'une structure de $(I\Delta^+I)K_f$-module. On définit le $A(B/F_0)$-module normé des formes automorphes p-adiques pour $\mathrm{U}(3)$, de type J, comme étant

$$S := H^0(M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)),$$

muni de la norme discutée en §8.1.3.

Lemme 8.4. *(i) Le* $A(B_0/F)$*-module normé* S *est un* $A(B/F_0)$*-module de Banach, facteur direct topologique d'un* $A(B/F_0)$*-module de Banach orthonormalisable.*

(ii) Soit $\zeta \in U(3)(\mathbb{A}_f)$ *comme dans le lemme 8.2, l'opérateur de Hecke* $T(\zeta)$ *agit sur* S *par un endomorphisme* $A(B_0/F)$*-linéaire continu de norme* ≤ 1*. Si* $\zeta_p = \mathrm{diag}(p^a, p^b, p^c)$ *avec* $a < b < c$*, alors* $T(\zeta)$ *est compact.*

Preuve : D'après le lemme 8.1, M est $A(B)$-orthonormalisable. Comme $J^*(F_0)$ est un F_0-espace vectoriel de dimension finie tel que $|J^*(F_0)| = |F_0|$ (donc F_0-orthonormalisable), il vient que $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0) = M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ est aussi un $A(B/F_0)$-module de Banach orthonormalisable. Le lemme 8.1 (ii) assure que les éléments de $(I\Delta^+I)K_f$ agissent par endomorphismes continus sur M, et il est évident qu'ils agissent aussi de manière continue sur $J^*(F_0)$. Ainsi, $(I\Delta^+I)K_f$ agit sur $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ par endomorphismes continus. Le (i) découle alors du lemme 8.3.

Soient ζ comme dans le lemme 8.1, et $T(\zeta) = \sum_j T_j\sigma_j$ la décomposition donnée par le lemme 8.2. Il est évident que les σ_j sont des endomorphismes continus de V^h de norme ≤ 1. L'assertion (ii) du lemme 8.1, ajoutée au fait que les éléments de $(I\Delta^+I)K_f$ agissent sur $J^*(F_0)$ par des automorphismes d'ordre fini et donc continus de norme 1, assurent que les T_j sont aussi continus de norme ≤ 1 sur V. Ainsi, $\sum_j T_j\sigma_j$ est un endomorphisme de V^h de norme ≤ 1, et c'est à fortiori encore le cas de sa restriction à $\oplus_{i=1}^{h} V^{\Gamma_i}$, ce qui conclut par 8.2 (iii). Sous l'hypothèse supplémentaire $\zeta_p \in I\mathrm{diag}(p^a, p^b, p^c)I$ avec $a < b < c$, l'assertion de compacité se déduit de la compacité des T_j, qui découle de (ii) *loc. cit.*, du lemme 8.1 (ii), et de ce que $J^*(F_0)$ est de dimension finie sur F_0. □

8.2.9. Nous aurons besoin de deux types d'extension des scalaires pour le module S : l'évaluation en un point $x \in B(\mathbb{C}_p)$ et la restriction à un ouvert affinoide $\Omega \subset B$. Le contexte général est le suivant. On se replace dans le cadre du paragraphe 8.2.7, et on fixe A' une algèbre de Banach ayant même propriété que A, munie d'un morphisme contractant $A \to A'$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$(29)\qquad \begin{tikzcd} H^0(V)\widehat{\otimes}_A A' \arrow[r, "\varphi_V \otimes 1", "\sim"'] \arrow[d, "can"'] & (\oplus_{i=1}^{h} V^{\Gamma_i})\widehat{\otimes}_A A' \arrow[r, "i_V \otimes 1"] \arrow[d, "can"'] & (V^h)\widehat{\otimes}_A A' \arrow[d, "can"'] \\ H^0(V\widehat{\otimes}_A A') \arrow[r, "\varphi_{V\widehat{\otimes}_A A'}", "\sim"'] & \oplus_{i=1}^{h} (V\widehat{\otimes}_A A')^{\Gamma_i} \arrow[r, hook, "i_{V\widehat{\otimes}_A A'}"] & (V\widehat{\otimes}_A A')^h \end{tikzcd}$$

LEMME 8.5. *Les flèches verticales sont des isométries, celle de gauche est Hecke-équivariante, et $i_V \otimes 1$ est injective.*

Preuve : C'est évident pour la flèche verticale de droite. Les relations $p_{V'} i_{V'} = id$ pour $V' = V$ et $V\widehat{\otimes}_A A'$ entraînent que $i_V \otimes 1$ est injective, puis que la flèche verticale du centre est une isométrie. Comme $\varphi_{V\widehat{\otimes}_A A'}$ et $\varphi_V \otimes 1$ sont des isométries par définition, cela entraîne que la flèche verticale gauche est une isométrie. L'assertion de commutativité aux opérateurs de Hecke est triviale. □

8.2.10. Soient U_1, U_2 et $U_p \in \mathcal{A}(p) \subset \mathcal{H}$ les opérateurs de Hecke associés respectivement aux éléments de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$ triviaux à toutes les places sauf en p où ils valent $u_1 = \mathrm{diag}(1, 1, p)$, $u_2 = \mathrm{diag}(1, p, p)$ et $u_1 u_2 = \mathrm{diag}(1, p, p^2)$. On a $U_p = U_1 U_2$ (cf. 5.1). Le lemme 8.4 (ii) implique en particulier le :

COROLLAIRE 8.2. *U_p agit sur S par un endomorphisme compact.*

En particulier, si $F_0 \subset F \subset \mathbb{C}_p$ est un corps complet et $A(B/F_0) \to F$ est l'évaluation en un point $x \in B(F)$, U_p agit sur $S_x := S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} F = H^0(M_x \otimes_{F_0} J^*(F_0))$ (cette dernière égalité découlant du lemme 8.5) par un endomorphisme compact. Soit $w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$. D'après le lemme 8.1 (ii), et par exactitude du foncteur $V \mapsto H^0(V)$ sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, nous disposons d'une inclusion $\mathcal{H}'$-linéaire[18] :

$$S_{w'}^{cl} \hookrightarrow H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$$

Elle commute de plus à l'action de $[IuI]$, $u \in \Delta^+$, si l'on renormalise ce dernier agissant sur $S_{w'}^{cl}$, en le divisant par $\nu_{w'}(u)$ (toujours d'après 8.1 (ii)). On a alors le

LEMME 8.6. *Soient $s \in \mathbb{Q}$, $w' = (k_1' \geq k_2' \geq k_3') \in w + (p-1)\mathbb{Z}^3$ et $S_{w'}^{s}$ le plus grand sous-espace de dimension finie U_p-stable de $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ sur lequel U_p n'a que des valeurs propres de valuation s. Si $\mathrm{Min}(k_1' - k_2', k_2' - k_3') > s - 1$, alors $S_{w'}^{s} \subset S_{w'}^{cl}$.*

[18] Le $\mathbb{Q}_p$-vectoriel $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$ étant une représentation absolument irréductible de I, cette inclusion est canonique à la multiplication par un élément de $\mathbb{Q}_p^*$ près. Cependant, le choix, pour chaque w', d'une quelconque d'entre elle, suffit à nos besoins.

Preuve : Le foncteur $V \mapsto H^0(V)$ étant exact sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to S_{w'}^{cl} \to H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to 0, \tag{30}$$

la flèche $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ étant U_p-équivariante[19]. La décomposition de U_p agissant sur $H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ donnée par le lemme 8.2.6, combinée au lemme 8.1 (iii), montre alors que

$$\frac{U_p}{p^{1+\mathrm{Min}(k_1'-k_2', k_2'-k_3')}}$$

est de norme ≤ 1 sur $H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$. En particulier, sous l'inégalité de l'énoncé, U_p ne peut admettre de valeur propre de valuation $\leq s$ sur ce dernier. L'exactitude au centre de (30) conclut. □

8.2.11. Maintenant que nous savons que U_p est compact sur S, nous voudrions lui appliquer le théorème spectral de Coleman, afin de "découper" dans S une famille de vecteurs propres contenant f. Un léger problème technique est que S n'est pas orthonormalisable, mais simplement facteur direct d'un tel module. La généralisation adéquate des résultats de Coleman dans ce cadre a été reprise par Buzzard dans un travail en préparation ([**22**]). Nous nous ramenons ici de manière *ad hoc* au cas traité par Coleman.

Soient A une $\mathbb{Q}$-algèbre, V un $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module et U un endomorphisme de $H^0(V)$. La donnée de φ_V nous permet de le prolonger par 0 en un endomorphisme $\widetilde{U}$ de V^h défini par

$$\widetilde{U} := i_V \, \varphi_V \, U \, \varphi_V^{-1} \, p_V$$

On se replace dans les hypothèses de §8.2.7. Si U est un endomorphisme continu (resp. compact) de $H^0(V)$, alors $\widetilde{U}$ a la même propriété car i_V et p_V sont continus. Fixons V orthonormalisable et U un endomorphisme compact de V, on peut alors définir la série caractéristique

$$\det(1 - TU_{|H^0(V)}) := \det(1 - T\widetilde{U}_{|V^h}) \in 1 + TA\{\{T\}\}, \tag{31}$$

par [**30**] théorème A.2.1.[20].

Remarques :

i) Dans le cas particulier où A est un corps local, on rappelle que tout A-module de Banach W tel que $|W| = |A|$ est orthonormalisable ([**93**] proposition 1). Cela vaut donc en particulier pour $H^0(V)$ si $|V| = |A|$, auquel cas la notation ci-dessus est cohérente, *i.e.* $\det(1 - TU_{|H^0(V)})$ est bien la série caractéristique de U sur $H^0(V)$ (cf. [**93**] lemme 2).

[19] La première l'est seulement à multiplication par $\nu_{w'}(\mathrm{diag}(1, p, p^2))$ près.

[20] Noter que la condition (*) de *loc. cit.* est automatiquement vérifiée sous nos hypothèses car $A^m \supset \mathbb{Q}_p^*$ qui est non borné. De plus, comme Buzzard l'a remarqué, le théorème A.2.1 *loc.cit.* repose sur le lemme A.1.6. *loc.cit.*, qui est incorrect si l'on omet de supposer que A est noethérien.

ii) Si $A \to A'$ est un morphisme contractant d'algèbre de Banach comme en 8.2.9, alors $V\widehat{\otimes}_A A'$ est A'-orthonormalisable si A l'est par [**30**] proposition A.1.3. Le lemme 8.5 montre alors que si U est un opérateur de Hecke agissant de manière compacte sur V, la formation de $\det(1 - TU_{|H^0(V)}) \in 1 + TA\{\{T\}\}$ commute à l'extension des scalaires par des morphismes d'algèbre de Banach contractants. Afin de ne pas alourdir la rédaction, nous utiliserons dans ce qui suit librement ce fait, ainsi que le lemme 8.5, sans le mentionner explicitement.

Le corollaire 8.2 autorise à poser :

$$g := \det(1 - TU_{p_{|S}}) \in 1 + TA(B/F_0)\{\{T\}\}$$

COROLLAIRE 8.3. *g est l'unique fonction analytique sur $B \times \mathbb{A}^1_{rig}$ telle que pour tout $w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$,*

$$g(w', T) = \det(1 - TU_{p_{|H^0(M_{w'}\otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))}})$$

Preuve : L'égalité ci-dessus découle des deux remarques précédant le corollaire. L'unicité vient de la Zariski-densité de $w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ dans $B(\mathbb{C}_p)$. Elle ne sera pas utilisée dans ce qui suit. □

8.2.12. Soient λ_1, λ_2 et $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ les valeurs propres respectives dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de U_1, U_2 et U_p sur f. Le lemme suivant assure que f est *de pente finie.*

LEMME 8.7. *La valeur propre $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ de U_p agissant sur f n'est pas nulle.*

Preuve : La forme automorphe complexe correspondant à f par ι (cf. 8.1.1) engendre une somme finie de représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$. Soit π_p la composante locale en p d'une quelconque de ces représentations. C'est une représentation complexe lisse irréductible de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ ayant un vecteur I-invariant non nul sur lequel U_p agit par $\iota^{-1}(\lambda)$. Mais la représentation de $\mathcal{A}(p)$ sur π_p^I se prolonge à toute l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$. Cela conclut car les $[IuI]$ sont inversibles dans cette dernière si $u \in \Delta^+$ (cf.5.1). □

Le corollaire 8.3 appliqué à $w' = w$ entraîne alors le :

COROLLAIRE 8.4. $g(w, \lambda^{-1}) = 0$.

Le lemme 8.7 entraîne de plus que les λ_i sont non nuls. On pose $\beta_i = v(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$, $\beta := \beta_1 + \beta_2 = v(\lambda) \in \mathbb{Q}$. Dans l'exemple de la figure ci-contre, (w, λ^{-1}) est le point marqué de l'hypersurface de Fredholm associée à g.

8.2.13. Nous allons montrer dans ce qui suit comment factoriser g "au voisinage de (w, λ^{-1})". Soit $F \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ un corps local contenant F_0 et les λ_i.

LEMME 8.8. *Il existe une boule F-affinoide $B(w, r) \subset B$ ainsi qu'une factorisation $g_{|A(B(w,r))} = PQ$ dans $A(B(w,r))\{\{T\}\}$ tels que :*

(a) $P \in 1 + TA(B(w,r))[T]$ est de coefficient dominant inversible,

(b) $(P, Q) = 1$ dans $A(B(w,r))\{\{T\}\}$,

(c) $\forall x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, $P(x,T)$ a toutes ses racines de valuation $-\beta$, et $Q(x,T)$ n'en a pas.

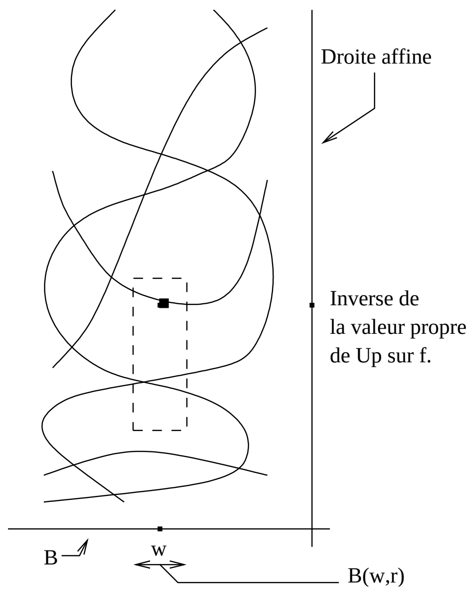

FIG. 2. L'hypersurface de Fredholm $g(x,t)=0$ dans $B\times\mathbb{A}^1_{rig}$

Preuve : On applique le lemme 8.11 (reporté à la fin de cette section) à la donnée du F_0-affinoide $X=B/F_0$, la série g, $x_0=w$, et $s=\beta$. Il nous fournit un ouvert F_0-affinoide Ω de B contenant x_0, tel que le polygone de Newton de chacune des évaluations $g(x,T)$, $x\in\Omega(\mathbb{C}_p)$, ait même partie de pente $\leq s$ que $g(w,T)$. Cette propriété vaut donc encore pour toute boule F_0-affinoide $B(w,r)$ assez petite incluse dans Ω, on fixe un tel $r\in|F_0|$ avec cette propriété. La proposition I.5.4 du chapitre I s'applique à $K=F$, $X=B(w,r)/F$, à la série g et nous fournit la décomposition désirée. Il suffit en effet de prendre pour P l'unique P_i de la proposition *loc.cit.* admettant la pente β, et pour Q le produit des autres P_i avec le S *loc.cit.* . $\square$

Nous sommes finalement en mesure de démontrer le :

LEMME 8.9. *Quitte à diminuer r, $S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r))$ admet un sous-$A(B(w,r))$-module $\mathcal{M}$ facteur direct topologique, tel que :*

(i) $\mathcal{M}$ est projectif de rang fini sur $A(B(w,r))$,

(ii) $\mathcal{M}$ est stable sous l'action des opérateurs de Hecke, et U_p y agit par un inversible,

(iii) Pour tout $x\in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, $\mathcal{M}_x$ est le plus grand sous-espace de S_x sur lequel U_p, U_1 et U_2 n'ont que des valeurs propres de valuation β, β_1 et β_2 respectivement.

Preuve : Appliquons les théorèmes A.4.3 et A.4.5 de [**30**] (voir aussi I.6.2.1), à l'endomorphisme compact $\widetilde{U_p}$ du $A(B(w,r))$-module de Banach orthonormalisable

$$((M\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r)))\otimes_{F_0}J^*(F_0))^h,$$

ainsi qu'à la factorisation $g_{|A(B(w,r))} = PQ$ donnée par les points (a) et (b) du lemme 8.2.13. On en déduit qu'il existe une décomposition en somme directe de sous-$A(B(w,r))[U_p]$-modules fermés

$$(M\widehat{\otimes}_{A(B)}A(B(w,r)) \otimes_{F_0} J^*(F_0))^h = M_1 \oplus M_2,$$

tels que :

(a') M_1 est projectif de rang fini $\deg(P)$, $\det(1 - T\widetilde{U_p}_{|M_1}) = P(T)$,

(b') Si $P^*(T) = T^{\deg(P)}P(1/T)$, alors $P^*(\widetilde{U_p})_{|M_2}$ est inversible.

L'assertion (a') assure que $\widetilde{U_p}$ est inversible sur M_1, et donc que $M_1 \subset S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r))$ et sur ce dernier $\widetilde{U_p}$ coïncide avec U_p. De plus, (a') et (b') montrent que $M_1 = \mathrm{Ker}(P^*(U_p))$, il est donc stable par $\mathcal{H}$. Le $A(B(w,r))$-module M_1 remplit donc les conditions (i) et (ii) de l'énoncé, mais pas tout à fait (iii).

Soit $g' := \det(1 - TU_{1|M_1})$, il est de degré $\deg(P)$ car $U_1U_2 = U_p$ est inversible restreint à M_1. En réutilisant le lemme 8.11, il vient que quitte à diminuer r, on peut supposer que les polygones de Newton des polynômes $g'(x,T)$, $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, sont tous égaux. Dans ce cas, la proposition I.5.4 s'applique et nous fournit une décomposition $g' = RR' \in A(B(w,r))[T]$, avec $R \in 1 + TA(B(w,r))[T]$ correspondant à la pente β_1, et $(R, R') = 1$. Une relation de Bezout entre R et R' nous donne un élément $e \in A(B(w,r))[U_1]$ idempotent avec la propriété que $\det(1 - TU_{1|eM_1}) = R$. De plus, eM_1 est encore $\mathcal{H}$-stable, et projectif de rang fini. Le $A(B(w,r))$-module $\mathcal{M} := eM_1$ satisfait donc encore à (i) et (ii). Soit $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, les propriétés (a') et le lemme 8.8 (c) assurent que U_p n'admet que des valeurs propres de valuation β sur $M_x \supset \mathcal{M}_x$. De même, le choix de R montre que $\mathcal{M}_x$ est le plus grand sous $\mathbb{C}_p$-espace de M_x sur lequel U_1 n'admet que des valeurs propres de valuation β_1. L'assertion sur U_2 découle de ce que $U_p = U_1U_2$, ce qui conclut (iii).$\square$

8.2.14. Nous en venons (enfin !) à la preuve proprement dite de la proposition 8.1. Nous renvoyons au paragraphe I.6.2.2 du chapitre I pour plus de détails. On reconsidère le $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w,r))$-module $\mathcal{M}$ donné par le lemme 8.9, qui est projectif de rang fini sur $A(B(w,r))$.

L'image de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w,r))$ dans $\mathrm{End}_{A(B(w,r))}(\mathcal{M})$, munie de la norme induite par ce dernier, est une sous-$A(B(w,r))$-algèbre de Banach commutative finie. Elle est donc F-affinoide, pour un certain F-affinoide que l'on note X. Par construction, on dispose d'un morphisme fini $\pi : X \to B(w,r)$, déduit de l'inclusion $A(B(w,r)) \subset A(X)$, ainsi que d'une application canonique $a : \mathcal{H} \to A(X)$. L'image de a est constituée d'éléments de norme ≤ 1 d'après le lemme 8.4 (ii), et donc $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$.

Soit $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, m l'idéal maximal de $A(B(w,r))\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p$ noyau de l'évaluation en x, le lemme I.6.2 assure que l'application canonique

$$(A(X)\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p)/m(A(X)\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{M}_x)$$

est de noyau nilpotent. En particulier,

LEMME 8.10. *L'application qui à $z \in \pi^{-1}(\{x\})(\mathbb{C}_p)$ associe le caractère $\chi_z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_p$ donné par l'évaluation en z induit une bijection sur l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$-valués de $\mathcal{H}$ apparaissant dans $\mathcal{M}_x$, comptés sans multiplicité.*

Montrons la première assertion de la propriété 8.1. Par le (ii) du lemme 8.9, $a(U_p) = a(U_1)a(U_2)$ est un inversible de $\mathrm{End}_{A(B(w,r))}(\mathcal{M})$, et donc de $A(X)$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Cela montre que $a([Iu_iI])$ est un inversible de $A(X)$ si $i = 1$ et 2. C'est encore vrai pour $i = 0$ et 3, mais c'est trivial, car ils agissent sur S par l'identité. On peut en particulier définir les F_i comme dans l'énoncé. Pour conclure i), il reste à voir que les applications $x \in X(\mathbb{C}_p) \mapsto v(a([Iu_i])(x))$ sont constantes si $i = 1, 2$. Mais cela découle du lemme 8.10 et de la propriété (iii) du lemme 8.9. On a $\alpha_i = \beta_i$, si $i = 1, 2$, $\alpha_3 = 0$.

Soit $x = w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$, si w' est α-régulier, on est exactement dans les hypothèses du lemme 8.6 avec $s = \alpha_1 + \alpha_2$. L'assertion (iii) du lemme 8.9 entraîne donc que $\mathcal{M}_x \subset S_{w'}^{cl} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$. Comme on l'a vu en §8.2.10, cette inclusion commute à l'action de $\mathcal{H}'$, ainsi qu'à celle de $\mathcal{A}(p)$ si on la tord par $\nu_{w'}$ sur $S_{w'}^{cl} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$. Le lemme 8.10 implique alors l'assertion ii) de la proposition 8.1.

D'après le lemme 8.9 (iii), $f \in \mathcal{M}_w$. Comme elle est propre pour $\mathcal{H}$ par hypothèse, le lemme 8.10 lui associe un unique point $x_f \in X(\mathbb{C}_p)$, ce qui défini ce dernier et montre l'assertion iii).

Prouvons l'assertion iv). Soit $0 < r' < r \in |F|$, alors l'inclusion $B(w,r') \hookrightarrow B(w,r)$ est compacte sur les algèbres affinoides, et a donc la propriété d'envoyer donc tout ensemble borné de $A(B(w,r))$ dans un ensemble compact de $A(B(w,r'))$, d'après [**93**] prop. 5. Le choix d'une quelconque surjection $A(B(w,r))$-linéaire stricte (cf. [**15**] 3.7.3 cor. 5)

$$A(B(w,r))^n \to A(X) \to 0$$

montre immédiatement que $A(X) \to A(X)\widehat{\otimes}_{A(B(w,r))}A(B(w,r'))$ a encore la propriété énoncée ci-dessus. Notons que l'application canonique

$$A(X) \otimes_{A(B(w,r))} A(B(w,r')) \to \mathrm{End}_{A(B(w,r'))}(\mathcal{M} \otimes_{A(B(w,r))} A(B(w,r')))$$

est injective par platitude de $A(B(w,r)) \to A(B(w,r'))$ (cf.[**15**] 7.3.2 cor. 6). Ainsi, quitte à choisir au début du §8.2.14 un r strictement plus petit que celui choisi jusqu'à présent, ce que l'on fait, on a montré que l'on peut supposer que $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$ est à valeur dans un ensemble compact de ce dernier, *i.e.* l'assertion iv).

La première assertion de la propriété v) de la proposition 8.1 est une conséquence du lemme I.6.4 et de ce que les algèbres affinoides sont des anneaux de Jacobson par [**15**] chap. 6 proposition 3 (en particulier, X est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(A(X))$). Pour la seconde assertion de v), on applique le lemme I.6.2 à $A = A(B(w,r))$, $M = \mathcal{M}$, $\mathfrak{h} = A(X)$, et I l'idéal premier définissant le fermé de $B(w,r)$ de l'énoncé. On en conclut que l'application canonique de $A(X)/IA(X)$ vers son image dans $\mathrm{End}_{A(B(w,r))/I}(\mathcal{M}/I\mathcal{M})$ est un isomorphisme sur les spectres. L'assertion v) s'en déduit en appliquant I.6.4 à à cette $A(B(w,r))/I$-algèbre image.

Prouvons vi). On rappelle (cf. 8.2.13) que F est un corps local contenant F_0 et les λ_i, qu'il nous reste à fixer. En particulier, $A(X)$ est défini sur $F_0[\lambda_1, \lambda_2]$, ainsi que $\pi : X \to B(w, r)$. Comme ce dernier est un morphisme fini, ses fibres sont de degré borné. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ de degré donné, on peut choisir le corps local F de façon à ce que $\pi^{-1}(B(w,r)(F_0)) \subset X(F)$, ce que l'on fait. Cela implique l'assertion vi), et aussi que $x_f \in X(F)$.

Enfin, si X n'est pas réduit, on le remplace par sa nilréduction, ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé de la proposition 8.1. $\square$

LEMME 8.11. *Soient F un corps local, X un F-affinoide réduit, et $g \in 1 + TA(X)\{\{T\}\}$ une fonction rigide-analytique sur $X \times \mathbb{A}^1$. On fixe $s \in \mathbb{Q}$, $x_0 \in X(F)$, et on note $\mathcal{P}$ la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x_0, T) \in 1 + TF\{\{T\}\}$.*

Il existe un ouvert F-affinoide $\Omega \subset X$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in \Omega(\mathbb{C}_p)$, la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x, T) \in 1 + T\mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ coïncide avec $\mathcal{P}$.

Preuve : Soient $s'' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ la plus petite pente de $g(x_0, T)$ strictement supérieure à s, et $s' \in \mathbb{Q}$ tel que $s' \in]s, s''[$. On écrit $g = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$, $a_n \in A(X)$. Comme g converge sur $X \times B(0, p^{-s'})$, on a $|a_n| p^{ns'} \underset{n \to \infty}{\to} 0$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in X(\mathbb{C}_p)$, $\forall n > N \in \mathbb{N}$, $v(a_n(x)) \geq n(s + s')/2$. Ainsi, pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x, T) \in 1 + T\mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ est de longueur $\leq N$ (cf. figure ci-contre).

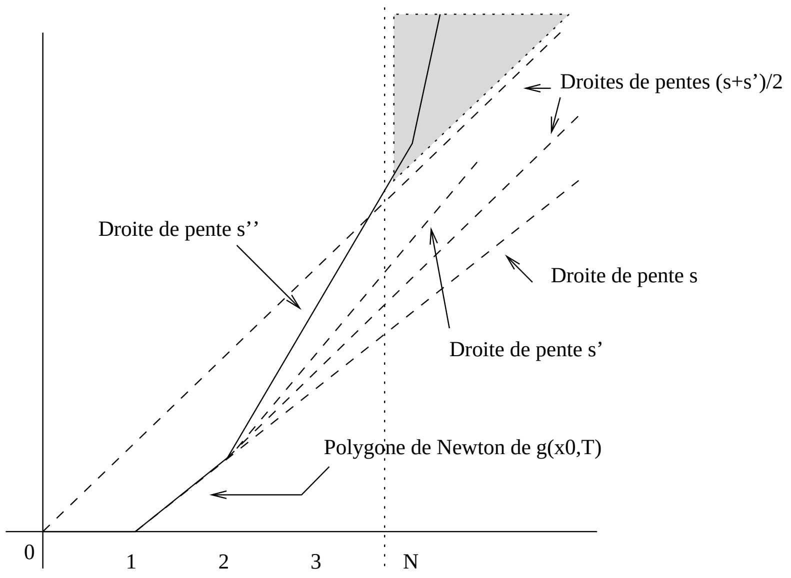

FIG. 3. Illustration de la preuve du lemme.

Soit $N' > s$ un entier, Ω l'ouvert F-affinoide de X défini par les conditions :

(i) $\forall i \leq N$ tel que $a_i(x_0) \neq 0$, $|a_i/a_i(x_0) - 1| \leq 1/p$,

(ii) $\forall i \leq N$ tel que $a_i(x_0) = 0$, $|a_i| \leq p^{-iN'}$.

Alors $x_0 \in \Omega(F)$ et Ω convient. $\square$

8.3. Pseudo-caractères galoisiens.

8.3.1. On se replace dans les hypothèses du paragraphe précédent. Fixons $x \in X(F)$ un point classique, et $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ un vecteur de caractère χ_x sous $\mathcal{H}$. On peut considérer un constituant irréductible Π de la représentation automorphe de U(3) engendrée par f, Π_l est alors déterminée par χ pour tout l premier ne divisant pas N. En particulier, la représentation galoisienne p-adique continue semi-simple associée à Π dans 3.2.2, que nous noterons disons $V(x)$, ne dépend que de x et pas du Π choisi, par le théorème de Cebotarev. Soit $T(x) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to F$ la trace de cette représentation, elle est continue et la détermine. Si v est une place finie décomposée de E, divisant un premier $l \in \mathbb{Z}$, on identifie $G(\mathbb{Q}_l)$ avec $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbb{Q}_l \to E_l$. D'après §3.2.2 (20) et 5.2.1, si l ne divise pas Np, on a la relation :

$$T(x)(\mathrm{Frob}_v) = l^{-1}a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x) \tag{32}$$

Si $T : E \to A(X)$ est une application d'un ensemble E à valeur dans $A(X)$, $x \in X(F)$, on notera T_x la composition de T par l'évaluation en x. On renvoie en 7.2.1 pour les généralités sur les pseudo-caractères.

Corollaire 8.5. *Il existe un unique pseudo-caractère continu de dimension* 3,

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to A(X)$$

tel que pour tout $x \in X(F)$ classique, $T_x = T(x)$. Il satisfait $\forall g \in G$, $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$.

Preuve : Nous allons appliquer la proposition I.7.1 du premier chapitre. L'espace rigide est l'affinoide X, $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$, S' est l'ensemble des places finies de E décomposées sur $\mathbb{Q}$ ne divisant pas Np, et si $v \in S'$ divise $l \in \mathbb{Z}$, $F_v := \mathrm{Frob}_v$ et $a_v := l^{-1}a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])$, où l'on a identifié $G(\mathbb{Q}_l)$ avec $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$ via l'isomorphisme $\mathbb{Q}_l \to E_v$.

Notons que X étant affinoide, la topologie de $\mathcal{O}_X^{rig}(X) = A(X)$ utilisée *loc. cit.* est simplement la topologie d'algèbre de Banach de $A(X)$ (prendre $\Omega = X$). La réunion des classes de conjugaison des F_v avec $v \in S'$ est dense dans Γ par le théorème de Cebotarev. Soient $n = 3$, Z l'ensemble des points classiques de X (cf. §8.2.3), $\rho(z) := V(z)$ défini dans §8.3.1, alors le lemme 8.1 et la formule (32) assurent que l'hypothèse (H) *loc. cit.* est satisfaite. L'existence de $T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to A(X)$ satisfaisant la première assertion du corollaire est alors la conclusion de I.7.1.

Si $g \in G$, la relation $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$ se vérifie sur un ensemble Zariski-dense car X est réduit. Mais si $x \in Z$, nous venons de montrer que T_x est la trace de $V(x)$ qui satisfait $V(x)^{\perp} \simeq V(x)$ par §3.2.2, ce qui conclut la seconde assertion du corollaire. $\square$

8.3.2. Nous aurons besoin d'un dernier fait, analogue de la proposition I.6.9 du chapitre I :

PROPOSITION 8.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X(F)$ classique, si $\delta(\pi(x)) > C$ alors $V(x)$ est cristalline. En particulier ces points sont Zariski-dense.*

Preuve : Soit $x \in X(F)$ classique, on choisit $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ comme en §8.3.1, ainsi que Π. On sait que Π_p est engendrée par ses I-invariants, c'est donc un sous-quotient d'une induite complète du Borel $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ pour un certain ψ comme dans 5.2.1 (cf. [**25**] prop. 2.6). Pour voir que $V(x)$ est cristalline il suffit de montrer que Π_p est non ramifiée d'après 3.3, ou mieux que $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ est irréductible. Or on sait que ceci se produit dès que $\forall i \neq j,\ \psi_i(p)/\psi_j(p) \neq p$ ([**110**] 4.2). Il se trouve que si $\pi_i(x) = (k_1, k_2, k_3)$, $(a_1, a_2, a_3) := (-k_1 - 1, -k_2, -k_3 + 1)$ alors §6.2.4 montre que

$$p^{a_i}\iota(\psi_i(p)) = \frac{\chi_x(U_i^{\pi(x)})}{\chi_x(U_{i-1}^{\pi(x)})}$$

La proposition 8.1 i) conclut l'existence de C. La seconde assertion s'en déduit à la manière du corollaire 8.1. $\square$

8.4. Déformations de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^{\perp}$.

8.4.1. On reprend les notations de 8.2.1, avec $N := \mathrm{cond}(\chi_0)$, $K_f = \prod K_l$ où :
- Si est l premier à $p\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe défini en 4.2.3, 4.3.2, 4.3.3 selon que l est décomposé, inerte ou ramifié,
- Si l divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe $K_J(l)$ défini en 4.2, $J := \otimes_{l|N}(J(l) \otimes \chi_0 \circ \det)$ où $J(l)$ est la représentation de $K_J(l)$ définie aussi en 4.2.

On reconsidère la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de $\mathrm{U}(3)$, et on fixe dans tout ce qui suit $\sigma \in \{1, (2,\ 3), (1,\ 3,\ 2)\}$ accessible pour $\pi(\chi_0)$ (cf. §6.2.3). On pose

$$w := (\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1) \in \mathbb{Z}^{3,+}$$

On peut choisir un $f \neq 0 \in \pi(\chi_0)^I \cap (S^{cl}_w \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p)$ propre pour $\mathcal{H}$, de caractère sous $\mathcal{A}(p)$ correspondant à σ comme dans 6.2.3. On applique alors la proposition 8.1 à ce f, puis 8.5 et 8.3.2 aux conclusions de 8.1, ce qui nous fournit un corps local F, un F-affinoide X, $x_f \in X(F)$, $B(w,r) \subset \mathbb{A}^3$, un morphisme F-affinoide fini $\pi : X \to B(w,r)$, un pseudo-caractère T, et $C > 0$ comme dans ces propositions. On pose :

$$F_i := a([Iu_iI])/a([Iu_{i-1}I]) \in A(X),\ i \in \{1,2,3\}$$

Les F_i sont des inversibles de $A(X)$ d'après 8.1 i).

8.4.2. Il sera commode de raisonner en terme des poids de Hodge-Tate des $V(x)$ plutôt que de leurs "poids automorphes" $\pi(x)$. On définit à cet effet (cf. §6.2.2) $\kappa : X \to B(\kappa(w), r)$ comme étant la composée de π avec $(x,y,z) \to (-x-1, -y, -z+1)$. Ainsi, si $x \in X(F)$ est classique, $V(x)$ est de Hodge-Tate de poids $\kappa(x)$. On pose

$$\kappa_0 := \kappa(w) = (-\frac{k+1}{2}, -\frac{k-1}{2}, 0)$$

8.4.3. Quitte à prendre une extension finie de F, comme le précisera sa preuve, on a la

PROPOSITION 8.3. *Il existe :*

a) Un F-affinoide Y intègre régulier de dimension 1, $y_0 \in Y(F)$,

b) Une représentation continue semi-simple

$$\rho_{K(Y)} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to GL_3(K(Y))$$

satisfaisant (ABS), $\rho_{K(Y)}^{\perp} \simeq \rho_{K(Y)}$ et $tr(\rho_{K(Y)}(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E))) \subset A(Y)$,

c) Un F-morphisme

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) : Y \longrightarrow \mathbb{A}^3, \ \kappa_3 := 0, \ \kappa(y_0) = \kappa_0,$$

d) Une partie $Z \subset Y(F)$ telle que $\kappa(Z) \subset \kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}$,

e) Des fonctions F_1, F_2 et F_3 dans $A(Y)$, chacune de valuation constante sur X,

f) Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\lambda_i \in F^*$ tel que $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$,

le tout satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) Pour tout ouvert affinoide Ω de Y contenant y_0, la fonction

$$x \in Z \mapsto \mathrm{Min}(\kappa_2(x) - \kappa_1(x), \kappa_3(x) - \kappa_2(x)) \in \mathbb{N}$$

est non majorée sur $Z \cap \Omega$, d'image incluse dans $\mathbb{N}^{\geq Max(C,k)}$. En particulier, $Z \cap \Omega$ est Zariski-dense dans Ω,

ii) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho_z^{ss} := \rho_{K(Y),z}^{ss}$ (cf. 7.1) est la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe π irréductible de $U(3)$ telle que $Hom_{K_f}(J, \pi_f) \neq 0$,

iii) $\rho_{y_0}^{ss} \simeq 1 \oplus \chi_p \oplus \chi_p^{\perp}$.

iv) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $(\rho_z^{ss})_{|D_{v_1}}$ est cristalline de poids de Hodge-Tate $\kappa(z)$. Elle est raffinée par

$$(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), p^{\kappa_2(z)}F_2(z), p^{\kappa_3(z)}F_3(z))$$

v) Ce raffinement est $\mathcal{R}(\sigma)$ en y_0.

Preuve : Soit $B \subset B(\kappa_0, r) \subset \mathbb{A}^3$, le fermé affinoide de $B(\kappa_0, r)$ défini par $x_3 = 0$, et $x_2 = 2x_1 + \frac{k-3}{2}$. Alors $\kappa_0 \in B(F)$. On pose :

$$\mathcal{Z} := \{z \in B(F) \cap (\kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}), \ -\delta(z) > \mathrm{Max}(C, k, \alpha_1 + \alpha_2 - 1)\}$$

Le choix de B, assez arbitraire, est tel que les fonctions $x_2 - x_1$ et $-x_2$ sont non bornées sur $U \cap \mathcal{Z}$ pour tout U ouvert affinoide de B contenant κ_0.

On considère $X_B := X \times_{B(\kappa_0,r)} B$, c'est un F-affinoide de dimension 1, $x_f \in X_B(F)$. Le morphisme déduit par extension des scalaires $\kappa_B : X_B \to B$ est encore fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de X_B d'après la proposition 8.1 v). On choisit alors X' une composante irréductible (réduite) de dimension 1 de X_B contenant x_f.

Le pseudo-caractère T peut être vu à valeurs dans $A(X')$, par composition $A(X) \to A(X_B) \to A(X')$, et on peut appliquer le lemme 7.2 à la donnée de $A(X')$ et T. Il nous fournit un F-affinoide intègre Y, régulier de dimension 1, muni d'un morphisme fini et surjectif $h : Y \to X'$, ainsi qu'une représentation semi-simple $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS). Quitte à remplacer F par une extension finie, on peut choisir $y_0 \in Y(F)$ tel que $h(y_0) = x$. Notant que $T(g^{-1}) = T(\tau.g.\tau)$ d'après 8.5, on a prouvé a) et b).

On définit κ comme étant la composée $Y \xrightarrow{h} X' \hookrightarrow X_B \xrightarrow{\kappa_B} B$. Cela prouve c). Notons que $\kappa : Y \to B$ est fini et surjectif, car on a vu que h est $X' \to B$ le sont. De plus, κ est plat, car c'est le cas des extensions finies d'anneaux de Dedekind. On pose $Z := \kappa^{-1}(\mathcal{Z})$, il satisfait d) par 8.4.2 et i) par choix de $\mathcal{Z}$ et platitude de κ. X' étant un fermé de X, on peut y restreindre les F_i de 8.4.1, et les définir sur Y en les composant au morphisme $h : Y \to X'$. Ce sont ces derniers que l'on choisit pour e), l'assertion sur les valuations des F_i est déjà satisfaite sur X par construction (cf. prop. 8.1 i)), ainsi que f).

Soit $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho^{ss}_{K(Y),z}$ est la représentation semi-simple de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ de trace $T_z = T_{h(z)}$ (cf. 7.1, 8.5). Par choix de Z et 8.1 iii), $h(z) \in X(F)$ est un point classique, et l'assertion ii) découle donc de 8.3.1 et 8.5. On déduit alors iii) de ii), 8.1 iii) et du choix de f dans 8.4.1.

La première assertion de iv) est alors une conséquence de ii), 6.2.2, 8.4.2, ainsi que 8.3.2 et le fait que $\mathrm{Min}(\kappa_2(z) - \kappa_1(z), \kappa_3(z) - \kappa_2(z)) > C$ par i). La seconde assertion, ainsi que v), découlent de 6.2.3 et 6.1.2.

Enfin, quitte à remplacer Y par un ouvert F-affinoide de ce dernier contenant y_0, ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé, on peut supposer que f) est satisfaite. $\square$

Remarques : On rappelle que toute la construction ci-dessus dépend du choix initial du $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ accessible pour $\pi(\chi_0)$. Ceci fait, le second choix réellement effectué dans la construction ci-dessus est celui de la composante irréductible X' de X'_B passant par x_f. Il semble difficile d'évaluer le nombre de composantes irréductibles de X (ou de X_B) au voisinage de x. En ce qui concerne ce texte, chaque choix de composante permet de conclure dans la section 9.

9. Construction de l'extension

On reprend les notations de la proposition 8.3, où l'on a fixé $\sigma = (2,3)$.

9.1. Irréductibilité générique.

PROPOSITION 9.1. *$\rho_{K(Y)}$ est absolument irréductible.*

Preuve : D'après 8.3 b), $\rho_{K(Y)}$ vérifie la propriété (ABS) (voir 7.1.1). Il suffit donc de montrer que $\rho_{K(Y)}$ est irréductible. Supposons par l'absurde que $\rho_{K(Y)} \simeq \rho_{1,K(Y)} \oplus \rho_{2,K(Y)}$, $\rho_{i,K(Y)}$ étant une $K(Y)$-représentation de G de dimension $\neq 0$. Le lemme 7.1 ii) montre que $\mathrm{tr}(\pi_i(G)) \subset A(Y)$, car $A(Y)$ est régulier d'après 8.3 a). Soit $z \in Z$, l'évaluation en z de $\mathrm{tr}(\rho(g))) = \mathrm{tr}(\rho_1(g)) + \mathrm{tr}(\rho_2(g)), g \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ a un sens et montre que ρ^{ss}_z est réductible (cf. 7.1). Nous allons montrer que c'est absurde par notre choix du raffinement.

D'après 8.3 e), $v(F_i(.)) : X(F) \to \mathbb{Q}, x \mapsto v(F_i(x))$ est constante, on la note α_i. En évaluant en y_0, 8.3 iv), v) ainsi que 5.2.4 appliqué à (3, 2) montrent que :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \frac{k-1}{2}, -\frac{k+1}{2})$$

Notons qu'avec ce choix, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$. De plus, si $i \neq j$, $|\alpha_i| < k$ et $|\alpha_i + \alpha_j| < k$.

D'après 8.3 iv), ρ_z^{ss} est cristalline de poids de Hodge-Tate $k_i := \kappa_i(z)$, avec $k_1 < k_2 < k_3$, et les valeurs propres de son Frobenius cristallin ont pour valuation $k_1+\alpha_1$, $k_2+\alpha_2$ et $k_3+\alpha_3$. Pour voir que ρ_z^{ss} est irréductible, il suffit de voir que $D := D_{cris}(\rho_z^{ss})$ n'admet pas de sous-module filtré faiblement admissible. Si D' est un tel sous-module de rang 1, alors par faible admissibilité $t_H(D') = t_N(D')$ (cf. *loc. cit.*) entraîne $k_i = k_j+\alpha_j$ pour un couple (i, j). Mais par 8.3 i), $|k_i - k_j| > k$, les inégalités sur les α_i entraînent donc $i = j$ puis $\alpha_i = 0$, ce qui est absurde. De même, si D' est un sous-module filtré faiblement admissible de rang 2 de D, on arrive à une contradiction en résolvant $k_{i'} + k_{j'} = k_i + k_j + \alpha_i + \alpha_j$. $\square$

Remarques : Une légère modification de la preuve montrerait qu'en fait ${\rho_{K(Y)}}_{|D_{v_1}}$ est irréductible. Notons de plus que l'argument d'irréductibilité étant local en p, il n'utilise pas le fait que les représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes stables tempérées sont globalement irréductibles, mais simplement 3.3. Le point clé est que nous disposons d'un σ accessible tel que le raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ est aussi éloigné que possible du raffinement ordinaire au point y_0.

9.2. L'inertie aux places ne divisant pas p.

9.2.1. Nous allons préciser l'action de l'inertie aux places de E ne divisant pas p. Pour énoncer commodément nos résultats, on introduit

$$\rho'_{K(Y)} := \rho_{K(Y)} \otimes_F (\chi_p^{\perp})^{-1}.$$

PROPOSITION 9.2. *Soit w une place de E au-dessus de $l \neq p$. Alors*
– *Si w ne divise pas cond(χ_0), $\rho_{K(Y)}$ et $\rho'_{K(Y)}$ sont non ramifiées en w.*
– *Si w divise cond(χ_0), on a*

$$\dim_{K(Y)}(\rho'_{K(Y)})^{I_w} = 2.$$

Le reste de la sous-section est consacré a la preuve de cette proposition. D'après 8.3 a), b) et 7.1 iv) appliqué en l'idéal maximal de y_0, on peut trouver $g \in A(Y)$ avec $g(y_0) \neq 0$, tel que $\rho_{K(Y)}$ admette un $A(Y)_g$-réseau stable. On note ρ la représentation de G définie par ce réseau, S l'ensemble fini des zéros de g, et pour $y \in Y \backslash S$, ρ_y la réduction de ρ en y.

Remarquons que ρ_y est bien définie à isomorphisme près, et non plus seulement à semi-simplification près. De plus, $\rho_{K(Y)}$ étant semi-simple, ρ_z l'est aussi pour un sous-ensemble infini de $Z \cap (Y \backslash S)$, que l'on note Z'. Enfin, si $z \in Z'$, alors $\rho_z^{ss} \simeq \rho_z$ est par 8.3 ii) la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe notée $\Pi(z)$ de U(3), comme en 8.3.1.

9.2.2. *Le cas w ne divisant pas cond*(χ_0). Il suffit de montrer que les ρ_z sont non ramifiées pour $z \in Z'$. Par construction (cf. 8.4.1), $\Pi(z)$ a un vecteur fixe par le compact maximal K_l. Si l est non ramifié dans E, K_l est hyperspécial (4.2.3, 4.3.2) et $\Pi(z)$ est non ramifié, si bien que la représentation galoisienne ρ_z associée l'est aussi, d'après la propriété (20) §3.2.2. Si l est ramifié, K_l est le groupe défini en 4.3.3. D'après le lemme 4.1, le changement de base π_E est non ramifié, et on en déduit encore que ρ_z est non ramifiée, cette fois d'après la proposition 3.1.

9.2.3. *Le cas w divisant cond*(χ_0). Par construction (cf. 8.4.1), on a

$$\mathrm{Hom}_{K_J(l)}(J(l), (\Pi(z) \otimes (\chi_0 \circ \det)^{-1})_l) \neq 0$$

D'après 4.2, il existe un sous-groupe ouvert I'_w de I_w tel que pour tout $z \in Z'$ on a $\rho'_z(I'_w) = 1$. On en tire $\rho'_{K(Y)}(I'_w) = 1$.

Notons que pour démontrer la proposition, il suffit de le faire après une extension finie de $K(Y)$. Mais il existe une extension finie F'/F telle que la représentation $\rho'_{K(Y)|I_w}$, qui se factorise par le groupe *fini* I_w/I'_w, soit définie sur F'. Autrement dit, si L est une extension composée de $K(Y)$ et F' et $\rho'_L := \rho'_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$, alors $\rho'_{L|I_w}$ est isomorphe à $\theta \otimes_{F'} L$, où θ est une représentation de I_w sur F' triviale sur I'_w. Comme θ est nécessairement semi-simple, on en déduit par évaluation des traces en y_0 que $(\rho'_{|I_w})^{ss}_{y_0} \simeq \theta$. En particulier, d'après 8.3 point iii) :

$$\theta \simeq 1 \oplus 1 \oplus ((\chi_p^{\perp})^{-1})_{|I_w}$$

La proposition en découle.

9.3. Application des méthodes à la Ribet et Kisin. Dans ce paragraphe on tire les fruits de la variante du lemme de Ribet démontré dans la proposition 7.1, et la proposition 6.1 "à la Kisin". Introduisons encore quelques notations : on pose

$$u := \chi^{\perp}(\mathrm{Frob}_{v_1})$$

Notons alors qu'on a $\chi(\mathrm{Frob}_{v_1}) = up^{-1}$. Notons D_{cris,v_1} le foncteur

$$D_{cris,v_1}(V) := D_{cris}(V_{|D_{v_1}}),$$

il est exact à gauche. L'action du Frobenius cristallin φ sur les droites $D_{cris,v_1}(\chi_p^{\perp})$, $D_{cris,v_1}(\chi_p)$ et $D_{cris,v_1}(1)$ est la multiplication respectivement par u, up^{-1} et 1 (cf. §2.6). Ces trois nombres sont deux à deux distincts, puisque leur valuations (respectivement $-(k-1)/2$, $-(k+1)/2$ et 0) le sont.

Proposition 9.3. *Il existe une représentation continue $\bar\rho : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to GL_3(F)$ vérifiant*

i. Pour toute place w de E ne divisant pas p on a

$$\dim_F(\bar\rho \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} \geq 2 \text{ si } w | disc(\chi_0) \tag{33}$$

$$\dim_F(\bar\rho \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} = 3 \text{ si } w \not| disc(\chi_0) \tag{34}$$

ii. $D_{cris,v_1}(\bar\rho)^{\phi=u}$ est non nul.

iii. On a $\bar\rho^{ss} \simeq \chi_p \oplus \chi_p^{\perp} \oplus 1$. Une des deux assertions suivantes est vraie :

a. Soit $\bar{\rho}$ admet un sous-quotient r de dimension 2, vérifiant $r \simeq r^\perp$ et tel que r est une extension non triviale de $\chi_p^\perp$ par χ_p.

b. Soit $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}^\perp$, $\bar{\rho}$ admet une unique sous-représentation r_1 de dimension 2 et un unique sous-quotient r_2 de dimension 2, avec r_1 extension non triviale de 1 par χ_p, r_2 extension non triviale de $\chi_p^\perp$ par 1, et $r_1 \simeq {r_2}^\perp$.

Preuve : Notons $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de Y en y_0, L le corps des fractions de cet anneau, et $\rho_L := \rho_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$. L'anneau $\mathcal{O}$ est de valuation discrète, de corps résiduel F. Le représentation ρ_L est irréductible d'après la proposition 9.1

D'après la proposition 8.3 iii), $\overline{\rho_L}^{ss}$ est la somme de trois caractères, χ_p, $\chi_p^\perp$ et 1. Ces trois caractères sont deux à deux distincts (ils n'ont pas les mêmes poids) et on est donc en mesure d'appliquer la proposition 7.1 à ρ_L. Cette proposition affirme précisément l'existence d'un $\mathcal{O}$-réseau $\Lambda \subset L^3$ stable par ρ_L, tel que la représentation réduite associée $\bar{\rho} := \overline{\rho_L}_\Lambda$ vérifie soit la condition iii.a soit la condition iii.b de 9.3. $\mathcal{O}$ étant de valuation discrète, il résulte immédiatement de la proposition 9.2 que $\bar{\rho}$ vérifie la propriété ii.

Nous allons montrer que $\bar{\rho}$ vérifie ii. Le lemme 7.3 appliqué à ρ_L a y_0 et à la classe d'homothéties s du réseau Λ donne l'existence d'un ouvert affinoide $\Omega \subset Y$ contenant y_0, telle que la représentation ρ_L admet un $A(\Omega)$-réseau stable M ; notant ρ la représentation $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}(M)$, le lemme 7.3 assure que $\rho_{y_0} \simeq \bar{\rho}$. $\bar{\rho}$ est continue d'après le corollaire 7.2.

Nous allons maintenant appliquer la proposition 6.1 à la donnée de $\rho_{|D_{v_1}} : D_{v_1} \to \mathrm{GL}_3(A(\Omega))$, de $\kappa_{|\Omega}$ et des $F_{i|\Omega}$ (cf. §6.3.2). On choisit pour ensemble noté Z *loc. cit.* l'ensemble $Z \cap \Omega$ auquel on enlève le sous-ensemble des z tels que ρ_z n'est pas semi-simple. Ce dernier est fini car $\rho_{K(\Omega)}$ est semi-simple. La proposition 8.3 assure que les hypothèses i) à vi) de 6.3.2 de la proposition 6.1 sont vérifiées, iii) par notre choix de Z. On voit donc que

$$D_{cris,v_1}(\rho_{y_0})^{\phi = F_1(y_0)\kappa_1(y_0)} \text{ est non nul,}$$

où κ_1 et F_1 sont ceux donnés par la proposition 8.3. D'après les points iv) et v) de 8.3, $p^{\kappa_1(y_0)}F_1(y_0)$ est la première valeur propre du raffinement $\mathcal{R}((3,2))$ de $\rho_{y_0|D_{v_1}}$, donc d'après 5.2.4, $p^{\kappa_1(y_0)}F(y_0) = \chi^\perp(p) = u$, ce qui prouve ii. $\square$.

9.4. Élimination du cas a. Nous voulons montrer, par l'absurde, que l'on n'est pas dans le cas iii. a. de la proposition précédente. On se place donc dans ce cas. La représentation $\bar{\rho}$ admet comme sous-quotient une extension non triviale r de $\chi_p^\perp$ par χ_p. Par conséquent, $\bar{\rho}' := \bar{\rho} \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$ contient comme sous-quotient $r' := r \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$, extension non triviale de F (la représentation triviale sur F) par $F(1)$ (le caractère cyclotomique sur F).

LEMME 9.1. *La représentation r' est cristalline en v_1 et en v_2.*

Preuve : Il suffit de le prouver pour r, car $\chi_p^\perp$ est cristallin en v_1 et v_2, $\chi^\perp$ étant non ramifié en ces places. De plus, comme $r \simeq r^\perp$, il suffit de le prouver en v_1. Comme D_{cris,v_1} est exact à gauche, ainsi que le foncteur $V \mapsto D_{cris,v_1}(V)^{\phi=u}$, on voit que

$$\dim_F D_{cris,v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u} \leq \dim_F D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u} + \dim_F D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u}.$$

Comme $D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u} = 0$ car $u \neq 1$, il résulte de 9.3 ii) que $D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u}$ est non nul.

Utilisant encore que D_{cris,v_1} est exact à gauche il vient

$$D_{cris,v_1}(\chi_p) \subset D_{cris,v_1}(r)$$

et il y a donc dans $D_{cris,v_1}(r)$ deux droites sur lesquelles φ agit par u et par up^{-1} ce qui implique qu'elles sont distinctes. On en déduit que $\dim_F D_{cris,v_1}(r) = 2$, i.e. r est cristalline en v_1. □

LEMME 9.2. *La représentation r' est non ramifiée en toutes les places w ne divisant pas p.*

Preuve : Si w ne divise pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$, $\bar{\rho}'$ est non ramifiée en w d'après ii., et r' non plus.

Si w divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, l'exactitude à gauche du foncteur des invariants sous I_w donne

$$\dim_F(\bar{\rho}')^{I_w} \leq \dim_F {r'}^{I_w} + \dim_F((\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w}$$

Comme $((\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} = 0$, il découle de i. que r' est non ramifié. □.

L'existence de r' est alors en contradiction avec le lemme bien connu suivant,

LEMME 9.3. *Soit E est un corps quadratique imaginaire, $F/\mathbb{Q}_p$ un corps local, alors il n'existe pas d'extension non triviale de représentations continues de* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *de F par $F(1)$ qui soit non ramifiée hors de p et cristalline en les places divisant p.*

Preuve : Soit r une extension non triviale comme dans le lemme, vue comme $\mathbb{Q}_p$-représentation. Elle contient en particulier comme sous-quotient une $\mathbb{Q}_p$-représentation r' continue, extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$. r' est non ramifiée hors de p et cristalline en p car r l'est. Mais par la théorie de Kummer, le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des classes de telles extensions a pour dimension le rang de $\mathcal{O}_E^*$. Ce dernier groupe est fini si E est quadratique imaginaire. □

REMARQUE 9.1. *Dans le lemme précédent, il est essentiel que les extensions considérées soient non ramifiées (resp. cristallines) à toutes les places. Si on relâche la condition à une place quelconque, de telles extensions non triviales existent. Par ailleurs il est essentiel que le corps de base E soit quadratique imaginaire. Pour tout autre corps, à part $\mathbb{Q}$, l'énoncé précédent serait mis en défaut : on construirait par la théorie de Kummer une extension non triviale, en partant d'une unité de E qui n'est pas racine de* 1. *En fait, l'énoncé précédent correspond, par les conjectures de Bloch-Kato, au fait que la fonction ζ du corps E ne s'annule pas en $s = 0$. Comme on le sait, ceci n'est vrai que pour E quadratique imaginaire ou $\mathbb{Q}$. C'est ici, et ici seulement à part la formule de multiplicité 4.1, que l'on utilise dans ce papier l'hypothèse que E est quadratique imaginaire. Tout le reste marcherait tout aussi bien en travaillant avec E/F extension CM, et le groupe unitaire* $U(3)$ *compact à toutes les places à l'infini sur F. Dans ce cadre, la preuve de 4.1 montre que l'analogue de la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ existe si et seulement si $\varepsilon = (-1)^{\dim_{\mathbb{Q}} F}$. En particulier, si $\dim F$ est pair, on peut avoir $L(\chi_0, 1/2) \neq 0$, et on ne s'attend alors pas à ce qu'une extension de 1 par χ_p cristalline existe. On voit que dans ce cas, c'est un élément non trivial de $H^1_f(E, \mathbb{Q}_p(1))$ qu'aurait construit notre méthode.*

9.5. Fin de la preuve. On est donc dans le cas b. de la proposition.

LEMME 9.4. *r_1 et r_2 sont cristallines en v_1 et en v_2.*

Preuve : Comme $r_1 \simeq r_2^{\perp}$, la cristallinité de r_1 en v_2 (resp. v_1) équivaut à celle de r_2 en v_1 (resp. v_2). Il suffit donc de prouver que r_1 et r_2 sont cristallines en v_1.

En ce qui concerne r_1, extension non triviale de 1 par χ_p, on observe que les poids de Hodge-Tate en v_1 de χ_p et 1 sont respectivement $-(k+1)/2$ et 0, avec $-(k+1)/2 \leq -2 = 0 - 2$. Une telle extension est automatiquement cristalline d'après [**78**] proposition 3.1.

Considérons la représentation r_2, pour laquelle le même argument de poids ne marche plus. Cependant la cristallinité de r_2 en v_1 se montre exactement comme celle de r dans le lemme 9.1, à l'aide du point i. □.

La représentation r_1 fournit une extension de 1 par χ_p, non triviale, qui a bonne réduction aux deux places divisant p d'après le lemme précédent. Comme χ_p n'est pas le caractère cyclotomique, un argument élémentaire montre qu'une telle extension a automatiquement bonne réduction (voir l'introduction) aux places ne divisant pas p : cf. par exemple [**88**, lemme 1.3.5]. Cette dernière affirmation peut aussi se démontrer directement. C'est immédiat aux places ne divisant pas $p.\mathrm{cond}(\chi_0)$ par la proposition 9.2. Si w divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, le paragraphe 9.2.3 montre que $(r_1)_{|I_w}$ est d'image finie, donc semi-simple. Cela implique que r_1 a bonne réduction en w, et prouve le théorème 1.1.

Annexe : Exemple de ζ de Riemann

Dans cette annexe, nous exposons dans un cas simple certaines méthodes du chapitre 3 appliquées à la fonction ζ de Riemann. La conjecture de Bloch-Kato pour cette dernière est bien connue et s'énonce ainsi (pour les notations et conventions, voir III.1.1 et III.2.6) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (*) \ \ \mathrm{ord}_{s=2-k}\, \zeta(s) = h^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(k-1)) - h^0_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(k-1))$$

On rappelle que $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ est invariante par $s \mapsto 1-s$. On en déduit que ζ s'annule avec un zéro simple aux entiers pairs strictement négatifs, ne s'annule pas en 0, et a un pôle simple en 1. De plus, $h^0_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(n))$ est toujours nul, sauf si $n = 0$ auquel cas il vaut 1. Nous nous intéresserons dans ce qui suit uniquement à la construction explicite des extensions non triviales de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(k-1)$ lorsqu'elles sont prédites par la formule ci-dessus, i.e quand k est un entier pair > 2. Autrement dit, nous allons montrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (*) \ \ \mathrm{ord}_{s=2-k}\, \zeta(s) \leq h^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(k-1)) - h^0_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(k-1))$$

La preuve est inspirée de la démonstration de Ribet de la réciproque d'un théorème de Herbrand ([**79**], on le redonne en §3.1.2), en utilisant un argument de déformation p-adique à la Skinner-Urban ([**102**]). Les points saillants de l'argument sont : la construction à la Ribet d'extensions et les déformations non ordinaires de séries d'Eisenstein (ici de niveau 1), étudiés respectivement dans les sections 2 et 1.

La méthode de cette annexe, bien que sensiblement plus simple que celle du chapitre 3, présente de nombreux points communs avec cette dernière. Aussi, nous avons ponctué le texte de nombreuses remarques à ce sujet. De plus, nous avons profité de l'occasion pour introduire et discuter en détail, en section 3, un résultat de Kisin jouant un rôle important au chapitre 3 ; nous en donnons un certain nombre d'applications à notre contexte. La section 4 est une digression autour de problèmes liés aux extensions de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$, i.e. $k = 2$.

Notations : p désigne un nombre premier. G_p est le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée hors de p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. D_p est un groupe de décomposition en p de G_p, canoniquement identifié à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Si X/F est un F-affinoide, $A(X)$ désignera toujours la F-algèbre affinoide de X.

1. Séries d'Eisenstein critiques et ordinaires de niveau $\Gamma_0(p)$

1.1. Séries d'Eisenstein. Soit $k \geq 4$ un entier pair, E_k la série d'Eisenstein usuelle de poids k de niveau 1 renormalisée de façon à ce que son coefficient constant soit 1, elle est alors à coefficients rationnels, donnée par ([**94**] Chap. 7 §4.2) [21] :

$$E_k(z) := (2\zeta(k))^{-1} \sum_{(n,m)\neq(0,0)} (nz+m)^{-k} = 1 - \frac{2k}{b_k} \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

[21] Les b_k sont les nombres de Bernouilli, donnés par la formule $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$, cf. *loc.cit.* §4.1.

Fixons $p \neq 2$ premier dans tout ce qui suit, on rappelle que $X_0(p)$ a deux pointes ∞ et 0. À E_k est attaché un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dimension 2 de séries d'Eisenstein de niveau $\Gamma_0(p)$, engendré par $E_k(z)$ et $E_k(pz)$, stable par $U_p := [\Gamma_0(p)\mathrm{diag}(1,p)\Gamma_0(p)]]$. U_p y admet pour polynôme caractéristique $(X-1)(X-p^{k-1})$, on lui choisit deux vecteurs propres :

i) Le vecteur propre "ordinaire" $E_k^{ord}(z) := E_k(z) - p^{k-1}E_k(pz)$, de valeur propre 1 sous U_p. Ses deux q-développements à l'infini et en 0 commencent respectivement par $1-p^{k-1}$ et $1-p^{-1}$.

ii) $E_k^{crit}(z) := E_k(z) - E_k(pz)$, de valeur propre p^{k-1} sous U_p. Ses deux q-développements à l'infini et en 0 commencent respectivement par 0 et $1-p^{-k}$.

1.2. Représentations galoisiennes. E_k^{crit} et E_k^{ord} sont toutes les deux propres pour les T_l avec $l \neq p$ de valeurs propres $1+l^{k-1}$. La représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ semi-simple p-adique qui leur est attachée par la correspondance de Langlands[22] est donc

$$\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$$

Elle ne les différencie pas.

Cependant, $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$ est cristalline restreinte à un groupe de décomposition D_p en p, son Frobenius cristallin ayant pour polynôme caractéristique $(X-1)(X-p^{k-1})$. Le choix de E_k^{ord} où E_k^{crit} revient donc à choisir une des deux racines du Frobenius cristallin de $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$. Ce choix est crucial dans tout ce qui suit car les déformations construites dans la théorie des familles p-adiques se font toujours "au moins en niveau $\Gamma_0(p)$", et la valeur propre de U_p varie analytiquement dans la famille. Nous reviendrons sur ce point en §4.

Nous devons ici citer le résultat fondamental suivant, dû dans sa totalité à de nombreux auteurs, généralisant les remarques précédentes :

THÉORÈME 1.1. *Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ une forme modulaire propre normalisée de poids k et de niveau $\Gamma_0(p)$, $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un isomorphisme de corps, alors $a_p \neq 0$ et il existe une unique représentation semi-simple continue*

$$\rho_f : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

telle que :

- *le polynôme caractéristique d'un Frobenius en $l \neq p$ soit $X^2 - \iota(a_l)X + l^{k-1}$,*
- *$(\rho_f)_{|D_p}$ soit semi-stable de poids $(0, k-1)$ et Frobenius cristallin de polynôme caractéristique $(X-\iota(a_p))(X-p^{k-1}/\iota(a_p))$,*

De plus, ρ_f est irréductible si et seulement si f est parabolique. $(\rho_f)_{|D_p}$ est semi-stable non cristalline si et seulement si f est nouvelle en p, auquel cas $a_p^2 = p^{k-2}$.

Nous étudions dans ce qui suit les déformations p-adiques de E_k^{ord} et E_k^{crit} fournies par les familles p-adiques de Coleman (particulièrement pour cette dernière). Pour toute

[22] On fait correspondre uniformisantes et éléments de Frobenius géométriques (on prend les même conventions que dans III.2.4 et III.2.6).

la suite de ce texte, on fixe définitivement un $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, on l'omettra toujours dans les formules.

2. Déformations p-adiques modulaires de $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$, $k \geq 4$

2.1. La déformation de E_k^{ord}. Les $(-b_k/2k)E_k^{ord}$, k variant, forment la plus ancienne des familles p-adiques de formes modulaires ([**96**] §1.6), elle peut être vue comme interpolation p-adique continue des q-développements :

$$k \mapsto (-b_k/2k)E_k^{ord} = \zeta_p(1-k)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(n)q^n, \quad \sigma_{k-1}^*(n) = \sum_{d|n,(d,p)=1} d^{k-1}$$

Ici, ζ_p est la fonction zêta p-adique de Kubota-Leopold. Il est aisé de voir que ceci nous fournit bien une famille p-adique passant par E_k^{ord} au sens utilisé dans cette thèse (I.6.2.2), i.e que les valeurs propres sous l'action de U_p et des T_l varient p-adiquement analytiquement en k (au moins dans une classe de congruence modulo $p-1$). Dans [**96**] 1.6, Serre explique comment l'existence même de cette famille permet de retrouver des propriétés p-adiques de ζ_p.

Enfin, la famille p-adique de représentations galoisiennes attachée à cette famille n'est autre que la somme directe du caractère trivial et du caractère universel de dimension 1 de

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_p^*$$

Elle ne fait intervenir que les corps de nombres dans $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ et ne peut donc contenir l'extension que nous cherchons, elle ne sera pas intéressante pour nos applications.

2.2. La famille p-adique passant E_k^{crit}.

2.2.1. Comme cas particulier des constructions de R.Coleman ([**29**],[**30**]), on peut inclure E_k^{crit} dans une famille p-adique de formes modulaires propres de niveau $\Gamma_0(p)$. Concrètement, dans notre situation, cela signifie en particulier que l'on peut trouver :

- Une boule affinoide sur $\mathbb{Q}_p$ autour de k dans $\mathbb{C}_p$, $B(k,r) \subset \mathbb{C}_p$,
- un affinoide Ω intègre, régulier de dimension 1, muni d'un morphisme fini et plat $\pi : \Omega \to B(k,r)$,
- pour $k' \in (k+(p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$, $x_{k'} \in \Omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\pi(x_{k'}) = k'$,
- ainsi qu'une famille relativement compacte de fonctions analytiques $(a_n)_{n\geq 2}$ bornées par 1 sur Ω, tels que :

(1) $$(-b_k/2k).E_k^{crit}(q) = q + \sum_{n\geq 2} a_n(x_k)q^n$$

(2) Pour tout $k' \in (k+(p-1)\mathbb{N}) \cap B(k,r)$,

$$q + \sum_{n\geq 2} a_n(x_{k'})q^n$$

est le q-développement d'une forme modulaire $f_{k'}$ propre de poids k' et niveau $\Gamma_0(p)$,
(3) $x \mapsto v(a_p(x))$ est constante égale à $k-1$ sur Ω.

Nous ne reviendrons pas sur les techniques permettant de construire de telles familles, elles sont discutées à plusieurs endroit dans cette thèse (cf. I.6.2, II.3.1, III.8.1). Bien qu'en tant que forme modulaire "usuelle" la série d'Eisenstein E_k^{crit} n'est évidemment pas une forme parabolique, on a vu plus haut qu'elle s'annule tout de même sur la pointe ∞ de $X_0(p)$, elle est donc parabolique-surconvergente au sens de [**33**] §3.6. Mieux on a le :

Fait : Dans la famille ci-dessus passant par E_k^{crit}, les formes modulaires $f_{k'}$ sont paraboliques, i.e s'annulent aux deux pointes de $X_0(p)_{\mathbb{Q}_p}$.

En effet, $f_{k'}$ est une forme modulaire propre de poids k', de niveau $\Gamma_0(p)$, et de pente $k-1$. Écrivant $f_{k'} = A + B$ ou A est une forme propre parabolique, B une série d'Eisenstein, on en déduit que B est de pente $k-1$. Mais $X_0(p)$ n'ayant que deux pointes, B est nécessairement combinaison linéaire de $E_{k'}^{ord}$ et $E_{k'}^{crit}$. Or U_p n'admet pas la pente $k-1 \notin \{0, k'-1\}$ sur cet espace, donc $B=0$, ce que l'on voulait.

2.2.2. Formulons ceci en terme de représentations galoisiennes. La relative compacité de la famille de fonctions $(a_n)_{n\geq 2}$, ainsi que le théorème 1.1 pour les $f_{k'}$, nous permet aisément de définir une fonction continue (cf. I.7.1 pour des détails)

$$T : G_p \to A(\Omega)$$

telle que si $l \neq p$, $T(Frob_l) = a_l$. Si $x \in B(k,r)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on notera $T_x : G_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ la composition de T avec l'évaluation en x. En particulier, T_{x_k} est la trace de la représentation $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$; et pour tout entier $k' \geq k$ dans la même classe de congruence modulo $p-1$, $T_{x_{k'}}$ est la trace de la représentation galoisienne p-adique $\rho_{f_{k'}}$.

Remarques : Une différence majeure avec la déformation de E_k^{ord} est que si $k' > k$, les $\rho_{f_{k'}}$ sont des représentations irréductibles ! [23] En particulier, les corps de nombres attachés aux noyaux de ces représentations sont certainement non abéliens.

L'identité $T_{x_{k'}} = \mathrm{trace}(\rho_{f_{k'}})$ entraîne aisément que T est un pseudo-caractère de dimension 2 au sens de [**86**] et [**106**] (voir aussi III.7.2.1 dans cette thèse). On ne peut cependant pas lui attacher "canoniquement" de représentation $G_p \to \mathrm{GL}_2(\Omega)$ dont c'est la trace, mais plutôt un ensemble fini de représentations, non toutes isomorphes en général. La raison de ceci est grossièrement que T_{x_k} est la trace de la représentation $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$ de G_p, qui n'est pas irréductible. Aussi d'éventuelles extensions l'ont encore pour trace. Ce point n'est pas un détail, il montre d'une part que la donnée du pseudo-caractère est plus fondamentale en général que celle de la représentation elle même, qui dépend d'un "choix de réseaux", et d'autre part il nous permettra de "choisir" l'extension comme on la désire. C'est ce que nous faisons dans la section suivante dans notre cas particulier. Ces questions ont été étudié en détails dans cette thèse au §III.7.

[23] et ce même restreinte à un groupe de décomposition en p, en fait, pour des raisons de théorie de Hodge p-adique

3. Construction d'extensions

Dans cette partie, nous expliquons comment la construction d'une déformation irréductible d'une représentation réductible de dimension 2 permet de construire des extensions, et nous l'appliquons à notre cas. Nous commençons par rappeler un lemme de Ribet, que l'on applique ensuite pour construire l'extension cherchée.

3.1. Reprise de l'argument de Ribet.

3.1.1. *Le lemme des réseaux de Ribet.* (cf. [**79**], [**4**]).

Soient K un corps muni d'une valuation discrète, d'anneau de valuation A, π une uniformisante, $k := A/\pi A$ et $\widehat{K}$ le complété de K. Un réseau de K^2 est un sous-A-module libre de rang 2, deux réseaux Λ_1 et Λ_2 sont dits homothétiques si il existe $\lambda \in K^*$, $\lambda\Lambda_1 = \Lambda_2$. Nous allons faire quelques brefs rappels sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(K)$ (cf. [**95**] Chap 2).

Soit T le graphe dont les sommets sont les classes d'homothéties de réseaux de K^2, et dont les arêtes relient deux classes d'homothéties de réseaux ayant des représentants $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ tels que $\Lambda_2/\Lambda_1 \simeq k$ comme A-module. Il est bien connu (par exemple [**95**]Chap. 2 thm. 1) que T est un arbre, chaque sommet ayant ses voisins à distance n indexés par $\mathbb{P}^1(A/\pi^n A)$. Notons de plus $\mathrm{GL}_2(K)$ agit sur les sommets de T de façon transitive et par isométries.

Soit G un groupe et $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$ une représentation, telle que l'action déduite de G sur $\widehat{K}^2$ soit irréductible. G agit à travers $\mathrm{Im}(\rho)$ sur l'arbre T, et on note S l'ensemble des sommets de T fixés par tous les éléments de G, i.e les classes d'homothéties de réseaux stables par G. G agissant sur T par isométries, S est connexe. De plus, G agissant irréductiblement sur $\widehat{K}^2$, S est de diamètre fini ([**95**] p.106).

Étant donné que $\det(\rho(G)) \subset A^*$, tous les réseaux d'une classe stable par G sont stables. Chaque réseau stable Λ nous fournit une représentation $\rho_\Lambda : G \to \mathrm{GL}_A(\Lambda) \simeq \mathrm{GL}_2(A)$, et en particulier une représentation résiduelle :

$$\bar{\rho}_\Lambda : G \to \mathrm{GL}_2(k)$$

Si $g \in G$, le polynôme caractéristique de $\bar{\rho}_\Lambda(g)$ est indépendant de Λ, car c'est la réduction modulo π de celui de $g \in \mathrm{GL}_2(A)$. Un théorème de Brauer-Nesbitt (cf. [**37**] 30.16) [24] assure alors que la semi-simplification $(\bar{\rho}_\Lambda)^{ss}$ de $\bar{\rho}_\Lambda$ est indépendante du réseau stable Λ choisi, on la note $\bar{\rho}$.

Enfin, si Λ est un réseau stable, il est clair que les droites stables par G dans $\Lambda/\pi\Lambda \simeq k^2$ sont en bijection avec les éléments de S qui sont voisins de la classe de Λ dans T. Ceci nous permet de comprendre l'ensemble des classes de réseaux stables par G dans K^2.

Exemples : - D'après la dernière remarque ci-dessus, S n'a qu'un élément si et seulement si $\bar{\rho}$ est irréductible. Dans ce cas, le choix d'un réseau stable est unique à homothétie près, et les constructions ci-dessus ont moins d'intêret.

[24] C'est classique si la caractéristique de k est nulle, ce qui sera le cas dans notre application

- Supposons que $\bar{\rho} \simeq \chi_1 \oplus \chi_2$ soit somme de deux caractères distincts de G sur k. On en déduit que S est un segment fini de T contenant au moins deux sommets. Dans ce cas, les deux sommets au bord de ce segment fournissent des extensions non triviales : une de χ_1 par χ_2 à l'un des sommet, une de χ_2 par χ_1 à l'autre. Les sommets éventuels qui ne sont pas au bord de S fournissent des extensions scindées.

- Si $\bar{\rho}$ est somme de deux caractères égaux, alors n'importe quel point du bord de S nous fournit une extension non triviale entre ces derniers. On a en particulier montré le :

Lemme 3.1. *([**79**]) Si $\bar{\rho}$ est somme de deux caractères χ_1 et χ_2, il existe un réseau stable dont la représentation résiduelle est une extension non triviale de χ_1 par χ_2.*

Ainsi, pour construire une extension non triviale de χ_1 par χ_2, il suffit de construire une déformation "génériquement irréductible" d'une extension (éventuellement scindée) entre χ_1 et χ_2. C'est exactement cette technique que nous allons appliquer dans ce qui suit. Notons que si $G \subset \mathrm{GL}_2(A)$ agit absolument irréductiblement sur K^2, il agit irréductiblement sur $\widehat{K}^2$.

3.1.2. *Exemple : La réciproque du théorème de Herbrand.* ([**79**]) Dans ce paragraphe, nous redonnons brièvement, en les termes de la partie précédente, l'argument original[25] de [**79**], prouvant la réciproque d'un théorème de Herbrand. On va montrer que si $p > 3$ divise b_k pour $4 \leq k \leq p-1$ un entier pair, alors il existe une extension continue non triviale

$$0 \to \overline{\mathbb{F}}_p(1-k) \to r \to \overline{\mathbb{F}}_p \to 0$$

comme représentation de G_p, qui est **scindée restreinte à** D_p. Par la théorie du corps de classes, rappelons que cela implique en particulier que p divise le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\mu_p)$.

i) On commence par remarquer que par l'hypothèse sur b_k, $g := -(b_k/2k)E_k$ est une forme modulaire "parabolique modulo p" de poids k et niveau 1. Un résultat de "changement de base" dû à Katz (une version parabolique de [**61**] thm 1.8.1, nécessitant $k > 2$ et $p > 3$), combiné au "lemme de Deligne-Serre" ([**38**] lemme 6.1) entraîne qu'il existe une forme parabolique f propre de niveau 1 et de poids k congrue à g modulo p. On considère alors

$$\rho := \rho_f \quad : \quad G := G_p \to \mathrm{GL}_2(K)$$

($K/\mathbb{Q}_p$ étant un corps local assez grand). ρ est une représentation irréductible telle que

$$\bar{\rho} \simeq \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q(1-k), \ \ \mathbb{F}_q \simeq \mathcal{O}_K/(\pi)$$

On est donc dans le contexte du §3.1.1, G fixant un segment fini de l'arbre T de $\mathrm{PGL}_2(K)$.

ii) Le théorème 1.1 entraîne alors que $\rho_{|D_p}$ est cristalline ordinaire, et par la théorie de Fontaine que $\rho_{|D_p}$ est une extension de $K(1-k) \otimes \chi$ par χ, $\chi : D_p \to \mathcal{O}_K^*$ étant un caractère non ramifié. En particulier, tout réseau Λ de K^2 stable par D_p contient un

[25] Rigoureusement, l'argument donné ici est plus simple que celui de *loc.cit.*, mais il utilise le théorème 1.1 ainsi qu'un peu de théorie des représentations ordinaires, alors que Ribet était contraint à ne travailler qu'en poids 2.

$\mathcal{O}_K$-module libre de rang 1 facteur direct de Λ, stable par D_p, et sur lequel D_p agit par χ. Comme D_p agit réductiblement sur $\mathrm{GL}_2(K)$, il fixe une demi-droite S' dans T contenant S (exercice). Soit Λ un réseau dont la classe d'homothétie est le sommet de T au bord de S qui est le plus éloigné du bord de S', alors $r := \bar{\rho}_\Lambda$ convient. □

Remarques : Indiquons brièvement le lien avec l'analogue modulo p de la conjecture de Bloch-Kato. Il est bien connu (cf. [**94**] VII §4) que

$$\zeta(k) = \frac{2^{k-1}}{k!} b_k \pi^k$$

Ainsi, si $2 \leq k \leq p-1$, l'hypothèse $p|b_k$ s'écrit encore

$$\mathrm{ord}_p(\zeta(k)/\pi^k) > 0$$

Enfin, la conclusion est encore l'existence d'une extension non triviale et continue de $\mathbb{F}_p$ par $\mathbb{F}_p(1-k)$, non ramifiée hors de p et avec la condition spéciale en p d'être scindée, comme le prédirait la formule (*) s'il on y remplaçait $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{F}_p$.

Dans le paragraphe qui suit, nous appliquerons "à la Skinner-Urban" ([**102**]) une variante de cette méthode dans laquelle K est le corps des fractions de l'anneau des germes en un point d'un affinoide régulier de dimension 1. Nous avons mis en évidence deux étapes dans la démonstration : l'argument de déformation irréductible en i), puis le choix de réseau combiné à de la théorie de Hodge p-adique en ii). C'est le schéma général de ce genre de preuve.

3.2. Construction de l'extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(k-1)$, $k > 2$.

3.2.1. *Propriétés de l'extension à construire.* Nous cherchons à construire, pour $k > 2$ un entier pair, une extension r_k de $\mathbb{Q}_p(k-1)$ par $\mathbb{Q}_p$, et ce car $\zeta(2-k) = 0$. Cette extension doit être un élément non nul du groupe de Bloch-Kato $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(k-1))$ (voir [**44**]), ce qui signifie que :

- r_k n'est pas scindée,
- r_k est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,
- (Condition en $l \neq p$) r_k se factorise par G_p,
- (Condition en p) $(r_k)_{|D_p}$ est une représentation cristalline.

En fait, il est connu (cf. [**78**] proposition 3.1) qu'une extension continue (comme représentation de D_p) de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(n)$ avec $n > 0$ est automatiquement semi-stable, et qu'elle est cristalline si $n > 1$. Ainsi, comme $k > 2$, nous avons juste à construire une représentation continue de G_p, extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(k-1)$. Quitte à twister par $\mathbb{Q}_p(1-k)$, cela revient à trouver une extension continue non triviale de $\mathbb{Q}_p(1-k)$ par $\mathbb{Q}_p$, ou encore une extension continue non triviale de $E(1-k)$ par E, E étant un corps local quelconque. C'est ce que nous allons faire.

3.2.2. *Construction.* Reconsidérons le pseudo-caractère continu de dimension 2 défini en 2.2.2,

$$T : G_p \to A(\Omega)$$

Nous affirmons que quitte à diminuer r, remplacer Ω par un revêtement fini, et à relever arbitrairement les $x_{k'}$ en des points de ce dernier, ce que l'on fait, T est la trace d'une représentation continue

$$\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega))$$

et tel que la représentation déduite sur $\mathrm{Frac}(A(\Omega))^2$ soit absolument irréductible.

Admettant ceci pour l'instant, fixons E un corps local tel que $x_k \in \Omega(E)$. T_{x_k} est alors la trace de la représentation $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$. On considère A l'anneau local rigide de Ω en x_k, c'est un anneau de valuation discrète. On pose de plus $K := \mathrm{Frac}(A)$. La représentation $\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(A)$, déduite de $A(\Omega) \subset A$ rentre dans le champs d'application du paragraphe §3.1.1. $\bar{\rho}$ est ici $E \oplus E(1-k)$, on peut donc appliquer 3.1 et choisir un réseau Λ dans K^2 (unique à homothétie près) dont l'extension résiduelle associée est une extension non triviale de $E(1-k)$ par la représentation triviale sur E :

$$0 \to E \to \bar{\rho}_\Lambda \to E(1-k) \to 0$$

La continuité de cette extension comme G_p-représentation découle de la continuité de $T : G_p \to A(\Omega)$ et d'un lemme général, que nous ne redémontrons pas ici, mais qui est le corollaire III.7.2. $\square$

Remarque : Il est aisé de vérifier que quitte à diminuer r, la représentation ρ_Λ provient par extension des scalairs $A(\Omega) \subset A$ d'une représentation continue $G_p \to \mathrm{GL}_2(\Omega)$ (cf. III.8.3, III.7.1 v)). Ainsi, nous avons construit une représentation continue

$$G_p \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega))$$

qui se spécialise en $x_k \in \Omega(E)$ en l'extension que nous cherchions.

3.2.3. *Quelques détails techniques.* Pour finir, donnons des indications sur l'affirmation faite plus haut ; on se référera au §III.7.2.1 pour des détails complets.

Soit L le corps des fractions de $A(\Omega)$, $T : G_p \to L$ est un pseudo-caractère de dimension 2 et donc, par [**86**] §4.2, c'est la trace d'une représentation semi-simple de G_p dans $\mathrm{GL}_2(L')$ ou L'/L est une extension finie (c'est à cause de ce résultat que nous devons remplacer Ω par un revêtement fini). Il est aisé de vérifier qu'elle est absolument irréductible en utilisant le fait que les $\rho_{f_{k'}}$ le sont.

La normalisation de $A(\Omega))$ dans L' est encore une algèbre affinoide ([**15**] 6.1.2/4), fini et plate sur $A(\Omega)$, on la note $A(\Omega')$. Quitte à diminuer r en r' et à remplacer Ω' par $\Omega' \times_{B(k,r)} B(k,r')$, le lemme III.7.1 iv) nous donne l'existence d'un $A(\Omega')$-module libre de rang 2 dans $(L')^2$ qui soit stable par G. La continuité de la représentation $G_p \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega'))$ obtenue découle alors de III.7.1 v). Cela conclut $\square$.

4. Déformations de représentations cristallines, d'après Kisin

Nous allons donner une autre façon de prouver la cristallinité de l'extension construite plus haut, i.e. sans évoquer le résultat sur les représentations ordinaires de [**78**] 3.1, mais basée sur un théorème de Kisin. Cet argument joue un rôle important à deux reprises dans l'argument final de III.9, en III.9.1 et en III.9.4, pour lesquels on ne peut pas appliquer [**78**]. Une des deux questions (relative à III.9.1) admet pour analogue direct dans le cadre de cette annexe l'étude de certaines extensions continues de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ comme G_p-représentations, autrement dit pour $k=2$, nous y reviendrons dans la section suivante.

4.1. La problématique.

4.1.1. Reprenons à cet effet la représentation continue

$$\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega))$$

dont l'évaluation en x_k est l'extension de E par $E(1-k)$ plus haut (cf. la remarque du §3.2.2). Quitte à remplacer E par une extension finie, on peut supposer que tous les $x_{k'}$ sont dans $\Omega(E)$. Notons que pour $k' > k$, l'irréductibilité de $\rho_{f_{k'}}$ entraîne que

$$\rho_{x_{k'}} \simeq \rho_{f_{k'}}$$

L'étude locale de la représentation ρ de G_p est relativement simple aux nombres premiers $l \neq p$. C'est la donnée d'une classe de conjugaison dans $\mathrm{GL}_2(A(\Omega))$, image de la classe de conjugaison des Frobenius géométriques en l, dont on connaît le polynôme caractéristique

$$X^2 - a_l X + < l > \in A(\Omega)[X],$$

$< l >$ étant ici l'unique élément de $A(B(k,r))$ tel que $< l >_{k'} = l^{k'-1}$ si $k' \in k + (p-1)\mathbb{N}$. Il est évidemment plus subtil de comprendre la restriction de ρ à D_p, ne serait-ce que parce qu'il l'est déjà de comprendre les $(\rho_{f_{k'}})_{|D_p}$ (à ce sujet, voir [**77**],[**34**], [**16**] §3.4).

4.1.2. D'après le théorème 1.1, si $f = q + \sum_{n=2} a_n q^n$ est une forme modulaire parabolique propre de poids k et niveau $\Gamma_0(p)$, $(\rho_f)_{|D_p}$ est une représentation galoisienne p-adique semi-stable. Ses poids de Hodge-Tate sont $(0, k-1)$ et son Frobenius cristallin a pour polynôme caractéristique $(X - a_p)(X - p^{k-1}/a_p)$ dans notre cas.

Il n'est pas du tout évident de comprendre comment varient les structures de Hodge p-adiques dans une famille p-adique de représentations cristallines, et ce déjà en dimension 2. Nous allons analyser à cette fin l'exemple donné par $\rho_{|D_p}$. Il sera commode dans tout ce qui suit de poser

$$\rho' := \rho_{|D_p}$$

Nous allons nous concentrer principalement sur les deux informations "en p" données par la construction de la famille : le poids π et la valeur propre a_p. Nous ne dirons rien sur l'évolution des filtrations.

4.1.3. *Variation des poids.* Dans la donnée de la famille en §2.2.1, on dispose d'un morphisme analytique (fini et plat)

$$\pi : \Omega \to B(k,r) \subset \mathbb{A}^1$$

ayant la propriété que $\pi(x_{k'}) = k'$. Ainsi, à un décalage de 1 près, π donne le second poids de Hodge-Tate de $\rho_{x_{k'}}$. Le premier poids étant constant égal à 0, on en déduit que les deux poids de Hodge-Tate varient analytiquement dans la famille.

Comme on le remarque en considérant $\det(\rho')$, ρ'_x n'est pas de Hodge-Tate si $\pi(x) \notin \mathbb{Z}$. Mieux, la théorie de Sen ([**98**],[**99**]) permet d'interpréter $\pi(x)$ pour tout point $x \in \Omega(E)$

en terme des poids de Hodge-Tate généralisés de ρ'_x. En particulier elle montre que si $\pi(x) \notin \mathbb{Z}$, aucun twist de ρ_x par un caractère continue n'est de Hodge-Tate. Ainsi, pour la plupart des $x \in \Omega(E)$, ρ'_x ne rentre pas dans la classification de Fontaine, et ce bien qu'elle apparaisse naturellement dans les déformations de représentations qui en font partie. D'un point de vue modulaire, ces représentations sont aux représentations semi-stables ce que les formes modulaires p-adiques surconvergentes sont aux formes modulaires usuelles.

4.1.4. *Variation du Frobenius cristallin.* Commençons par une remarque. Si $k' > 2k$, la dernière assertion de 1.1 ainsi que la propriété (3) de 2.2.1 montrent que $\rho'_{x_{k'}}$ est cristalline, $f_{k'}$ étant alors ancienne en p. Les $z \in \Omega(E)$ tels que ρ'_z est cristalline sont donc Zariski-denses de $\Omega(E)$, on pose

$$Z := \{x_{k'}, k' > 2k\}$$

Contrairement aux cas $l \neq p$, il n'y a pas de polynôme $P \in A(\Omega)[T]$ dont l'évaluation aux $z \in Z$ coïncide avec le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de ρ'_z. On le voit par exemple à cause de la présence du $p^{k'-1}$ qui ne varie pas continuement p-adiquement avec k. Il faut bien sûr noter que le Frobenius cristallin **n'est pas** représenté par un élément de D_p. Un point crucial est que par contre

$$F_1 := a_p \in A(\Omega)$$

est une fonction analytique sur Ω qui en tout point $x_{k'}$ est une racine du Frobenius cristallin de $\rho'_{x_{k'}}$. En particulier, on dispose d'un choix analytique d'une telle racine. Bien que "l'autre racine", donnée par $p^{\pi(z)-1}/a_p$, ne varie pas analytiquement, c'est tout de même le cas sa renormalisation par $p^{\pi(z)-1}$. On pose :

$$F_2 := 1/a_p \in A(\Omega)$$

Si $z \in Z$, le triplet

$$(\rho'_z, F_1(z), p^{\pi(z)-1}F_2(z))$$

est une représentation cristalline raffinée (cf. [**73**], I.7.5,III.6.1). Cela signifie que ρ'_z est une représentation cristalline pour laquelle on a ordonné les valeurs propres de son Frobenius cristallin $F_1(z)$ et $p^{\pi(z)-1}F_2(z)$. Ce raffinement varie analytiquement avec ρ' dans le sens que F_1 et F_2 sont dans $A(\Omega)$: les valeurs propres de Frobenius "normalisées par les poids de Hodge-Tate dans l'ordre croissant" varient analytiquement. On pourra noter que toujours en ce sens, les représentations cristallines raffinées

$$(\rho'_z, p^{\pi(z)-1}F_2(z), F_1(z))_{z\in Z}$$

ne varient pas analytiquement sur Ω.

Remarques :

– Une représentation cristalline

$$r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

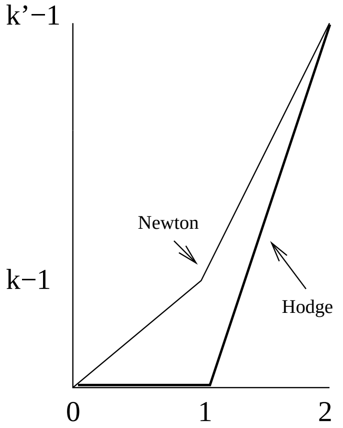

FIG. 4. Polygones de Hodge et Newton de $D_{cris}(\rho_{f_{k'}|D_p})$ pour $k' > 2k$

admet toujours au plus 2 raffinements possibles, et exactement 2 si les valeurs propres de son Frobenius cristallin sont distinctes [26]. Si elle est ordinaire de poids $(0, k-1)$ $(k \geq 2)$, son Frobenius cristallin a une valeur propre unité p-adique x, et une autre y de valuation $k - 1 > 0$. r admet donc toujours exactement deux raffinements : le raffinement ordinaire (r, x, y) et le raffinement critique (r, y, x).

- En termes modulaires, ces deux choix correspondent au fait bien connu qu'à une forme propre de niveau 1 on peut attacher une ou deux formes propres "jumelles" de niveau $\Gamma_0(p)$. C'est ce que nous avons fait avec E_k pour obtenir E_k^{crit} et E_k^{ord}. Ce phénomène est expliqué en détails dans un cadre relativement général en I.4.8 et III.5.
- De ce point de vue, les familles p-adiques de Coleman permettent non seulement de déformer p-adiquement une représentation galoisienne de type ρ_f, mais de déformer ρ_f munie d'un raffinement. En général, deux déformations d'une même représentation selon deux raffinements distincts sont très différentes (voir ci-dessous).
- Bien avant les travaux de Coleman, Hida avait construit des familles p-adiques de formes modulaires sous l'hypothèse d'ordinarité en p, et ce dans un double sens : la forme de départ devait être ordinaire en p (i.e. $v(a_p) = 0$), mais aussi toutes les formes de la famille. Autrement dit, il construisait des déformations de représentations ordinaires munies de leur raffinement ordinaire. C'est par exemple le cas de la famille passant par E_k^{ord}, mais pas celui de celle passant par E_k^{crit}. Dans les deux cas, on déforme la même représentation ordinaire

$$\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k),$$

mais les deux déformations construites sont effectuées selon des raffinements différents. Il est clair au moins sur cet exemple que ces deux déformations de $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1-k)$ sont vraiment très différentes : la première est réductible, la seconde est

[26]Il semble conjecturé si r provient de la géométrie, ces valeurs propres sont toujours distinctes.

irréductible (et ce même restreint à un groupe de décomposition en p, comme le montre la figure 1, voir aussi III.9.1)

4.2. Énoncé et application. Le résultat suivant, dû à Kisin, est un théorème relatif aux variations de représentations cristallines raffinées de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On pourra en trouver une version en ces termes et en dimension n en III.6.1.

Avec les notations de 4.1.4, pour chaque $z \in Z$, $D_{cris}(\rho_z)$ est un E-espace vectoriel de dimension 2 muni de son Frobenius cristallin φ, dont les valeurs propres sont $(a_p(z),\, p^{\pi(z)-1}/a_p(z))$. En particulier $D_{cris}(\rho_z)^{\varphi=a_p(z)} \neq 0$. Il se trouve que cela s'étend à tout $x \in \Omega(E)$:

PROPOSITION 4.1. *([**64**] prop. 6.3) Pour tout $x \in \Omega(E)$,*

$$D_{cris}(\rho'_x)^{\varphi=a_p(x)} \neq 0$$

Ainsi, tous les ρ'_x admettent au moins une période cristalline. Ceci nous fournit entre autre une interprétation galoisienne du coefficient a_p même dans le cas où ρ'_x n'est pas attachée à une forme modulaire classique, mais seulement à une forme surconvergente. Cela a de nombreuses applications, pour lesquelles nous renvoyons à l'introduction de [**64**].

Paradoxalement peut-être, nous allons nous servir de 4.1 au point x_k, en lequel $a_p(x_k) = p^{k-1}$, pour reprouver comme promis la cristallinité de l'extension construite en 3.2.2. On déduit donc de 4.1 que :

$$D_{cris}(\rho'_{x_k})^{\varphi=p^{k-1}} \neq 0$$

Mais ρ'_{x_k} est une extension de $E(1-k)$ par la représentation triviale sur E. En particulier, il est "trivial" [27] que

$$E \simeq D_{cris}(E) \subset D_{cris}(\rho'_{x_k})$$

Le Frobenius cristallin agissant par 1 sur $D_{cris}(E)$, on a

$$D_{cris}(\rho'_{x_k})^{\varphi=1} \neq 0$$

Puisque $1 \neq p^{k-1}$, on a redémontré que la dimension sur E de $D_{cris}(\rho'_{x_k})$ est au moins 2, c'est donc exactement 2, i.e. ρ'_{x_k} est cristalline, ce qu'il fallait démontrer. Notons que nous avons uniquement utilisé $k > 1$ dans cette partie.

Remarques :

– Tout analogue plausible de la proposition 4.1 faisant intervenir $F_2(x)$ semble faux en général, par exemple il est faux que $D_{cris}(\rho'_x(\pi(x)-1))^{\varphi=a_p^{-1}(x)} \neq 0$. Si $\pi(x) \in \mathbb{Z}$, cela montrerait que ρ_x est cristalline dès que $\pi(x)$ est un entier distinct de $2k-1$, car $D_{cris}(\rho'_x)$ serait de dimension 2. Ceci est impossible si $\pi(x)$ est entier négatif, car le polygone de Newton serait en dessous du polygone de Hodge.

[27] On rappelle que $D_{cris}(-)$ est un foncteur exact à gauche, car $D_{cris}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$. De plus, $B_{cris}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} = \mathbb{Q}_p$.

- On peut se demander ce que l'on obtiendrait en considérant une famille p-adique de Coleman passant par une forme modulaire propre f de poids k et niveau $\Gamma_0(p)$ nouvelle en p. Il est connu d'Atkin-Lehner que dans ce cas nous n'avons pas le choix pour a_p[28] : il satisfait
$$a_p^2 = p^{k-2},$$
c'est donc la valeur propre du Frobenius cristallin de ρ_f de plus petite valuation, l'autre étant pa_p. Le renseignement donné par 4.1 n'est alors pas contradictoire avec le fait que ρ_f est semi-stable **non cristalline**. Il l'aurait été si l'on avait pu choisir la valeur propre pa_p comme première valeur propre du raffinement. Cela reprouve en particulier la relation $a_p^2 = p^{k-2}$.
- Enfin, notons que dans le cas d'une famille ordinaire de Hida, on pourrait retrouver simplement 4.1. En effet, utilisant la réductibilité d'une infinité de ρ'_x, on voit aisément (quitte à faire une extension finie de Ω) que ρ' a un sous-$A(\Omega)$-module de rang 1 facteur direct de $A(\Omega)^2$, qui est stable par D_p. Il suit d'un argument de densité que D_p y agit de manière non ramifiée, et qu'un relèvement de Frobenius géométrique agit par multiplication par a_p, ce qui conclut.

5. Digression sur le cas $k = 2$

Dans la preuve du théorème principal du chapitre 3, nous sommes confrontés à un phénomène nouveau par rapport à la méthode de cette annexe. En effet, l'argument de choix de réseaux "à la Ribet", qui est fait dans GL(3) cette fois-ci, ne nous fournit pas à tous les coups l'extension que l'on cherche . Précisément, et c'est inévitable, il nous fournit soit l'extension que l'on cherche, soit une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ (cf. III.9.3 iii. ainsi que la remarque III.9.1). Dans les deux cas nous contrôlons suffisamment bien la ramification hors de l, et nous pouvons (et devons!) appliquer les techniques du paragraphe précédent pour montrer que dans tous les cas l'extension construite est dans le H^1_f correspondant. Mais on a la :

PROPOSITION 5.1. *Soit F un corps de nombres, alors*
$$ord_{s=0}\zeta_F(s) = h^1_f(F, \mathbb{Q}_p(1)) = r_1 + r_2 - 1$$
En particulier, $h_1(F, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$ si et seulement si $F = \mathbb{Q}$ ou F est quadratique imaginaire.

Preuve : On montre que les deux premiers termes valent le troisième. L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Dedekind de F (cf. [**70**] Chap. 8 §2, 13 §3) permet de voir que le terme de gauche vaut $r_1 + r_2 - 1$ (les r_i viennent de facteurs Γ, le -1 est dû au pôle simple en 1). Le terme au centre se calcule par la théorie de Kummer (cf. par exemple [**88**]), elle montre que $H^1_f(F, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathcal{O}_F^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. Ainsi, $h^1_f(F, \mathbb{Q}_p(1))$ est le rang du groupe des unités de F. Le théorème des unités de Dirichlet conclut. □

[28] Cela vient de ce dans la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (et ses twists non ramifiés) les invariants sous un sous-groupe d'Iwahori sont de dimension 1 sur $\mathbb{C}$.

On conclut le raisonnement plus haut en remarquant que dans notre cas $\zeta(0) \neq 0$[29], i.e. il n'existe pas d'extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ qui soit dans le H^1_f, ce qui signifie que l'on a construit l'autre extension. Nous allons terminer cette annexe sur deux phénomènes liés aux extensions de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ dans la lignée des préoccupations de cette annexe. Je tiens à remercier E.Urban pour certaines remarques éclairantes liées à ce qui suit.

5.1. $\zeta(0) \neq 0$ implique que E_2 n'est pas surconvergente. Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer comment les techniques cette annexe permettent de montrer que E_2 n'est pas surconvergente. Par cela on entend qu'il n'existe pas de forme modulaire p-adique surconvergente de niveau 1 de q-développement

$$E_2(q) := 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n, \quad \sigma_1(n) := \sum_{d|n} d$$

Ce résultat est a été prouvé dans [**32**], et peut être déduit simplement des techniques de cette annexe ; cette idée est déjà présente dans [**102**] remarque 4.5.

Il est bien connu ([**96**] §2.1 Exemples) qu'il existe une forme modulaire p-adique de poids 2 et de niveau 1 de q-développement $E_2(q)$[30]. Le problème est donc de montrer que cette forme est non surconvergente. Supposons donc, par l'absurde, qu'elle le soit, on la note E_2. Elle est propre pour tous les T_l de valeur propre $1 + l$. Par la théorie du sous-groupe canonique, on peut aussi la voir comme une forme surconvergente de poids 2 et de niveau $\Gamma_0(p)$. Or il est connu [31] que

$$(1 - p^{k-1}) - 24(\sum_{n \geq 1} \sigma_1^*(n) q^n), \quad \sigma_1^*(n) := \sum_{d|n,(d,p)=1} d$$

est le q-développement d'une forme modulaire classique de poids 2 de niveau $\Gamma_0(p)$, on la note E_2^{ord}. En particulier,

$$E_2^{crit} := p^{1-k} E_2^{ord} + (1 - p^{1-k}) E_2$$

est une forme modulaire surconvergente de poids 2 et niveau $\Gamma_0(p)$ ayant le q-développement de $E_2^{crit}(q)$ analogue à celui de E_k^{crit} défini en 1.1, pour $k = 2$. Jusqu'ici nous avons en fait simplement montré que la surconvergence de $E_2(q)$ équivaut à celle de $E_2^{crit}(q)$, et nous supposons donc que $E_2^{crit}(q)$ est surconvergente.

Dans ce cas, la théorie de Coleman permet de construire une famille p-adique passant par E_2^{crit} tout comme en 2.2.1, avec pour raffinement $(2, 1)$ en x_2. L'argument de réseau effectué en 3.2.2 s'applique encore, permettant de construire une extension continue comme G_p-représentations de $E(-1)$ par E, qui est donc semi-stable par [**78**]. C'est encore insuffisant pour conclure, car il existe de telles représentations. On montre enfin

[29] Dans le chapitre 3, nous travaillons précisément sur un corps quadratique imaginaire, plutôt que sur $\mathbb{Q}$.

[30] Il faut rappeler à ce stade que la série définissant $E_k(z)$ en 1.1 ne converge pas absolument pour $k = 2$. Mieux, on vérifie aisément qu'il n'existe pas de forme modulaire de poids 2 en niveau 1.

[31] C'est par exemple une conséquence du théorème de Hida : "Une forme modulaire p-adique ordinaire de poids $k \geq 2$ est classique en niveau $\Gamma_0(p)$"

que cette représentation est cristalline comme en 4.2 : on a donc construit un élément non trivial de $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1))$. C'est la contradiction cherchée !

5.2. Construction d'une extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ au point non tempéré des courbes de Hecke quaternioniques. (cf. II.6.2)

5.2.1. Soit d un nombre premier fixé, $(p, d) = 1$. Nous allons montrer comment construire, toujours par déformation p-adique de formes modulaires, une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ qui soit cristalline en p, non ramifiée hors de pd et semi-stable en d. Cette extension n'est pas stricto-sensu dans $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1))$ à cause de la condition affaiblie en d. Elle est prédite par l'annulation en 0 de la fonction ζ de Riemann privée de son facteur Eulérien en d.

Notons qu'il est trivial de construire abstraitement l'extension cherchée en considérant les systèmes compatibles de p^n-division de l dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous voyons cependant deux intérêts à ce paragraphe :

1) Il montre que ces extensions se construisent aussi par la méthode de cet appendice,

2) On peut utiliser des familles p-adiques pour des formes automorphes sur une algèbre de quaternion définie pour le démontrer, rapprochant ainsi la méthode de cette annexe avec celle du chapitre 3.

5.2.2. Considérons l'algèbre de quaternions D sur $\mathbb{Q}$ de discriminant d, $D(\mathbb{R})$ est l'algèbre des quaternions réels (cf. II.3.2.2). Fixons un ordre maximal $D_{\mathbb{Z}}$ de D ainsi qu'un isomorphisme $D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq M_2(\mathbb{Z}_p)$, on pose alors

$$U_0(p) := (D_{\mathbb{Z}} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^* \cap \Gamma_0(p)$$

Les représentations automorphes de D sont toutes discrètes, les seules qui sont non tempérées étant abéliennes de dimension 1. En niveau $U_0(p)$, il n'y en n'a qu'une qui est la représentation triviale, obtenue sur l'espaces des fonctions constantes

$$D^*(\mathbb{Q}) \backslash D^*(\mathbb{A}) / U_0(p) \to \mathbb{C}$$

$\mathbb{A}$ désigne ici les adèles de $\mathbb{Q}$. Notons $E_2^{crit,d-ord}$ la fonction constante égale à 1 sur $D^*(\mathbb{A})$. L'algèbre de Hecke globale, engendrée par U_p, les T_l avec $l \neq p, d$, et U_d (cf. II.5.1), y admet pour valeurs propres respectives : p, $1 + l$ et 1. La représentation galoisienne p-adique semi-simple attachée à la Langlands à $E_2^{crit,d-ord}$ est donc comme prévu

$$\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(-1)$$

5.2.3. Il se trouve que la théorie des familles p-adique pour D^* (cf. [**21**], II.3.2.2), qui se fait en niveau $U_0(p)$, ne distingue pas du tout cette forme des autres, qui sont tempérées et dont les représentations galoisiennes associées sont absolument irréductibles. On dispose ainsi d'une famille p-adique de pente 1 passant par $E_2^{crit,d-ord}$ tout comme en 2.2.1, les q-développements étant simplement remplacés par des systèmes de valeurs propres. L'analogue du **Fait** *loc.cit.* est que les autres formes quaternioniques de la famille ont des représentations galoisiennes irréductibles, ce qui est immédiat dans notre cas. La construction de la famille de représentations galoisiennes vaut aussi à ceci près que l'on a de la ramification en d. Le même argument de réseau qu'en §3.2.2 nous permet encore de construire une représentation continue :

$$G_{dp} \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega))$$

qui se spécialisant en x_2 en une extension non triviale de $E(-1)$ par E. On montre que cette extension est cristalline toujours par l'argument du §4.2. Il reste à regarder l'action d'un groupe de décomposition D_d en d. Si l'extension ci-dessus était scindée restreinte à D_d, son twist par $\mathbb{Q}_p(1)$ aurait comme sous-quotient un élément non trivial dans $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1))$. Elle ne l'est donc pas, ce qui conclut. $\square$

Remarques :

- Nous aurions pu prendre plus généralement d sans facteur carré avec un nombre impair de diviseurs premiers dans l'argument ci-dessus. De plus, le "cas général" d sans facteur carré peut se faire aussi en utilisant des séries d'Eisenstein classiques de poids 2 de niveau pd.
- Soit Π la représentation de dimension 1 de $D^*(\mathbb{A})$ sur $\mathbb{C}.E_2^{crit,d-ord}$, son L-paramètre restreint au groupe de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_d$ a une monodromie non triviale. Il est amusant de constater que si l'on décide d'attacher à Π l'extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(-1)$ par $\mathbb{Q}_p$ construite ci-dessus plutôt que simplement sa semi-simplifiée $\mathbb{Q}_p(-1) \oplus \mathbb{Q}_p$, alors la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale est satisfaite à toutes les places $\neq p$, y compris d.
- Les méthodes de cette annexe et celles du chapitre 3 peuvent paraître différentes en ce sens qu'ici nous utilisons des séries d'Eisenstein, alors que là nous avions des représentations automorphes discrètes. Avant d'en discuter, il faut noter que le point commun important des deux versions est que les formes utilisées sont non tempérées. Dans la pratique, ce qui compte pour la méthode est l'aptitude qu'a la forme dont on part (en général non ramifiée en p) à s'inscrire dans une famille p-adique en niveau $\Gamma_0(p)$ et ce avec de divers raffinements afin d'appliquer le §4.2.

  Reprenons le cas Eisenstein de ce texte : on part de la série d'Eisenstein E_k de niveau 1. Elle admet deux "dégénérescences" en niveau $\Gamma_0(p)$, E_k^{crit} et E_k^{ord}, mais une seule des deux admet une déformation p-adique qui "sort" des séries d'Eisenstein : E_k^{crit}. Cette forme a de plus la particularité d'être "cuspidale-surconvergente", en ce sens qu'elle s'annule à la pointe ∞, l'unique pointe d'intêret lorsque l'on fait des familles p-adiques. En bref, d'un point de vue p-adique, E_k^{crit} a tout d'une forme cuspidale.

  En parallèle, remarquons que la forme $E_2^{crit,d-ord}$ définie plus haut apparaît effectivement en niveau $\Gamma_0(p)$ pour le groupe D^*, alors que son analogue naturel $E_2^{ord,d-ord}$ n'apparaît pas [32]. Dans les deux cas, nous ne disposons donc d'une d'une seule déformation de $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(-1)$, avec le même raffinement "critique" : c'est la ressemblance que nous voulions mettre en évidence.

[32] Le $d-ord$ est uniquement parasite en ce qui concerne ces remarques, il pourrait par exemple être supprimé s'il on travaillait sur un corps totalement réel de degré pair.

– De manière générale, si Π_p est une représentation irréductible non tempérée de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ composante locale d'une représentation automorphe discrète, ses invariants sous un sous-groupe d'Iwahori seront toujours de dimension $< n!$ (voir III.5). C'est par exemple évidemment le cas de la représentation triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans l'exemple de ce paragraphe. Cela généralise le fait que $E_2^{crit,d-ord}$ et $E_2^{ord,d-ord}$ ne peuvent pas apparaître simultanément, cela se produit par exemple pour la représentation $\pi(\chi_0)_p$ dans le chapitre 3 (cf. III.5.2.4).

Bibliographie

[1] J. ARTHUR & L. CLOZEL *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*
PUP Annals of math. studies 120 (1989)

[2] E. ARTIN & J. TATE *Class field theory*
W. A. Benjamin (1968).

[3] J. BELLAÏCHE *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*
Thèse de l'université Paris 11, janvier 2002.

[4] J. BELLAÏCHE *À propos d'un lemme de Ribet*
Preprint DMA, École normale supérieure, no. 02-17

[5] J. BELLAÏCHE ET P. GRAFTIEAUX *Représentations sur un anneau de valuation discrète complet*
Preprint de l'université de Nice.

[6] I.N. BERNSTEIN & A. V. ZELEVINSKY *Induced representations of reductive p-adic groups I*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 10, pages 441-472 (1977)

[7] L. BLASCO *Description du dual admissible de* $\mathrm{U}(2,1)(F)$ *par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko*
Manuscripta Math. 107, no. 2, pages 151-186 (2002)

[8] D. BLASIUS ET J.ROGAWSKI *Tate class and arithmetic quotient of two-ball*
[**71**] pages 421-443

[9] D. BLASIUS ET J. ROGAWSKI *Zeta functions of Shimura Varieties*
[**75**], pages 525-571

[10] D. BLASIUS ET J. ROGAWSKI *Motives for Hilbert modular forms*
Inventiones mathematicae 114, pages 55-87 (1993)

[11] A. BOREL *Some finiteness properties of adele groups over number fields*
IHES Publ.math. 16, pages 5-30 (1963)

[12] A.BOREL *Admissible representations of a semi-simple group over a loal field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*
Inventiones math. 35, 233-259 (1976)

[13] A.BOREL & W.CASSELMAN *Automorphic forms, representations, and L-functions*
Proceedings of Symp. in Pure Maths. 33, Corvallis (1977)

[14] A.BOREL & N.WALLACH *Continous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*
Ann. Maths Studies 94 (1980)

[15] S.BOSCH, U.GÜNTZER & R.REMMERT *Non archimedian analysis*
Springer Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261

[16] C.BREUIL *Advanced course on modular forms and p-adic Hodge theory*
Notes de cours au CRM, juillet 2001.

[17] C. Bushnell *Smooth representations of p-adic group*
ICM 1998, pages 770-779

[18] C. Bushnell & P. Kutzko *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*
Proc. Lond. Math. Soc (3) 77, pages 582-634 (1997)

[19] C. Bushnell & P. Kutzko *Semi-simple types*
Compositio Math. 119, pages 53-117 (1999)

[20] K.Buzzard *p-adic modular forms on definite quaternion algebras*
Non publié (1998), disponible à l'adresse : http ://www.ma.ic.ac.uk/˜kbuzzard/maths/other.html

[21] K.Buzzard *On p-adic families of automorphic forms*
Disponible à l'adresse : http ://www.ma.ic.ac.uk/˜kbuzzard/maths/research/papers/index.html

[22] K.Buzzard *Eigenvarieties*
En préparation (2002)

[23] K.Buzzard & R.Taylor *Companion forms and weight one forms*
Annals of math. 149, pages 905-919 (1999)

[24] P.Cartier *Representations of p-adic groups : A survey*
[**13**] Part I, 111-155

[25] W. Casselman *The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function.*
Compositio Math. 40, no. 3, pages 387–406 (1980).

[26] F. Choucroun *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits.*
Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 58 (1994), 170 pp.

[27] L.Clozel *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$*
Publications math. I.H.E.S. 73, pages 97-145 (1991)

[28] L.Clozel & J.-P. Labesse *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*
Asterisque 257, SMF, Appendice A (1998)

[29] R.Coleman *Classical and overconvergent modular forms*
Inventiones math. 124, pages 214-241 (1996)

[30] R.Coleman *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones math. 127, pages 417-479 (1997)

[31] R.Coleman *Classical and overconvergent modular forms of higher level*
Journal de théorie des nombres de Bordeaux 9, pages 395-403 (1997)

[32] R.Coleman, F.Gouvêa & N.Jochnowitz *E_2, Θ, and overconvergence*
Int. Math. Res. Not. 1995, No.1, pages 23-41 (1995)

[33] R.Coleman & B.Mazur *The Eigencurve*
Proc. Durham, 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254 (1998)

[34] P. Colmez & J.-M. Fontaine *Construction des représentations p-adiques semi-stables*
Inventiones mathematicae 140, pages 1-43 (2000)

[35] B.Conrad *Modular Curves, Descent Theory and Rigid Analytic Spaces*
Preprint (2001).

[36] B.Conrad *Irreducible components of rigid analytic Spaces*
Annales de l'institut Fourier 49, pages 905-919 (1999).

[37] C. Curtis et I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*
Wiley-Interscience, 1962

[38] P.Deligne & J.-P. Serre *Formes modulaires de poids* 1
Annales Sci. E.N.S. IV Sér.7, pages 507-530 (1974)

[39] J.Dieudonné & A.Grothendieck *Elements de géométrie algébrique*
I.H.E.S. Publ. Math.

[40] T.Enright *Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complexe Lie groups*
Duke math. journal 46 n° 3, pages 513-525 (1979)

[41] G. Faltings *Cristalline cohomology and p-adic Galois representations*
Algebraic analysis, and number theory, JAMI conference , pages 25-90 (1988)

[42] J.-M. Fontaine *Le corps des périodes p-adiques*
Périodes p-adiques [**77**], exposé 2, pages 59-111

[43] J.-M. Fontaine *Représentations p-adiques semi-stables*
Périodes p-adiques [**77**], exposé 3, pages 113-184

[44] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou *Autour des conjectures de Bloch-Kato : cohomologie Galoisienne et valeurs de fonctions L*
[**75**] part 1, pages 599-706 (1994)

[45] W.Fulton & J.Harris *Representation theory, a first course.*
Springer-Verlag, GTM 129 (1991)

[46] R.Goodman & N.Wallach *Representations and invariants of classical groups*
Cambridge University Press. Encyclopedia of math. 68 (1998)

[47] B.B.Gordon *Canonical models of Picard modular surfaces*
[**71**], pages 1-27.

[48] F.Gouvêa *Arithmetic of p-adic modular forms*
Springer Verlag, Lecture notes in math. 1304 (1988)

[49] F.Gouvêa & B.Mazur *Families of modular eigenforms*
Mathematics of computation vol. 58 198, pages 793-805 (1992)

[50] M.Harris *On the local Langlands correspondence*
Proceedings ICM 2002, vol. 2, pages 583-597 (2002)

[51] M.Harris & R.Taylor *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*
PUP Annals of Math. Studies. 151 (2001)

[52] M.Harris & R.Taylor *Regular models of certain Shimura varieties*
Asian J. Math. 6, No.1, pages 61-94 (2002)

[53] H.Hida *Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for SL(n)*
Bull. Soc. Math. Fr. 123, pages 139-166 (1995)

[54] H.Hida *p-adic automorphic forms on reductive groups*
Cours à l'IHP, printemps 2000.

[55] H.Hida *Modular forms and Galois cohomology*
Cambridge university press 69.

[56] H.Hida *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*
London Math. Soc., Cambridge univ. press, 26 (1993).

[57] H.Hida *Galois representations into* $GL_2(\mathbb{Z}_p[[T]])$ *attached to ordinary cusp forms*
Inventiones math. 85, pages 546-613 (1986)

[58] A.Huber & G.Kings *Bloch-Kato conjecture and Main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*
Prébublication (2002)

[59] J.E. Humphreys *Reflection Groups and Coxeter Groups*
Cambridge studies in advanced mathematics 29

[60] H.Jacquet & R.Langlands *Automorphic forms on GL_2*
Springer lecture notes 114, (1970)

[61] N.Katz *p-adic properties of modular schemes and modular forms*
[**74**], pages 69-190

[62] N. Katz & W. Messing *Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields*
Inventiones math. 23, pages 73-77 (1974)

[63] D. Keys *Principal series representations of special unitary groups over local fields,*
Compositio mathematica 51, no. 1, pages 115-130 (1984)

[64] M. Kisin *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
À paraître à Inventiones math. Disponible à l'adresse :
http ://www.math.uni-muenster.de/math/Personen/Angestellte/pages/Kisin.html

[65] A.Knapp *Representation theory of semisimple Lie groups*
Princeton univ. press (1986)

[66] N.Koblitz *p-adic analysis, p-adic numbers and zeta functions.*
Springer Verlag, GTM 58 (1984)

[67] R.Kottwitz *Points on some Shimura varieties over finite fields*
Journal AMS 5, n° 2 (1992)

[68] J.-P. Labesse *Cohomologie, stabilisation et changement de base*
Société mathématique de France, Astérisque 257 (1999)

[69] J.-P. Labesse *Cohomologie, stabilisation et changement de base*
Astérisque 257, SMF (1998)

[70] S.Lang *Algebraic Number Theory*
Springer Verlag GTM 110, seconde éd. (1994)

[71] Ed. R. Langlands & D. Ramakhrisnan, *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM*
Publications C.R.M., Montréal

[72] H.Matsumura *Commutative ring theory*
Cambridge studies in adv. math. 8 (1980)

[73] B. Mazur *The theme of p-adic variation*
Mathematics : Frontiers and perspectives
V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000)

[74] *Modular fonctions of one variable 3*
Proceedings Int. Summer School, Antwerp, Springer Lecture Notes 350 (1972)

[75] *Motives*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 55

[76] C.Moeglin & J.-L. Waldspurger *Le spectre résiduel de* GL_n
Ann.Sci.ENS 22, pages 605-674 (1989)

[77] *Périodes p-adiques*
Société mathématique de France, Astérisque 223 (1994)

[78] B. Perrin-Riou *Représentations p-adiques ordinaires*
Périodes p-adiques [**77**], exposé 4, pages 209-220

[79] K. Ribet *A modular construction of unramified extensions of* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$
Inventiones math. 34, no. 3, pages 151-162 (1976)

[80] A.Roche *Types and Hecke Algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups*
Ann.scient.Ec.Norm.Sup 31, pages 361-413 (1998)

[81] J.Rogawski *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones math. 79, pages 443-465 (1985)

[82] J.Rogawski *Analytic expression for the number of points mod p*
[**71**], pages 65-109

[83] J.Rogawski *The multiplicity formula for A-packets*
[**71**], pages 395-419

[84] J.Rogawski *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones math. 79, pages 443-465 (1985)

[85] J.Rogawski *Automorphic representations of unitary groups in three variables,*
Annals of math. studies 123, Princeton University Press (1990)

[86] R.Rouquier *Caractérisations des caractères et pseudo-caractères*
Journal of algebra 180, pages 571-586 (1996)

[87] K. Rubin *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields.*
Inventiones math. 103, no. 1, pages 25-68 (1991)

[88] K. Rubin *Euler systems*
Annals of math. studies 147 (2000)

[89] P.Schneider & U.Stuhler *The cohomology of p-adic symmetric spaces*
Inventiones math. 105, pages 47-122 (1991)

[90] P.Schneider & J.Teitelbaum *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2*
Journal AMS 15 , pages 443-468 (2002)

[91] P.Schneider & J.Teitelbaum *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*
À paraître à Invent. math.

[92] J.Shalika *The multiplicity one theorem for $GL(n)$*
Annals of Math. 100, pages 171-193 (1974).

[93] J.-P. Serre *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*
Publications Math. I.H.E.S. 12, pages 69-85 (1962)

[94] J.-P. Serre *Cours d'arithmétique*
Edition P.U.F. (1970)

[95] J.-P. Serre *Arbre, amalgames, SL_2*
Asterisque 46 (1977)

[96] J.-P. Serre *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*
[**74**], pages 191-268
Sém. Bourbaki exposé 416 (1971/72)

[97] J.-P. Serre *Two letters on quaternions and modular forms (mod p)*
Israel journal of math. 95, pages 281-299 (1996).

[98] S. Sen *Continous cohomology and p-adic Galois representations*
Inventiones math. 62, pages 89-116 (1980)

[99] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[100] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[101] A.Grothendieck, M.Artin & J.-L. Verdier Théorie des topos et cohomologie étale des schémas
Séminaire de géométrie algébrique IV, exposé XVI.

[102] C. Skinner & E. Urban Sur les déformations p-adiques des formes de Saito-Kurokawa
C.R.A.S Paris I 335, pages 581-586 (2002)

[103] G.Stevens *Families of modular forms with positive slopes*
Cours à l'IHP, printemps 2000.

[104] J. Tate *Number theoretic background*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33,
Automorphic forms, representations and L-functions Part 2, pages 3-26 (1977)

[105] J.Tate *Rigid analytic spaces*
Inventiones math. 12, pages 257-289 (1971)

[106] R. Taylor *Galois representations attached to Siegel modular forms of low weight*
Duke math. Journal 63, pages 281-332 (1991)

[107] J.Tits *Reductive groups over local fields*
[**13**] Part I, pages 29-69

[108] J.Towber *Young symmetry, the flag manifold, and representations of GL_n*
Journal of Algebra 61, no. 2, pages 414-462 (1979)

[109] D.Wan *Dimension variation of classical and p-adic modular forms*
Inventiones math. 133, pages 449-463 (1998)

[110] A. V. Zelevinsky *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 13, pages 165-210 (1980)