SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1967-1969

GROUPES DE MONODROMIE EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

(SGA 7 II)

par P.Deligne et N.Katz

INTRODUCTION

La première partie de ce séminaire, dirigée par A. Grothendieck, a paru dans ces mêmes Lecture Notes in Mathematics sous le n° 288. De cette première partie, nous n'aurons à faire usage que des résultats des exposés I et VI (spécialement les §§ 5, 6).

Les résultats clef de cette seconde partie sont la formule de Picard-Lefschetz de l'exposé XV et la théorie des pinceaux de Lefschetz de l'exposé XVIII.

Soit X_t une famille de variétés algébriques dépendant d'un paramètre t. La formule de Picard-Lefschetz décrit le comportement de la cohomologie de X_t au voisinage d'une valeur t_o du paramètre pour laquelle X_t acquiert un point singulier quadratique ordinaire: elle fournit la différence entre les cohomologies de X_t et X_{t_o} et décrit la monodromie locale quand t tourne autour de t_o. Dans le cadre transcendant, elle est due à Lefschetz [2] et a une signification géométrique simple (XIV 3.2). Pour l'établir en toute caractéristique, il nous a fallu monter une lourde machinerie (XII, XIII, XIV), dont les grandes lignes sont données dans les introductions des exposés XIII et XIV.

Lorsqu'on prend pour famille X_t un pinceau assez général de sections hyperplanes d'une variété projective non singulière X, la formule de Picard-Lefschetz, et d'autres idées géométriques, fournissent de précieuses relations entre la cohomologie de X et celles de ses sections hyperplanes X_t. Ces relations ne prennent toute leur force que lorsque X vérifie le théorème de Lefschetz vache (LV) (XVIII 5.2.2). Cette condition est automatique en caractéristique 0. En dimension ≥ 3, la seule démonstration connue repose sur la théorie de Hodge des intégrales harmoniques (la démonstration de Lefschetz du point crucial [2] 13. pg. 25 est fausse); il serait extrêmement intéressant d'en avoir une autre, susceptible de se généraliser en caractéristique p.

Les principales applications sont les suivantes.

a) Dans l'exposé XVI, nous démontrons en égale caractéristique p une formule analogue à celle donnée par Milnor [3] pour le nombre de cycles évanescents en les points critiques isolés d'une application $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

b) Dans l'exposé XIX, nous utilisons des méthodes de Lefschetz ([2] p. 106) pour démontrer notamment, en toute caractéristique, que si S est une surface générique dans $\mathbb{P}^3$ de degré $\neq 2, 3$ toute courbe tracée sur S est l'intersection complète de S avec une autre surface de $\mathbb{P}^3$.

c) Dans l'exposé XX, par des méthodes transposées de méthodes de Griffiths [1], nous prouvons l'existence, en toute caractéristique, de cycles algébriques homologiquement équivalents à zéro dont aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro.

Signalons encore que la méthode des pinceaux de Lefschetz a récemment permis de prouver par récurrence sur la dimension le résultat suivant (voir [4]). Si la variété projective non singulière X sur $\mathbb{F}_p$ se relève en caractéristique 0 (avec sa polarisation) et que $p \neq 2$, le polynôme caractéristique de Frobenius agissant sur $H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est dans $\mathbb{Z}[t]$ et indépendant de ℓ $(\ell \neq p)$.

Les exposés XXII et XXI sont préliminaires à XX (et à XIX en caractéristique 2). Dans XXII, nous étudions la réduction mod p de la fonction ζ d'une variété algébrique sur $\mathbb{F}_p$ (par une méthode où la théorie de Dwork joue un rôle essentiel), et les propriétés d'intégrabilité de polynômes caractéristiques de Frobenius agissant sur des H^i . Dans XXI, nous minorons le niveau de la cohomologie d'intersections complètes génériques.

Je suggère au lecteur désireux de se faire une première image géométrique de la théorie de lire tout d'abord I, XIV 3.2, XIX § 4 et l'introduction de XIII.

Le Leitfaden qui suit explique en gros la dépendance logique des divers exposés entre eux.

[1] P.A. GRIFFITHS On the periods of certain integrals III, Ann. of Math.

[2] S. LEFSCHETZ L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1924, Gauthier-Villars, reproduit dans Selected Papers (Chelsea).

[3] J. MILNOR Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies 61, Princeton 1968.

[4] J.L. VERDIER (d'après P. DELIGNE) Cohomologie ℓ-adique, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

Bures-sur-Yvette, le 8 novembre 1972

P. DELIGNE

Table des Matières

Exposé X

Intersections sur les surfaces régulières
par P.Deligne 1

Exposé XI

Cohomologie des intersections complètes
par P.Deligne 39

Exposé XII

Quadriques
par P.Deligne 62

Exposé XIII

Le formalisme des cycles évanescents
par P.Deligne 82

Exposé XIV

Comparaison avec la théorie transcendante
par P.Deligne 116

Exposé XV

La formule de Picard-Lefschetz
par P.Deligne 165

Exposé XVI

La formule de Milnor
par P.Deligne 197

Exposé XVII

Pinceaux de Lefschetz: théorème d'existence
par N.Katz. 212

Exposé XVIII

Etude cohomologique des pinceaux de Lefschetz
par N.Katz. 254

Exposé XIX

Le théorème de Noether
par P.Deligne 328

Exposé XX

Le théorème de Griffiths
par N.Katz. 341

Exposé XXI

Le niveau de la cohomologie des intersections complètes
par N.Katz. 363

Exposé XXII

Une formule de congruence pour la fonction
par N.Katz. 401

3

363

401

INTERSECTIONS SUR LES SURFACES REGULIERES

par P. Deligne

Dans la première partie de cet exposé, après quelques préliminaires de théorie des intersections (contenus dans [5] ∪ [7]), on donne la démonstration d'après Artin d'un cas particulier d'un théorème de Raynaud [9] (1.13), et une démonstration a priori d'un théorème que Néron [8] vérifiait cas par cas (1.15). De (1.13) résultent assez aisément les théorèmes de [9] utilisés dans [2] et par là dans IX.

Dans la seconde partie, je poursuis sur ma lancée et raconte comment les "italiens" [1], [3] calculaient les nombres d'intersections, sur les surfaces. Les résultats principaux 2.9 et 2.11 se trouvent par ailleurs dans Northcott [12] et [13]. Pour terminer, je donne en 2.27, 2.30, 2.34 une relation conjecturale entre la dimension du schéma formel versel des modules d'une singularité d'une courbe réduite, l'invariant δ de la singularité et un invariant mesurant sa symétrie.

Cet exposé ne sera pas utilisé dans la suite du séminaire.

1. Nombres d'intersection sur les surfaces arithmétiques

1.0. On suppose donné dans ce § un schéma régulier X de dimension 2, un diviseur réduit Y de X, et un sous-corps k de $H^0(Y,\underline{O}_Y)$. On suppose que Y est une courbe (EGA II 7.4.1) propre sur k. Voici trois exemples de cette situation

Exemple 1.1. Soit (S,η,s) un trait et X un S-schéma $f : X \longrightarrow S$, régulier, propre et plat sur S, à fibres purement de dimension un. On prend $Y = (f^{-1}(s))_{red}$ et $k = k(s)$. On se restreindra à ce cas à partir de 1.10.

Exemple 1.2. Soient X_o le spectre d'un anneau local normal de dimension 2, s le point fermé de X_o et $f : X \longrightarrow X_o$ un X_o-schéma régulier et connexe, propre sur X_o, distinct de X_o mais coïncidant avec X_o au-dessus de $X_o \smallsetminus \{s\}$. On prend $Y = (f^{-1}(s))_{red}$ et $k = k(s)$.

Exemple 1.3. On prend pour X une surface régulière complète sur un corps k et pour Y une courbe réduite tracée sur X.

Rappelons le lemme suivant (SGA 6 IV ex. 1.9).

Lemme 1.4. Soit Z_o un sous-schéma fermé d'un schéma noethérien Z. Alors, l'inclusion de Z_o dans Z induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux cohérents de $\underline{O}_{Z_o}$-modules dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux cohérents sur Z à support dans Z_o.

Ce lemme permet de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F})$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X à support dans Y, de façon à ce que,

(i) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent de $\underline{O}_Y$-modules, alors

$$\chi(\mathcal{F}) = \dim_k H^0(\mathcal{F}) - \dim_k H^1(\mathcal{F}) \qquad (1.4.1)$$

(ii) χ est additif relativement aux suites exactes courtes.

Si les faisceaux de cohomologie d'un complexe K de $\underline{O}_X$-modules sont des faisceaux cohérents à support dans Y, on pose

$$\chi(K) = \Sigma (-1)^i \chi(\underline{H}^i(K)) \quad . \qquad (1.4.2)$$

Si $\mathcal{F}$ est localisé en un point y de Y, on a

$$\chi(\mathcal{F}) = \lg_{\underline{O}_y} (\mathcal{F}_y) \cdot [k(y) : k] \quad . \qquad (1.4.3)$$

Sous les hypothèses (1.1), (1.2) ou (1.3), on a

$$\chi(\mathcal{F}) = \lg\ f_*\mathcal{F} - \lg\ R^1 f_*\mathcal{F} \quad . \tag{1.4.4}$$

Soient D un diviseur ≥ 0 concentré sur Y, et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur D. Il y a alors une et une seule façon de définir le degré $\deg_D(\mathcal{L})$ de sorte que

$$\begin{cases} \deg_D(\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}'') = \deg_D(\mathcal{L}') + \deg_D(\mathcal{L}'') \\ \text{pour } \mathcal{L} \subset \underline{O}\ , \text{ on a } \deg_D(\mathcal{L}) = -\chi(\underline{O}/\mathcal{L}) \quad . \end{cases} \tag{1.4.5}$$

On a alors la formule de Riemann-Roch sur D

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\underline{O}_D) + \deg_D(\mathcal{L}) \quad . \tag{1.4.6}$$

Soit $D = \Sigma\ n_i\ D_i$ la décomposition de D en diviseurs irréductibles réduits ; on a

$$\deg_D(\mathcal{L}) = \Sigma\ n_i\ \deg_{D_i}(\mathcal{L}) \quad . \tag{1.4.7}$$

Définition 1.5. Soient D et E deux diviseurs ≥ 0 sur X, et supposons D concentré sur Y. On définit le nombre d'intersection de D et E (relativement au corps k (1.0)) par :

$$(D,E) = \chi(\underline{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_E) = \chi(\underline{O}_D \otimes \underline{O}_E) - \chi(\mathrm{Tor}^1(\underline{O}_D, \underline{O}_E)) \quad .$$

Sous les hypothèses faites, on a en effet $\mathrm{Tor}^2(\underline{O}_D, \underline{O}_E) = 0$.

Proposition 1.6. Sous les hypothèses 1.5, on a :

(i) Le nombre d'intersection (D,E) est additif en les diviseurs D et E ; ceci permet, par linéarité, de définir le nombre d'intersection de deux diviseurs non nécessairement positifs.

(ii) $(D,E) = \deg_D(\underline{O}(E))$.

(iii) Si D et E ne se coupent qu'en un nombre fini de points, alors $(D,E) = \chi(\underline{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_E) \geq 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si D et E sont disjoints.

(iv) Si D et E sont concentrés sur Y, alors $(D,E) = (E,D)$.

(v) Si N est le faisceau conormal à D, alors

$$(D)^2 = (D,D) = -\deg_D(N) \quad .$$

(vi) Si E, non nécessairement positif, est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X, alors $(D,E) = 0$.

Preuve. Soit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}(-E) \longrightarrow \underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_E \longrightarrow 0 \quad ,$$

elle fournit, par (1.4.6),

$$(D,E) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \chi(\underline{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_E) = \chi(\underline{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_X) - \chi(\underline{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}(-E))$$

$$= \chi(\underline{O}_D) - \chi(\underline{O}(-E) \mid D) = -\deg_D(\underline{O}(-E)) = \deg_D(\underline{O}(E)) \quad .$$

Ceci prouve (ii), (vi) et la biadditivité en vertu de (1.4.5) et (1.4.7). Sous les hypothèses (iii), on a $\mathrm{Tor}^1(\underline{O}_D, \underline{O}_E) = 0$, d'où la conclusion. Sous les hypothèses (v), on a

$$\underline{O}_D \otimes \underline{O}_D = \underline{O}_D \quad \text{et} \quad \mathbf{Tor}^1(\underline{O}_D, \underline{O}_D) \simeq N \quad \text{(SGA 6 VII 2.5)} \quad ,$$

d'où

$$(D,D) = \chi(\underline{O}_D) - \chi(N) = -\deg_D(N) \quad .$$

Enfin, (iv) résulte de la symétrie du produit tensoriel.

On notera que (ii), (iv) et (vi) restent vrais sans supposer les diviseurs positifs.

Proposition 1.7. Soient $(Y_i)_{1\le i\le k}$ les composantes irréductibles de Y, f une fonction méromorphe sur X, et

$$\mathrm{div}(f) = \Sigma\, n_i\, Y_i + Z$$

son diviseur, avec $|Z| \cap Y$ fini. Alors, posant $D_i = n_i\, Y_i$, on a, pour $(a_i)\in\mathbb{Q}^k$:

$$(\Sigma\, a_i\, D_i)^2 = -\sum_{i<j} (a_i-a_j)^2\, (D_i,D_j) - \Sigma\, a_i^2\, (D_i,Z) \quad .$$

Preuve (d'après [7]). En vertu de 1.6 (v) (vi), on a

$$(\Sigma_i\, a_i\, D_i)^2 = \Sigma_i\, a_i\, (D_i, \Sigma_j\, a_j\, D_j) = \Sigma_i\, a_i\, (D_i, \Sigma_j\, a_j\, D_j - a_i\, \mathrm{div}\, f)$$

$$= \Sigma\, a_i\, (D_i, \sum_{j\neq i} (a_j-a_i)D_j - a_i Z)$$

$$= \sum_{i\neq j} a_i\, (a_j-a_i)(D_i,D_j) - \Sigma_i\, a_i^2\, (D_i,Z)$$

$$= -\sum_{i<j} (a_i-a_j)^2\, (D_i\, D_j) - \Sigma_i\, a_i^2\, (D_i,Z)$$

Corollaire 1.8. Sous les hypothèses de l'exemple 1.1, prenons pour f une uniformisante π de S. Ici, Z = 0 et

$$(\Sigma\, k_i\, Y_i)^2 = -\sum_{i<j} \frac{1}{n_i n_j}\, (k_i\, n_j - k_j\, n_i)^2\, (Y_i,\, Y_j) \quad ;$$

donc la forme d'intersection est négative, et si Y est connexe, son noyau est réduit aux multiples de $\mathrm{div}(\pi)$.

Corollaire 1.9 (Mumford [7]). Sous les hypothèses de l'exemple 1.2, prenons pour f un élément non nul de l'idéal maximal de l'anneau local O_s. Ici, Z > 0, de sorte que la forme d'intersection est définie négative.

1.10. On se restreint, pour la suite, au cas considéré dans l'exemple (1.1).

Lichtenbaum [5] a prouvé que, dans ce cas, X est automatiquement projectif sur S, de sorte qu'il n'est pas fatiguant de définir le complexe $Rf^{!}\underline{O}_S$ ([4] III 8.7 p. 190). Puisque f est de dimension relative 1 et que X et S sont réguliers (Gorenstein suffirait) il existe ([4] V 8.3 et V 9.1) un faisceau inversible $\omega_{X/S}$ sur S, unique à isomorphisme unique près, tel que

(1.10.1) $$Rf^{!}\underline{O}_S \simeq \omega_{X/S}[1] .$$

On désigne par K un quelconque diviseur (effectif ou non) tel que $\omega \simeq \underline{O}(K)$.

Soient D un diviseur ≥ 0 concentré sur Y et N son faisceau conormal :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\ i\ } & X \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & S & \end{array} .$$

On a

(1.10.2) $$Rg^{!}\underline{O}_S = Ri^{!}Rf^{!}\underline{O}_S = Ri^{!}\omega_{X/S}[1] = \omega_{X/S}|\ D \otimes N^{\vee}[0]$$

En vertu du théorème de dualité ([4] V 11.1 p.210),

(1.10.3) $$Rg_{*}\, Rg^{!}\underline{O}_S \simeq RHom(Rg_{*}\,\underline{O}_D, \underline{O}_S) .$$

De plus, pour tout $\underline{O}_S$-module M concentré au point fermé, on a

(1.10.4) $$\chi(RHom(M, \underline{O}_S)) = -\chi(M)$$

de sorte qu'ici, utilisant (1.4.4) et (1.10.3), on obtient

$$\chi(Rg^{!}\underline{O}_S) = -\chi(\underline{O}_D) .$$

Puisque (1.4.6)

$$\chi(Rg^{!}\underline{O}_S) = \chi(\underline{O}_D) + \deg_D(Rg^{!}\underline{O}_S) ,$$

on en conclut par (1.10.2) que

$$-2\,\chi(\underline{O}_D) = \deg_D (Rg^!\underline{O}_D) = \deg_D (\omega|D \otimes N^\vee) = \deg_D(\omega) - \deg_D(N) \quad ,$$

ce qui, par 1.6 (ii) et(v) se réécrit

Proposition 1.11. Sous les hypothèses (1.1), quelque soit le diviseur $D \geq 0$ concentré sur Y, on a

$$\chi(\underline{O}_D) = -\frac{1}{2}(D, D+K) \quad .$$

1.12. On désignera par d le pgcd des multiplicités géométriques des composantes irréductibles de $X_s = f^{-1}(s)$, i.e. le pgcd des longueurs des anneaux locaux des points maximaux de la fibre spéciale géométrique de f. Si X_η a un point rationnel, i.e. si $f : X \longrightarrow S$ a une section x, alors $d = 1$; plus précisément f est lisse en x(s). En effet, x est une immersion fermée de schémas réguliers, donc est une immersion régulière et on applique EGA IV 17.12.1.

Voici la démonstration, d'après M. Artin, d'un cas particulier d'un théorème de M. Raynaud [9], qui suppose seulement d premier à la caractéristique p de k.

Théorème 1.13. Avec les notations précédentes, si Y est géométriquement connexe et si $d = 1$, alors X est cohomologiquement plat sur S en dimension 0 (EGA III 7.8.1), plus précisément (EGA III 7.6.9 (ii)) on a $k \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \underline{O}_{X_s})$.

On se ramène aisément au cas où S est strictement local. Comme Y est géométriquement connexe, $H^0(Y, \underline{O}_Y)$ est une extension radicielle de k, et puisque $(d,p)=1$, une au moins des composantes irréductibles de Y est

géométriquement réduite, et on en déduit facilement que $H^0(Y,\underline{O}_Y) = k$.

Soit D un diviseur sur X tel que

$$Y \leq D < X_s \quad .$$

Puisque d = 1, D n'est pas multiple rationnel de X_s, donc par 1.8

$$(D,X_s-D) = -(D,D) > 0 \quad .$$

Le diviseur Y a donc une composante irréductible E telle que

$$0 < E \leq X_s-D \quad \text{et} \quad (D,E) > 0 \quad .$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{O}(-D-E) & \longrightarrow & \underline{O} & \longrightarrow & \underline{O}_{D+E} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \| & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{O}(-D) & \longrightarrow & \underline{O} & \longrightarrow & \underline{O}_D & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

le diagramme du serpent fournit un isomorphisme entre Ker(ψ) et Coker(φ). Ce conoyau n'est autre que la restriction de $\underline{O}(-D)$ à E, d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}(-D)|E \longrightarrow \underline{O}_{D+E} \longrightarrow \underline{O}_D \longrightarrow 0 \quad .$$

Par construction $\deg_E(\underline{O}(-D)) = -(D,E) < 0$, donc $H^0(\underline{O}(-D)|E) = 0$, et la flèche de restriction

$$0 \longrightarrow H^0(\underline{O}_{D+E}) \longrightarrow H^0(\underline{O}_D)$$

est injective. Ceci permet de construire par récurrence une suite de diviseurs

$$Y = D_o \leq D_1 \leq \ldots \leq D_n = X_s$$

telle que $H^0(\underline{O}_{D_i})$ s'injecte dans $H^0(\underline{O}_{D_{i-1}})$, donc $H^0(\underline{O}_{X_s}) = H^0(\underline{O}_Y) = k$, ce qui achève la démonstration de 1.13.

Le fait suivant est prouvé dans [5] ou [10].

Théorème 1.14. (Castelnuovo, Enriques,...). Sous les hypothèses (1.1), soit D un diviseur réduit irréductible contenu dans Y. Supposons que $H^1(D,\underline{O}_D) = 0$ et que, posant $k' = H^0(D,\underline{O}_D)$, on ait

$$(D,D) = -[k' : k] \quad .$$

Alors, D est une droite projective sur k' et il existe un S-schéma régulier X_1, un point fermé x_1 de X_1 de corps résiduel k' et un isomorphisme entre X et le S-schéma déduit de X_1 par éclatement de x_1, cet isomorphisme identifiant D à la fibre de x_1 dans X_1.

On appelle un diviseur D possèdant ces propriétés une courbe exceptionnelle de première espèce.

Je ne résiste pas au plaisir de démontrer la proposition suivante de Néron [8] prop 1' p. 90 :

Proposition 1.15. Supposons que X_η soit une courbe elliptique (en particulier ait une section) et que X ne contienne aucune courbe exceptionnelle de première espèce. Alors, avec la notation (1.10.1), on a

$$f^* f_* \omega_{X/S} \xrightarrow{\sim} \omega_{X/S}$$

universellement.

Comme d = 1 (1.12), il suffit, d'après (1.13), de prouver que $\omega_{X/S}$ est isomorphe à $\underline{O}_X$; puisque $\omega_{X/S}$ est trivial sur la courbe elliptique X_η, on sait a priori que

$$\omega_{X/S} \simeq \underline{O}(\Sigma\, n_i\, Y_i) \quad ,$$

où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y, et puisque $\mathrm{div}(\pi) \sim 0$, on peut supposer les n_i positifs. Si $\Sigma\, n_i\, Y_i$ est proportionnel au diviseur $\mathrm{div}(\pi)$, il est multiple entier de $\mathrm{div}(\pi)$ et on a gagné. Sinon, on a

$$(\Sigma\, n_i\, Y_i)^2 < 0 \quad ,$$

il existe i tel que

$$(Y_i,\ \Sigma\, n_j\, Y_j) < 0 \quad ,$$

et on applique le lemme suivant :

Lemme 1.16. Sous les hypothèses 1.1, supposons que Y soit connexe et que Y soit réductible, ou que $\chi(\underline{O}_Y) \leq 0$. Alors, pour qu'une composante irréductible Y_i de Y soit une courbe exceptionnelle de première espèce, il faut et il suffit que $(Y_i,K) < 0$.

Soit $k' = H^0(Y_i,\underline{O}_{Y_i})$. La formule de Riemann-Roch 1.11 fournit

$$\chi(\underline{O}_{Y_i}) = [k':k]\ (1\text{-}\dim_{k'} H^1(Y_i,\underline{O}_{Y_i})) = -\frac{1}{2}\ ((Y_i,Y_i) + (Y_i,K)) \quad .$$

Si Y_i est exceptionnelle de première espèce, on a donc $(Y_i,K) = -[k':k] < 0$. Réciproquement, si $(Y_i,K) < 0$, alors $\chi(\underline{O}_{Y_i}) > 0$, ce qui implique que $\chi(\underline{O}_{Y_i}) = [k':k]$ et que Y soit réductible, de sorte que par 1.8, $(Y_i,Y_i) < 0$. Les nombres négatifs (Y_i,Y_i) et (Y_i,K) sont divisibles par $[k':k]$, de sorte qu'on doit avoir

$$(Y_i,Y_i) = (Y_i,K) = -[k':k] \quad .$$

Exercice (a). Sous les hypothèses (1.1), on suppose que X_η est un espace principal homogène sous une courbe elliptique et que X ne contienne aucune courbe exceptionnelle de première espèce. Montrer que sur X, la formule de Riemann-Roch (1.11) s'écrit

$$\chi(\underline{O}_D) = -\tfrac{1}{2}\,(D,D)$$

(b) Supposons en outre le corps résiduel k(s) algébriquement clos. Montrer que le diagramme des composantes irréductibles de X_s est multiple de l'un des diagrammes considérés par Néron [8] p. 124-125, 4è colonne (cas a à c 8). Ce diagramme détermine les genres des composantes irréductibles réduites, leur multiplicité dans X_s, la nature et la disposition des singularités de $(X_s)_{red}$.

On traitera d'abord le cas où X_s est irréductible ; ce cas exclus, on prouvera que toute composante irréductible réduite est une droite projective de self-intersection - 2. Si $X_s = \Sigma\, n_i\, D_i$ est la décomposition de X_s en diviseurs irréductibles réduits, on réécrira cette condition

(*) $$n_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} n_i\, (D_i\, D_j) \quad .$$

D'autre part, X_s est connexe, de sorte que :

(**) Quels que soient i et j, il existe une chaîne $i = i_1, i_2 \ldots i_n = j$ avec $(D_{i_k} D_{i_{k+1}}) \neq 0$.

On cherchera alors toutes les solutions en nombre entiers de (*) + (**). On montrera d'abord que, sauf dans les cas b2 et c2 de Néron, les nombres d'intersection $(D_i D_j)$ sont égaux à zéro ou un.

2. Intersections italiennes

Soient S' et S deux surfaces projectives lisses sur un corps k et $f : S' \longrightarrow S$ un morphisme birationnel. Si D et E sont deux diviseurs sur S, on a

$$(D,E) = (f^* D,\ f^* E) \quad ,$$

comme on le voit, par exemple, en faisant bouger D et E.

Il s'impose donc de donner une expression "birationnelle" pour le nombre d'intersection. On se propose d'expliquer comment procédaient les italiens pour ce faire. Ma principale source de renseignements est [1] où se trouve une longue bibliographie. Voir aussi Manin [6], et Northcott [12], [13].

(2.0) Soient S le spectre d'un anneau local régulier de dimension 2, s le point fermé de S et k un sous-corps de k(s) dont k(s) soit une extension finie. Les nombres d'intersections et les caractéristiques d'Euler-Poincaré seront calculés en terme de k.

Dans ce §, un S-schéma $p : S' \longrightarrow S$ sera dit être un <u>transformé birationnel de</u> S s'il est régulier, connexe, et si p est propre et induit un isomorphisme de $S' \smallsetminus p^{-1}(s)$ sur $S \smallsetminus \{s\}$. Tout ce qui sera dit de S s'appliquera encore aux localisés de ses transformés birationnels en un point fermé.

(2.1) Soit $f : (S'',p'') \longrightarrow (S',p')$ un morphisme de S-schémas entre transformés birationnels de S. On sait alors [5] qu'il existe une et une seule factorisation de f :

$$f = f_n \dots f_1 \quad , \quad f_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$$

telle que S_{i+1} se déduise de S_i par éclatement d'un ensemble fini X_i de points fermés, et que $f_i(X_{i+1}) \subset X_i$. L'ensemble X_i est l'ensemble des points de S_i en lesquels la projection de S" sur S_i n'est pas un isomorphisme.

En particulier, f induit un isomorphisme au-dessus du complémentaire d'une partie finie de S', qui contient les points génériques des composantes irréductibles de $p'^{-1}(s)$. Dès lors, f^{-1} définit une injection

de l'ensemble $Irr(p'^{-1}(s))$ des composantes irréductibles de $p'^{-1}(s)$ dans $Irr(p''^{-1}(s))$.

Les transformés birationnels de S n'ont pas de S-automorphisme . On désignera ici par I l'ensemble des classes de S-isomorphie des transformés birationnels de S, ordonné par la relation de domination. L'ensemble I est filtrant à droite, et de plus petit élément S.

Définition 2.2. L'ensemble S^* des points de S infiniment voisins de s est l'ensemble limite inductive

$$S^* = \varinjlim_I \ Irr(p^{-1}(s)) \quad .$$

Si un élément $t \in S^*$ est représenté sur un transformé birationnel S' de S par une courbe complète réduite irréductible T, le corps $H^0(T,\underline{O}_T)$ ne dépend que de t, et non du choix de S' ; on l'appelle le corps résiduel k(t) de t.

Soit S_1 l'éclaté de S le long de s. La droite projective s^* image réciproque de $\{s\}$ dans S_1 s'appelle la curvetta de s et définit un élément s^* de S^* de corps résiduel k(s).

Soient S' un transformé birationnel de S, t un point fermé de S' et S'_t le spectre de l'anneau local de S' en t. On définit de façon évidente une injection de S'^*_t dans S^* ; en particulier, t définit un élément t^* de S^*, de même corps résiduel. On désigne par S'^* la réunion dans S^* des S'^*_t pour t fermé dans S'.

La proposition suivante résulte de la description 2.1 des transformés birationnels de S :

Proposition 2.3. Quel que soit $t \in S^*$, il existe une et une seule suite de transformés birationnels de S $(S_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ et de points fermés $t_i \in S_i$ $(0 \leq i \leq n)$ telle que

(i) $S_o = S$, et S_{i+1} est l'éclaté de S_i le long de $\{t_i\}$

(ii) $t_{i+1} \in t_i^*$ $(0 \leq i < n)$ et $t = t_n^*$.

De plus, quel que soit le transformé birationnel (S',p') de S, pour que t appartienne à l'image de $\mathrm{Irr}(p'^{-1}(s))$ dans S^*, il faut et il suffit que S' domine S_{n+1}.

On appelle n l'ordre de t. On désignera ici par S(t) (resp. par $S_+(t)$) le transformé birationnel S_n (resp. S_{n+1}) de S. Par abus de notation, on désignera encore par t le point fermé t_n de S_n et par t* son image réciproque t_n^* dans S_{n+1}.

On munit S^* de l'ordre suivant :

$$t_1 \prec t_2 \iff S_+(t_2) \text{ domine } S_+(t_1) \quad .$$

Si $t_1 \prec t_2$, alors $k(t_2)$ est une extension de $k(t_1)$. L'ensemble ordonné S^* a pour plus petit élément s^*, et toute partie majorée de S^* est finie et totalement ordonnée (S^* est un "arbre de souche s^*"). De plus, l'ordre n de $t \in S^*$ est la distance, dans l'arbre S^*, de s^* à t ($n = \#[s^*, t]$).

La proposition suivante explicite la description 2.1 des transformés birationnels de S.

Proposition 2.4. La fonction qui à un transformé birationnel $p : S' \to S$ de S associe la partie $\mathrm{Irr}(p^{-1}(s))$ de S^* induit une bijection entre l'ensemble I (2.1) et l'ensemble des parties finies de S^* qui, avec tout élément,

contiennent ses prédécesseurs.

Soient D est un diviseur ≥ 0 sur S et t ∈ S*. On dit que t appartient à D si le point fermé t de S(t) (2.3) appartient au transformé pur (= adhérence schématique de D -{s}) de D sur S(t).

Définition 2.5. Soient t, t'∈ S*. On dit que t' est proche de t si t'∈ $S_+(t)$* (2.2) et appartient à la curvetta t* de t (2.3).

Si t' est un successeur immédiat de t, alors t' est proche de t ; si dans une suite $(t_i)_{0\le i\le n}$ chaque t_{i+1} est successeur immédiat de t_i, et si t_n est proche de t_o, alors t_i est proche de t_o pour $0<i\le n$ et t_n n'est pas proche de t_i pour $0<i\le n-1$.

(2.6) Soient A un anneau local noethérien de dimension n, T son spectre, m son idéal maximal, k = A/m son corps résiduel et $P = \sum_{0\le i<n} a_i X^i$ son polynôme de Hilbert-Samuel :

$$P(n) = \dim_k(m^n/m^{n+1}) \quad \text{pour n grand.}$$

Rappelons que la multiplicité μ_s dans T du point fermé s vérifie par définition

$$a_{n-1} = \mu_s/(n-1)\,!\ .$$

Lorsque n = 1, on a donc simplement

$$\mu_s = \dim_k m^n/m^{n+1} \quad \text{pour n grand.}$$

En termes géométriques, μ_s peut se définir comme le degré, dans l'espace projectif sur k $P_k(m/m^2)$, de la fibre spéciale de l'éclaté de T le long du sous-schéma {s}.

Rappelons que si Y et Z sont deux sous-schémas fermés d'un schéma X, alors, le transformé pur de Y dans l'éclaté $\widetilde{X}$ de X le long de Z, adhérence schématique de $Y \setminus Z$ dans $\widetilde{X}$, n'est autre que l'éclaté de Y le long de $Y \cap Z$.

Supposons que T soit un sous-schéma fermé d'un schéma régulier U . Soient $p : U_1 \longrightarrow U$ l'éclaté de U le long de $\{s\}$, s^* l'image réciproque de s dans U_1 et T' le transformé pur de T dans U_1. Ce qui précède montre que la multiplicité de T en s est le degré dans l'espace projectif s^* du sous-schéma $s^* \cap T'$.

Supposons en outre que T soit un diviseur de U, soit T^* son transformé total dans U_1 (le diviseur image réciproque) et définissons ν par la formule $T^* = \nu\, s^* + T'$. Si X est une droite de s^*, et si on calcule les caractéristiques d'Euler-Poincaré comme sommes alternées de dimension sur k, on sait que

$$(2.6.1) \qquad (X,s^*) = \chi(\underline{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_{s^*}) = \deg_X \underline{O}(s^*) = -1$$

et on a vérifié que

$$(2.6.2) \qquad (X,T') = \chi(\underline{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_{T'}) = \deg_{s^*} (s^* \cap T') = \mu_s \quad .$$

La formule de projection

$$Rp_*(\underline{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_{T^*}) = Rp_*(\underline{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lp^* \underline{O}_T) = Rp_* \underline{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{O}_T$$

et son corollaire

$$(X,T^*) = \nu(X,s^*) + (X,T') = 0$$

fournit, par (2.6.1), (2.6.2), l'identité

$$(2.6.3) \qquad \mu_s = \nu \quad .$$

Proposition 2.7. Soient T un diviseur ≥ 0 dans un schéma régulier U, s un point fermé de U, U_1 l'éclaté de U le long de $\{s\}$, s^* l'image réciproque de s dans U_1, T' le transformé pur de T sur U_1 et T^* son transformé total. Il y a identité entre

(i) La multiplicité, au sens de Samuel, du point s de T.

(ii) Le degré, dans l'espace projectif s^*, de $s^* \cap T'$.

(iii) La multiplicité de s^* dans le diviseur T^*.

2.8. Reprenons les hypothèses de 2.0. Soit D un diviseur ≥ 0 sur S et $t \in S^*$. La multiplicité $\mu_t(D)$ de D en t est, par définition, la multiplicité en t du transformé pur de D sur S(t) (2.3). La fonction de t $\mu_t(D)$ a pour support l'ensemble des points infiniment voisins de s qui appartiennent à D (2.4). Lorsque D est régulier, les nombres $\mu_t(D).\ [k(t) : k(s)]$ sont égaux à zéro ou un : en effet, les transformés pur D' de D sont isomorphes à D, et on applique la définition (2.6) des multiplicités.

Les nombres d'intersections se calculent en termes de multiplicités :

Théorème 2.9. Si les diviseurs D et E ne se coupent qu'en s, on a

$$(D,E) = \sum_{t \in S^*} \mu_t(D)\mu_t(E)[k(t):k]$$

la somme étant étendue aux points infiniment voisins de s communs à D et E.

Preuve. Soit $p : S' \longrightarrow S$ un transformé birationnel de S. On désigne par D^* et E^* (resp. par D' et E') les transformés totaux (resp. purs) de D et E.

Lemme 2.9.1. (i) Le transformé total D^* est caractérisé par :

(a) $D^* - D'$ est concentré sur $f^{-1}(s)$

(b) si X est concentré sur $f^{-1}(s)$, alors $(D^*,X) = 0$

(ii) $(D,E) = (D^*,E^*) = (D^*,E') = (D',E^*)$.

L'assertion (i)(a) est triviale, et (i)(b) résulte de 1.6 (vi). Que (a) et (b) déterminent D^* résulte de 1.9. Par construction, le conoyau de la flèche de $\underline{O}_E$ dans $f_* \underline{O}_E$ est fini, d'où

$$(D^*,E') = \chi(f^*\underline{O}_D \otimes \underline{O}_{E'}) = \chi(\underline{O}_D \otimes f_* \underline{O}_{E'}) = \chi(\underline{O}_D \otimes \underline{O}_E) = (D,E)$$

ce qui, par (i), entraîne (ii).

Prenons pour S' l'éclaté de S en s. D'après (2.9.1), (2.6.3) et 2.7, on a

$$(D,E) = (D^*,E') = (D' + \sum_s \mu(S)\, s^*,E') \tag{2.9.2}$$

$$= (D',E') + \mu_s(D)(s^*,E') = (D',E') + \mu_s(D)\mu_s(E)[k(s):k] .$$

Le théorème 2.9. se prouve maintenant par récurrence sur (D,E), par une application itérée de (2.9.2).

(2.10) Soient A un anneau local noethérien réduit de dimension un, s le point fermé de Spec(A), $\widetilde{A}$ le normalisé de A et k un corps dont k(s) soit extension finie. Supposons que $\widetilde{A}$ soit fini sur A (i.e. que le complété $\hat{A}$ soit réduit). On appellera invariant δ de la singularité de Spec(A) en s la longueur, calculée sur k, du A-module $\widetilde{A}/A$.

Théorème 2.11. Soit D une courbe réduite tracée sur S. Alors :

(i) Quel que soit $t \in S^*$, on a, avec les notations 2.8

$$\mu_t(D) = \sum_{t' \text{ proche de } t} \mu_{t'}(D)[k(t'):k(t)] \quad .$$

(ii) Supposons le normalisé $\widetilde{D}$ de D fini sur D, et soit $\delta = \chi(\underline{O}_{\widetilde{D}}/\underline{O}_D)$ l'invariant de la singularité de D en s. Pour tous les $t \in S^*$, à l'exception d'un nombre fini, $\mu_t(D)$ est égal à zéro ou un, et on a

$$\delta = \sum_{t \in S^*} \frac{1}{2} \mu_t(D)(\mu_t(D)-1)[k(t):k] \quad .$$

Soient $p : S_1 \longrightarrow S$ l'éclaté de S le long de $\{s\}$, D^* le transformé total de D et D' son transformé pur. En vertu de (2.7), on a

(2.11.1) $$D^* = D' + \mu_s(D)\, s^* \qquad \text{et}$$

(2.11.2) $$\mu_s(D) = (s^*, D') \,.\, [k(s):k]^{-1} \quad .$$

La curvetta s^* est non singulière, de sorte que, par 2.8 et la définition 2.5, la formule 2.9, appliquée aux diviseurs s^* et D' de S_1, s'écrit

(2.11.3) $$(s^*, D) = \sum_{t' \text{ proche de } s} \mu_{t'}(D)\,[k(t'):k] \quad .$$

L'assertion (i) pour s = t résulte de (2.11.2) et (2.11.3), et le cas général s'obtient en appliquant ce résultat au localisé en t de S(t) (2.3).

Désignons par m l'idéal maximal qui définit $\{s\}$, et soit $n \geq 0$. On sait (SGA VII 3.5) que

(2.11.4) $$p_* \underline{O}_{S_1}(-n\, s^*) = m^n \quad \text{et} \quad R^i p_* \underline{O}_{S_1}(-n\, s^*) = 0 \quad (i > 0) \quad .$$

On déduit de là, et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}_{S_1}(-n\ s^*) \longrightarrow \underline{O}_{S_1} \longrightarrow \underline{O}_{n s^*} \longrightarrow 0$$

que

(2.11.5) $\quad p_* \underline{O}_{n s^*} = O_S/m^n$ et $R^i p_* \underline{O}_{n s^*} = 0 \quad (i > 0)$

et que

(2.11.6) $\quad \chi(\underline{O}_{n s^*}) = \chi(\underline{O}_S/m^n) = \frac{n(n+1)}{2}\ [k(s):k]$.

Faisons n = 0 dans (2.11.4). Quel que soit le complexe K de faisceaux cohérents sur S, on a par la "formule de projection"

$$K \xrightarrow{\sim} Rp_* Lp^*K \quad (\simeq K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rp_* \underline{O}_{S_1}) \quad .$$

En particulier, puisque $Lf^*\underline{O}_D = f^* \underline{O}_D = \underline{O}_{D^*}$, on a

(2.11.7) $\quad p_* \underline{O}_{D^*} = \underline{O}_D$ et $R^i p_* \underline{O}_{D^*} = 0 \quad (i>0)$.

Posons $E = \mu_s(D)\ s^*$. D'après (2.11.1), (2.9.1) (i) b et (2.6.1) on a

(2.11.8) $\quad \chi(\underline{O}_{D' \cap E}) = (D',E) = (D^* - E,E) = -(E,E) = -\mu_s(D)^2(s^*,s^*)$

$$= \mu_s(D)^2\ [k(s) : k] \quad .$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{D^*} \longrightarrow O_{D'} \oplus \underline{O}_E \longrightarrow \underline{O}_{D' \cap E} \longrightarrow 0$$

fournit par image directe, grâce à (2.11.7) des suites exactes

$$0 \longrightarrow O_D \longrightarrow f_* \underline{O}_{D'} \oplus f_* \underline{O}_E \longrightarrow f_* \underline{O}_{D' \cap E} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow f_* \underline{O}_{D'}/\underline{O}_D \longrightarrow f_* \underline{O}_E \longrightarrow f_* \underline{O}_{D' \cap E} \longrightarrow 0 \quad .$$

D'après (2.11.6) et (2.11.8), on a donc

$$(2.11.9) \qquad \chi(f_*\underline{O}_{D'}/\underline{O}_D) = \frac{1}{2}\mu_s(D)(\mu_s(D)+1)[k(s): k] - \mu_s(D)^2\,[k(s) : k]$$

$$= \frac{1}{2}\mu_s(D)(\mu_s(D)-1)[k(s) : k] \quad .$$

Les schémas D et D' sont réduits, ne différent qu'en s, et D' est fini sur D. Ces schémas ont donc même normalisé, et l'invariant δ de la singularité de D en s est somme de $\chi(f_*\underline{O}_{D'}/\underline{O}_D)$ et de la somme des invariants S des singularités de D' en les points de $D' \cap s^*$. Prouvons 2.11 (ii) par récurrence sur δ. Si $\mu_s(D) > 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique à D', et 2.11 (ii) résulte de (2.11.9). Si $\mu_s(D) = 1$, alors $(D', s^*) = 1$ et $D' \cap s^*$ est un diviseur régulier de D' ; par (EGA IV 19.1.1), D' est régulier ; par (2.11.9), D = D' est lui-même régulier et 2.11 (ii) résulte de 2.8.

2.12. Soit $t \in S^*$ et S' un transformé birationnel de S qui domine $S_+(t)$ (2.3). On appellera <u>transformé total</u> de t sur S', et on désignera encore par t^*, le transformé total sur S' du diviseur t^* de $S_+(t)$.

Soit ν une fonction à support fini de S^* dans $\mathbb{N}$ et supposons que ν vérifie, quel que soit $t \in S^*$

$$(2.12.1) \qquad \nu(t) \geq \sum_{t' \text{ proche de } t} \nu(t')\,[k(t') : k(t)]$$

(inégalité des points proches). Soient $f : S' \longrightarrow S$ un transformé birationnel de S qui domine les $S_+(t)$ pour t dans le support de ν, et ν^* le diviseur $\sum_{t \in S^*} \nu(t)\, t^*$ sur S'.

On désignera par $I(\nu)$ l'idéal de $\underline{O}_S$ image directe par f de l'idéal de $\underline{O}_S$, qui définit le diviseur ν^* :

$$I(\nu) = f_*\underline{O}(-\nu^*) \quad .$$

D'après (2.11.4), cet idéal ne dépend pas du choix de S'. Les idéaux de S obtenus par ce procédé sont ceux que Zariski [11] appelle "complets".

Théorème 2.13. Sous les hypothèses précédentes, on a

$$\chi(\underline{O}_S/I(\nu)) = \sum_{t\in S^*} \frac{\nu(t)(\nu(t)+1)}{2} [k(t) : k]$$

et

$$R^i f_* \underline{O}_{S'}(-\nu^*) = 0 \quad \text{pour } i > 0 \quad .$$

En vieux français, on exprime ceci, brièvement, en disant que : "exiger qu'une courbe plane passe n fois par un point t, projectif ou infiniment voisin, impose $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions, en général indépendantes, aux coefficients de son équation".

Prouvons tout d'abord le lemme

Lemme 2.14. Soient $p : S_1 \longrightarrow S$ l'éclaté de S le long de $\{s\}$, T un sous-schéma fermé de S_1, d'idéal q, D un diviseur, n un entier, $J = O(-s^*)$ l'idéal de S_1 qui définit le diviseur s^*, $Y = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{S_1}/J^n q)$, D un diviseur régulier sur S et D' son transformé pur sur S_1. On suppose $T \cap s^*$ et $T \cap D'$ finis.

(i) Si $lg_{k(s)} (T \cap s^*) \leq n+1$, on a

$$R^i p_* (q.J^n) = 0 \text{ pour } i > 0 \text{ et, pour T artinien,}$$

$$lg_{k(s)}(\underline{O}_S/p_*(q\, J^n)) = \frac{n(n+1)}{2} + lg_{k(s)} (T)$$

(ii) Si $lg_{k(s)}\ (T \cap s^*) \leq n$, on a

$$lg_{k(s)}\ (D \cap \mathrm{Spec}(\underline{O}_S/p_*(q\ J^n))) = n + lg_{k(s)}\ (D' \cap T) \quad .$$

Soit la suite exacte sur S_1

$$0 \longrightarrow J^n.\ q \longrightarrow J^n \xrightarrow{u} J^n \otimes \underline{O}_T \longrightarrow 0 \quad . \tag{2.14.1}$$

Pour prouver que $R^i p_*\ J^n.q = 0$ $(i > 0)$, il suffit par (2.11.4), de montrer que la flèche $p_*(u)$ est surjective. D'après le théorème des fonctions holomorphes, il suffit de prouver que les flèches

$$u_k : p_*(J^n \otimes \underline{O}/J^k) \longrightarrow p_*(J^n \otimes \underline{O}_T \otimes \underline{O}/J^k)$$

sont surjectives.

On désignera par Gr_J un gradué associé pour la filtration J-adique. Le module J^m/J^{m+1} est isomorphe à $\underline{O}_{s^*}(m)$; on a donc $R^1 p_* J^m/J^{m+1} = 0$ et la flèche de $p_*(J^n/J^{n+k+1})$ dans $p_*(J^n/J^{n+k})$ est surjective. Pour prouver, par récurrence sur k, que les flèches u_k sont surjectives, il suffit donc de prouver, la surjectivité des v_k :

$$v_k : p_*(J^n \otimes Gr_J^k(\underline{O})) \longrightarrow p_*(J^n \otimes Gr_J^k(\underline{O}_T)) \quad (k \geq 0) \quad .$$

Le module $Gr_J^k(\underline{O}_T)$ est un quotient de $J^k/J^{k+1} \otimes \underline{O}_T$; il est donc de longueur sur k(s) au plus n+1. Le noyau N de la flèche surjective

$$v'_k : J^n \otimes Gr_J^k(\underline{O}) \sim \underline{O}_{s^*}(n+k) \longrightarrow J^n \otimes Gr_J^k(\underline{O}_T)$$

est donc un faisceau inversible sur la droite projective s^*, de degré ≥ -1. On a $R^1 p_*\ N = 0$ et $v_k = p_*(v'_k)$ est surjectif.

Si T est artinien, de la suite exacte (2.14.1), on déduit maintenant que

$$lg_{k(s)}\ (p_* J^n/p_*(J^n q)) = lg_{k(s)}\ (\underline{O}_T) \quad ,$$

et 2.14 (i) résulte de (2.11.4) et (2.11.6).

Soit $I_{D'\cap T}$ l'idéal (monogène de $\underline{O}_{D'}$, qui définit $D'\cap T$. Sous les hypothèses (ii), la suite exacte

$$0 \longrightarrow I_{D'\cap T} \longrightarrow \underline{O}_{D'\cap T} \longrightarrow O_T \longrightarrow 0$$

montre que $D'\cap T$ vérifie l'hypothèse (i).

La projection p établit un isomorphisme entre D et D' ; par cet isomorphisme, à l'idéal de $\underline{O}_D$ qui définit le sous-schéma $D \cap \mathrm{Spec}(O_S/p_*(q\,J^n))$ de D correspond l'idéal de D' engendré par les sections globales de $q\,J^n$ sur S_1. Cet idéal est contenu dans l'idéal de D' qui définit $D'\cap Y$. Il lui est en fait égal, car toute section de $\underline{O}_{D'\cup Y}$ se prolonge en une section de $\underline{O}_{S_1}$: si $I_{D'\cup Y}$ est l'idéal qui définit $D'\cup Y$, l'obstruction ou prolongement se trouve dans $R^1p_*(I_{D'\cup Y})$. On a

$$I_{D'\cup Y} = \underline{O}(-D')\cap q\,J^n = (\underline{O}(-D')\cap J^n) \cap q\,J^n = \underline{O}(-D')J^n \cap q\,J^n$$

$$= (\underline{O}(-D')\cap q).\,J^n$$

et, d'après (i) appliqué à $D'\cup T$, il n'y a pas d'obstruction.

On a donc

$$\mathrm{lg}_{k(s)}\,(D\cap \mathrm{Spec}(\underline{O}_S/p_*(q\,J^n))) = \mathrm{lg}_{k(s)}\,(D'\cap Y) \qquad (2.14.2)$$

De l'isomorphie

$$J^n \otimes \underline{O}_{D'}/q.\underline{O}_{D'} \xrightarrow{\sim} \underline{O}_{D'}.J^n/\underline{O}_{D'}.q.J^n$$

on déduit que la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow J^n \otimes_{D'\cap T} \longrightarrow \underline{O}_{D'\cap Y} \longrightarrow \underline{O}_{D'\cap n\ s^*} \longrightarrow 0 \quad ,$$

de sorte que

(2.14.3) $\quad lg_{k(s)}\,(D' \cap Y) = n\,(D', s^*) + lg_{k(s)}(D' \cap T)$.

Puisque $(D', s^*) = 1$, 2.14 (ii) résulte de (2.14.2) et (2.14.3).

Prouvons maintenant, par récurrence sur le nombre d'éléments dans le support de ν, les assertions de 2.13 et l'assertion suivante :

(2.14.4) Si D est un diviseur régulier sur S, alors,

$$\chi(D \cap \mathrm{Spec}(\underline{O}_S/I(\nu)) = \sum_{t \text{ sur } D} \nu(t)\,[k(t) : k] \quad .$$

Si $\nu = 0$, alors $\nu^* = 0$, $I(\nu) = \underline{O}_S$ et 2.13 et (2.14.4) sont triviaux (la seconde assertion de (2.13) résulte d'une application itérée de (2.11.4) pour $n = 0$). Sinon, on a $\nu(s) > 0$, et il existe un S-morphisme $g : S' \longrightarrow S_1$. Pour chaque point fermé a de S_1, soient S_{1a} le localisé de S_1 en a, ν_a la restriction de ν à S_{1a}^*, S'_a le localisé $S'_a = S' \times_{S_1} S_{1a}$, $I(\nu_a) = g_* \underline{O}_S, (-\nu_a{}^*)$, $T_a = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{S_1}/I(\nu_a))$, $T = \cup\, T_a$ (réunion finie disjointe) et q l'idéal de T. On a, avec les notations de 2.14

(2.14.5) $\quad g_* \underline{O}(-\nu^*) = q.J^{\nu(s)}$.

L'hypothèse de récurrence s'applique aux (S_{1a}, S'_a, ν_a). On a donc

(2.14.6) $\quad R^i g_* \underline{O}_S, (-\nu^*) = 0$ pour $i > 0$

(2.14.7) $\quad \chi(T) = \sum_{t \in S^* - \{s\}} \dfrac{\nu(t)\,(\nu(t)+1)}{2}\,[k(t) : k]$

et, d'après (2.14.4) appliqué au diviseur s^* de S_1 et l'hypothèse (2.12.1)

$$lg_{k(s)}\,(T \cap s^*) = \sum_{t \text{ proche de } s} \nu(t)\,[k(t) : k(s)] \leq \nu(s) \quad .$$

Cette inégalité nous permet d'appliquer 2.14 ; de (2.14.5), on tire

$$R^i p_* g_* \underline{O}(-\nu^*) = 0 \text{ pour } i > 0$$

$$lg_{k(s)}(\underline{O}_S/p_* g_* \underline{O}(-\nu^*)) = \frac{\nu(s)(\nu(s)+1)}{2} + lg_{k(s)}(T)$$

de sorte que les assertions (2.13) résultent de (2.14.6) et (2.14.7).

Enfin, 2.14 (ii) fournit

$$lg_{k(s)}(D \cap \mathrm{Spec}(\underline{O}_S/I(\nu)) = \nu(s) + lg_{k(s)}(D' \cap T) \quad ,$$

soit par (2.14.4) appliqué à D',

$$\chi(D \cap \mathrm{Spec}(\underline{O}_S/I(\nu)) = \nu(s)\,[k(s) : k] + \sum_{t \text{ sur } D} \nu(t)\,[k(t) : k]$$

$$= \sum_{t \text{ sur } D} \nu(t)\,[k(t) : k] \quad .$$

Ceci achève la démonstration de 2.13.

(2.15) Des bribes de ce qui précèdent se généralisent en dimension supérieure. Soit S le spectre d'un anneau local régulier de dimension n de point fermé s, k(s) étant une extension finie de k. On peut encore considérer l'ensemble I des schémas $f : S' \longrightarrow S$ déduit de S par éclatements successifs de points fermés et poser comme en 2.1

$$S^* = \varinjlim_{s' \in I} \mathrm{Irr}(f^{-1}(s))$$

S^* s'appellera encore l'ensemble des <u>points de</u> S <u>infiniment voisins de</u> s.

Si X est un sous-schéma fermé de S, et si $t \in S^*$, on définit comme en 2.8 la multiplicité de X en t.

Soient $f : S' \longrightarrow S$ un composé de morphismes d'éclatement de points fermés, D un diviseur sur S, $D^* = f^* D$ son transformé total sur S',

E une courbe sur S, E' son transformé pur sur S' et supposons que $D \cap E$ soit réduit à s. La formule de projection donne encore

$$(D,E) = (D^*,E') \tag{2.16}$$

Procédant comme en 2.9, on prouve à l'aide de (2.16) que

$$(D,E) = \sum_{t\in S^*} \mu_t(D)\,\mu_t(E)\,[k(t) : k] \quad . \tag{2.17}$$

Définissons les points proches comme en 2.5. Procédant comme en 2.11, on vérifie que

$$\mu_t(E) = \sum_{t' \text{ proche de } t} \mu_{t'}(E)\,[k(t') : k] \quad . \tag{2.18}$$

Par contre, la formule 2.11 (ii) devient fausse en général (voir les exemples 2.25).

2.19. Soit S une surface projective et régulière sur un corps k. On désigne par S* la somme disjointe, étendue aux points fermés de S

$$S^* = \coprod_{s\in S} \operatorname{Spec} (\underline{O}_{s,S})^* \quad ,$$

et on appelle S* l'ensemble des <u>points infiniment voisins des</u> points de S.

Soit I l'ensemble des surfaces déduites de S par éclatements successifs de points fermés. L'ensemble I est cofinal dans l'ensemble des modèles réguliers du corps des fonctions de S, ordonné par domination. Pour $i \in I$, on désigne par S_i la surface correspondantes, munie de $p_i : S_i \to S$. On désignera par $\mathrm{Div}^{\pm}(S_i)$ le groupe des diviseurs, positifs ou non, sur S_i.

<u>Définition</u> 2.20. (i) <u>Le groupe des</u> "courbes" <u>sur</u> S <u>est l'ensemble limite inductive</u> $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Div}^{\pm}(S_i)$

(ii) <u>La catégorie des</u> "faisceaux inversibles" <u>sur</u> S <u>est la limite inductive</u>

(SGA 4 VI 6) des catégories de faisceaux inversibles sur les $(S_i)_{i\in I}$.

Ces objets sont des invariants birationnels de S.

Exemple 2.21. (i) Chaque "courbe" C sur S définit un "faisceau inversible" $\underline{O}(C)$ sur S.

(ii) Chaque diviseur C sur S définit une "courbe" sur S, qu'on désignera par C^*.

(iii) Si $t \in S^*$, on définit comme en 2.3 la surface $S_+(t)$ et le diviseur t^* sur $S_+(t)$; on désigne encore par t^* la "courbe" définie par t^*.

(2.22) On vérifie facilement qu'une "courbe" C (resp. un "faisceau inversible" $\mathcal{L}$) s'écrit d'une et d'une seule façon sous la forme

$$C = C_o^* - \sum_{t\in S^*} i_t\, t^* \quad \text{resp.} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_o \otimes \underline{O}\left(-\sum_{t\in S^*} i_t t^*\right)$$

où C_o (resp. $\mathcal{L}_o$) est un diviseur (resp. un faisceau inversible) sur S et où les i_t sont des nombres entiers presque tous nuls. On dit que C (resp. $\mathcal{L}$) est la courbe C_o, (resp. le faisceau inversible $\mathcal{L}_o$) affectée de multiplicités virtuelles i_t.

Le complété $\mathrm{Div}^{\pm}(S) \times \mathbb{Z}^{S^*}$ du groupe $\mathrm{Div}^{\pm}(S) \times \mathbb{Z}^{(S^*)}$ des "courbes" sur S est encore un invariant birationnel de S ; on l'appelle le groupe des "courbes généralisées" sur S. Sur S, une "courbe généralisée" C se représente par un diviseur C_o, affecté d'un nombre pouvant être infini de multiplicités virtuelles.

On définit de même les "faisceaux inversibles généralisés" sur S.

Exemple 2.23. Supposons k parfait. Alors, le faisceau inversible $\Omega^2_{S/k}$, affecté d'une multiplicité virtuelle -1 en chaque point $t \in S^*$, et un invariant birationnel de S, soit $\Omega^{2\ *}_{S/k}$.

Exemple 2.24. Soit $f : S_1 \longrightarrow S_2$ un morphisme dominant de surfaces projectives régulières sur k. On définit sans difficulté l'image inverse d'une "courbe" ou d'un "faisceau inversible" sur S_2, en passant à un modèle de S_2 où cette "courbe" ou "faisceau inversible" est diviseur ou faisceau inversible usuel. Par passage à la limite (je n'ai pas vérifié si ce passage à la limite était possible), on définit de même l'image réciproque d'une "courbe généralisée", ou d'un"faisceau inversible généralisé" . Supposons k parfait et f génériquement étale. La différente $\mathfrak{D}(f)$ de f est alors le diviseur positif sur S_1 qui vérifie

$$f^* \Omega^2_{S_2/k} (\mathfrak{D}(f)) \xrightarrow{\sim} \Omega^2_{S_1/k} \quad .$$

Cette différente n'est pas un invariant birationnel de f ; pour obtenir un invariant birationnel, il faut considérer la "courbe généralisée" de coïncidences

$$\mathfrak{D}^*(f) = \mathfrak{D}(f) + \sum_{t \in S_1^*} t^* - f^* \Big(\sum_{t \in S_2^*} t^* \Big)$$

soit, brièvement

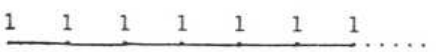
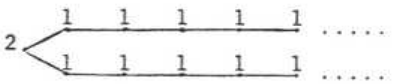
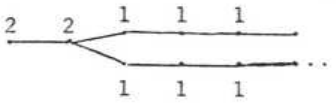
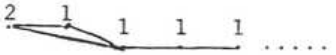
$$\mathfrak{D}^*(f) = \Omega^{2\ *}_{S_1/k} - f^* \Omega^{2\ *}_{S_2/k} \quad .$$

Cette "courbe généralisée" à un support contenu dans le fermé de S_2 où f n'est pas étale.

(2.25) Exemple.

Soient k un corps algébriquement clos et E_n l'espace affine à n dimension sur k. Soit C une courbe réduite dans E_n, présentant une singularité à l'origine. A cette singularité on associe son "diagramme d'Enriques" (cf. [3]),qui est le graphe de sommets les points infiniment voisins de O sur C (2.4 et 2.15), chaque sommet étant joint par un trait à ceux qui lui sont proches (2.5 et 2.15). Ce diagramme détermine les multiplicités de ces points sur C (2.11 et 2.18) et, pour n = 2, l'invariant δ (2.10 et 2.11) de la singularité de C à l'origine.

Pour les singularités planes les plus simples, on trouve :

Dessin	équation	δ	diagramme (avec multiplicités)
	$y = 0$	0	
	$xy = 0$	1	
	$y(y-x^2) = 0$	2	
	$y^2 = x^3$	1	

Si n > 2, l'invariant δ n'est plus déterminé par ce diagramme. Ainsi, la réunion de 3 droites concourantes coplanaires (resp. non coplanaires) a un invariant $\delta = 3$ (resp. $\delta = 2$), alors que le diagramme d'Enriques est le même. J'ignore si ce phénomène se présente aussi pour des courbes unibranches.

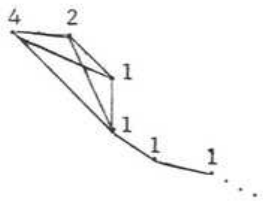
Voici deux exemples de diagrammes, relatifs au cas n = 3, qui ne peuvent se présenter pour des courbes planes (cf. 2.5).

On donne successivement les équations de la courbe, les équations

de la transformée pure après éclatement de l'origine, des équations paramétriques de la courbe, l'invariant δ et le diagramme d'Enriques.

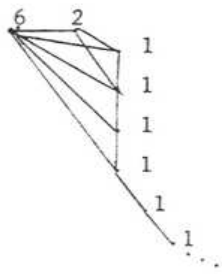
(2.25.1)

$$\begin{cases} y^2 = xz^4 \\ z^3 = x^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (y/z)^2 = (x/z)^3 \\ z = (x/z)^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = u^6 \\ y = u^7 \\ z = u^4 \end{cases}, \quad \delta = 5 ,$$



(2.25.2)

$$\begin{cases} y^2z = x^3 \\ z^3 = y^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (y/z)^2 = (x/z)^3 \\ z = (y/z)^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = u^8 \\ y = u^9 \\ z = u^6 \end{cases}, \quad \delta = 10 ,$$



2.26. Le théorème 2.27 ci-dessous était énoncé sous la forme d'une conjecture fausse dans la première version (diffusée par l'IHES) de cet exposé. Il doit beaucoup à des conversations avec D.S. Rim, dont il englobe certains résultats (D.S. Rim, torsion differentials and deformations, theorem 2.7 (i)).

Soit C une courbe projective réduite sur un corps algébriquement clos k, et $s \in C(k)$. On désignera par

A_s : l'anneau local de C en s (ou son complété, cela reviendrait au même pour ce qui suit) ;

$\tilde{A}_s$: le normalisé de A_s ;

$\delta(s) : \dim_k(\tilde{A}_s/A_s)$;

$m_o(s)$: la dimension du schéma versel formel T des déformations de $\mathrm{Spec}(A_s)$.

Pour E une composante irréductible de T, on posera encore $m_o^E(s) = \dim(E)$.

Les modules $\tau^{\sim}$ des dérivations de $\tilde{A}_s$ et τ des dérivations de A_s sont sans torsion ; ils s'injectent dans le module des dérivations du corps des fractions de A_s, pour A intègre, et dans le module des dérivations de l'anneau total des fractions de A_s (un produit de corps) dans le cas général. De plus, via ces inclusions, τ et $\tau^{\sim}$ sont commensurables : $\tau/\tau\cap\tau^{\sim}$ et $\tau^{\sim}/\tau\cap\tau^{\sim}$ sont de dimension finie sur k. On pose

$$m_1(s) = [\tau^{\sim} : \tau] = {}_{\mathrm{dfn}}\ \dim_k(\tau^{\sim}/\tau \cap \tau^{\sim}) - \dim_k(\tau/\tau\cap\tau^{\sim}) \quad .$$

Théorème 2.27. Soit E une composante irréductible du schéma formel versel T des déformations de A_s. Si "la déformation de A_s au-dessus du point générique e de E est lisse", i.e. si l'image du sous-schéma formel de non lissité (défini par un idéal jacobien : VI 5), fini sur T, ne contient pas e, alors

$$3\ \delta(s) = m_o^E(s) + m_1(s) \quad .$$

La validité de 2.27 ne dépend que du complété de A_s . Remplaçant (C,s) par (C',s) formellement isomorphe à (C,s) en s , on peut supposer que les conditions suivantes sont vérifiées

(a) s est le seul point singulier de C ;

(b) C n'a pas d'automorphismes infinitésimaux.

La condition (b) nous garantit que la foncteur des déformations de C est proreprésentable. Il est même effectivement pro-représentable, car il n'y a pas d'obstruction à relever un faisceau inversible (ample) donné sur C . Soit $f : X_o \longrightarrow T_o$ la déformation universelle de C et t_o le point fermé de T_o : $C \xrightarrow{\sim} X_{o t_o}$.

Lemme 2.28. Il existe un schéma de type fini sur k T_1, $t_1 \in T_1(k)$ et $f : X_1 \longrightarrow T_1$, propre et plat, de fibre C en t_1 et tel que pour tout $u \in T_1(k)$, le complété de T_1 en u soit un schéma formel de modules pour la fibre X_{1u} .

Voici une démonstration directe de ce corollaire de résultats généraux d'Artin. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible très ample sur C , tel que $H^1(C,\mathcal{L}) = 0$, et $\mathbb{P} = \mathbb{P}(H^0(C,\mathcal{L}))$. On a $v : C \hookrightarrow \mathbb{P}$. Soit T_2 le schéma de Hilbert, classifiant les sous-variétés de $\mathbb{P}$ de même polynôme de Hilbert que $v(C) \subset \mathbb{P}$. Soit $t_2 \in T_2$ correspondant à $v(C)$. Le complété $\hat{T_2}$ de T_2 en t_2 est lisse sur S_o , le fibré tangent vertical de $\hat{T_2}/T_o$ se déduisant du sous-fibré L du fibré tangent de T_2 image de $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{P}))$ pour l'action de $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{P})$ sur T_2. Au voisinage de t_2, soit $f_1 \ldots f_n$ $n = \dim \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{P})$ équations définissant un sous-schéma T_1' de T_2 passant par t_2 et de complété en t_2 étale sur T_o . On prend pour T_1 un voisinage de t dans T_1' où le fibré tangent soit transverse à L .

X

2.29. Au morphisme de foncteur

(déformations de C) $\longrightarrow$ (déformations de A_s)

correspond un morphisme $p : T_o \longrightarrow T$. D'après VI 2.10 , p est lisse. Soit t le point fermé de T . L'espace tangent de Zariski de $p^{-1}(t)$ en t_o classifie les déformations localement triviales de C sur $k[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2 = 0$). Posant $E_o = p^{-1}(E)$, on a donc

(2.29.1) $$\dim(E_o) = \dim(E) + \dim H^1(C, T^1_{C/k}) \quad .$$

Puisque X_o/T_o est plat, les fibres de X_o/T_o ont toutes le même genre arithmétique p ($1-p = \chi(\mathcal{O})$). Par hypothèse, la fibre au point générique de E_o est lisse ; le schéma formel des modules d'une courbe propre et lisse étant lisse de dimension 3p-3, on déduit de 2.28 que

(2.29.2) $$\dim(E) = 3p-3 \quad .$$

Soit $C^{\sim}$ la normalisée de C, de genre arithmétique $p^{\sim} = p - \delta(s)$. On a

(2.29.3) $$\dim H^1(C, T^1_{C/k}) = -\chi(C, T^1_{C/k}) =$$

$$= -\chi(C^{\sim}, T^1_{C^{\sim}/k}) + m_1(s) = -[3(p-\delta(s))-3] + m_1(s) \quad .$$

Les formules (2.29.1) (2.29.2) (2.29.3) prouvent 2.27.

Conjecture 2.30. Toute courbe propre réduite a une déformation lisse.

Cette conjecture implique, par 2.27 et 2.28, que le schéma formel versel des déformations de A_s est toujours équidimensionnel, de dimension $3\delta(s) - m_1(s)$.

2.31. Soit C une courbe propre réduite sur k, de genre arithmétique p . On désignera par

M_o : la dimension du schéma formel versel T des déformations de C ;

M_1 : la dimension de l'algèbre de Lie de Aut(C).

Pour E une composante irréductible de T, on notera M_o^E la dimension de E .

L'analogue global de 2.27 est le suivant.

Proposition 2.32. Si la déformation de C au-dessus du point générique de E est lisse, on a

$$3p-3 = M_o^E - M_1 \quad .$$

Soit $X \subset C(k)$ un ensemble fini de points lisses de C , tel que tout champ de vecteur sur C, s'annulant en tout point $x \in X$, soit nul. Le foncteur des déformations de (C,X) est proreprésentable, et vérifie une variante de 2.28 . Le schéma formel des modules de (C,X) est lisse sur T , de dimension relative $\#X - M_1$, et de l'analogue de 2.28 on déduit que

$$M_o + (\#X - M_1) = 3p - 3 + \#X ,$$

d'où 2.32.

Supposons k de caractéristique 0 . On a alors $M_1 = \dim \mathrm{Aut}(C)$. Voici une interprétation analogue de $m_1(s)$.

Lemme 2.33. Si k est de caractéristique 0, toute dérivation de A_s se prolonge en une dérivation de $A_s^{\sim}$.

Si D est une dérivation de A_s, $\exp(Dt) = \Sigma\, D^n\, t^n/n!$ est un automorphisme du complété en (s,0) de $A_s \otimes_k k[t]$. Par transport de structure, cet automorphisme agit sur le normalisé $(A_s^{\sim} \otimes k[t])^{\wedge}$ de cet anneau. Réduisant mod t^2, on trouve un automorphisme $1 + Dt$ de $A_s^{\sim\wedge} \otimes_k k[t]/(t^2)$, et D se trouve ainsi prolongé en une dérivation de $A_s^{\sim\wedge}$. Puisqu'il se prolonge aussi au corps des fractions de A_s (anneau total des fractions si A_s n'est pas intègre), il se prolonge à $A_s^{\sim}$.

Supposons s singulier. Un argument analogue montre alors que le champ de vecteur sur $\mathrm{Spec}(A_s^{\sim})$ défini par D s'annulle en tout point au-dessus de s.

Soit c un idéal de $A_s^{\sim}$ contenu dans le conducteur de $A_s^{\sim}/A_s$. Soit $G_c^{\sim} = \underline{\mathrm{Aut}}(A_s^{\sim}/c)$ et soit G_c le sous-groupe de $G_c^{\sim}$ qui stabilise la sous-algèbre A_s/c. Pour $d \subset c$, $G_d^{\sim}$ stabilise c/d et s'envoie sur $G_c^{\sim}$ (remarquer que $g \in G_c^{\sim}$ est déterminé par g(t), pour t une uniformisante, et que g(t) est n'importe quelle uniformisante). L'espace homogène pointé $G_c^{\sim}/G_c$ est donc indépendant de c. On note $G^{\sim}/G$.

Soit $\tau_o^{\sim}$ le $A_s^{\sim}$-module des champs de vecteurs sur $\mathrm{Spec}(A_s^{\sim})$ qui s'annullent en les points au-dessus de s. Pour s singulier, on

$\dim_k(\tau^{\sim}/\tau_o^{\sim})$ = nombre de branches ;

$\tau_o^{\sim}/\tau \xrightarrow{\sim}$ espace tangent à l'origine de $G^{\sim}/G$.

Propos

$m_1(s)$

BIBLI

[1]

[2]

[3]

[4]

[5]

[6]

[7]

[8]

Proposition 2.34. En caractéristique 0 et pour s singulier, l'entier $m_1(s)$ est somme du nombre de branches et de la dimension de $G^{\sim}/G$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Defrise. Etude locale des correspondances rationnelles entre surfaces algébriques - Thèse d'agrégation - Bruxelles 1949.

[2] P. Deligne et D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of a given genus - Publ. Math. IHES 36 (1969) p. 75-110.

[3] Enriques - Chisini. Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni et delle funzioni algebriche - ed Zanichelli - Bologne 1924.

[4] R. Hartshorne. Residues and duality - Lectures Notes in Math. 20 - Springer 1966.

[5] S. Lichtenbaum. Curves over discrete valuation rings - Am. J. of Math. 15 n° 2 April 1968. p. 380-405.

[6] I. Manin. Rational surfaces over perfect fields - Publ. Math. IHES n° 30. p. 55-114.

[7] D. Mumford. The topology of normal singularities of an algebraic surfaces and a criterion for simplicity - Publ. Math. IHES n° 9 p. 5-22.

[8] A. Néron. Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux - Publ. Math. n° 21.

[9] M. Raynaud. Spécialisation du foncteur de Picard. Critères numériques de représentabilité - CR Acad. Sci. Paris t. 264 p. 1001 - 1004 - Juin 1967.

[10] Saint-Donat. Sur un théorème de G. Castelnuovo et F. Enriques - Thèse de 3° cycle - Lyon.

[11] O. Zariski. On polynomial ideals defined by infinitely near base points Am. J. Math. vol. 60-1938 p. 151.

[12] D.G. Northcott. On the genus formula for plane curves. J. London Math. Soc. 30 1955 - p. 376-382.

[13] D.G. Northcott. Abstract dilatations and infinitely near points. Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 1956 - p. 178-197.

La notion de "point infiniment voisin" est discutée dans l'appendice par Lipman au chapitre II de

[14] O. Zariski. Algebraic surfaces - Ergebnisse 61, Springer Verlag.

S G A 7

E X P O S E XI

COHOMOLOGIE DES INTERSECTIONS COMPLETES

par P. DELIGNE

1. Cohomologie de l'espace projectif et des intersections complètes

Soit X une variété projective non singulière complexe, purement de dimension n, et soit $\underline{O}(1)$ un faisceau inversible ample sur X. D'après Akizuki et Nakano [1], il résulte du vanishing theorem de Kodaira [4] que

(*) $\quad H^i(X,\Omega^j_X(-1)) = 0$ pour $i+j < n$.

D'après [1] toujours, ce résultat implique le "théorème de Lefschetz faible", en cohomologie complexe. On se propose de montrer, par force brutale, que si X est un espace projectif sur un corps de caractéristique quelconque, alors (*) reste vrai. Ceci permettra, à l'imitation de [1], de comparer les cohomologies de Hodge et de De Rham des intersections complètes, sur un corps de caractéristique quelconque, à celles de l'espace projectif.

On explicite ensuite quelques conséquences des résultats obtenus. Au n° 2, on expose des résultats qualitatifs déduits de la formule numérique de Hirzebruch (2.2). Je tiens à remercier N. Katz de l'aide qu'il m'a apportée dans la conception de ce numéro.

1.0. Soit $\underline{E}$ un module localement libre de rang r+1 sur un schéma S. On suppose que $r \geq 0$. Rappelons que $\mathbb{P}(\underline{E})$ désigne l'espace projectif relatif sur S des hyperplans de $\underline{E}$. On désignera par p la projection de $\mathbb{P}(\underline{E})$ sur S et par $\eta \in H^0(S,R^1p_*(\Omega^1_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}))$ la première classe de Chern, style Hodge, du faisceau

inversible $\underline{O}(1)$. Rappelons que η est l'image par la différentielle logarithmique $df/f : \underline{O}^* \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}$ de la classe de $\underline{O}(1)$ dans $H^0(S, R^1p_*\underline{O}^*)$. Pour tout faisceau $\underline{F}$ de $\underline{O}$-modules sur $\mathbb{P}(\underline{E})$, on pose

$$\underline{F}(n) = \underline{F} \otimes \underline{O}(1)^{\otimes n} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \quad .$$

Théorème 1.1. (i) Les faisceaux $R^ip_*(\Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n))$ sont localement libres, et leur formation est compatible à tout changement de base.

(ii) Pour $0 \leq i \leq r$, la section η^i de $R^ip_*(\Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S})$ définit un isomorphisme entre ce faisceau et $\underline{O}_S$. De plus,

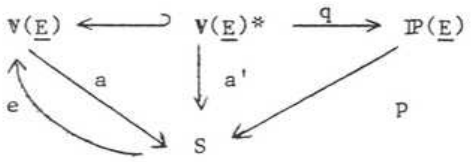
$$R^ip_*\,\Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \text{ ou } i > r \quad .$$

(iii) Si $n \neq 0$, alors, en dehors des deux cas suivants, $R^ip_*(\Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n))$ est nul :

(iii_a) $\quad i = 0$ et $n > j$

(iii_b) $\quad i = r$ et $n < j-r$.

Soient $\mathbb{V}(\underline{E}) = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Sym}^*\,\underline{E})$ l'espace affine défini par $\underline{E}$, e sa section nulle, $\mathbb{V}(\underline{E})^*$ le complémentaire $\mathbb{V}(\underline{E})^* = \mathbb{V}(\underline{E}) \smallsetminus e(S)$, a et a' les projections de $\mathbb{V}(\underline{E})$ et $\mathbb{V}(\underline{E})^*$ sur S et q la projection de $\mathbb{V}(\underline{E})^*$ sur $\mathbb{P}(\underline{E})$:



L'espace affine épointé $\mathbb{V}(\underline{O}(1))^*$ sur $\mathbb{P}(\underline{E})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{V}(\underline{E})^*$, de sorte que, pour tout faisceau quasi-cohérent de $\underline{O}$-modules $\underline{F}$ sur $\mathbb{P}(\underline{E})$, on a canoniquement

(1.1.1) $$q_* q^* \underline{F} \simeq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{F}(n) \quad .$$

Cette graduation de $q_* q^* \underline{F}$ peut se déduire de l'action, sur ce faisceau, du groupe $\mathbb{G}_m$ des homothéties de $\mathbb{V}(\underline{E})$.

Les champs de vecteurs relatifs sur $\mathbb{V}(\underline{E})$ s'identifient aux S-morphismes de $\mathbb{V}(\underline{E})$ dans $\mathbb{V}(\underline{E})$ (identifié à l'espace tangent à l'origine). Le champ de vecteur X défini par l'application identique de $\mathbb{V}(\underline{E})$ est invariant par homothéties, Ce champ de vecteur est tangent aux fibres de q et définit une trivialisation

(1.1.2) $$X : \Omega_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/\mathbb{P}(\underline{E})} \longrightarrow \underline{O}_{\mathbb{V}(\underline{E})^*} \quad .$$

Si les x_i forment une base de $\underline{E}$, on a

$$X = \sum x_i \, dx^i \quad .$$

Puisque $\Omega^1_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/\mathbb{P}(\underline{E})}$ est de rang un, la suite exacte

$$0 \longrightarrow q^*\Omega^1_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/S} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/\mathbb{P}(\underline{E})} \longrightarrow 0$$

induit des suites exactes

$$0 \longrightarrow q^*\Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \longrightarrow \Omega^i_{\mathbb{V}(\underline{E})/S} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/\mathbb{P}(\underline{E})} \otimes q^*\Omega^{i-1}_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \longrightarrow 0 \, .$$

Celles-ci se réécrivent (1.1.2)

(1.1.3) $$0 \longrightarrow q^*\Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \longrightarrow \Omega^i_{\mathbb{V}(\underline{E})^*/S} \xrightarrow{X\llcorner} q^*\Omega^{i-1}_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \longrightarrow 0 \quad .$$

On a canoniquement

(1.1.4) $$\Omega^i_{\mathbb{V}(\underline{E})/S} = a^* \overset{i}{\wedge} \underline{E} \quad .$$

Les suites exactes courtes (1.1.3) s'obtiennent donc en fractionnant une suite exacte longue sur $\mathbb{V}(\underline{E})^*$

(1.1.5) $$\ldots \longrightarrow a'^* \overset{i}{\wedge} \underline{E} \xrightarrow{X\llcorner} a'^* \overset{i-1}{\wedge} \underline{E} \xrightarrow{X\llcorner} a'^* \overset{i-2}{\wedge} \underline{E} \longrightarrow \ldots \quad .$$

Cette suite exacte longue n'est autre que la restriction à $\mathbb{V}(\underline{E})^*$ de la résolution de Kozul de $\underline{O}_{e(S)}$ sur $\mathbb{V}(\underline{E})$.

Projetons la suite exacte longue (1.1.5) sur $\mathbb{P}(\underline{E})$ par le morphisme affine q. En vertu de (1.1.1) et de la formule $q_*a'^* = q_*q^*p^*$, on obtient une suite exacte longue

$$(1.1.6)\quad \ldots \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n) \xrightarrow{XL} \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^* \overset{i-1}{\wedge} \underline{E}(n) \longrightarrow \ldots \quad .$$

Celle-ci se fractionne en suite exactes courtes, images de (1.1.3),

$$(1.1.7)\quad 0 \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n) \xrightarrow{XL} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Omega^{i-1}_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \to 0 .$$

Les suites exactes (1.1.7) sont sommes de suites exactes

$$(1.1.8)\quad 0 \longrightarrow \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \longrightarrow p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n-i) \xrightarrow{XL} \Omega^{i-1}_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \longrightarrow 0 \quad .$$

Rappelons (EGA III 2.1.15 ou FAC) que les $R^ip_*\underline{O}(k)$ sont localement libres de formation compatible à tout changement de base, et que

(1.1.9) $R^ip_*\,\underline{O}(k) = 0$ si $i \neq 0$, r, ou si $i = 0$, $k < 0$, ou si $i = r$, $k > -r-1$,

et que $R^ip_*p^* \overset{j}{\wedge} \underline{E}(k)$ est donc nul sous ces mêmes conditions.

Les suites exactes (1.1.8) fournissent une résolution

$$(1.1.10)\quad 0 \longrightarrow \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \xrightarrow{E} p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n-i) \xrightarrow{XL} \ldots \longrightarrow p^* \overset{0}{\wedge} \underline{E}(n-0) \longrightarrow 0$$

de $\Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n)$. La suite spectrale définie par cette résolution dégénère ($E_1 = E_\infty$) pour des raisons de degré (1.1.9) ; pour $0 < j < r$, elle fournit

$$(1.1.11)\quad R^jp_*\Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) = \mathcal{H}\,(\ldots \xrightarrow{XL} p_* \overset{i-j}{\wedge} \underline{E}(n-i+j) \xrightarrow{XL} \ldots) \quad .$$

Puisque $r \geq 1$, un argument de profondeur montre que

$$(1.1.12)\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_*p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n) = p_*q_*q^*p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E} = a'_*a'^* \overset{i}{\wedge} \underline{E} = a_*a^* \overset{i}{\wedge} \underline{E} \quad .$$

de sorte que $p_*p^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n)$ est la partie homogène de poids $n + i$ de $a_*a^* \overset{i}{\wedge} \underline{E}$, soit $\mathrm{Sym}^n(\underline{E}) \otimes \overset{i}{\wedge} \underline{E}$. Si on se rappelle que (1.1.5) provient de la résolution de Koszul, on trouve par (1.1.11) que, pour $0 < j < r$, $R^j p_* \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n)$ n'est non nul que si $i-j = 0$ et $n-i+j = 0$, i.e. si $n = 0$ et $i = j$. Dans ce cas, de plus, $R^i p_* \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}$ est isomorphe à $\underline{O}_S$.

Pour $j = 0$, on déduit encore de (1.1.10) que

$$(1.1.13) \qquad p_* \Omega^i_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) = \mathrm{Ker}(X \llcorner : p_* \overset{i}{\wedge} \underline{E}(n-i) \longrightarrow p_* \overset{i-1}{\wedge} \underline{E}(n-i+1)) \quad ,$$

et le même argument montre que $X \llcorner$ est injectif lorsque $n-i \leq 0$.

En vertu de (1.1.8) pour $n = 0$, $i = r+1$, on a $\Omega^r_{\mathbb{P}(\underline{E})/S} \xrightarrow{\sim} p^* \overset{r+1}{\wedge} \underline{E}(-r-1)$. Lorsque S est le spectre d'un corps, les assertions de nullité de groupes de cohomologie de 1.1 (ii) et (iii) résultent de ce qui précède pour $j \neq r$, et s'en déduisent par dualité ([2] V 11.2 p. 211) pour $j = r$. En particulier, quels que soient j et n, il existe au plus un i tel que $R^i p_* \Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}(n) \neq 0$, ce qui implique (i) puisque $\Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}$ est plat sur S (le plus dur est de trouver la référence dans EGA III ; je suggère : 6.10.5 + 7.4.1 + 7.5.5 + un passage à la limite).

Sachant que les $R^i p_* \Omega^j_{\mathbb{P}(\underline{E})/S}$ sont des faisceaux inversibles pour $0 \leq i \leq r$, il reste seulement à prouver que, pour S le spectre d'un corps, on a $\eta^i \neq 0$. En effet η^r est la classe de cohomologie d'un point rationnel (intersection de r hyperplans), donc une base de $H^r(\mathbb{P}^r, \Omega^r)$ (FGA exp. 149 n°4).

1.2. Il est possible de calculer, directement à partir de (1.1.10) ou (1.1.13), les caractéristiques d'Euler-Poincaré des $\Omega^i(n)$. Le résultat, peu appétissant, est

$$\chi(\mathbb{P}^r_k, \Omega^j_{\mathbb{P}^r_k}(n)) = \sum_{a \leq i \leq j} (-1)^{i-j} \binom{r+1}{i} \binom{r+n-i}{r} .$$

Proposition 1.3. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse, $\underline{W}$ un faisceau localement libre de rang c sur X, $\underline{F}$ un faisceau cohérent sur X, d un entier > 0 et $s : \underline{W} \longrightarrow \underline{O}_X$ une section de $\underline{W}^{\vee}$. On suppose que S est noethérien et que

(a) Le sous-schéma H de X défini par l'annulation de s est lisse sur S.

(b) Localement sur X, si les s_i sont les coordonnées de S dans une base de $\underline{W}^{\vee}$ les s_i forment une suite $\underline{O}_X$-régulier et $\underline{F}$-régulière.

(c) Quelle que soit la suite d'entiers k_i, non tous nuls, on a

$$R^i f_* (\otimes_i \wedge^{k_i} \underline{W} \otimes \Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F}) = 0 \text{ pour } i+j < d \quad .$$

Alors, on a :

(i) $R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \xrightarrow{\sim} R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F})$ pour $i+j < d-c$,

(ii) $R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \hookrightarrow R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F})$ pour $i+j = d-c$.

Le faisceau conormal $N_{H/X}$ de H dans X est isomorphe à la restriction de $\underline{W}$ à H, de sorte que la suite exacte

$$(1.3.1) \qquad 0 \longrightarrow N_{H/X} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \longrightarrow \Omega^1_{H/S} \longrightarrow 0$$

définit une filtration décroissante de $\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y$ dont les quotients successifs sont donnés par

$$(1.3.2) \qquad Gr^k(\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y) \simeq \wedge^k \underline{W} \otimes \Omega^{j-k}_{H/S} \quad .$$

Il résulte de (b) que l'on a encore

$$(1.3.3) \qquad Gr^k(\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F}) = \wedge^k \underline{W} \otimes \Omega^{j-k}_{H/S} \otimes \underline{F} \quad .$$

On prouvera (i) et (ii) par récurrence sur j, simultanément pour tous les $\underline{F}$ vérifiant (b) et (c). Ces assertions sont vides pour $j < 0$;

supposons donc (i) et (ii) prouvés pour $j' < j$. L'hypothèse de récurrence s'applique aux faisceaux $\overset{k}{\wedge} \underline{W} \otimes \underline{F}$; elle fournit, par (c) :

$$(1.3.4) \qquad R^i f_* \left(\overset{k}{\wedge} \underline{W} \otimes \Omega^{j-k}_{H/S} \otimes \underline{F} \right) = 0 \text{ pour } k > 0 \text{ et } i+j < d-c+k \quad .$$

La filtration considérée plus haut du $\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F}$ définit une suite spectrale

$$E_1^{p,i-p} = R^i f_* \left(\overset{p}{\wedge} \underline{W} \otimes \Omega^{j-p}_{H/S} \otimes \underline{F} \right) \Longrightarrow R^i f_* \left(\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F} \right) \quad .$$

Par (1.3.4), on a $E_1^{p,i-p} = 0$ si $p > 0$ et $i+j \leq d-c$ d'où l'on tire que

$$(1.3.5) \quad \begin{cases} R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F}) \xrightarrow{\sim} R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \text{ pour } i+j < d-c \\ \\ R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F}) \hookrightarrow R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \text{ pour } i+j = d-c \quad . \end{cases}$$

D'après l'hypothèse (b), pour une différentielle convenable, les $\overset{k}{\wedge} \underline{W} \otimes \Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F}$ forment une résolution à gauche (de Koszul) de $\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F}$. Cette filtration définit une suite spectrale

$$(1.3.6) \qquad E_1^{-p,q} = R^q f_* \left(\overset{p}{\wedge} \underline{W} \otimes \Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F} \right) \Longrightarrow R^{q-p} f_* \left(\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{O}_Y \otimes \underline{F} \right) \quad .$$

D'après l'hypothèse (c), on a $E_1^{-p,q} = 0$ pour $p > 0$ et $q+j < d$, ou, trivialement, pour $p \notin [0,c]$. Dès lors,

$$(1.3.7) \quad \begin{cases} R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F}) \xrightarrow{\sim} R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \text{ pour } i+j < d-c \\ \\ R^i f_* (\Omega^j_{X/S} \otimes \underline{F}) \hookrightarrow R^i f_* (\Omega^j_{H/S} \otimes \underline{F}) \text{ pour } i+j = d-c \quad . \end{cases}$$

Les assertions (i) et (ii) résultent maintenant de (1.3.5) et (1.3.7).

1.4. Soient $\underline{E}$ un faisceau de modules localement libres de rang r+1 sur un schéma S, $\mathbb{P}(\underline{E})$ le fibré projectif correspondant, d un entier $\leq r$ et $\underline{a} = (a_1 \ \ldots \ a_d)$ une suite d'entiers. Une intersection complète relative dans $\mathbb{P}(\underline{E})$, de multidegré $\underline{a}$, est un sous-schéma de $\mathbb{P}(\underline{E})$, fibre par fibre de codimension d, qui, localement sur S pour la topologie étale, est intersection de d hypersurfaces de degrés respectifs $a_1 \ \ldots \ a_d$.

En vertu de 1.1, les hypothèses (b) et (c) de 1.3 sont vérifiées pour $X/S = \mathbb{P}(\underline{E})/S$, $\underline{F} = \underline{O}_X$, $\underline{W} = \sum_i \underline{O}(-a_i)$ et pour s une section de $\underline{W}^{\vee}$ définissant une intersection complète relative $Y \subset \mathbb{P}(\underline{E})$ de multidegré $\underline{a}$.

Théorème 1.5. Sous les hypothèses 1.4, soit $n = r-d$ la dimension relative de Y et $\eta \in H^0(S, R^1 f_* \Omega^1_{Y/S})$ la première classe de Chern de $\underline{O}(1)$

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & \mathbb{P}(\underline{E}) \\ & {\scriptstyle f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle g} & \\ & S & \end{array} .$$

Si Y est lisse sur S, alors :

(i) Les $R^i f_* \Omega^j_{Y/S}$ sont localement libres, et leur formation est compatible à tout changement de base.

(ii) La suite spectrale $E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{Y/S} \Longrightarrow R^{p+q} f_* (\Omega^*_{Y/S})$ reliant les cohomologie de Hodge et de De Rham dégénère ($E_1 = E_\infty$), son aboutissement est localement libre et sa formation est compatible à tout changement de base.

(iii)$_a$ On a

$$R^i f_* \Omega^j_{X/S} = 0 \quad \text{si } i \neq j \text{ et } i+j \neq n .$$

$(iii)_b$ η^i *est une base de* $R^i f_* \Omega^i_{Y/S}$ *si* $2i < n$

$(iii)_c$ *si* $n<2i\leq 2n$ *et si* α_i *est la base de* $R^i f_* \Omega^i_{Y/S}$ *duale de la base* η^{n-i} de $R^{n-i} f_* \Omega^{n-i}_{Y/S}$, *alors*

$$\eta^i = \binom{d}{1} a_i \alpha_i \quad .$$

$(iii)_d$ *Si* $n = 2m$, *alors* $\eta^m \neq 0$ (*si* $S\neq\emptyset$) *et le quotient* $R^m f_* \Omega^m_{Y/S}/\mathcal{O}_S \cdot \eta^m$ *est localement libre*.

Il suffit de prouver 1.5 dans un cas "universel", ce qui permet de supposer S lisse sur Spec($\mathbb{Z}$). Dans ce cas, l'assertion (ii) résulte de (i), car elle est vraie sur $\mathbb{C}$, donc sur tout corps de caractéristique 0, d'après la théorie de Hodge. De plus, S étant réduit, (i) résulte de (iii), supposé démontré pour S le spectre d'un corps : en effet, d'après (iii), pour chaque j les fonctions

$$s \longrightarrow \dim_{k(s)} (H^i(Y_s, \Omega^j_{Y_s})$$

sont constantes sur S, sauf peut-être pour i = j, donc sont toutes constantes puisque leur somme alternée l'est (EGA III 7.9.2) et on conclut par EGA III 6.10.5 + 7.6.9 + 7.7.5.

En vertu de (1.4) et (1.3), on a

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} R^i f_* \Omega^j_{Y/S} \xrightarrow{\sim} R^i g_* \Omega^j_{\mathbb{P}(E)/S} & \text{pour } i+j < n \\ R^i f_* \Omega^j_{Y/S} \hookrightarrow R^i g_* \Omega^j_{\mathbb{P}(E)/S} & \text{pour } i+j = n \quad . \end{cases}$$

Si S est le spectre d'un corps, les assertions $(iii)_a$ $(iii)_b$ $(iii)_d$ résultent de (1.5.1) et de la dualité de Serre ([2] V 11.2 p.211) La classe de

cohomologie η^n est la classe de cohomologie d'un 0-cycle de degré $\prod_1^d a_i$ (le degré de l'intersection complète), de sorte que

$$\eta^n = \left(\prod_1^d a_i\right) \alpha_n \quad .$$

Par définition, on a $\eta^{n-i}\ \alpha_i = \alpha_n$, et $(iii)_c$ en résulte.

Les assertions (i) et (ii) sont donc vraies, et les assertions (iii), dans le cas universel, résultent de (i) et de (iii) supposé prouvé pour S le spectre d'un corps.

Théorème 1.6. Gardons les hypothèses et notations de 1.4, 1.5, supposons Y lisse, soit ℓ un nombre premier premier aux caractéristiques résiduelles de S, et désignons par $\eta_\ell \in H^0(S, R^2 f_*(\mathbb{Z}_\ell(1)))$ la première classe de Chern ℓ-adique de O(1) (SGA 5 VII). Alors

(i) $R^i f_* \mathbb{Z}_\ell = 0$ si i est impair et distinct de n

(ii) Si $2i < n$, alors $R^{2i} f_* \mathbb{Z}_\ell(i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, et admet η_ℓ^i pour base

(iii) Si $n < 2i \leq 2n$, alors $R^{2i} f_* \mathbb{Z}_\ell(i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, et admet $\eta_\ell^i / \prod_1^d a_i$ pour base.

(iv) Le $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell$ est constant tordu constructible sans torsion et, si n est pair, alors $\eta_\ell^{n/2} \neq 0$ (si $S \neq \emptyset$) et $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(n/2) / \mathbb{Z}_\ell . \eta_\ell^{n/2}$ est sans torsion.

Les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}_\ell$ sont constants tordus constructibles, et leur formation est compatible à tout changement de base, d'après SGA 4 XVI 2.2. Il suffit donc de prouver 1.6 pour S le spectre d'un corps algébriquement clos. Une application itérée de SGA 4 XIV 3.3 montre alors, pour tout m, que la flèche canonique

$$H^q_Y(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/\ell^m) \longrightarrow H^q(Y, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

est bijective pour $q > r + d$ et surjective pour $q = r + d$. De là, et de la dualité de Poincaré (SGA 4 XVIII) on déduit (SGA 5 VII) que la flèche de restriction

$$H^q(\mathbb{P}(\underline{E}), \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^q(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

est bijective pour $q < n$, injective et de conoyau sans torsion pour $q = n$. Ceci prouve (i) pour $i < n$, (ii) et (iv). On vérifie comme en 1.5 que η_ℓ^n est $\prod_1^d a_i$ fois la classe canonique, et (i) et (iii) s'obtiennent dès lors par dualité de Poincaré (SGA 4 XVIII).

1.7. Si Y est une intersection complète de dimension au moins 3 dans un espace projectif $\mathbb{P}^r(k)$ sur un corps k, on sait que Pic(Y) est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et est engendré par $\underline{O}(1)$ (SGA 2 XII 3.7). En dimension 2, et si Y est lisse, on sait encore prouver :

Théorème 1.8. Soit Y une surface lisse intersection complète dans l'espace projectif $\mathbb{P}^r(k)$ sur un corps algébriquement clos k. Alors, $\underline{Pic}^\tau(Y) = 0$, et la classe de $\underline{O}(1)$ n'est pas divisible dans le groupe de Néron-Severi NS(Y).

Puisque $H^1(Y, \underline{O}) = 0$ (1.5 $(iii)_a$), on sait que $\underline{Pic}^\circ(Y) = 0$. La nullité de $\underline{Pic}^\tau(Y)$ résulte alors du lemme bien connu suivant, du fait que $H^2(Y, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est sans torsion (1.6 (iv)) et du fait que $H^0(Y, \Omega_Y^1) = 0$ (1.5 $(iii)_a$).

Lemme 1.9. Soit Y une variété algébrique complète sur un corps algébriquement clos k.

(i) Si ℓ est premier à la caractéristique de k, alors la ℓ-torsion de NS(Y) s'identifie à la ℓ-torsion de $H^2(Y, \mathbb{Z}_\ell(1))$.

(ii) Si k est de caractéristique non nulle p et si Y est lisse, alors le noyau de la multiplication par p dans Pic(Y) s'identifie au sous-groupe de $H^0(Y,\Omega^1_Y)$ formé des différentielles localement logarithmiques.

Les suites exactes de Kummer

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow G_m \xrightarrow{x \mapsto x^{\ell^n}} G_m \longrightarrow 0$$

définissent des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)/\ell^n \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow H^2(Y,\mu_{\ell^n}) \longrightarrow (H^2(G_m))_{\ell^n} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\mathrm{Pic}(Y)/\ell^n \mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{NS}(Y) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n$. Par passage à la limite projective, on trouve

$$0 \longrightarrow \mathrm{NS}(Y) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{Z}_\ell(1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell, H^2(G_m)) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le conoyau est sans torsion puisque $\mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell$ est divisible. L'assertion (i) en résulte.

Pour prouver (ii), il suffit de noter que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{O}^*_Y \xrightarrow{x \longmapsto x^p} \underline{O}^*_Y \xrightarrow{df/f} \Omega^1_Y$$

définit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \underline{O}^*_Y \longrightarrow \underline{O}^*_Y \longrightarrow \Omega^1_{Y\ \mathrm{loc\ log}} \longrightarrow 0$$

et de prendre la suite exacte longue de cohomologie correspondante. Ce raisonnement est dû à Cartier, qui prouve de plus que, si l'on désigne par C l'opération de Cartier sur $H^0(Y,\Omega^1_Y)$, alors les différentielles localement logarithmique forment le noyau de C-Id.

Supposons par l'absurde que la classe de $\underline{O}(1)$ dans NS(Y) soit de la forme $n\omega$, avec $n > 1$. Si ℓ divise n et est premier à la caractéristique,

on a encore, en cohomologie ℓ-adique

$$\eta_\ell = n\, c_1(u)$$

ce qui contredit 1.6 (iv).

Enfin, si la caractéristique p de k est différente de 0, et si p divise n, on a encore, en cohomologie de Hodge

$$\eta = n\, c_1(u) = 0 \quad ,$$

ce qui contredit 1.5 $(iii)_d$ et achève la démonstration.

2. Résultats numériques

2.1. Soient $\underline{a}=(a_i)_{1\le i\le d}$ une suite d'entiers ≥ 1, et désignons par $V_n(\underline{a})$ une intersection complète lisse de dimension n et de multidegré $\underline{a}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^{n+d}$ sur un corps k. On posera

$$h^{pq}(\underline{a}) = \dim_k H^q(V_{p+q}(\underline{a}), \Omega^p)$$

et

$$h_o^{pq}(\underline{a}) = h^{pq}(\underline{a}) - \delta_{p,q} \quad .$$

Les $h_o^{pq}(\underline{a})$ sont donc les nombres de Hodge de la cohomologie primitive de dimension moitié d'une intersection complète de multidegré $\underline{a}$. Ils ne dépendent que de $\underline{a}$, p et q (1.5). On posera

$$H(\underline{a}) = \sum_{p,q\ge 0} h_o^{p,q}\, y^p z^q \quad \in \mathbb{Z}[[y,z]] \quad . \tag{2.1.1}$$

Pour d = 1 et $\underline{a} = (a)$, on pose $h^{pq}(a) = h^{pq}(\underline{a})$ et $H(a) = H(\underline{a})$. Pour d = 0, on pose $\sup(a_i) = 1$.

La formule suivante est le cas particulier k = 0 de la formule (2) p.160 de Hirzebruch [3]

$$(2.2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum \chi(V_n(\underline{a}),\ \Omega^p)\ y^p\ z^{n+d} = \frac{1}{(1+yz)(1-z)} \prod_1^d \frac{(1+yz)^{a_i}-(1-z)^{a_i}}{(i+yz)^{a_i}+y(1-z)^{a_i}}$$

Nous allons transformer cette formule en la suivante :

Théorème 2.3. (Hirzebruch). Avec les notations 2.1, on a

$$H(\underline{a}) = \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\prod_{1\le i\le d} \frac{(1+y)^{a_i} - (1+z)^{a_i}}{-(1+y)^{a_i} z + (1+z)^{a_i} y} \quad -1 \right] .$$

En vertu de 1.5, on a

$$\chi(V_n(\underline{a}),\Omega^p) = (-1)^p + (-1)^{n-p}\ h_o^{p,n-p}(\underline{a})$$

de sorte que le premier membre I de (2.2) se réécrit

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} ((-1)^p+(-1)^q\ h_o^{p,q}(\underline{a}))\ y^p z^{p+q+d}$$

$$= \sum_{p,q\ge 0} (-1)^p (yz)^p z^q z^d + \sum_{p,q\ge 0} (-1)^q\ h_o^{p,q}(a)\ (yz)^p z^q\ z^d$$

$$= z^d \left[\frac{1}{(1+yz)(1-z)} + H(\underline{a})(yz,-z) \right] .$$

Le deuxième membre II de (2.2) se réécrit

$$II = \frac{z^d}{(1+yz)(1-z)} \prod_1^d \frac{(1+yz)^{a_i} - (1-z)^{a_i}}{(1+yz)^{a_i} z + yz(1-z)^{a_i}}$$

de sorte que, simplifiant par z^d dans I = II, on trouve que

$$H(\underline{a})(yz,-z) = \frac{1}{(1+yz)(1-z)} \left[\prod_1^d \frac{(1+yz)^{a_i} - (1-z)^{a_i}}{(1+yz)^{a_i} z + (1-z)^{a_i} yz} \quad -1 \right]$$

et 2.3 se déduit de cette formule par changement de variable.

Corollaire 2.4. Avec les notations 2.1,

(i) pour d = 1, on a

$$H(a) = -\frac{(1+y)^{a-1} - (1+z)^{a-1}}{(1+y)^a z - (1+z)^a y}$$

$$= \frac{\sum_{i,j\geq 0} \binom{a-1}{i+j+1} y^i z^j}{1 - \sum_{i,j\geq 1} \binom{a}{i+j} y^i z^j} .$$

(ii) on a, $|P|$ désignent le nombre d'élément d'une partie P de $[1,d]$,

$$H(\underline{a}) = \sum_{\substack{P\subset[1,d] \\ P\neq\emptyset}} (1+y)^{|P|-1} (1+z)^{|P|-1} \prod_{i\in P} H(a_i) .$$

D'après (2.3), on a

$$H(a) = \frac{-1}{(1+y)(1+z)} \left[\frac{(1+y)^a - (1+z)^a}{(1+z)^a z - (1+z)^a y} + 1 \right]$$

$$= \frac{-1}{(1+y)(1+z)} \left[\frac{(1+y)^a(1+z) - (1+z)^a(1+y)}{(1+y)^a z - (1+z)^a y} \right]$$

$$= -\frac{(1+y)^{a-1} - (1+z)^{a-1}}{(1+y)^a z - (1+z)^a y} .$$

Soient N et D les numérateurs et dénominateurs de cette formule.

On a

$$H(a) = -\frac{N}{D} ,$$

$$N = \sum \binom{a-1}{k} (y^k - z^k) = (y-z) \sum_{i,j\geq 0} \binom{a-1}{i+j+1} y^i z^j$$

$$D = \sum \binom{a}{k} (y^k z - yz^k) = (z-y) + yz \sum_{k\geq 1} \binom{a}{k} \left(y^{k-1} - z^{k-1}\right)$$

$$= (y-z)\left(-1 + yz \sum_{i,j\geq 0} \binom{a}{i+j+2} y^i z^j\right.$$

$$= (y-z)\left(-1 + \sum_{i,j\geq 1} \binom{a}{i+j} y^i z^j\right)$$

et l'assertion (i) en résulte.

Inversons la formule de 2.3, pour d = 1. On trouve

$$-\frac{(1+y)^a - (1+z)^a}{(1+y)^a z - (1+z)^a y} = 1 + (1+x)(1+y)\, H(a) \quad .$$

Si l'on substitue cette formule dans 2.3, on obtient

$$H(\underline{a}) = \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\prod_1^d \left(1+(1+x)(1+y)\, H(a_i)\right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\sum_{\substack{P\subset[i,d] \\ P\neq\emptyset}} (1+x)^{|P|} (1+y)^{|P|} \prod_{i\in P} H(a_i) \right]$$

d'où résulte (ii).

Théorème 2.5. Avec les notations 2.1

(i) Si $p+q = p'+q'$ et si $p \leq p' \leq q' \leq q$, alors

$$h_o^{pq}(\underline{a}) \leq h_o^{p'q'}(\underline{a})$$

(ii) Si $p \leq q$, pour que $h_o^{pq}(\underline{a}) \neq 0$, il faut et il suffit que

$$p > \left[\frac{p+q+d - \Sigma a_i}{\sup(a_i)} \right] .$$

où [ ] désigne la partie entière du quotient.

Soit (*) la propriété suivante d'une série formelle $P = \Sigma a_{pq} y^p z^q$:

(*) les a_{pq} sont positifs, $a_{pq} = a_{qp}$, et si $p+q = p'+q'$, et $p \leq p' \leq q' \leq q$, alors $a_{pq} \leq a_{p'q'}$.

L'assertion (i) résulte aussitôt des formules (2.4), de l'identité $(1-x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} x^n$, et du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 2.5.1. L'ensemble des séries formelles vérifiant (*) est stable par addition et multiplication.

On prouvera (ii) tout d'abord dans le cas particulier des hypersurfaces (d = 1). La formule à démontrer se réécrit alors, pour $p \leq q$,

$$h_o^{pq}(a) \neq 0 \iff p \geq \left[\frac{p+q+1}{a} \right] \tag{2.5.2}$$

$$(\iff (p+1)\, a \geq p+q+2 \quad \text{trivialement}).$$

De la deuxième formule 2.4 (i), on déduit que h_o^{pq} est non nul si et seulement si il existe des couples (e,f) et (c_i,d_i) tels que

$$\begin{cases} (e,f) \geq (0,0) \text{ et } e+f \leq a-2 \\ (c_i,d_i) \geq (1,1) \text{ et } c_i+d_i \leq a \\ (p,q) = (e,f) + \Sigma (c_i,d_i) \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Pour p+q donné, le plus petit p possible s'obtient pour e = 0 et $c_i = 1$, et est le nombre d'indices i. Ce p est donc la borne inférieure des p pour lesquels on a

$$p \geq \frac{(p+q)-(a-2)}{a} \quad , \text{ i.e. } (p+1)a \geq p+q+2 \quad .$$

Passons au cas général. Si $\underline{a}'$ se déduit de $\underline{a}$ en supprimant les a_i égaux à 1, alors $H(\underline{a}) = H(\underline{a}')$. Vu la forme de la formule 2.5 (ii), on peut supposer que pour tout i, $a_i > 1$. Si d = 0, alors $h_o^{pq} = 0$ et l'assertion est correcte; on ne restreint pas la généralité en supposant que $d > 0$ et que $a_d = \sup(a_i)$.

En vertu de 2.4 (ii), et (2.5.2), pour que $h_o^{pq}(\underline{a}) \neq 0$, il faut et il suffit qu'il existe une partie non vide P de [1,d], un couple (e,f) et des couples $(c_i,d_i)_{i\leq i\leq d}$ tels que

$$(2.5.4) \qquad \begin{cases} (|P|-1,\ |P|-1) \geq (e,f) \geq (0,0) \ , \\ c_i,d_i \geq \left[\frac{c_i+d_i+1}{a_i}\right] \ ; \ (c_i,d_i) \geq (0,0) \ , \\ (p,q) = (e,f) + \Sigma\,(c_i,d_i) \quad . \end{cases}$$

Pour n = p+q fixé, cherchons la plus petite valeur de p possible. Si $n_i = c_i + d_i$, pour un tel p, les conditions (2.5.4) se réécrivent, en terme des c_i, n_i, e et f

$$
(2.5.5)\qquad \begin{cases} a_i = 2 \Longrightarrow n_i \text{ pair} & \text{(sinon (2.5.4) est impossible)} \\ c_i \geq \left[\dfrac{n_i+1}{a_i}\right] \quad ; \quad c_i \leq n_i \quad , \\ (|P|-1,\ |P|-1) \geq (e,f) \geq (0,0) \quad , \\ n = e+f+\Sigma\, n_i \quad , \\ p = e + \Sigma\, c_i \quad . \end{cases}
$$

Cette description montre tout d'abord que le plus petit p est obtenu pour $P = [1,d]$, cas auquel on se limitera. Si on a

$$
(2.5.6)\qquad \Sigma(a_i-2) + (d-1) \geq n,
$$

alors il existe une solution avec $p = c_i = e = 0$. Sinon, si $a_d \neq 2$, le mieux qu'on puisse faire est de prendre $n_i = a_i - 2$ pour $i \neq d$, de sorte que $c_i = 0$ pour $i \neq d$, $e = 0$, $f = d-1$ et $n_d = n - (d-1) - \sum_{i\neq d} (a_i-2)$. On a alors

$$
(2.5.7)\qquad p = \left[\frac{n-(d-1) - \sum_{i\neq d} (a_i-2) + 1}{a_d}\right] \quad ,
$$

et donc, pour $p \leq q$, on a $h_o^{pq}(\underline{a}) \neq 0$ si et seulement si

$$
(2.5.8)\qquad p \geq \left[\frac{n- \sum_{i\neq d} (a_i-1) + 1}{a_d}\right] \quad .
$$

La formule (2.5.8) se réduit à (2.5.2) si $d = 1$ et est trivialement vraie si (2.5.6) est vérifié. Si $d \geq 2$, si (2.5.6) n'est pas vérifié, et si tous les a_i sont égaux à 2, le mieux qu'on puisse faire est encore de

prendre $n_i = 0$ $(i \neq d)$, $e = 0$, $f = d-1$ ou $d-2$, congru à n modulo 2, et $n_d = n-f$. Si $n \equiv d-1$ (2), on prouve (2.5.7) comme plus haut. Sinon, on note que

$$\left[\frac{n-(d-2)+1}{2}\right] = \left[\frac{n-(d-1)+1}{2}\right]$$

de sorte que (2.5.7), et par là (2.5.8), est valable même si $a_d = 2$.

Reste à vérifier que (2.5.8) équivaut à la formule 2.5 (ii). En effet, on a

$$\left[\frac{n - \sum_{i\neq d}(a_i-1)+1}{a_d}\right]\left[= \frac{n+d-\sum_{i\neq d} a_i}{a_d}\right] = \left[\frac{p+q+d-\sum a_i}{a_d}\right] + 1 \quad .$$

2.6. Si X est une intersection complète de dimension n dans $\mathbb{P}^r$, il résulte aussitôt de (2.5.8) que la partie primitive de $H^n(X)$ n'est nulle que si X est une quadrique de dimension impaire.

Définition 2.7. Si X est une variété algébrique propre et lisse sur $\mathbb{C}$, le niveau de Hodge de $H^n(X)$ est la borne supérieure des nombres $q-p$ pour $p+q = n$ et $h^{pq}(X) \neq 0$.

Le niveau de Hodge ℓ est donc congru à n modulo 2, et est au plus égal à $\inf(n, \dim(X) - n)$. Il est ≥ 0, sauf si $H^n(X) = 0$, auquel cas il est égal à $-\infty$.

Corollaire 2.8. Reprenons les notations 2.1, en faisant $k = \mathbb{C}$, et en supposant que $a_d = \sup(a_i)$. Soit ℓ un entier $0 \leq \ell < n$, congru à n modulo 2. Pour que le niveau de Hodge de $H^n(V_n(\underline{a}))$ soit $\leq \ell$, il faut et il suffit que

$$\sum_{i\neq d} (a_i-1) \leq (\ell+1) - (a_d-2)\,\frac{n-\ell}{2} \quad .$$

En vertu de (2.5.8), si le niveau de Hodge est ≥ 0, il est la borne supérieure de 0 et de

$$n - 2\left[\frac{n - \sum_{i\neq d} (a_i-1) + 1}{a_d}\right]$$

et l'inéquation

$$n - 2\left[\frac{n - \sum_{i\neq d} (a_i-1) + 1}{a_d}\right] \leq \ell$$

peut se réécrire

$$\frac{n-\ell}{2} \leq \left[\frac{n - \sum_{i\neq d} (a_i-1) + 1}{a_d}\right] ,$$

ou encore

$$\sum_{i\neq d} (a_i-1) \leq 1 + n - a_d \cdot \frac{n-\ell}{2} = \ell + 1 - (a_d-2)\,\frac{n-\ell}{2} \quad .$$

2.9. A l'aide de la formule 2.8, il est facile d'énumérer, pour ℓ petit, les multidegrés des intersections complètes dans $\mathbb{P}^r$, de dimension $n > 1$, dont le H^n est de niveau ℓ. La table donnée dans la première version de cet exposé était néanmoins incorrecte, et celle donnée ci-dessous est extraite de celle plus complète donnée par M. Rapoport dans son article : Complément à l'article de P. Deligne "La conjecture de Weil pour les surfaces K 3", Inventiones Math. 15 227-236 (1972). Pour $\ell \leq 1$, les intersections complètes $V_n(\underline{a})$ de dimension n et de multidegré $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_d)$, avec $n > \ell$, $d \geq 1$ et $a_i \geq 2$, de niveau de Hodge ℓ, sont les suivantes :

$\ell = -\infty$ $\quad V_{2k+1}(2) \qquad (k\geq 0)$

$\ell = 0$ $\quad V_{2k}(2)\ (k\geq 1),\ V_{2k}(2,2)\ (k\geq 1),\ V_2(3)$

$\ell = 1$ $\quad V_{2k+1}(2,2)\ (k\geq 1),\ V_{2k+1}(2,2,2)\ (k\geq 1)$
$V_3(3),\ V_5(3),\ V_3(3,2),\ V_3(4)$.

2.10. Pour $\underline{a}$ petit, les fonctions génératrices des $h_o^{pq}(\underline{a})$ s'écrivent, d'après 2.4

$$H(2) = \frac{1}{1-yz}$$

$$H(3) = \frac{2 + y + z}{1 - 3yz - y^2z - yz^2}$$

$$H(2,2) = \frac{y + z}{(1-yz)^2} + \frac{2}{(1-yz)^2} + \frac{1}{1-yz}$$

de sorte que

$$h_o^{pp}(2) = 1 \quad ,$$

$$h_o^{11}(3) = 6 \quad ,$$

$$h_o^{pp}(2,2) = 2p + 3 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AKIZUKI and S. NAKANO. Note on Kodaira - Spencer's proof of Lefschetz theorems - Proc. Jap. Acad. 30, 266-272, (1954).

[2] R. HARTSHORNE. Residues and duality. Lecture notes 20 Springer 66.

[3] F. HIRZEBRUCH. Topological methods in algebraic geometry 3é ed. Springer-Verlag 1966.

[4] K. KODAIRA. On a differential geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39, 1268-1273, (1953).

S G A 7

E X P O S E XII

QUADRIQUES

par P. DELIGNE

0.0. Le présent exposé rassemble quelques résultats bien connus sur les quadriques, dont nous aurons besoin pour démontrer la formule de Picard-Lefschetz.

0.1. Soit m une section d'un $\mathcal{O}_S$-Module M sur un schéma S. On dira que m est partout non nulle sur S si, pour tout $s \in S$, l'image de m dans le $k(s)$-vectoriel M_s déduit de M par le changement de base $\{s\} \longrightarrow S$ est non nulle. Même terminologie pour $S = \mathrm{Spec}(A)$ et m un élément d'un A-module M.

1. Formes quadratiques

1.1. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, V un A-module localement libre de rang n et Q une forme quadratique sur V (Bourb. Alg 9 § 3 n°4). Rappelons que Q est dite non dégénérée si la forme bilinéaire associée

$$\Phi(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

est non dégénérée, i.e. établit un isomorphisme entre V et son dual V^*. Si 2 n'est pas inversible dans A, ceci ne peut se produire que pour n pair (loc. cit.).

Les formes quadratiques sur V forment un A-module projectif ; une forme quadratique Q est "partout non nulle" sur S (0.1) si et seulement si les Q(v) engendrent l'idéal A de A.

La notation $\mathbb{P}(V)$ sera prise au sens des EGA ; rappelons que si A est un corps, alors $\mathbb{P}(V)$ est l'espace projectif dont l'ensemble des points rationnels est le quotient $(V^* - \{0\})/A^*$.

La forme quadratique Q s'identifie à une section du faisceau inversible $\mathcal{O}(2)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$ sur S. Pour Q partout non nulle, l'équation ("homogène") Q = 0 définit un sous-schéma de $\mathbb{P}(V^*)$, plat et purement de dimension relative n-2 sur S. Ce schéma s'appelle la quadrique définie par Q. La forme Q est dite ordinaire si elle n'est nulle en aucun point de S et que la quadrique qu'elle définit est lisse sur S.

Pour que Q soit ordinaire, il faut et il suffit que les formes qui s'en déduisent après extension des scalaires de A à un corps le soient. Si A est un corps, alors :

a) pour n pair ou car(A) $\neq$ 2 : Q ordinaire $\Longleftrightarrow$ Q non dégénéré ;

b) pour n impair et card(A) = 2 : Q est ordinaire si et seulement si le noyau N de la forme bilinéaire (alternée) associée Φ est de dimension un, et que Q n'est pas nul sur N.

Proposition 1.2. Si Q est ordinaire et si n = 2m (resp. n = 2m +1), alors, localement pour la topologie étale sur S, V admet une base e telle que

$$Q(\sum_{1}^{n} x_i e_i) = \sum_{1}^{m-1} x_i x_{i+m}$$

(resp. $$Q(\sum_{1}^{n} x_i e_i) = \sum_{1}^{m-1} x_i x_{i+m} + \lambda x_{2m+1}^2 \quad (\lambda \text{ inversible}) .$$

Prouvons 1.2 par récurrence sur m. Si $m = 0$, l'assertion est évidente. Si $m > 0$, la quadrique d'équation $Q = 0$ est lisse sur S et à fibres géométriques non vides ; elle admet donc des sections localement pour la topologie étale. Localement, une telle section est définie par un élément $e \in V$, nul en aucun point de $\mathrm{Spec}(A)$, et tel que $Q(e) = 0$. En aucun point de S, e n'est dans le noyau de Φ ; localement, on peut donc trouver f' tel que $\Phi(e,f') = 1$. Si $f = -Q(f').e+f$, on a

$$Q(e) = Q(f) = 0 \ , \ \Phi(e,f) = 1 \ .$$

Si V_2 est l'orthogonal du sous-module V_1 de V engendré par e et f, on a $V = V_1 \oplus V_2$, et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à V_2 .

1.3. Pour la définition et les principales propriétés de l'algèbre de Clifford de Q, on renvoie à (Bourb. Alg 9 § 9). On désigne par ρ l'application canonique de V dans $C(Q)$.

Lemme 1.3.1. Sous les hypothèses de 1.1, il existe pour $\lambda \in A$ un et un seul homomorphisme

$$[\lambda] \ : \ C^+(\lambda\, Q) \longrightarrow C^+(Q)$$

tel que, pour $x, y \in V$, on ait

$$[\lambda] \quad (\rho(x).\rho(y)) = \lambda.\rho(x).\rho(y) \ .$$

Cet homomorphisme se déduit par passage au quotient de l'endomorphisme $[\lambda]$ de la partie $T^+(E)$ de l'algèbre tensorielle de E, qui vaut λ^n sur $T^{2n}(E)$. En effet,

$$[\lambda]\,(x \otimes x - \lambda\, Q(x)) = \lambda(x \otimes x - Q(x)) \quad .$$

Supposons Q partout non nulle sur S. Alors, le lemme 1.2.1 définit un système transitif d'isomorphismes entre les algèbres $C^+(\lambda\, Q)$ pour $\lambda \in A^*$.

Dès lors, l'algèbre $C^+(Q)$ ne dépend (à isomorphisme unique près) que de V et de la donnée de Q à un facteur près ; en d'autres termes, $C^+(Q)$ ne dépend que de V et du sous-schéma d'équation $Q = 0$ de $\mathbb{P}(V^*)$. Chaque homothétie de rapport inversible est un automorphisme du couple $(V, X \subset \mathbb{P}(V^*))$; on vérifie que ces automorphismes agissent trivialement sur $C^+(V, X)$, et il en résulte que l'algèbre $C^+(V, X)$ ne dépend que du couple de schémas $X \subset \mathbb{P}(V^*)$ sur A. On la notera $C^+(X, \mathbb{P}(V^*))$.

1.4. Soit V un A-module localement libre de rang $2m > 0$ et Q une forme quadratique non dégénérée sur V . Soit donné une décomposition $V = W_1 \oplus W_2$ de V en deux sous-espaces totalement singuliers. La forme $Q(w_1 + w_2)$ met alors W_1 et W_2 en dualité parfaite. Rappelons que pour $f \in W_2$ (identifié à W_1^*), le produit contracté par f est l'endomorphisme de degré -1 de $\wedge W_1$ défini par

$$f \llcorner (e_1 \wedge \ldots \wedge e_p) = \sum (-1)^i \langle e_i, f \rangle\, e_o \wedge \ldots \hat{e}_i \ldots \wedge e_p \quad .$$

Munissons le A-module $\wedge W_1$ de la $\mathbb{Z}/2$-graduation pour laquelle

$(\wedge W_1)^+ = \bigoplus_i \wedge^{2i} W_1$ et $(\wedge W_1)^- = \bigoplus_i \wedge^{2i+1} W_1$. L'algèbre $\mathrm{End}(\wedge W_1)$ est alors $\mathbb{Z}/2$-gradué : les endomorphismes pairs (resp. impairs) sont ceux qui respectent la graduation (resp. sont de degré 1 (mod 2)).

On renvoie à (Bourb Alg 9 § 9 n°4) pour la démonstration de l'existence d'un unique isomorphisme d'algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduées s entre $C(Q)$ et $\mathrm{End}(\wedge W_1)$, tel que

$$s(\rho((e,0)) = e \wedge \qquad \text{et} \qquad s(\rho((0,f)) = f \llcorner \ .$$

Désignons provisoirement par $e(W_1,W_2)$ l'élément de $C^+(Q)$ tel que $s(e(W_1,W_2))$ soit l'identité sur $(\wedge W_1)^+$ et 0 sur $(\wedge W_1)^-$. Le centre $Z(Q)$ de $C^+(Q)$ est isomorphe à $A \oplus A$, cette décomposition étant définie par les idempotents $e(W_1,W_2)$ et $1 - e(W_2,W_1)$. De plus $C^+(Q)$ est une algèbre de matrice sur $Z(Q)$.

De ceci et de 1.2, on déduit comme en loc.cit.

Proposition 1.5. Sous les hypothèses de 1.1, si $n = 2m > 0$ et que Q est non dégénérée, alors le centre $Z(Q)$ de $C^+(Q)$ est une algèbre étale localement libre de rang 2 sur A et $C^+(Q)$ est une algèbre d'Azumaya sur $Z(Q)$.

1.6. Soient V et Q comme en 1.4, et W un facteur direct totalement singulier localement libre de rang m de V. Soit W_1' un supplémentaire de W : $V = W \oplus W_1'$. Tout supplémentaire W_2' de W s'identifie au graphe d'une application u de W_1' dans W. La forme Φ met en dualité W et W_1' ; l'application u est donc uniquement déterminée par la forme bilinéaire sur W_1'

$$B(x,y) = \Phi(x,u(y)) \quad ,$$

et W_2' est totalement singulier si et seulement si, sur W_1', on a

$$B(x,x) = -Q(x) \quad .$$

Puisqu'il existe toujours de telles formes B, W admet des supplémentaires totalement singulier. L'un d'eux, soit W', étant choisi, l'ensemble des supplémentaire totalement singulier W_o' de W s'identifie à l'ensemble des formes alternées sur W', soit encore à l'ensemble des sections de l'espace affine $\mathbb{E}(\overset{2}{\wedge} W')$ sur S. Pour chaque section x de $\mathbb{E}(\overset{2}{\wedge} W')$, soit $W_o'(x)$ le supplémentaire correspondant de W et e(x) l'idempotent $e(W, W_o'(x))$. La fonction $x \longmapsto e(x)$ est compatible à toute extension des scalaires, dont définit un morphisme de S-schémas e de $\mathbb{E}(\overset{2}{\wedge} W')$ dans Spec(Z(Q)). Le S-schéma $\mathbb{E}(\overset{2}{\wedge} W')$ est plat à fibres géométriques connexes, alors que Spec(Z(Q)) est étale sur S. Le morphisme e se factorise donc par une section de $\mathbb{E}(\overset{2}{\wedge} W')$ sur S, i.e. e(x) est indépendant de x. Ceci justifie la

Notation 1.7. Pour W comme plus haut et W' un quelconque supplémentaire totalement isotrope de W, on désigne par e(W) l'idempotent $e(W,W') \in Z(Q)$.

1.8. On a vu en 1.6 que, pour λ inversible, $C^+(Q)$ s'identifie à $C^+(\lambda Q)$. Un argument de continuité analogue au précédent montre que cette identification transforme

$$e(W) \in Z(Q) \quad \text{en} \quad e(W) \in Z(\lambda Q) \quad .$$

1.9. Rappelons que si B et C sont deux algèbres $\mathbb{Z}/2$-gradués, alors, dans le produit tensoriel gradué $B \otimes' C$ de B et C, la multiplication est définie par la règle de Koszul

$$(b_1 \otimes c_1)\,(b_2 \otimes c_2) = (-1)^{\deg(c_1)\deg(b_2)}\, b_1 b_2 \otimes c_1 c_2 \quad ,$$

lorsque les b_i et c_i sont homogènes.

Si (V_1, Q_1) et (V_2, Q_2) sont deux modules quadratiques, alors $C(Q_1 \oplus Q_2) = C(Q_1) \otimes' C(Q_2)$ (Bourb. loc. cit.).

Si P et Q sont deux A-modules localement libres $\mathbb{Z}/2$-gradués de type fini sur A, on identifie les algèbres $\mathbb{Z}/2$-gradués $\mathrm{End}(P) \otimes' \mathrm{End}(Q)$ et $\mathrm{End}(P \otimes Q)$, en posant, pour u, v, p et q homogènes

$$u \otimes v\,(p \otimes q) = (-1)^{\deg(v)\deg(p)}\, u(p) \otimes v(q) \quad .$$

Lemme 1.10. *Soit (V,Q) un module quadratique somme de deux modules quadratiques (V_1, Q_1) et (V_2, Q_2), avec V_i localement libre de rang $2m_i$ et Q_i non dégénérée. Soit $V_i = W_i \oplus W_i'$ une décomposition de V_i en deux sous-espaces totalement singuliers $(i = 1, 2)$. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C(Q) & \xrightarrow{\ \sim\ } & C(Q_1) \otimes' C(Q_2) \\ \big\downarrow & & \big\| \\ \mathrm{End}(\wedge(W_1 \oplus W_2)) & \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{End}(\wedge W_1 \otimes \wedge W_2) & \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{End}(\wedge W_1) \otimes' \mathrm{End}(\wedge W_2) \end{array}$$

est commutatif.

La vérification est laissée au lecteur. On déduit aussitôt de ce lemme que

$$e(W_1 \oplus W_2) = e(W_1)e(W_2) + (1 - e(W_1))\,(1 - e(W_2)) \tag{1.10.1}$$

1.11. La construction suivante est empruntée à Micali et Villamayor. Si $p : Z \longrightarrow S$ est un revêtement étale double de S, on peut regarder Z comme un $\mathbb{Z}/2$-torseurs sur S. Désignons par $*$ l'addition des torseurs, et pour s une section de Z, soit $e(s)$ l'idempotent de $p_*\mathcal{O}_Z$ qui vaut 1 sur s, et 0 ailleurs. Avec les notations de 1.10, il existe un unique isomorphisme

$$\mathrm{Spec}(Z(Q_1)) * \mathrm{Spec}(Z(Q_2)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z(Q)) \tag{1.11.1}$$

$$+ : \mathrm{Spec}(Z(Q_1)) \times_S \mathrm{Spec}(Z(Q_2)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z(Q))$$

pour lequel, après tout changement de base, on ait

$$e(s + t) = e(s)\,e(t) + (1 - e(s))\,(1 - e(t)) \quad .$$

Si $s(W)$ est la section de $\mathrm{Spec}(Z(Q))$ telle que $e(s(W)) = e(W)$, la formule 1.10.1 se récrit

$$s(W_1 \oplus W_2) = s(W_1) + s(W_2) \quad .$$

Proposition 1.12. *Soient* A *un corps*, V *un vectoriel de dimension* $2m > 0$ *sur* V, Q *une forme quadratique non dégénérée sur* V *et* W_1, W_2 *deux sous-espaces totalement isotropes de dimension* m *de* V. *Alors*, $e(W_1) = e(W_2)$ *si et seulement si* $\dim(W_1/W_1 \cap W_2)$ *est pair*.

(Cf. Bourbaki Alg 9 § 6 ex. 28). Soit $e_1 \ldots e_m\ f_1 \ldots f_m$ une base de V telle que

a) $Q(\Sigma x_i e_i + \Sigma y_i f_i) = \Sigma x_i y_i$;

b) W_1 est engendré par les e_i ;

c) et W_2 est engendré par les $(e_i)_{1 \le i \le s}$ et les $(f_i)_{s < i \le m}$.

Alors V est somme des $V_i = A e_i + A f_i$, et

$$W_\alpha = \oplus\ W_\alpha \cap V_i \qquad (\alpha = 1,2) \ .$$

La formule d'addition 1.11 permet dès lors de se limiter au cas où $\dim V = 2$. Si $W_1 = W_2$, l'assertion est évidente. Si au contraire $W_1 = Ae$, et $W_2 = Af$ avec $\Phi(e,f) = 1$, on a $e(W_1) = fe$ et $e(W_2) = ef = 1 - fe$.

2. Quadriques.

2.1. Soient k un corps algébriquement clos et V un vectoriel de dimension $n+2$ sur k. Une quadrique lisse de dimension n sur k est un schéma X sur k isomorphe au sous-schéma de $\mathbb{P}(V^*)$ défini par l'équation $Q=0$, pour Q une forme quadratique ordinaire sur k.

Remarque 2.2. Pour $n = 0,1,2$ X est une quadrique lisse de dimension n sur k si et seulement si :

$n = 0$: $X \approx \mathrm{Spec}(k) \amalg \mathrm{Spec}(k)$

$n = 1$: $X \approx \mathbb{P}^1_k$

$n = 2$: $X \approx \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Lemme 2.3. Avec les notations de 2.1, soit X défini par $Q = 0$.

(i) $\Omega_X^n \approx \mathcal{O}_X(-n)$

(ii) $\mathrm{Pic}(X) \approx$
- 0 pour $n = 0$.
- $\mathbb{Z}$ pour $n = 1$; $\mathcal{O}_X(1)$ est le carré d'un générateur.
- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ pour $n = 2$.
- $\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$; $\mathcal{O}_X(1)$ est un générateur.

(iii) $H^i(X,\mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$, $H^1(X,\mathcal{O}_X(1)) = 0$

(iv) $H^0(X,\mathcal{O}_X(1)) \xleftarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}(V^*),\mathcal{O}_X(1)) = V^*$, et pour $n > 0$, $H^0(X,\mathcal{O}_X) = k$.

L'assertion (i) résulte de ce que le faisceau conormal de X dans $\mathbb{P}(V^*)$ est $\mathcal{O}_X(-2)$ et que le faisceau canonique de $\mathbb{P}^r$ est $\mathcal{O}(-r-1)$. L'assertion (ii) résulte de 2.2 pour $n \leq 2$, de SGA 2 XII 3.7 pour $n \geq 3$. Enfin (iii) et (iv) résultent de FAC n° 78.

Définition 2.4. Une quadrique lisse de dimension n sur un schéma S est un S-schéma $f : X \longrightarrow S$, propre et lisse sur S, dont les fibres géométriques sont des quadriques lisses.

Pour $n = 0$, une quadrique lisse de dimension 0 sur S n'est autre qu'un revêtement étale double de S. Pour $n = 1$, ce n'est autre qu'une variété de Severi-Brauer de dimension 1 sur S.

2.5. Si $\rho : X \longrightarrow S$ est une quadrique lisse de dimension n sur S, alors, d'après 2.3 (i), l'inverse du faisceau inversible $\Omega^n_{X/S}$ est ample.

D'après 2.3 (ii), le schéma de Picard $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est lisse sur S (car $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$), non ramifié sur S (car $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$) et essentiellement propre sur S (car X/S est lisse). C'est donc, localement sur S pour la topologie étale, un groupe discret constant ayant la structure indiquée en 2.3 (iii).

En particulier, si X a une section, il existe sur X un faisceau inversible L tel que $L^{\otimes(-n)}$ ait même image dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$ que $\Omega^n_{X/S}$, et deux tels faisceaux sont isomorphes localement sur S. D'après 2.3 (iii) et [1] 0.5 p. 19 p_*L est localement libre de formation compatible à tout changement de base. Dès lors, p_*L est localement libre de rang $n+2$ (2.3 (iv)), l'application de p^*p_*L dans L est surjective, l'application canonique de X dans $\mathbb{P}(p_*L)$ est une immersion fermée, elle identifie X à un diviseur relatif de degré 2 de $\mathbb{P}(p_*L)$, et, localement sur S, X est la quadrique de $\mathbb{P}(p_*L)$ définie par une forme quadratique ordinaire sur $(p_*L)^*$, unique à un facteur inversible près.

2.6. Supposons $n > 0$. Si L_1 et L_2 sont deux faisceaux inversibles du type considéré plus haut, alors, localement sur S, il existe un isomorphisme $u : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$. Cet isomorphisme est unique à un facteur inversible près, car $p_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ (d'après 2.3 (iv)). Dès lors, les divers isomorphismes $u : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ induisant le <u>même</u> isomorphisme $\mathbb{P}(u): \mathbb{P}(p_*L_1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(p_*L_2)$, de sorte que $\mathbb{P}(p_*L_1)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{P}(p_*L_2)$, et ne dépend que de X/S, non du choix d'un L. On le notera $P(X)$.

L'espace projectif $P(X)$ est défini localement sur S pour la topologie étale. Par descente, il définit une variété de Severi-Brauer sur S, encore notée $P(X)$, donc X est un diviseur relatif de degré 2.

Localement sur S, le couple $X \hookrightarrow P(X)$ définit une algèbre de Clifford $C^+(X, P(X))$ (1.3). Par descente, on obtient une algèbre sur S, qu'on notera simplement $C^+(X)$.

2.7. Supposons que $n = 2m > 0$. Le centre Z de $C^+(X)$ est alors une $\mathcal{O}_S$-algèbre définissant un revêtement étale double $Z(X)$ de S.

Une <u>génératrice</u> de X est un sous-schéma D de X qui soit un sous-espace linéaire de dimension m de $P(X)$.

Localement sur S, pour $P(X) \approx \mathbb{P}(V^*)$ et X défini par l'équation $Q = 0$, une génératrice D de X s'identifie par définition à un sous-Module localement facteur direct $W(D)$ de V, totalement singulier et de rang $m + 1$. D'après 1.8, l'idempotent $e(W(D))$ du centre de $C^+(X)$ ne dépend que de $D \subset X$. On désigne par $e(D)$ la section correspondante de $Z(X)$ (celle sur laquelle $e(W(D))$ vaut 1).

Les génératrices de X/S sont les S-points d'un schéma $Gén(X)$ projectif sur S, et e définit un morphisme de S-schémas

$$e : Gén(X) \longrightarrow Z(X) \quad . \tag{2.7.1}$$

Lorsque $n = 0$, on pose $Z(X) = X$, on appelle génératrice de X une section de X et on définit e comme étant l'identité.

Proposition 2.8. Sous les hypothèses de 2.7, $p : Gén(X) \longrightarrow S$ est projectif et lisse, et (2.7.1) est sa factorisation de Stein.

La question est locale pour la topologie étale sur S. Localement, si D est une génératrice, les génératrices D' disjointes de D s'identifient, d'après 1.6, aux S-points d'un espace affine sur S convenable, et on recouvre ainsi Gén(X) par des ouverts lisses sur S.

Pour prouver que les fibres géométriques de e sont géométriquement connexes, il suffit de considérer le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k, X étant défini par l'équation Q = 0 dans $\mathbb{P}(V^*)$.

Soient donc W_1 et W_2^* deux sous-espaces totalement isotropes de rang $m+1$ de V tels que $e(W) = e(W')$, i.e. tels que $W/W \cap W'$ soit de dimension paire (1.12). Procédant comme en 1.12, on trouve une décomposition orthogonale

$$V = V_o \oplus \bigoplus V_i$$

de V telle que

a) $W_\alpha = W_\alpha \cap V_o \oplus \bigoplus W_\alpha \cap V_i \qquad (\alpha = 1,2)$

b) $W_1 \cap V_o = W_2 \cap V_o$

c) $\dim V_i = 4$, et $V_i = (W_1 \cap V_i) \oplus (W_2 \cap V_i)$

et il suffit de prouver que $W_1 \cap V_i$ et $W_2 \cap V_i$ appartiennent à une même famille connexe de sous-espaces totalement singuliers maximaux de V_i. En d'autres termes, on se ramène au cas des quadriques de dimension 2. Une

telle quadrique est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, les génératrices étant les sous-schémas $\{t\} \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^1 \times \{t\}$; la proposition est dans ce cas évidente.

3. Cohomologie des quadriques

3.1. Soit $p : X \longrightarrow S$ une quadrique lisse de dimension n sur S, et ℓ un nombre premier inversible sur S. On désignera par

$$\eta \in H^0(S, R^1p_* \mathbb{Z}_\ell(1))$$

la "classe de cohomologie d'une section hyperplane". Localement sur S pour la topologie étale, on a $P(X) \approx \mathbb{P}(V^*)$, et η est alors par définition l'image dans $H^0(S, R^2p_*\mathbb{Z}_\ell(1))$ de la première classe de Chern $c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$.

3.2. Supposons que $n = 2m$. Une génératrice D de X définit alors une classe de cohomologie $c\ell'(D)$ dans $H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(m))$, d'image $c\ell(D)$ dans $H^0(S, R^np_*\mathbb{Z}_\ell(m))$. Il résulte de 2.8 que cette dernière ne dépend que de la section $e(D)$ de $Z(X)$, d'où un morphisme de faisceaux étales sur S

$$(3.2.1) \qquad c\ell : Z(X) \longrightarrow R^np_* \mathbb{Z}_\ell(m) \quad .$$

Théorème 3.3. Soit $p : X \longrightarrow S$ une quadrique lisse de dimension n sur S et ℓ un nombre premier inversible sur S

(i) $R^{2i+1}p_* \mathbb{Z}_\ell = 0$

(ii) Si $0 \leq 2i < n$, (resp. $\sin < 2i \leq 2n$) alors $R^{2i}p_* \mathbb{Z}_\ell(i)$ est canoniquement isomorphe au faisceau constant $\mathbb{Z}_\ell$, et est engendré par η^i (resp. par $\eta^i/2$)

(iii) Si $n = 2m$, l'application déduite de (3.2.1)

$$(3.2.1) \qquad \mathbb{Z}_\ell^{Z(X)} \longrightarrow R^n p_* \mathbb{Z}_\ell(m)$$

est un isomorphisme, et si α et β sont deux sections disjointes de $Z(X)$ (supposé isomorphe à $S \amalg S$; c'est localement le cas), on a

(a) $\eta^m = cl(\alpha) + cl(\beta)$

(b) pour m pair : $\mathrm{Tr}(cl(\alpha)^2) = \mathrm{Tr}(cl(\beta)^2) = 1$, $cl(\alpha)\,cl(\beta) = 0$

pour m impair : $cl(\alpha)^2 = cl(\beta)^2 = 0$, $\mathrm{Tr}(cl(\alpha).cl(\beta)) = 1$.

(c) $\eta.(cl(\alpha) - cl(\beta)) = 0$.

Les assertions (i) et (ii) ne sont mises que pour mémoire (XI 1.6, complété par XI 2.6 lorsque $2i + 1 = n$ dans (i)).

Il suffit de vérifier (iii) lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos k (il suffirait même de prendre $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$).

Formule (a). On peut supposer que X est la quadrique d'équation $\sum_0^m x_i x_{i+m+1} = 0$ dans $\mathbb{P}^{m+1}(k)$. La classe η^m est la classe de cohomologie de la section plane d'équation

$$x_i = 0 \quad (0 \leq i < m) \quad ,$$

et ce cycle est somme des génératrices D_1 et D_2 d'équation

D_1 : $x_i = 0$ $(0 \leq i \leq m)$ et

D_2 : $x_i = 0$ $(0 \leq i < m)$ et $x_{2m+1} = 0$.

D'après 1.12, $e(D_1) \neq e(D_2)$, de sorte que

$$\eta^m = cl(D_1) + cl(D_2) = cl(\alpha) + cl(\beta) \quad .$$

Formule (b). Si des génératrices D_1 et D_2 sont disjointes (resp. se coupent transversalement en un point) on a $cl(D_1).cl(D_2) = 0$ (resp. $Tr(cl(D_1).cl(D_2)) = 1$). D'après 1.12, si m est pair, on a $e(D_1) \neq e(D_2)$ (resp. $e(D_1) = e(D_2)$) ; si m est impair, on a $e(D_1) = e(D_2)$ (resp. $e(D_1) \neq e(D_2)$). Les formules (b) en résultent.

Formule (c). Evident si $n = 0$. Sinon, il suffit d'après (ii) de prouver que $\eta^m.(cl(\alpha)-cl(\beta) = 0$. En effet, $Tr(\eta^m(cl(\alpha)-cl(\beta)) = Tr(cl(\alpha)^2-cl(\beta)^2)=0$.

Vérification.

m pair : $2 = tr(\eta^2) = tr(cl(\alpha^2)+ 2cl(\alpha)cl(\beta) + cl(\beta)^2) = 1 + 1$

m impair : $2 = tr(\eta^2) = Tr(cl(\alpha)^2 + 2cl(\alpha)cl(\beta) + cl(\beta)^2) = 2$.

Que 3.3.1 soit un isomorphisme résulte maintenant de ce que les formes bilinéaires à deux variables

$B(X,Y) = x_1y_2 + x_2y_1$ et

$B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$

sont de discriminant ± 1 .

Vérification 3.4. Soit X une quadrique lisse de dimension n sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Compte tenu de 3.3, la formule des traces de Lefschetz donne la formule classique

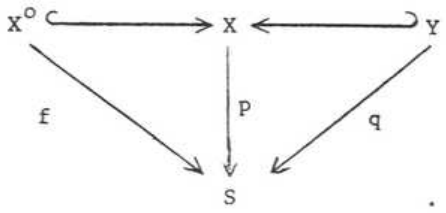
$$\#X(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \sum_0^n q^i & \text{pour } n \text{ impair} \\ \sum_0^n q^i + \varepsilon\, q^m & \text{pour } n = 2m \quad (\varepsilon = \pm 1) \end{cases} .$$

Pour n pair, on a $\varepsilon = 1$ si X est déployée, i.e. a une génératrice rationnelle, et $\varepsilon = -1$ dans le cas contraire.

3.5. Si X est une quadrique lisse sur S de dimension $n = 2m$, on appellera partie primitive de $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m)$ l'orthogonal de η^m (avec les notations de 3.3, cet orthogonal est engendré par $c\ell(\alpha)-c\ell(\beta)$). On appellera quotient primitif de $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m)$ le quotient de $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m)$ par $\mathbb{Z}_\ell \eta^m$. On définit partie et quotient primitifs de $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell$ en tensorisant avec $\mathbb{Z}_\ell(-m)$.

3.6. Soient V un fibré vectoriel localement libre de rang $n+2$ sur S et X la quadrique lisse sur S définie par une forme quadratique ordinaire Q sur V. Soit de plus H un hyperplan de $\mathbb{P}(V^*)$ qui coupe transversalement X, et $X^o = X - H$. Les schémas X et $Y = X \cap H$ sont des quadriques lisses sur S, de dimension n et $n-1$. Ceci permet d'utiliser 3.3 pour calculer la cohomologie de $X^o = X - Y$.

(3.6.1)



Si $n = 0$, alors $Y = \emptyset$ et $X = X^o$. Supposons $n > 0$. On dispose de deux suites exactes longues duales l'une de l'autre

$$(3.6.2)\quad \ldots \xrightarrow{\partial} R^i f_! \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow R^i p_* \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{r_i} R^i q_* \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \ldots$$

$$(3.6.3)\quad \ldots \xrightarrow{\partial} R^{i-2} q_! \mathbb{Z}_\ell(-1) \longrightarrow R^i p_* \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow R^i f_* \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \ldots \quad .$$

Pour n pair, l'homomorphisme de restriction r_i est un isomorphisme pour $i \neq n, 2n$; pour n impair, c'est un isomorphisme pour $i \neq n-1$. Pour $n = 2m$, et α la classe de cohomologie d'une génératrice, $r_n(\alpha) = \frac{1}{2}\eta^m$, de sorte que r_n est surjectif de noyau la partie primitive de $R^n p_* \mathbb{Z}_\ell$. Pour $r = 2m + 1$, $r_{2m}(\eta^m) = \eta^m$, de sorte que r_{2m} est injectif de conoyau le quotient primitif de $R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell$. On en déduit que $R^i f_! \mathbb{Z}_\ell = 0$ pour $i \neq n, 2n$, et que $R^i f_! \mathbb{Z}_\ell$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau constant tordu libre de rang 1, pour $i = n, 2n$. Par dualité, ou à l'aide de 3.5.3, on montre de même que $R^i f_* \mathbb{Z}_\ell = 0$ pour $i \neq 0, n$, que $f_* \mathbb{Z}_\ell = \mathbb{Z}_\ell$, et que $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell$ est de rang un.

Supposons que $n = 2m$ et reprenons les notations de 3.3.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m) & \longrightarrow & R^n p_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longrightarrow & R^n q_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \| & & & & \\ 0 & \longleftarrow & R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longleftarrow & R^n p_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longleftarrow & R^{n-2} q_* \mathbb{Z}_\ell(m-1) & \longleftarrow & 0 \end{array} .$$

Le faisceau $R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m)$ a alors deux générateurs opposés naturels δ, d'image $\pm (c\ell(\alpha) - c\ell(\beta))$ dans $R^n p_* \mathbb{Z}_\ell(m)$. On a (3.3 (iii) b)

$$Tr(\delta^2) = (c\ell(\alpha) - c\ell(\beta))^2 = (-1)^m . 2$$

et $\pm \varphi(\delta)$ est le double des générateurs naturels duaux $\pm \delta'$ de $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m)$, à savoir les images (opposées) de $c\ell(\alpha)$ et $c\ell(\beta)$.

Supposons que $n = 2m + 1$ et appliquons les notations de 3.3 à V.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R^{2m} p_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longrightarrow & R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \xrightarrow{\partial} & R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \varphi & & \\ & & R^{2m+2} p_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longleftarrow & R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell(m-1) & \longleftarrow & R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m) & \longleftarrow & 0 \end{array} .$$

Le faisceau $R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m)$ a alors deux générateurs naturels opposés $\pm \delta$: $\partial\, c\ell(\alpha)$ et $\partial\, c\ell(\beta)$. On a

$$\delta . \varphi(\delta) = \delta^2 = (\partial\, c\ell(\alpha))^2 = \partial(c\ell(\alpha) . \partial\, c\ell(\alpha)) = 0$$

de sorte que $\varphi(\delta) = 0$. D'autre part, $R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m+1)$ a deux générateurs naturels opposés $\pm \delta'$, d'image $\pm(c\ell(\alpha) - c\ell(\beta))$ dans $R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell(m)$, et $Tr(\delta . \delta') = \pm 1$.

Ces résultats sont rassemblés dans la table suivante

Table 3.7. Cohomologie des quadriques affines de dimension n, $X^o = X - Y$.

A. La cohomologie est sans torsion. Les nombres de Betti non nuls sont :

cohomologie sans support : $b_o = b_n = 1$

cohomologie à support propre : $b_{2n} = b_n = 1$

sauf pour $n = 0$: $b_o = 2$.

B. $n = 2m > 0$. $R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m)$ = partie primitive de $R^{2m} p_* \mathbb{Z}_\ell(m)$

$R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m)$ = quotient primitif de $R^{2m} p_* \mathbb{Z}_\ell(m)$

$n = 2m + 1$ $R^n f_! \mathbb{Z}_\ell(m)$ = quotient primitif de $R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell(m)$

$R^n f_* \mathbb{Z}_\ell(m+1)$ = partie primitive de $R^{2m} q_* \mathbb{Z}_\ell(m)$.

Ces groupes ont, localement, des générateurs naturels définis au signe près, notés δ pour les groupes de cohomologie à support propre et δ' pour les autres.

C. $\varphi : R^n f_! \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow R^n f_* \mathbb{Z}_\ell$ est nul pour n impair, envoye $\pm \delta$ sur $\pm 2\, \delta'$ pour n pair > 0. On a

$$\mathrm{Tr}(\delta\delta') = \pm 1$$

$$\mathrm{Tr}(\delta^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m + 1 \\ (-1)^m . 2 & \text{si } n = 2m . \end{cases}$$

Vérification 3.8. La quadrique affine complexe S dans $\mathbb{C}^n$ d'équation $\sum z_i^2 = 1$ est difféomorphe au fibré tangent à la sphère réelle $S \cap \mathbb{R}^n$. Ceci concorde avec A et C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Mumford. Geometric invariant theory. Ergebnisse 34, Springer Verlag 1965.

S G A 7
Exposé XIII

Le formalisme des cycles évanescents

par P. Deligne

Introduction 2

§ 1. Faisceaux d'ensembles 6

1.1 Faisceaux galoisiens 6

1.2 Le topos $Y \times_S S$ 8

1.3 Le foncteur Ψ 13

1.4 La variation 16

§ 2. Cycles évanescents 17

2.1 Le foncteur $R\Psi$ 17

2.2 Une compatibilité (morphismes trace) 26

2.3 Théorème de finitude (en égale caractéristique zéro) 29

2.4 Singularités isolées 30

Introduction

Dans cet exposé, nous reprenons le formalisme introduit dans le n° 2 de l'exposé I de Grothendieck. Le seul point nouveau est l'introduction de l'analogue algébrique de la variation de la théorie classique.

L'image topologique que je suis est la suivante. Soient X un espace analytique, $D \subset \mathbb{C}$ un disque de centre 0, $D^* = D - \{0\}$ et $f : X \to D$ un morphisme propre (le cas non propre sera considéré ensuite). Remplaçons D par un disque suffisamment petit centré en 0, X par l'image réciproque de ce petit disque et notons encore $f : X \to D$ le résultat. D'après la variante analytique complexe du théorème d'isotopie de Thom, $f^{-1}(D^*)$ est un espace fibré topologique sur D^*. J'ignore si on peut toujours construire un couple (Γ, r) du type décrit ci-dessous, mais il semble plausible que oui.

(a) Γ est un système localement cohérent de trivialisations locales du fibré $f^{-1}(D^*)$ sur D^*. En d'autre termes, Γ définit une trivialisation $\pi_1(D^*)$ - équivariante de l'image réciproque de X sur un revêtement universel $\tilde{D}^*$ de D^*.

(b) r est une rétraction de X sur la fibre spéciale $X_o = f^{-1}(0)$, compatible à Γ : si, sur un ouvert connexe U de D^*, Γ identifie $X_U = f^{-1}(U)$ à $X_1 \times U$, $r = r(x_1, u)$ est indépendant de u.

Soient donnés (X, f, Γ, r). Soient $t \in D$ et $X_t = f^{-1}(t)$ la "fibre générale". Le fibré $\varphi^* X$, image réciproque de X/D par $\varphi : [0, 1] \to D^* : x \longmapsto \exp(2\pi i x).t$, est trivialisé par Γ. La monodromie $T : X_t \longrightarrow X_t$ est l'homéomorphisme

$$X_t = (\varphi * X)_o \xrightarrow[(\Gamma)]{\sim} (\varphi^* X)_1 = X_t$$

Soit $r_t : X_t \longrightarrow X_o$ la restriction de r à X_t. On a $r_t T = r_t$. On reconstruit comme suit (X, f) à partir de (X_t, X_o, T, r_t) :

(α) on recolle, dans $X_t \times [0, 1]$, les extrémités $X_t \times \{0\}$ et $X_t \times \{1\}$ à l'aide de T, pour obtenir $f' : X' \longrightarrow S^1$

(β) r_t définit $r' : X' \longrightarrow X_o$: (X, f) s'identifie à

cône (f') : (cône d'application de $r' : X' \longrightarrow X_o$) $\longrightarrow D$ = cône d'application de $(S^1 \to P^t)$

Soit $\Psi = (r, f) : X \longrightarrow X_o \times D$. Les faisceaux images directes supérieures $R^i\Psi_* \mathbb{Z}$ de Leray vérifient la condition suivante.

(*) D^* est recouvert par des ouverts U tels que la restriction du faisceau F à $X_o \times U$ est image réciproque d'un faisceau sur X_o .

Construction 0.1. Les faisceaux F sur $X_o \times D$ vérifiant (*) s'identifient aux systèmes (F_o, F_t, T, α) où

α) F_o est un faisceau sur X_o :

β) F_t est un faisceau sur X_o , muni d'une action du générateur T de $\pi_1(D^*, t)$;

γ) α est un morphisme de F_o dans le faisceau des T-invariants de F_t .

Si un faisceau G sur $X_o \times D^*$ vérifie (*), et que $\tilde{D}^*$ est le revêtement universel de D^* (muni du point base t), l'image réciproque de G sur $X_o \times \tilde{D}^*$ est d'une et d'une seule façon image réciproque d'un faisceau G_t sur X_o ; G_t est muni d'une action de $\pi_1(D^*, t)$ et G se déduit de $pr_1^*(G_t)$ sur $X_o \times \tilde{D}^*$ par passage au quotient par $\pi_1(D^*, t)$.

Un faisceau F sur $X_o \times D$ est déterminé par

1) sa restriction à X_o , soit F_o ,

2) sa restriction à $X_o \times D^*$, soit G ,

3) un morphisme $\alpha : F_o \longrightarrow i^* j_* G$ (pour $i : X_o \hookrightarrow X_o \times D$, $j : X_o \times D^* \hookrightarrow X_o \times D$) .

Si F vérifie (*), G est décrit par (G_t, T) sur X_o , et on trouve la description annoncée de F .

Pour les faisceau $R^i\Psi_* \mathbb{Z}$, on a

$$(R^i\Psi_* \mathbb{Z})_o = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i > 0 \end{cases},$$

tandis que les $(R^i\Psi_* \mathbb{Z})_t$ méritent (pour $i > 0$) le nom de faisceaux de cycles évanescents (cf. la discussion au début du paragraphe 2 de I).

Cette discussion n'est utile que si on la raffine en passant à la catégorie dérivée: les $R^i\Psi_*\mathbb{Z}$ sont déduits d'un objet de la catégorie dérivée $D^+(X_o \times D)$, et même d'un objet $R\Psi_*\mathbb{Z}$ de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur $X_o \times D$ vérifiant (*). Cet objet détermine non seulement les faisceaux de cycles évanescents et leur monodromie, mais encore les morphismes "variation" classiques (cf. 1.4 et XIV 3.1).

C'est son analogue que nous définirons en géométrie algébrique. Si S est un trait strictement hensélien et que $f : X \to S$ est un morphisme de schémas, nous définirons un objet $R\Psi(\mathbb{Z}/\ell^n)$ de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur le topos produit $(X_o)_{et} \times S_{et}$. Un faisceau sur ce topos s'interprète comme un système (F_o, F_t, T, α) où

α) F_o est un faisceau sur X_o

β) F_t est un faisceau sur X_o, muni d'une action continue T du groupe d'intertie I

γ) α est un morphisme de F_o dans le faisceau des I-invariants de F_t.

Nous aurons à travailler dans un cadre un peu plus général que celui indiqué ci-dessus:

a) La construction de $R\Psi(\mathbb{Z}/\ell^n)$ ne suppose pas que f soit propre. Pour l'interpréter topologiquement, il y aurait lieu de reprendre la construction qui précède, en remplaçant X par un voisinage de la fibre spéciale X_o.

b) Pour construire $R\Psi(\mathbb{Z}/\ell^n)$ et démontrer ses propriétés, il faudra considérer non seulement le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^n$, mais encore des faisceaux généraux, voire des complexes de faisceaux.

c) Lorsqu'on ne suppose pas que le corps résiduel k du trait hensélien S soit séparablement clos, il y a lieu de remplacer le topos produit $(X_o)_{et} \times S_{et}$ par le topos produit fibré $(X_o)_{et} \times_{\mathrm{Spec}(k)_{et}} S_{et}$. Le lecteur répugnant aux 2-produits fibrés de topos pourra prendre la description galoisienne 1.2.4 de ce topos comme en étant la définition.

0.2. Notations et terminologie .

(0.2.1) trait : spectre d'un anneau de valuation discrète .

(0.2.2) hensélien : (pour un schéma) spectre d'un anneau local hensélien .

(0.2.3) strictement hensélien : pour un anneau: hensélien a corps résiduel séparablement clos. Pour un schéma: spectre d'un tel anneau .

(0.2.4) point géométrique de S : morphisme $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to S$ d'image $x \in S$, $k(\bar{x}) =_{\text{dfn}} \bar{k}$ étant une clôture séparable de $\kappa(x)$. On dit que $\bar{x}$ est localisé en x . Par abus de langage, nous appellerons parfois encore point géométrique un morphisme $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \to S$ tel que $\bar{k}$ soit une extension séparablement close de $\kappa(x)$; un tel morphisme se factorise de façon unique par un point géométrique (au sens propre) de S .

(0.2.5) s, η, $\bar{s}$, $\bar{\eta}$, $\bar{S}$: Si $S = \mathrm{Spec}(V)$ est un trait hensélien, nous noterons en principe s le point fermé de S , η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique générique (= localisé en η) de S et $\bar{s}$ le point géométrique localisé en s correspondant (I 0.0.3). On note $\bar{S}$ le spectre du normalisé de V dans $k(\bar{\eta})$, de corps résiduel une extension inséparable de $k(\bar{s})$. On note $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe de Galois de $k(\bar{\eta})$ sur $k(\eta)$. De même pour s . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{s}/s) \longrightarrow 0$$

(I groupe d'inertie).

(0.2.6) faisceau (sur un schéma X) signifie toujours faisceau sur le site étale X_{et} de X .

(0.2.7) premier à: un faisceau de torsion F sur un schéma S (ou un groupe abélien de torsion F) est premier aux caractéristique résiduelles de S si pour tout $s \in S$, la multiplication par l'exposant caractéristique de $k(s)$ est un automorphisme de F .

1. Faisceaux d'ensembles

Les faisceaux de cycles évanescents seront définis comme valeurs de foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche Y défini au n° 3 pour tout faisceau d'ensembles.

1.1. Faisceaux galoisiens.

1.1.1. Soient Y un schéma sur un corps k de clôture séparable $\bar{k}$ et $\bar{Y} = Y \otimes_k \bar{k}$. Soit G un groupe profini et

$$u : G \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

un homomorphisme continu de G dans le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k . Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit (à gauche) sur $\bar{Y}$ par transport de structure. Le groupe G agit sur $\bar{Y}$ via u .

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles sur (le site étale de) $\bar{Y}$. Une action de G sur $\mathcal{F}$, compatible à l'action de G sur $\bar{Y}$, est une action par automorphismes de G sur $(\bar{Y}, \mathcal{F})$, induisant l'action donnée sur $\bar{Y}$. En d'autre termes, c'est un système d'isomorphismes

$$\sigma(g) : u(g)_* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} ,$$

vérifiant $\sigma(gh) = \sigma(g)\,\sigma(h)$. Si G agit sur $\mathcal{F}$, alors, quel que soit U étale sur Y , définissant $\bar{U} = U \otimes_k \bar{k}$ étale sur $\bar{Y}$, le groupe G agit sur $\mathcal{F}(\bar{U})$.

Définition 1.1.2. On dit que G agit continûment sur $\mathcal{F}$ si, pour tout U quasi-compact et étale sur Y , G agit continûment sur l'ensemble discret $\mathcal{F}(\bar{U})$.

Il reviendrait au même de ne considérer que les U affines.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau d'ensembles sur Y , d'image réciproque $\bar{\mathcal{F}}$ sur $\bar{Y}$, alors le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur $\bar{\mathcal{F}}$, par transport de structure, de façon compatible à son action sur $\bar{Y}$.

Rappel 1.1.3. (i) L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\bar{\mathcal{F}}$ est continue.

(ii) Le foncteur

$$\mathcal{F} \longmapsto \vec{\mathcal{F}} \text{ muni de l'action de } \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

est une équivalence de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur Y avec la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\overline{Y}$ munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\overline{Y}$.

Exprimons $\bar{k}$ comme limite inductive d'extensions finies galoisiennes k_i . Soient $\varphi_i : Y_i = Y \otimes_k k_i \longrightarrow Y$ et $\bar{\varphi} : \overline{Y} \longrightarrow Y$ les projections. Pour U étale sur Y , supposé affine, soit $U_i = U \otimes_k k_i$. On a

$$\vec{\mathcal{F}}(\overline{U}) = \varinjlim \varphi_i^* \mathcal{F}(U_i) \quad .$$

Sur $\varphi_i^* \mathcal{F}(U_i)$, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit via $\mathrm{Gal}(k_i/k)$, ce qui prouve (i).

Le foncteur (ii) a pour adjoint à droite le foncteur $\mathcal{G} \longmapsto (\bar{\varphi}_* \mathcal{G})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$. Pour tout $\mathcal{F}$ sur Y , on a

$$\bar{\varphi}_* \bar{\varphi}^* \mathcal{F} = \varinjlim \varphi_{i*} \varphi_i^* \mathcal{F}$$

Pour prouver que $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\bar{\varphi}_* \bar{\varphi}^* \mathcal{F})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$, il suffit donc de prouver que pour tout i , $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\varphi_{i*} \varphi_i^* \mathcal{F})^{\mathrm{Gal}(k_i/k)}$. Il suffit même de prouver que cette flèche devient un isomorphisme après extension des scalaires de k à k_i ; $\mathrm{Spec}(k_i)$ devient alors somme de copies de $\mathrm{Spec}(k)$, permutée de façon simplement transitive par $\mathrm{Gal}(k_i/k)$, et l'assertion devient triviale.

Le foncteur exact (ii) est donc pleinement fidèle. Pour conclure, il reste à vérifier que la flèche

$$\bar{\varphi}^* (\bar{\varphi}_* \mathcal{G})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est un épimorphisme. Soit $\bar{\varphi}_i : \overline{Y} \to Y_i$. L'hypothèse donne que

$$\varinjlim \bar{\varphi}_i^* (\bar{\varphi}_{i*} \mathcal{G})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k_i)} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est épimorphique. On a

$$\bar{\varphi}^*(\varphi_* \mathcal{Q}^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = \bar{\varphi}_i^* (\varphi_i^* \varphi_{i*} ((\bar{\varphi}_{i*} \mathcal{Q})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k_i)})^{\mathrm{Gal}(k_i/k)}) ,$$

et on conclut en notant, par le même argument de descente galoisienne que plus haut, que pour $\mathcal{Q}'$ sur Y_i muni d'une action de $\mathrm{Gal}(k_i/k)$ compatible à son action sur Y_i, on a

$$\varphi_i^*(\varphi_{i*} \mathcal{Q}')^{\mathrm{Gal}(k_i/k)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}' .$$

1.2. Le topos $Y \times_S S$.

1.2.1. Soient S un schéma local hensélien de point fermé $i : s \hookrightarrow S$. Le foncteur $S' \longmapsto S' \times_S s = i^* S'$ est une équivalence de la catégorie des S-schémas finis étales S' avec la catégorie des s-schémas finis étales s' (spectres de $k(s)$-algèbres étales). Le foncteur inverse sp^*, du site étale de s dans le site étale de S, est un morphisme de sites

$$sp : S \longrightarrow s ,$$

le morphisme de spécialisation (cf. SGA4 VIII 7). Pour s' étale sur s, on dit que $sp^*(s')$ se déduit de S par extension du corps résiduel. Pour F un faisceau sur S, on a un isomorphisme fonctoriel

(1.2.1.1) $$sp_* F = i^* F .$$

Pour tout ouvert de S : $j : U \hookrightarrow S$, ou pour tout point de S : $j : \eta \hookrightarrow S$, on notera encore sp le morphisme composé $sp \circ j$. Pour F un faisceau sur U (resp. sur η), on a

(1.2.1.2) $$sp_* F = i^* j_* F .$$

1.2.2. Soient S un trait hensélien, et s, η, $\bar{s}$, $\bar{\eta}$, I comme en 0.2.5.

$$s \xhookrightarrow{i} S \xhookleftarrow{j} \eta .$$

Voici comment les faisceaux sur s, η, S et le morphisme de spécialisation s'interprêtent en termes galoisiens.

(a) Les faisceaux F sur s (resp. η) s'identifient, par $F \longrightarrow F_{\bar{s}}$ (resp. $F_{\bar{\eta}}$) aux ensembles munis d'une action continue de $Gal(\bar{s}/s)$ (resp. $Gal(\bar{\eta}/\eta)$) (SGA4 VIII 2.1, ou 1.1.3).

(b) Un faisceau F sur S définit des faisceaux $F_s = i^* F$ et $F_\eta = j^* F$ sur s et η, et une flèche d'adjonction $F \longrightarrow j_* j^* F$ induisant

$$\varphi : F_s = i^* F \longrightarrow i^* j_* j^* F = sp_* F_\eta \ .$$

On sait (SGA4 IV 9.5.4) que le foncteur $F \longmapsto (F_s, F_\eta, \varphi)$ est une équivalence de la catégorie des faisceaux sur S avec celle des triples (F_s, F_η, φ)

(F_s faisceau sur s, F_η faisceau sur η, $\varphi : F_s \longrightarrow i^* j_* F_\eta$) .

Via l'équivalence (a), le foncteur $i^* j_*$ s'identifie au foncteur "invariants sous I" . Les faisceaux sur S s'identifient donc aux triples formés d'un ensemble $F_{\bar{s}}$ muni d'une action de $Gal(\bar{s}/s)$, d'un ensemble $F_{\bar{\eta}}$ muni d'une action de $Gal(\bar{\eta}/\eta)$ et d'un morphisme équivariant $\varphi : F_{\bar{s}} \longrightarrow F_{\bar{\eta}}$.

(c) Les morphismes sp, j, i, $sp = sp \circ j$ s'expriment comme suit, via (a) (b)

$sp : S \longrightarrow s$: $sp^*(F_{\bar{s}}) = (F_{\bar{s}}, F_{\bar{s}}, Id)$

$sp_*(F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = F_{\bar{s}}$

$j : \eta \longrightarrow S$: $j^*(F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = F_{\bar{\eta}}$

$j_* (F_{\bar{\eta}}) = (F_{\bar{\eta}}^I, F_{\bar{\eta}}, \text{inclusion})$

$i : s \longrightarrow S$: $i^* (F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = F_{\bar{s}}$

$i_* (F_{\bar{s}}) = (F_{\bar{s}}, \{0\}, \text{projection})$

$sp = sp\ j : \eta \longrightarrow s$: $sp^*(F_{\bar{s}}) = F_{\bar{s}}$

$sp_*(F_{\bar{\eta}}) = F_{\bar{\eta}}^I$

1.2.3. Soient S un trait hensélien comme en 1.2.2 et Y un schéma sur s . Nous aurons à travailler avec le 2-produit fibré $Y \times_s S$ des topos étales de Y et S sur le topos étale de s . D'après Giraud [1], ce 2-produit fibré existe, et on voit facilement qu'il admet la description galoisienne donnée ci-dessous. Ceux qui

répugnent aux 2-produits fibrés pourront prendre cette description pour définition.

Construction 1.2.4. Les faisceaux F sur $Y \times_S S$ s'identifient aux triples (F_s, F_η, φ) où

(a) F_s est un faisceau sur Y, soit encore un faisceau $F_{\bar{s}}$ sur $\overline{Y} = Y \otimes_s \bar{s}$, muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$ sur $\overline{Y}$.

(b) F_η est un faisceau $F_{\bar{\eta}}$ sur $\overline{Y}$, muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$, compatible à l'action (via 1.1.1.) de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $\overline{Y}$.

(c) φ est un morphisme équivariant de $F_{\bar{s}}$ dans $F_{\bar{\eta}}$.

De même, un faisceau F_η sur $Y \times_S \eta$ est un objet 1.2.4(b). On dispose d'un diagramme de topos

(1.2.4.1)

$$\begin{array}{ccccccc} Y & & Y & \xrightarrow{i} & Y \times_S S & \xleftarrow{j} & Y \times_S \eta \\ \downarrow & \xleftarrow{sp} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & & s & \xrightarrow{i} & S & \xleftarrow{j} & \eta \end{array} .$$

$Y \times_S S$ est réunion de l'ouvert $Y \times_S \eta$ et du fermé complémentaire Y. Les formules 1.2.2.(c) restent valables pour $sp : Y \times_S S \longrightarrow Y$ (encore noté pr_1) $j : Y \times_S \eta \hookrightarrow Y \times_S S$, $i : Y \hookrightarrow Y \times_S S$ et $sp : Y \times_S \eta \longrightarrow Y$ (encore noté pr_1).

1.2.4.2. Si on prend 1.2.4 pour définition de $Y \times_S S$, il y a lieu de montrer, par une construction directe, que $Y \times_S S$ ne dépend pas à isomorphisme unique près, du choix de la clôture séparable $k(\bar{\eta})$ de $k(\eta)$. On le fait en interprétant F_η de 1.2.4(b) comme un foncteur qui à chaque clôture séparable $k(\bar{\eta})$ de $k(\eta)$, définissant une clôture séparable $k(\bar{s})$ de $k(s)$, associe un faisceau sur $Y \otimes_{k(s)} k(\bar{s})$: le F_η de 1.2.4(b) est la restriction de ce foncteur à $\{\bar{\eta}\}$.

1.2.5. Chaque point géométrique $\bar{x}$ de $Y_{\bar{s}}$ définit un point géométrique $(\bar{x},\bar{\eta})$ de $Y \times_S \eta$, de foncteur fibre correspondant

$$F_\eta \longmapsto (F_{\bar{\eta}})_{\bar{x}} \quad .$$

Il définit des points géométriques $(\bar{x},\bar{\eta})$ et $(\bar{x}, \bar{s})$ de $Y \times_S S$ par

$$F_{(\bar{x}\,\bar{\eta})} = (F_{\bar{\eta}})_{\bar{x}} \quad \text{et} \quad F_{(\bar{x}\,\bar{s})} = (F_{\bar{s}})_{\bar{x}} \quad .$$

On vérifie qu'on obtient ainsi tous les points des topos $Y \times_S \eta$ et $Y \times_S S$. Nous ne l'utiliserons pas. On vérifie aussitôt que ces ensembles de points sont conservatifs.

*Remarque 1.2.6. La construction 1.2.5 définit une équivalence de la catégorie $\mathrm{Point}(Y \times_S \eta)$ (resp. $\mathrm{Point}(Y \times_S S)$) des points de $Y \times_S \eta$ (resp.....) avec le 2-produit fibré $\mathrm{Point}(Y) \times_{\mathrm{Point}(s)} \mathrm{Point}(\eta)$.

Cette équivalence résulte aussi de ce que $Y \times_S \eta$ (resp. $Y \times_S S$) est un 2-produit fibré de topos.*

1.2.7. Par la fonctorialité des 2-produits fibrés, le diagramme (1.2.4.1) est fonctoriel en Y et S . En particulier

a) Tout morphisme $f : Y \longrightarrow Y'$ de schémas sur s induit un morphisme de topos de $Y \times_S S$ dans $Y' \times_S S$. On a

$$f^*(F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = (f^* F_{\bar{s}}, f^* F_{\bar{\eta}}, f^*(\varphi)) \tag{1.2.7.1}$$

et pour f quasi-compact

$$f_*(F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = (f_* F_{\bar{s}}, f_* F_{\bar{\eta}}, f_*(\varphi)) \quad . \tag{1.2.7.2}$$

Des formules analogues valent pour $f : Y \times_S \eta \longrightarrow Y' \times_S \eta$.

b) Tout morphisme surjectif de traits henséliens $f : S' \longrightarrow S$ induit un morphisme de topos de $Y_{S'} \times_{S'} S'$ dans $Y \times_S S$. Notant encore f le morphisme naturel de

$Y_{s'} = Y \otimes_{k(s)} k(s')$ dans Y , on a

(1.2.7.3) $$f^*(F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = (f^*F_{\bar{s}}, f^* F_{\bar{\eta}}, f^*(\varphi)) \ .$$

Lorsque f est un morphisme fini, f_* s'exprime comme représentation induite.

1.2.8. Soit $f : Y \longrightarrow Y'$ un morphisme localement de type fini et séparé de s-schémas. On définit un foncteur "image directe à support propre"

$$f_! : (\text{faisceaux d'ensembles pointés sur } Y \times_S S) \longrightarrow (\text{faisceaux d'ensembles pointés sur } Y' \times_S S)$$

par la formule

(1.2.8.1) $$f_! (F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = (f_! F_{\bar{s}}, f_! F_{\bar{\eta}}, f_!(\varphi)) \ .$$

Pour f un plongement localement fermé, $f_!$ s'appelle le foncteur de prolongement par zéro.

Un foncteur analogue est défini pour $Y \times_S \eta$.

1.2.9. Soit $f : Y \hookrightarrow Y'$ un plongement localement fermé de s-schémas. Le foncteur $f_!$ a un adjoint à droite $f^!$, "sections à support dans Y ", vérifiant

(1.2.9.1) $$f^! (F_{\bar{s}}, F_{\bar{\eta}}, \varphi) = (f^! F_{\bar{s}}, f^! F_{\bar{\eta}}, f^!(\varphi)) \ .$$

Supposons seulement f quasi-fini . Le foncteur $f_!$ des faisceaux abéliens sur $Y \times_S S$ dans les faisceaux abéliens sur $Y' \times_S S$ admet encore un adjoint à droite $f^!$, donné par 1.2.9.1 (cf. SGA4 XVIII 3.1.8). Pour f étale, $f^! = f^*$.

Des foncteurs analogues sont définis pour $Y \times_S \eta$.

1.3. Le foncteur Ψ.

1.3.1. Soient S un trait hensélien comme en 0.2.5 et $p : X \longrightarrow S$. On se propose de définir un foncteur exact à gauche Ψ des faisceaux sur X dans les faisceaux sur le topos $X_s \times_s S$ construit en 1.2. Ce foncteur n'est pas en général le foncteur image directe d'un morphisme de topos.

On définira aussi Ψ_η : (faisceaux sur X_η) $\longrightarrow$ (faisceaux sur $X_s \times_s \eta$).

1.3.2. Soit $\bar{X} = X \times_s \bar{S}$. On dispose d'un diagramme

(1.3.2.1)
$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{s}} & \xhookrightarrow{\bar{i}} & \bar{X} & \xhookleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_s & \hookrightarrow & X & \hookleftarrow & X_\eta \end{array}$$

cartésien au dessus du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \bar{s} & \hookrightarrow & \bar{S} & \hookleftarrow & \bar{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \hookrightarrow & S & \hookleftarrow & \eta \end{array} .$$

Soit F un faisceau sur X_η, d'image réciproque $F_{\bar{\eta}}$ sur $X_{\bar{\eta}}$. On pose

(1.3.2.2) $$\Psi_\eta(F) = \bar{i}^* \bar{j}_* F_{\bar{\eta}} .$$

Par transport de structure, ce faisceau est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$, compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $X_{\bar{s}}$. Le foncteur

(1.3.2.3) $$\Psi_\eta : (X_{\eta\,et})^{\sim} \longrightarrow (X_s \times_s \eta)^{\sim}$$

est exact à gauche.

1.3.3. Soient F un faisceau sur X, F_η sa restriction à X_η et F_s sa restriction à X_s. On pose

(1.3.3.1) $\qquad (\Psi(F))_\eta = \Psi_\eta(F_\eta)$

(1.3.3.2) $\qquad (\Psi(F))_s = F_s$.

Soient $\bar{F}$ l'image réciproque de F sur $\bar{X}$ et φ' le morphisme d'adjonction $\varphi' : \bar{F} \longrightarrow \bar{j}_* \bar{j}^* \bar{F}$. Ce morphisme induit

$$\varphi : F_{\bar{s}} = \bar{i}^* \bar{F} \longrightarrow \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{j}^* \bar{F} = (\Psi_\eta(F_\eta))_{\bar{\eta}} \quad .$$

Le triple $\Psi(F) = (\Psi(F)_s , \Psi(F)_\eta, \varphi)$ est un faisceau sur $X_s \times_s S$.

Le foncteur

(1.3.3.3) $\qquad \Psi : (X_{et})^\sim \longrightarrow (X_s \times_s S)^\sim$

est exact à gauche.

1.3.4. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, on posera $\Psi_\eta(F) = (\Psi(F))_\eta$, $\Psi_{\bar{\eta}}(F) = (\Psi(F))_{\bar{\eta}}$ et $\Psi_{\bar{\eta}}(F) = (\Psi_\eta(F))_{\bar{\eta}}$.

1.3.5. Dans la fin de ce numéro, nous dressons une liste de propriétés de fonctorialité de Ψ (cf. 1.2.7 à 1.2.9). Elles seront utiles surtout sous leur forme dérivée (2.1).

Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de S-schémas, d'où un diagramme

(1.3.5.1)
$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{s}} & \xrightarrow{\bar{i}} & X & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X'_{\bar{s}} & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{X}' & \xleftarrow{\bar{j}} & X'_{\bar{\eta}} \end{array} \quad .$$

L'ambiguité dans la notation des flèches simplifiera les formules, et ne prête pas à confusion: une seule interprétation donne un sens aux flèches composées ci-dessous. De même, nous noterons Ψ le foncteur (1.3.3.3) pour X tant que pour X' .

Les morphismes de foncteurs décrits ci-dessous pour Ψ ont une variante pour Ψ_η , que nous omettons en général d'expliciter.

1.3.6. Le morphisme de changement de base $\bar{i}^* f_* \longrightarrow f_* \bar{i}^*$ induit un morphisme de foncteurs

(1.3.6.1) $\qquad \Psi f_* \longrightarrow f_* \Psi$

qui est un isomorphisme pour f propre (SGA4 XII 5.1(i)).

Le cas essentiel est celui où $X' = S$. On trouve un morphisme

(1.3.6.2) $\qquad f_* \longrightarrow f_* \Psi$

de composante essentielle

(1.3.6.3) $\qquad \Gamma(X_{\bar{\eta}}, F) \longrightarrow \Gamma(X_{\bar{s}}, \Psi_{\bar{\eta}}(F))$;

ce morphisme est un isomorphisme pour f propre.

1.3.7. Le morphisme de changement de base $f^* \bar{j}_* \longrightarrow \bar{j}_* f^*$ induit un morphisme de foncteurs

(1.3.7.1) $\qquad f^* \Psi \longrightarrow \Psi f^*$.

1.3.8. Supposons f quasi-fini. Les foncteurs $f_!$ commutent aux changements de base: le morphisme $f_! \bar{j}_* \longrightarrow \bar{j}_* f_!$ induit un morphisme de foncteurs

(1.3.8.1) $\qquad f_! \Psi \longrightarrow \Psi f_!$.

Lorsque f est fini, c'est l'inverse de (1.3.6.1).

1.3.9. La situation est duale pour $f^!$ (on suppose que f est quasi-fini pour travailler avec les faisceaux abéliens, ou est un plongement pour les faisceaux d'ensembles pointés). Ce foncteur commute aux images directes, et le morphisme $\bar{i}^* f^! \longrightarrow f^! \bar{i}^*$ induit un morphisme de foncteurs

(1.3.9.1) $\qquad \Psi f^! \longrightarrow f^! \Psi$.

Pour f étale, c'est l'inverse de (1.3.7.1).

1.3.10. Enfin, pour un changement de base $S' \xrightarrow{f} S$, on trouve un morphisme de

changement de base

(1.3.10.1) $\quad f^*\Psi \longrightarrow \Psi f^* \quad .$

1.4. La variation.

1.4.1. Soient S un trait hensélien comme en 0.2.5 et Y un schéma sur s. Soit Λ un anneau. On pourrait plus généralement prendre pour Λ un faisceau d'anneaux sur Y. Pour tout objet K de la catégorie dérivée $D(Y \times_s S, \Lambda)$ de la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $Y \times_s S$, nous nous proposons de définir un morphisme variation.

1.4.2. Un complexe de faisceau de Λ-modules K sur $X \times_s S$ s'identifie à un triple (K_s, K_η, φ) où

a) K_s (resp. K_η) est un complexe de faisceaux $K_{\bar{s}}$ (resp. $K_{\bar{\eta}}$) sur $\bar{Y}$, muni d'une action continue de $Gal(\bar{s}/\bar{s})$ (resp. $Gal(\bar{\eta}/\eta)$);

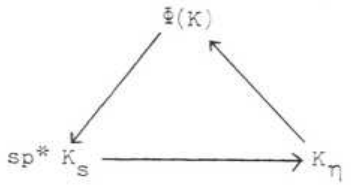
b) φ est un morphisme équivariant $\varphi: K_{\bar{s}} \longrightarrow K_{\bar{\eta}}$.

Un tel complexe K est toujours homotope à un complexe $K' = (K'_s, K'_\eta, \varphi')$ tel que φ' soit injectif et que la suite exacte

(1.4.2.1) $\quad 0 \longrightarrow K'_{\bar{s}} \longrightarrow K'_{\bar{\eta}} \longrightarrow \mathrm{coker}(\varphi') \longrightarrow 0$

soit scindée degré par degré. Il suffit de prendre $K_s = K'_s$, et de prendre pour K'_η la somme de K_η et du cône de $sp^* K_s$. Posons $\Phi(K) = \mathrm{coker}(\varphi')$. La suite exacte (1.4.2.1) définit un triangle distingué

(1.4.2.2)



dans la catégorie $K(Y \times_s \eta, \Lambda)$ des complexes de faisceaux de Λ-modules à homotopie près sur $Y \times_s \eta$. Ce triangle ne dépend que de $K \in \mathrm{Ob}\, K(Y \times_s S, \Lambda)$.

Cette construction passe à la catégorie dérivée, et associe à tout objet K de $D(X \times_S S, \Lambda)$ un triangle distingué de $D(X \times_S \eta, \Lambda)$.

Le triangle (1.4.2.2) est utile surtout via la suite exacte longue d'hypercohomologie qui s'en déduit

$$\ldots \longrightarrow H^i(\overline{Y}, K_{\overline{s}}) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, K_{\overline{\eta}}) \longrightarrow H^i(\overline{Y}, \Phi(K)_{\overline{\eta}}) \longrightarrow \ldots \quad .$$

1.4.3. Le groupe d'inertie I agit trivialement sur $K'_{\overline{s}}$. Pour tout $\sigma \in I$, l'endomorphisme $\sigma - 1$ de $K'_{\overline{\eta}}$ (notation (1.4.2.1)) se factorise donc par un morphisme

$$\mathrm{Var}(\sigma) : \mathrm{coker}(\varphi') \longrightarrow K'_{\overline{\eta}} \quad .$$

Cette construction passe à la catégorie dérivée: pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(Y \times_S S, \Lambda)$ et $\sigma \in I$, elle définit la <u>variation</u>

(1.4.3.1) $$\mathrm{Var}(\sigma) : \Phi(K)_{\overline{\eta}} \longrightarrow K_{\overline{\eta}} \quad .$$

Notant q la flèche de K_η dans $\Phi(K)$, on a

(1.4.3.2) $$\sigma = 1 + \mathrm{Var}(\sigma) q \qquad (\text{sur } K_{\overline{\eta}})$$

(1.4.3.3) $$\sigma = 1 + q\, \mathrm{Var}(\sigma) \qquad (\text{sur } \Phi(K)_{\overline{\eta}})$$

(1.4.3.4) $$\mathrm{Var}(\sigma\, \tau) = \mathrm{Var}(\sigma)\, q\, \mathrm{Var}(\tau) + \mathrm{Var}(\sigma) + \mathrm{Var}(\tau) \quad .$$

2. <u>Cycles évanescents</u>

2.1. <u>Le foncteur</u> $R\Psi$.

2.1.1. Soient S un trait hensélien comme en (0.2.5) et Λ un anneau de torsion premier à la caractéristique résiduelle p de S (0.2.7). Plus généralement, on pourrait prendre pour Λ un faisceau de torsion premier aux caractéristiques résiduelles; le cas le plus important est celui où $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n$ (ℓ premier inversible dans $\mathcal{O}_S$).

Soit X un schéma sur S . Le foncteur Ψ (resp. Ψ_η) transforme faisceaux de Λ-modules sur X (resp. X_η) en faisceaux de Λ-modules sur $X_s \times_s S$ (resp. $X_s \times_s \eta$) . Soient $R\Psi$ et $R\Psi_\eta$ les foncteurs dérivés

$$R\Psi : D^+(X, \Lambda) \longrightarrow D^+(X_s \times_s S, \Lambda) ,$$

$$R\Psi_\eta : D^+(X_\eta, \Lambda) \longrightarrow D^+ (X_s \times_s \eta , \Lambda) ,$$

et $R\Phi$ le foncteur composé $\Phi \circ R\Psi$

$$R\Phi : D^+(X, \Lambda) \longrightarrow D^+(X_s \times_s \eta , \Lambda) .$$

2.1.2. Soit le diagramme commutatif (1.3.2.1)

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{s}} & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_s & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X_\eta \end{array} .$$

Si F est un faisceau de modules injectif sur X , sa restriction à l'ouvert X_η et encore injective. Pour F_η injectif sur X_η , l'image réciproque $F_{\bar{\eta}}$ est acyclique. Les formules (1.3.3.1) et (1.3.3.2) se dérivent donc en

(2.1.2.1) $\qquad R\Psi(K)_s = i^* K \qquad (K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, \Lambda))$

(2.1.2.2) $\qquad R\Psi(K)_\eta = R\Psi_\eta(K_\eta) \qquad (K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, \Lambda))$

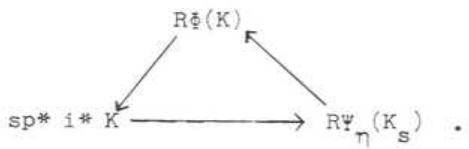
(2.1.2.3) $\qquad R\Psi_\eta(K)_{\bar{\eta}} = \bar{i}^* R\bar{j}_* K_{\bar{\eta}} \qquad (K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X_\eta, \Lambda))$

Ceci permet de poser sans conflit

$R\Psi_\eta(K) = (R\Psi(K))_\eta$, $R\Psi_{\bar{\eta}}(K) = (R\Psi(K))_{\bar{\eta}}$ et $R\Psi_{\bar{\eta}}(K) = (R\Psi_\eta(K))_{\bar{\eta}}$.

Avec ces notations, le triangle distingué (1.4.2.2) s'écrit

(2.1.2.4)



Pour $\sigma \in I$, on dispose d'un morphisme variation

(2.1.2.5) $$Var(\sigma) : R\Phi(K)_{\bar{\eta}} \longrightarrow R\Psi_{\bar{\eta}}(K) \quad .$$

Les faisceaux $R^i\Phi(\Lambda)$ (ou plus généralement $R^i\Phi(K)$) sont les faisceaux de cycles évanescents .

2.1.3. Soit $(\bar{x}, \bar{\eta})$ le point géométrique de $X_s \times_s \eta$ défini par un point géométrique $\bar{x}$ de $X_{\bar{s}}$ (1.2.5). Calculons la fibre de $R\Psi_\eta(K_\eta)$ en $(\bar{x}, \bar{\eta})$ à l'aide de (2.1.2.3) (cf. I 2.3). L'hensélisé strict $X_{(\bar{x})}$ de X en $\bar{x}$ est un schéma sur l'hensélisé strict S_{nr} de S , de point géométrique η_{nr} .

Proposition 2.1.4.. On a $(R\Psi(K_\eta))_{(\bar{x},\bar{\eta})} = R\Gamma(X_{(\bar{x})} \times_{\eta_{nr}} \bar{\eta} , K)$: en particulier,

$$R^i\Psi(K_\eta)_{(\bar{x},\bar{\eta})} = \mathbb{H}^i(X_{(\bar{x})} \times_{\eta_{nr}} \bar{\eta}, K) \quad .$$

Appliquons SGA4 XV 2.1 (théorème d'acyclicité locale des morphismes lisses). On trouve la

Reformulation 2.1.5. Si f est lisse et F un faisceau localement constant, on a $R\Phi(F) = 0$.

Plus généralement, si $K \in Ob\ D^+(X, \Lambda)$, alors $R\Phi(K) = 0$ là où f est lisse et que les $H^i(K)$ sont localement constants. Voir aussi 2.1.11.

2.1.6. Soit $f : Y \longrightarrow Y'$ un morphisme de schémas sur s . Les foncteurs $f^* \ f_* \ f^! \ f_!$ (1.2.7 à 1.2.9) ont un analogue naturel dans la catégorie dérivée.

a) Le foncteur f^* est exact, donc se dérive trivialement.

b) Le foncteur f_* a un dérivé droit Rf_* ; pour f quasi-compact, on a

(2.1.6.1) $\qquad (Rf_* K)_{\bar{s}} = Rf_{\bar{s}*}(K_{\bar{s}})$;

(2.1.6.2) $\qquad (Rf_* K)_{\bar{\eta}} = Rf_{\bar{s}*}(K_{\bar{\eta}})$.

c) Pour f quasi-fini, le foncteur $f_!$ est exact, donc se dérive trivialement. Dans le cas général, le foncteur dérivé du foncteur $f_!$ est pathologique, et on procède comme dans SGA4 XVII. On suppose f séparé de type fini, et Y' noethérien. Il existe alors [2] une décomposition $f = \tilde{f}\, j$, où j est une immersion ouverte et où $\tilde{f}$ est propre, et on définit

$$Rf_! = R\tilde{f}_* \circ j_! \quad .$$

Les arguments de SGA4 XVII montrent que le foncteur $Rf_!$ est indépendant du choix de la factorisation $\tilde{f}\, j$. L'analogue de (2.1.6.1) (2.1.6.2) est valable.

d) Nous n'utiliserons $Rf^!$ que pour un morphisme quasi-fini, auquel cas c'est le foncteur dérivé de $f^!$. On a encore l'analogue de (2.1.6.1) (2.1.6.2).

2.1.7. Passons en revue les propriétés de fonctorialité de $R\Psi$ (i.e. dérivons 1.3.5 à 1.3.10). Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de S-schémas, et reprenons les notations de 1.3.5.

Le morphisme (1.3.6.1) définit

(2.1.7.1) $\qquad R\Psi\, Rf_* \longrightarrow Rf_*\, R\Psi$.

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre (SGA4 XII 5.1), ce morphisme est un isomorphisme si f est propre.

Le morphisme (1.3.7.1) définit

(2.1.7.2) $\qquad f^*\, R\Psi \longrightarrow R\Psi\, f^*$.

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme lisse (SGA4 XVI 1.2), ce morphisme est un isomorphisme si f est lisse.

L'isomorphisme (2.1.7.1) pour f propre et le morphisme (1.3.8.1)

définissent un morphisme

(2.1.7.3) $\qquad Rf_! R\Psi \longrightarrow R\Psi Rf_!$

qui, pour f propre, est l'inverse de (2.1.8.1).

Pour f quasi-fini, (1.3.9.1) se dérive en

(2.1.7.4) $\qquad R\Psi Rf^! \longrightarrow Rf^! R\Psi$

qui, pour f étale, est l'inverse de (2.1.7.1).

Soit un changement de trait $f : S' \longrightarrow S$ et $X' = X \times_S S'$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

(pour l'ambiguité dans les notations, cf. 1.3.5). On suppose f surjectif. La flèche de changement de base (1.3.10.1) se dérive en

(2.1.7.5) $\qquad f^* R\Psi \longrightarrow R\Psi f^*$.

Les mêmes énoncés valent pour $R\Psi_\eta$.

2.1.8. Le cas essentiel de 2.1.7.1 et 2.1.7.3 est celui où $X' = S$. On trouve alors pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X_\eta, \Lambda)$ des morphismes

(2.1.8.1) $\qquad Rf_* \longrightarrow Rf_* R\Psi$

(2.1.8.2) $\qquad Rf_! R\Psi \longrightarrow Rf_!$

d'où

(2.1.8.3) $\qquad \mathbb{H}^i(X_\eta, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_s, R\Psi_\eta(K))$

(2.1.8.4) $\qquad \mathbb{H}^i_c(X_s, R\Psi_\eta(K)) \longrightarrow \mathbb{H}^i_c(X_\eta, K)$

et la commutativité des diagrammes

(2.1.8.5)

$$\begin{array}{ccc} (R^i f_* K)_{\bar{s}} & \xrightarrow{\text{sp}} & \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, K) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \end{array}$$

(2.1.8.6)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{s}}, K) & \xrightarrow{\text{sp}} & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{\eta}}, K) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \ . & \end{array}$$

Pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X_\eta, \Lambda)$ et $\sigma \in I$, les diagrammes suivants sont commutatifs

(2.1.8.7)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) & & \xrightarrow{\sigma-1} & & \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, R\Phi_{\bar{\eta}}(K)) & \xrightarrow{\mathrm{Var}(\sigma)} & \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \end{array}$$

(2.1.8.8)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{\eta}}, K) & & \xrightarrow{\sigma-1} & & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{\eta}}, K) \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{s}}, R\Phi_{\bar{\eta}}(K) & \xrightarrow{\mathrm{Var}(\sigma)} & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \ . \end{array}$$

Pour f propre, (2.1.8.1) et (2.1.8.2), ainsi que (2.1.8.3) et (2.1.8.4) sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Le triangle distingué (2.1.2.4) fournit une suite exacte longue

(2.1.8.9) $$\ldots \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_{\bar{s}}, R\Phi_{\bar{\eta}}(K)) \longrightarrow \ldots$$

Le complexe évanescent $R\Phi(K)$ exprime donc la différence entre les cohomologies des fibres géométriques $X_{\bar{s}}$ et $X_{\bar{\eta}}$ (à valeurs dans l'image réciproque de K). D'après (2.1.8.7), la variation $\mathrm{Var}(\sigma)$ détermine l'action du groupe d'inertie I

sur $\mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K)$. Ces faits sont à la base de toutes les applications de la méthode des cycles évanescents.

L'hypothèse de propreté faite ci-dessus sur f peut se remplacer par des conditions de régularité à l'infini sur f et K . On a par exemple le résultat suivant (pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$).

Proposition 2.1.9. *Supposons que f admette une factorisation $f = f_1 k$*

$$X \xhookrightarrow{k} X_1 \xrightarrow{f_1} S \ ,$$

avec f_1 propre, et k l'inclusion dans X_1 du complément d'un diviseur à croisements normaux relatif D (par hypothèse, f_1 est donc lisse dans un voisinage de D). Si , dans un voisinage U de D , les $\underline{H}^i(K)$ sont localement constants sur $U-(D \cup X_o)$, et modérément ramifiés le long du diviseur à croisements normaux $D \cup X_o$, alors (2.1.8.1) et (2.1.8.2) sont des isomorphismes.

La suite spectrale d'hypercohomologie de K montre qu'il suffit de traiter le cas où K est réduit à un faisceau F_η en degré 0 . Remplaçant S par son normalisé dans une extension finie (ce qui est loisible, comme on le voit sur les définitions), et appliquant le lemme d'Abhyankhar, on peut supposer que F_η est restriction à X_η d'un faisceau F sur X , localement constant sur $U \cap X$ et modérément ramifié le long de D . Avec les notations de 2.1.2, soit $\bar{F}$ l'image réciproque de F sur $\bar{X}$ et $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$.

Pour prouver que (2.1.8.1) est un isomorphisme, il suffit de prouver que $R\bar{f}_* (R\bar{j}_* \bar{j}^* \bar{F})$ commute au changement de base $\bar{s} \to \bar{S}$. Dans le triangle

$$\longrightarrow \bar{F} \longrightarrow R\bar{j}_* \bar{j}^* \bar{F} \longrightarrow \Delta \longrightarrow$$

les $\underline{H}^i(\Delta)$ sont à support dans $X_{\bar{s}}$: pour Δ , le résultat de changement de base considéré est trivial. Il suffit donc de prouver que $R\bar{f}_*(\bar{F})$ commute au changement de base $\bar{s} \to \bar{S}$ soit, vu le théorème de changement de base pour f_1 , que

$Rk_*(\overline{F})$ commute au changement de base $X_{\overline{1}_s} \to X_{\overline{1}}$ (2.1.10 ci-dessous).

Pour prouver que (2.1.8.2) est un isomorphisme, il suffit de prouver que, pour le faisceau F, le prolongement par 0 $k_!$ commute au foncteur $R\bar{j}_*$, i.e. que, dans un voisinage de D,

$R\Phi(k_! F) = 0$ sur $X_{\overline{1}_s}$ (2.1.11 ci-dessous).

Lemme 2.1.10. Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse, $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif, $U = X - D \xhookrightarrow{j} X$ et F un faisceau de Λ-module sur U, localement constant et modérément ramifié le long de D. La formation de $Rj_* F$ commute à tout changement de base $T \to S$.

La question est locale (pour la topologie étale) sur X. On peut donc supposer qu'il existe $g : X' \to X$, normalisé de X dans un revêtement fini étale surjectif $g' : U' \to U$ modérément ramifié le long de D, tel que $g'^* F$ soit constant sur U'. Utilisant le lemme d'Abhyankhar, on peut supposer que de plus X' est lisse sur S et que U' est le complément d'un diviseur à croisements normaux relatif D' dans X'.

F s'injecte dans $g'_* g'^* F$ et le conoyau vérifie encore les hypothèses de 2.1.10. Itérant la construction (le même g continue d'ailleurs à marcher), on obtient une résolution de F par des faisceaux de la forme $g'_* G$ avec G constant et g' comme plus haut, il suffit donc de démontrer 2.1.10 pour un tel faisceau, i.e. de démontrer 2.1.10 pour (X'/S, D', G constant sur U') : c'est là un cas particulier de SGA5 II 4.4.

Lemme 2.1.11. Soient S un trait hensélien, $f : X \to S$ un morphisme lisse, $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux relatif, $U = X - D \xhookrightarrow{j} X$ et F un faisceau de Λ-modules sur U, localement constant et modérément ramifié le long de D. On a

$$R\Phi(j_! F) = 0 .$$

Le dévissage utilisé en 2.1.11 nous ramène au cas où F est constant, de valeur G . On peut supposer D réunion de diverseurs lisses $(D_i)_{i \in I}$. Pour $J \subset I$, soit D_J l'intersection des D_i pour $i \in J$. Le faisceau F admet une résolution F' , de composantes des sommes de faisceaux G_J , constants sur D_J et prolongés par 0 sur X . Il suffit donc de prouver 2.1.11 pour un tel faisceau, ce qui résulte de (2.1.5) appliqué aux D_J/S .

Je conjecture que 2.1.7.5 est un isomorphisme si S et S' sont excellents. Voici un résultat partiel (voir aussi 2.4.2).

Proposition 2.1.12. Le morphisme 2.1.7.5 est un isomorphisme dans les cas suivants
(a) S est excellent, de complété S' ;
(b) S et S' sont d'égale caractéristique 0 .

Dans le cas (b), on se ramène à supposer S et S' strictement locaux, et qu'une uniformisante pour S est encore une uniformisante pour S' (étendre les scalaires sans changer $\bar{S}' \to \bar{S}$). Dans les cas (a) et (b), notant par $\bar{}$ le normalisé dans une clôture séparable du corps des fractions, on a alors $\bar{S}' \simeq S' \times_S \bar{S}$, et, revenant aux définitions, on trouve qu'il suffit de prouver que $S' \to S$ est universellement localement acyclique (appliquer SGA4 XVI 1.1). Ceci résulte de I 0.5.1 (basé sur la désingularisation de Néron à la Artin) et de SGA4 XV 2.1 (théorème d'acyclicité locale des morphismes lisses).

2.1.13. Supposons $f : X \to S$ de type fini. La dimension cohomologique (SGA4 XVII 1.2.9) de $R\Psi$ est alors au plus égale à $\dim(X_\eta)$, ainsi qu'il résulte de 2.1.4 et de SGA4 XIV 3.2 (cf. I 4.2.(i)). Ceci permet d'étendre $R\Psi$ à la catégorie dérivée entière

$$R\Psi : D(X, \Lambda) \longrightarrow D(X_s \times_s S, \Lambda) ,$$

et $R\Psi$ transforme D^- en D^- . Soit $L \in Ob\, D^-(\Lambda)$ un complexe borné supérieurement de Λ-modules à droite, et $K \in Ob(D^-(X, \Lambda))$. On dispose alors de

$$(2.1.13.1) \qquad L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda} R\Psi(K) \xrightarrow{\sim} R\Psi(L \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\Lambda} K) \quad .$$

Pour vérifier que 2.1.13.1 est un isomorphisme, on remplace tout d'abord L par un complexe de Λ-modules libres, et on note qu'il suffit, car $R\Psi$ est triangulé de dimension cohomologique finie, de le vérifier après avoir remplacé L par une des ses composantes. Par passage à la limite inductive, on se ramène au cas où L est un module libre de type fini, puis au cas trivial où $L = \Lambda$.

De (2.1.13.1) on déduit par un argument familier (cf. SGA4 XVII 5.2.11) que si $K \in \mathrm{Ob}\, D(X_\eta, \Lambda)$ est de Tor dimension finie $\leq d$ ($d \in \mathbb{Z}$) (SGA4 XVII 4.1.9), alors $R\Psi_\eta(K)$ est de même de Tor-dimension $\leq d$.

2.2. Une compatibilité (morphismes traces).

2.2.1. Soient S un trait hensélien et $u : X_s \to Y_s$ un morphisme quasi-fini plat séparé de présentation finie de s-schémas. Pour tout faisceau abélien F sur Y_s, un morphisme trace $Tr_u : u_! u^* F \to F$ est défini (SGA4 XVII 6.2.3). Pour F un faisceau abélien sur $Y_s \times_s S$ ou $Y_s \times_s \eta$, on en déduit un morphisme analogue $Tr_u : u_! u^* F \to F$.

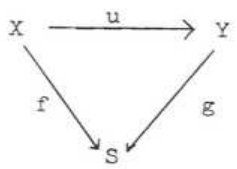
Soit $u : X \to Y$ un morphisme quasi-fini plat séparé de présentation finie de S-schémas. Nous noterons encore u le morphisme induit $X_s \times_s S \to Y_s \times_s S$ et nous noterons Ψ les foncteurs 1.3.3 pour X et pour Y .

Proposition 2.2.2. *Pour tout faisceau abélien F sur Y, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} u_! u^* \Psi F & \xrightarrow{(1.3.7.1)} & u_! \Psi u^* F & \xrightarrow{(1.3.8.1)} & \Psi u_! u^* F \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_u} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} \\ \Psi F & = & = & = & \Psi F \end{array} \quad .$$

La vérification est laissée au lecteur. On a une variante pour Ψ_η et F sur Y_η .

2.2.3. Soient Λ comme en 2.2.1 et $u : X \to Y$ un morphisme quasi-fini et plat de S-schémas séparés de type fini et plats



.

On note encore f et g les morphismes $X_s \times_s S \to S$ et $Y_s \times_s S \to S$. On suppose que $\dim Y_\eta \leq n$.

Pour tout $K \in \mathrm{Ob}\, D(S, \Lambda)$, on a défini un morphisme trace (SGA4 XVIII 2.9)

$$Tr_f : Rf_! f^* K(n)[2n] \longrightarrow K \ .$$

Corollaire 2.2.4. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
Rg_!u_!u^*R\Psi g^*K(n)[2n] & \xrightarrow{(1.3.7.1)} & Rf_!R\Psi f^*K(n)[2n] & \xrightarrow{(2.1.10.1)} & Rf_!f^*K(n)[2n] \\
\downarrow{\scriptstyle Tr_u} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tr_f} \\
Rg_!R\Psi g^*K(n)[2n] & \xrightarrow{(2.1.10.1)} & Rg_!g^*K(n)[2n] & \xrightarrow{Tr_g} & K
\end{array}$$

Si u est étale, (1.3.7.1) est un isomorphisme.

Le diagramme (2.2.4) se déploye en le suivant, où les arguments sont omis

$$\begin{array}{ccccccc}
Rg_!u_!u^*R\Psi g^* & \longrightarrow & Rg_!R\Psi u_!u^*g^* & \longrightarrow & Rg_!u_!u^*g^* & \xrightarrow{\sim} & Rf_!f^* \\
\downarrow{\scriptstyle Tr_u} & (1) & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} & (2) & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} & (3) & \downarrow{\scriptstyle Tr_f} \\
Rg_!R\Psi g^* & = & Rg_!R\Psi g^* & \longrightarrow & Rg_!g^* & \xrightarrow{Tr_g} & K
\end{array} \ .$$

Que (1) soit commutatif résulte de 2.2.2. Que (2) le soit est la

fonctorialité de (2.1.10.2). Que (3) le soit est la transitivité de la trace SGA4 XVIII 2.9. Var.3.

2.2.4.1. On a un résultat analogue pour Ψ_η et $K \in \mathrm{Ob}\, D(\eta,\Lambda)$.

2.2.5. Soit Φ une partie de Y_s propre sur s , et notons Rg_Φ le foncteur "image directe à support dans Φ ". Notons Tr_g le morphisme composé

(2.2.5.1) $Tr_g : Rf_\Phi R\Psi g^* K(n)[2n] \to Rg_! R\Psi g^* K(n)[2n] \to Rg_! g^* K(n)[2n] \to K$,

et son analogue pour Ψ_η et $K \in D(\eta, \Lambda)$. Si Φ est un ensemble fini de points fermés, on a

$$Rg_\Phi \circ u_! = Rf_{u^{-1}\Phi} ,$$

d'où un morphisme trace $Tr_u : Rf_{u^{-1}\Phi} u^* = Rg_\Phi u_! u^* \to Rg_\Phi$.

D'après 2.2.4, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} Rf_{u^{-1}\Phi} u^* R\Psi g^* K(n)[2n] & \longrightarrow & Rf_{u^{-1}\Phi} R\Psi f^* K(n)[2n] & \xrightarrow{Tr_f} & K \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_u} & & & & \| \\ Rg_\Phi R\Psi g^* K(n)[2n] & & \xrightarrow{\qquad Tr_g \qquad} & & K \end{array}$$

Supposons u étale, soit $x \in X_s$ et supposons que x et $y = u(x)$ aient même corps résiduel. On a alors

$$Rf_{\{x\}} \xrightarrow{\sim} Rg_{\{x\}} \quad ;$$

cet isomorphisme, donné par Tr_u , exprime la nature locale pour la cohomologie étale de la cohomologie à support dans x . Le diagramme

(2.2.5.2)
$$\begin{array}{ccccc} Rf_{\{x\}} R\Psi f^* K(n)[2n] & & \xrightarrow{Tr_f} & & K \\ \| & & & & \| \\ Rg_{\{y\}} R\Psi g^* K(n)[2n] & & \xrightarrow{Tr_g} & & K \end{array}$$

est commutatif.

Scholie 2.2.6. La compatibilité 2.3.5.2 exprime que le morphisme trace (2.3.5.1) pour $\Phi = \{x\}$, est un invariant local: il ne dépend que du S-schéma hensélisé de X en x . De même pour $R\Psi_\eta$.

2.3. Théorème de finitude (en égale caractéristique zéro).

Théorème 2.3.1. Soient S un trait hensélien comme en 0.2.5, Λ un anneau de torsion noethérien et $f : X \to S$ un morphisme de type fini. On suppose que S est d'égale caractéristique zéro . Alors, pour tout faisceau constructible de Λ -modules F sur X_η , les faisceaux $R^i\Psi_{\bar\eta}(F)$ sur $X_{\bar s}$ sont constructibles.

On commence par recopier le début de la démonstration de SGA4 XIV 1.10 : appliquons SGA4 IX 2.14(ii). Il existe une résolution $F^\cdot$ de F

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & F^0 & \longrightarrow & F^1 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

par des faisceaux de la forme $\bigoplus_i p'_{i*} G_i$, où $p'_i : Y_{i\eta} \longrightarrow X_\eta$ est fini et où G_i est un faisceau constant constructible. On peut supposer $Y_{i\eta}$ réduit; soit $p_i : Y_i \to X$ le normalisé de X dans $Y_{i\eta}$. Utilisons la suite spectrale de la résolution $F^\cdot$ et appliquons 2.1.7.1 dans le cas trivial du morphisme fini p_i ; on trouve qu'il suffit de prouver 2.3.1 pour (Y_i, G_i) .

Prouvons 2.3.1 pour F constant défini par un Λ -module M . Rappelons que Λ est une $\mathbb{Z}/n$-algèbre pour n convenable. Le module M se dévisse donc en modules M_i sur $\Lambda/\ell_i\Lambda$, avec $\ell_i | n$ premier convenable. Ceci nous ramène au cas où Λ est une $\mathbb{Z}/\ell$-algèbre, ℓ premier. On a alors (2.1.13.1)

$$M \otimes R^i\Psi_{\bar\eta}(\mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{\sim} R^i\Psi_{\bar\eta}(M) \quad :$$

il reste à traiter le cas où F est le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell$.

Soit $X_\eta = X'_o \supset \ldots\ldots \supset X'_n$ une suite de parties fermées de X_η telle que $(X'_i - X'_{i+1})_{red}$ soit lisse sur η . Soit $X_i = \bar{X}'_i$. Le faisceau $\mathbb{Z}/\ell$ se dévisse en les faisceaux $\mathbb{Z}/\ell$ sur $(X'_i - X'_{i+1})$, prolongés par 0 . On en tire la

Réduction 1 Il suffit de prouver 2.3.1 pour un faisceau $j_! \mathbb{Z}/\ell$, pour $j : U \hookrightarrow X_\eta$ l'inclusion d'un ouvert lisse.

D'après la résolution des singularités, il existe $g : X_1 \to X$ tel que

(a) g est propre, et induit un isomorphisme $g^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$;

(b) X_1 est régulier et $X_1 - g^{-1}(U)$ un diviseur à croisements normaux dans X_1 , réunion de diviseurs réguliers D_α .

Soit $j_1 : g^{-1}(U) \hookrightarrow X_1$. On a $Rg_* j_{1!} \mathbb{Z}/\ell = j_! \mathbb{Z}/\ell$. Appliquons 2.1.7.1 et le théorème de finitude SGA4 XIV 1.1.; on trouve qu'il suffit de prouver (2.3.1) pour $(X_1, j_{1!} \mathbb{Z}/\ell)$.

On a une résolution

$$0 \longrightarrow j_{1!}\mathbb{Z}/\ell \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \longrightarrow \bigoplus_\alpha (\mathbb{Z}/\ell)_{D_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha,\beta} (\mathbb{Z}/\ell)_{D_\alpha \cap D_\beta} \longrightarrow \ldots\ldots ,$$

d'où la

Réduction 2 Il suffit de prouver 2.3.1 pour le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell$ et un S-schéma régulier X tel que X_s soit un diviseur à croisements normaux dans X .

Dans le cas auquel on s'est réduit, on utilise le calcul explicite I 3.3 (qui utilise le théorème de pureté SGA4 XIX 3.2 et la caractéristique 0).

2.4. Singularités isolées.

2.4.1. Dans ce numéro, nous supposons pour simplifier que S est un trait strictement hensélien. Soient Λ un anneau noethérien de torsion premier à la caractéristique résiduelle de S , $f : X \to S$ un morphisme de type fini et F un faisceau constructible de Λ-modules sur X . On dit que $x \in X$ est un point de lissité de

(X, F) si f est lisse en X et que F est localement constant au voisinage de x . On note Σ l'ensemble des points de non lissité de (X, F) , et Σ_s la fibre spéciale de Σ . On sait que $R\Phi(F) = 0$ en dehors de Σ_s .

Théorème 2.4.2. En tout point isolé x de Σ_s , les $R^i\Phi_{\bar{\eta}}(F)_x$ sont des Λ-modules de type fini, invariants par changement de trait (via 2.1.7.1).

En égale caractéristique 0 , ces assertions ont été démontrées en 2.1.12 et 2.3.1, sans supposer que x soit isolé.

Soit x un point isolé de Σ_s . Le théorème est de nature locale au voisinage de x ; on peut donc supposer que f soit propre. On dispose alors de la suite exacte longue (2.1.8.9)

$$\ldots \longrightarrow H^i(X_s, F) \longrightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, F) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_s, R\Phi_{\bar{\eta}}(F)) \longrightarrow \ldots$$

Dans cette suite, $H^i(X_s, F)$ et $H^i(X_{\bar{\eta}}, F)$ sont invariants par changement de trait et des Λ-modules de type fini (SGA4 XIV 1.1): les $\mathbb{H}^i(X_s, R\Phi_{\bar{\eta}}(F))$ partagent donc ces propriétés. Rappelons le

Lemme 2.4.3. Soient (T, Λ) un topos annelé et F un fermé de T . Soit i l'inclusion de F . Alors, $i_*\ D(F, \Lambda) \longrightarrow D(T, \Lambda)$ est une équivalence de catégorie de $D(F, \Lambda)$ avec la sous-catégorie de $D(T, \Lambda)$ formée des K tels que $H^i(K)$ soit à support dans F .

En effet, pour un tel complexe K , $K \longrightarrow i_*i^*K$ est un quasi-isomorphisme.

On peut donc regarder $R\Phi_{\bar{\eta}}(F)$ comme un objet de $D^b(\Sigma_s, \Lambda) = D^b(\Sigma_s - \{x\}, \Lambda) + D^b(\{x\}, \Lambda)$. Par passage à un facteur direct, on trouve donc que $\mathbb{H}^i(\{x\}, R\Phi_{\bar{\eta}}(F)) = R^i\Phi_{\bar{\eta}}(F)_x$ vérifie 2.4.2, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.4.4. Avec la même démonstration, on voit que, pour K constructible dans $D^+(X, \Lambda)$ et x isolé dans le support de $R\Phi_{\bar{\eta}}(K)$, le Λ-module $R\Phi_{\bar{\eta}}(K)_x$ est de type fini; si, après un changement de trait, x reste un point isolé du support, ce module est invariant par ce changement de trait.

2.4.5. Soit $x \in X_s$ un point de non lissité isolé de (X, F). Plus généralement, soit $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(X, \Lambda)$ et soit x un point isolé du support de $R\Phi(K)$. Soit i l'inclusion de x dans X_s. Le complexe $i_* i^* R\Phi(K)$, isomorphe à $R\Phi(K)$ au voisinage de x, est facteur direct de $R\Phi(F)$ (2.4.3). Pour $\sigma \in I$, le morphisme variation induit donc

$$\mathrm{Var}(\sigma) : i_* i^* R\Phi_{\bar{\eta}}(K) \longrightarrow R\Psi_{\bar{\eta}}(K) \quad , \text{ soit}$$

$$(2.4.5.1) \quad \mathrm{Var}(\sigma) : (R\Phi_{\bar{\eta}}(K))_x \longrightarrow R\Gamma_{\{x\}}(R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \quad .$$

2.4.6. Supposons que le support Σ de $R\Phi(K)$ soit formé d'un nombre fini de points isolés. Pour tout $\sigma \in I$, l'endomorphisme $\sigma - 1$ de $R\Psi_{\bar{\eta}}(K)$ est alors le composé

$$\begin{array}{ccccc} (2.4.6.1)\ R\Psi_{\bar{\eta}}(K) & \longrightarrow & R\Phi_{\bar{\eta}}(K) = \bigoplus_{x \in \Sigma} & i_{x*}(R\Phi_{\bar{\eta}}(K))_x & \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma-1} & & & \downarrow{\scriptstyle \oplus\, i_{x*}\,\mathrm{Var}(\sigma)} & \\ R\Psi_{\bar{\eta}}(K) & \longleftarrow & \bigoplus_{x \in \Sigma} & i_x R\Gamma_{\{x\}} R\Psi_{\bar{\eta}}(K) & . \end{array}$$

Si f est propre, appliquant à (2.4.6.1) le foncteur H^i, on trouve que l'endomorphisme $\sigma-1$ de $\mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K)$ est le composé

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^i(X_s, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i(X_s, R\Phi_{\bar{\eta}}(K)) = \bigoplus_{x \in \Sigma} & R^i\Phi_{\bar{\eta}}(K)_x \\ (2.4.6.2) & \downarrow{\scriptstyle \sigma-1} & & & & & \downarrow{\scriptstyle \oplus\, \mathrm{Var}(\sigma)} \\ & \mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{H}^i(X_s, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) & \longleftarrow & \bigoplus_{x \in \Sigma} & \mathbb{H}^i_{\{x\}}(X_s, R\Psi_{\bar{\eta}}(K)) \end{array}$$

Ceci fournit une description de l'action de I sur $\mathbb{H}^i(X_{\bar{\eta}}, K)$ d'ingrédient essentiel les morphismes variation (2.4.4.1), de nature locale sur X. On a par ailleurs la suite exacte longue

$$(2.4.6.3)\qquad \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_s, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_{\bar\eta}, K) \longrightarrow \bigoplus_{x\in\Sigma} R^i\Phi_{\bar\eta}(K)_x \longrightarrow \cdots$$

Le même argument vaut pour f non nécessairement propre si (X, K) vérifie 2.1.9. On définit par le diagramme (2.4.6.5) ci-dessous un morphisme

$$(2.4.6.4)\qquad \mathrm{Var}(\sigma) : R\Gamma(X_{\bar\eta}, K) \longrightarrow R\Gamma_c(X_{\bar\eta}, K) ,$$

tel que l'endomorphisme $\sigma-1$ de $R\Gamma(X_{\bar\eta}, K)$ (resp. $R\Gamma_c(X_{\bar\eta}, K)$) soit le composé $\alpha\,\mathrm{Var}(\sigma)$ (resp. $\mathrm{Var}(\sigma)\alpha$) de $\mathrm{Var}(\sigma)$ et de $\alpha : R\Gamma_c(X_{\bar\eta}, K) \longrightarrow R\Gamma(X_{\bar\eta}, K)$.

$$(2.4.6.5)\qquad \begin{array}{ccccc} R\Gamma(X_{\bar\eta}, K) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(X_s, R\Psi_{\bar\eta}(K)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in\Sigma} (R\Phi_{\bar\eta}(K))_x \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Var}(\sigma)} & & & & \downarrow{\scriptstyle \oplus} \\ R\Gamma_c(X_{\bar\eta}, K) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma_c(X_s, R\Psi_{\bar\eta}(K)) & \longleftarrow & \bigoplus_{x\in\Sigma} R\Gamma_{\{x\}}(X_s, R\Psi_{\bar\eta}(K)) \end{array} .$$

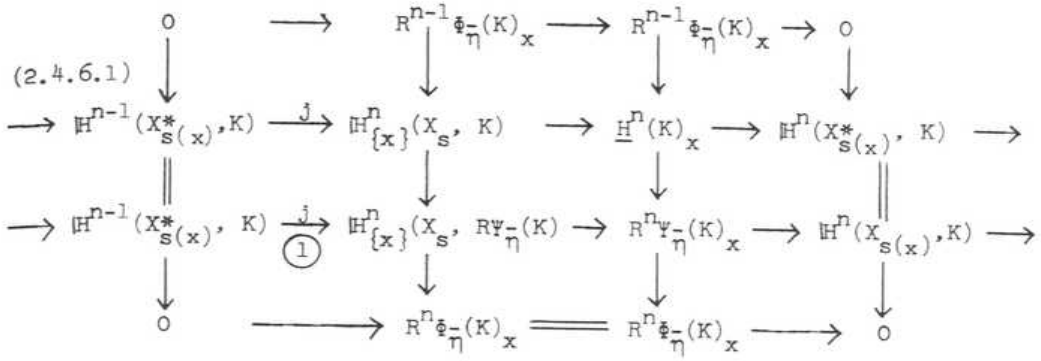
On dispose aussi, dans ce cas, des suites exactes longues

$$(2.4.6.6)\qquad \begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \mathbb{H}^i_c(X_s, K) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i_c(X_{\bar\eta}, K) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in\Sigma} (R^i\Phi_{\bar\eta}(K))_x & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ \cdots \longrightarrow & \mathbb{H}^i(X_s, K) & \longrightarrow & \mathbb{H}^i(X_{\bar\eta}, K) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in\Sigma} R^i\Phi_{\bar\eta}(K)_x & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

2.4.6. Soit $X_{s(x)}$ l'hensélisé de X_s en x et $X^*_{s(x)} = X_{s(x)} - \{x\}$. La suite exacte longue d'hypercohomologie de $(X_{s(x)}, \{x\})$ à coefficient dans K_s , $R\Psi_{\bar\eta}(K)$ et $R\Phi_{\bar\eta}(K)$ fournit des suites exactes longues

ri-

(2.4.6.1)



L'image de la flèche (1) est contenue dans les invariants sous l'inertie.

Bibliographie

[1] J. GIRAUD - Classifying topos, p. 43-56 in Toposes, algebraic geometry and logic, Lecture Notes in Mathematics 274, Springer Verlag 1971.

[2] M. NAGATA - A generalization of the imbedding problem. J. Math. Kyoto 3 1 (1963) p. 89-102.

S G A 7

Exposé XIV

Comparaison avec la théorie transcendante

par P. Deligne

Sommaire

	Introduction	1
§ 1.	Formalisme transcendant des cycles évanescents	1
1.1	Le groupe fondamental du disque épointé: conventions de signes	2
1.2	Faisceaux d'ensembles	5
1.3	Le foncteur $R\Psi$	10
1.4	Un cas particulier	12
§ 2	Le théorème de comparaison	16
§ 3	Singularités isolées	20
3.1	La variété des cycles évanescents	20
3.2	La formule de Picard-Lefschetz (cas transcendant)	31
§ 4	Cohomologie de De Rham	38

Introduction

Pour comparer la théorie des cycles évanescents de l'exposé XIII avec son analogue transcendant, sur $\mathbb{C}$, nous procèderons en deux étapes.

a) Nous donnerons un formalisme transcendant calqué sur le formalisme de l'exposé XIII, et démontrerons un théorème de comparaison par les méthodes habituelles (déjà utilisées pour prouver le théorème de finitude en XIII 2.3)

b) Dans le cas de singularités isolées, nous expliciterons en termes plus concrets ce que signifie le formalisme transcendant introduit.

Outre le théorème de comparaison, cet exposé contient une démonstration de la formule de Picard-Lefschetz (cas transcendant).

Au § 4, nous donnons un résultat préliminaire à la théorie de Hodge des cycles évanescents. Ce paragraphe ne servira pas dans la suite du séminaire.

§ 1 Formalisme transcendant des cycles évanescents

1.1. Le groupe fondamental du disque épointé: conventions de signes.

Nous aurons à considérer des disques épointés D^*, et leur groupe fondamental $\mathbb{Z}$. Ce groupe étant abélien, des ambiguités de signes risquent d'apparaître. On les élimine en oubliant qu'il l'est.

1.1.1. Pour X un bon espace topologique connexe et $x \in X$, le groupe fondamental a pour éléments les classes d'homotopie de lacets issus de x ; si $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x)$ sont représentés par des lacets a, b alors $\alpha\beta$ est représenté par le lacet obtenu en faisant suivre b par a.

1.1.2. Soit F un faisceau localement constant sur X. Pour tout chemin $a : [0, 1] \to X$, l'image réciproque a^*F de F sur $[0, 1]$ est un faisceau localement constant, donc constant, d'où une bijection

$$a : F_{a(0)} \xleftarrow{\sim} H^0([0, 1], a^*F) \xrightarrow{\sim} F_{a(1)} ,$$

qui ne dépend que de la classe d'homotopie de a. Par cette construction, $\pi_1(X, x)$ agit (à gauche) sur F_x. Le foncteur $F \to F_x$ est une équivalence de la catégorie des faisceaux localement constants sur X avec celle des ensembles munis d'une action de $\pi_1(X, x)$.

1.1.3. Les $\pi_1(X, x)$ pour x variable sont les fibre d'un faisceau en groupes localement constant $\Pi_1(X)$ qui agit sur tout faisceau localement constant F. Si $\pi_1(X, x)$ est abélien, $\Pi_1(X)$ est constant, de valeur notée $\pi_1(X)$.

1.1.4. Le groupe $\pi_1(X, x)$ agit sur le revêtement universel $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ de (X, x) : si on regarde ce revêtement comme un espace étalé, donc un faisceau, sur X (le faisceau de ses sections locales), il correspond par 1.1.2 à $\pi_1(X, x)$,

muni de e , sur lequel $\pi_1(X, x)$ agit par translation à gauche; le groupe $\pi_1(X, x)$ agit sur ce π_1-ensemble (par automorphismes de π_1-ensembles): $\sigma \in \pi_1(X, x)$ agit par $x \longmapsto x\,\sigma^{-1}$.

Cette construction identifie $\pi_1(X, x)$ à $\mathrm{Aut}_X(\widetilde{X})$.

Si F est localement constant sur X , la bijection

(1.1.4.1) $$H^0(\widetilde{X}, p^*F) \longrightarrow (p^*F)_{\widetilde{x}} = F_x$$

commute à l'action de $\pi_1(X, x)$, agissant sur le membre de gauche par transport de structure, via son action sur $\widetilde{X}$, et sur le membre de droite par 1.1.2. L'équivalence 1.1.2 peut se reformuler en disant que $F \longmapsto (\widetilde{X} \longmapsto H^0(\widetilde{X}, p^*F))$ est une équivalence de la catégorie des faisceaux localement constants sur X avec celle des foncteurs

(revêtements universels de X) $\longrightarrow$ (Ens) .

1.1.5. Si $\pi_1(X, x)$ est abélien, donc indépendant de x , l'action 1.1.4 de $\pi_1(X)$ sur $\widetilde{X}$ ne dépend pas du point base: $\pi_1(X)$ agit sur tout revêtement universel $\widetilde{X}$ de X .

On prendra garde que cette action (qui sera seule considérée) correspond à l'inverse de l'action 1.1.3.

1.1.6. Soit D un disque, i.e. un espace topologique homéomorphe au disque standard $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Soient $0 \in D$ et $D^* = D - \{0\}$. Supposons D muni d'une structure de variété analytique, donc orienté. Le groupe fondamental $\pi_1(D^*)$ est alors canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$: pour le disque standard, $0 = 0$ et $t \in D^*$, on prend pour générateur positif de $\pi_1(D^*, t)$ le lacet $x \longmapsto \exp(2\pi i x)t$.

1.1.7. Soit $z : D \to \mathbb{C}$ une uniformisante ($(dz)_0 \neq 0$) . Soit $\widetilde{D}^*$ un revêtement universel de D . On note $\log z$ une quelconque fonction sur $\widetilde{D}^*$ telle que

x) $\exp(\log z) = z$. Le couple $(\widetilde{D}^*, \log z)$ est unique à isomorphisme unique près.

On pose, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$. Si T est le générateur positif de $\pi_1(D^*)$, agissant sur $\widetilde{D}^*$ par 1.1.5 et sur les fonctions sur $\widetilde{D}^*$ par transport de structure, on a

(1.1.7.1) $\quad T \log(z) = \log(z) + 2\pi i$

(1.1.7.2) $\quad T z^\alpha = \exp(2\pi i\alpha) z^\alpha$.

1.1.8. Soit D un disque, $0 \in D$ et $D^* = D - \{0\}$. Pour $D' \subset D$ un disque plus petit, avec $0 \in D'$, la restriction à D'^* est une équivalence de la catégorie des faisceaux localement constants sur D^* avec celle des faisceaux localement constants sur D'^* . Pour $t \in D'^*$, on a en effet $\pi_1(D'^*, t) \xrightarrow{\sim} \pi_1(D^*, t)$.

Supposons que D soit muni d'une structure de variété différentiable, soient T l'espace tangent à D en 0 , et $T^* = T - \{0\}$. Pour $D' \subset D$ comme plus haut, et $f : D' \hookrightarrow T$ avec $f(0) = 0$ et $(df)_0 = Id$, le composé

$$(\text{restriction à } D')^{-1} \circ f^*$$

est une équivalence $[f]$ de la catégorie des faisceaux localement constant sur T^* avec celle des faisceaux localement constant sur D^* . A isomorphisme canonique près, elle ne dépend que du germe de f en 0 , ce germe vérifiant $(df)_0 = Id$. Un chemin d'un tel germe à un autre définit un isomorphisme d'équivalences et deux chemins homotopes le même isomorphisme; l'ensemble des germes considéré étant contractile (rétraction sur f_0 : $(1-\lambda)f + \lambda f_0$) , on obtient une équivalence, bien définie à isomorphisme unique près, de la catégorie des faisceaux localement constants sur T^* avec celle des faisceaux localement constants sur D^* .

1.1.9. Pour D un disque, $0 \in D$, $D^* = D - \{0\}$ et $p : \widetilde{D}^* \to D^*$ un revêtement universel de D^* , nous noterons $p : \widetilde{D} \to D$ l'espace topologique sur D déduit de $\widetilde{D}^*$ par adjonction d'un point 0 , de sorte que

a) $\widetilde{D}^*$ est ouvert dans $\widetilde{D}$;

b) $p : \widetilde{D} \to D$ prolonge $p : \widetilde{D}^* \to D^*$ et $p(0) = 0$;

c) les $p^{-1}(U)$, pour U voisinage de 0 dans D, formant un système fondamental de voisinages de 0 dans $\widetilde{D}$.

1.1.10 Soient X une courbe algébrique complexe non singulière, $0 \in X$ et D un disque voisinage de 0 dans X. L'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes sur D, algébriques sur le corps $K(X)$ des fonctions rationnelles sur X, est l'hensélisé $\mathcal{O}_0^h$ de l'anneau local $\mathcal{O}_0$ de X en 0. Soit $\widetilde{D}^*$ un revêtement universel de $D^* = D-\{0\}$. Le corps des germes en $0 \in \widetilde{D}$ de fonctions méromorphes sur $\widetilde{D}^*$, algébriques sur $K(X)$, est une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K(X)$ (et donc du corps des fractions K_0^h de $\mathcal{O}_0^h$).

Le groupe $\pi_1(D^*)$ des D-automorphismes de $\widetilde{D}^*$ (1.1.5) agit par transport de structure sur $\overline{K}$, d'où

(1.1.10.1)
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D^*) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_0^h) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & \hat{\mathbb{Z}}(1) \end{array} .$$

Il résulte de (1.1.7.2) que ce diagramme commute avec l'inclusion naturelle (sur $\mathbb{C}$) de $\mathbb{Z}$ dans $\hat{\mathbb{Z}}(1)$, composée de l'inclusion de $\mathbb{Z} \hookrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ et de l'isomorphisme $\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}(1)$, limite projective des isomorphismes $\exp(\frac{2\pi i}{n} k) : \mathbb{Z}/n \to \mu_n$.

1.1.11. Chaque faisceau F sur $\mathrm{Spec}(K_0^h)$ définit un faisceau localement constant sur D^* : on utilise l'équivalence 1.1.4 et, à chaque revêtement universel $\widetilde{D}^*$ de D^*, on associe $F_{\overline{K}}$ pour le $\overline{K}$ construit en 1.1.10.

1.2. Faisceaux d'ensembles.

1.2.1 Soient D un disque (1.1.6), $0 \in D$ et $D^* = D-\{0\}$. Nous noterons $\mathcal{S}^*$

le topos des faisceaux d'ensembles localement constants sur D^* . D'après 1.1.8, ce topos ne "change" pas si on remplace D par un disque plus petit D' , contenant 0 , ni, pour D muni d'une structure de variété différentiable, si on remplace D par son espace tangent en 0 .

Pour $t \in D^*$, le foncteur $F \longmapsto F_t$ identifie ce topos au topos des ensembles munis d'une action de $\pi_1(D^*)$ (1.1.2). D'après (1.1.4), le foncteur $F \longmapsto (\tilde{D}^* \to H^0(\tilde{D}^*, p^* F))$ l'identifie au topos des foncteurs

$$(\text{revêtements universels de } D^*) \longrightarrow (\text{Ens}) ,$$

et ces identifications sont reliées par 1.1.4.1.

1.2.2. Soit F un faisceau sur D , dont la restriction à D^* soit localement constante. Il existe un et un seul morphisme de faisceaux $\underline{F_0} \xrightarrow{\alpha} F$ qui soit l'identité en 0 . Comme expliqué en XIII 0.1 (pour $X_0 = (P^t)$), le foncteur $F \longmapsto (F_0, F \text{ restreint à } D^* , \alpha)$ identifie ces faisceaux aux triples formés d'un ensemble F_0 , d'un faisceau localement constant F_η sur D^* et de α : (faisceau constant de valeur F_0 sur D^*) $\longrightarrow$ (faisceau F_η).

1.2.3 Nous noterons $\mathcal{L}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur D dont la restriction à D^* est localement constante. L'inclusion de $\mathcal{L}$ dans les faisceaux sur D est le morphisme image inverse d'un morphisme de topos $D \to \mathcal{L}$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \hookrightarrow & D & \hookleftarrow & D^* \\ \| & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ \{0\} & \hookrightarrow & \mathcal{L} & \hookleftarrow & \mathcal{L}^* \end{array} .$$

Comme en 1.1.1, on vérifie que ce topos ne change pas quand on remplace D par un disque plus petit ou par l'espace tangent à D en 0 .

1.2.4. Soit Y un espace topologique. Le topos produit $Y \times \mathcal{S}$ admet les trois descriptions suivantes (pour leur équivalence, voir XIII 0.1) .

a) $Y \times \mathcal{S}$ est le topos des faisceaux F sur $Y \times D$ vérifiant

(*) D^* est recouvert par des ouverts U tels que $F|Y \times U$ soit image réciproque d'un faisceau sur Y .

b) Soit $t \in D^*$. Le topos $Y \times \mathcal{S}$ est le topos des triples (F_o, F_t, α) où

α) F_o est un faisceau sur Y ;

β) F_t est un faisceau sur Y , muni d'une action de $\pi_1(D^*)$;

γ) α est un morphisme de F_o dans F_t , d'image contenue dans les invariants.

c) Le topos $Y \times \mathcal{S}$ est le topos des triples (F_o, F_η, α) où

α') F_o est un faisceau sur Y ;

β') F_η est un foncteur, de valeurs notées $F_{\bar{\eta}}$,

(revêtements universel de D^*) $\longrightarrow$ (faisceaux sur Y) ;

γ') α est un morphisme de F_o (le foncteur constant de valeur F_o des revêtements universels de D^* dans les faisceaux sur Y) dans F_η .

Peu nous chaut, d'ailleurs, que ce topos soit vraiment le topos produit de Y et $\mathcal{S}$. On définit de même $Y \times \mathcal{S}^*$ comme étant au choix

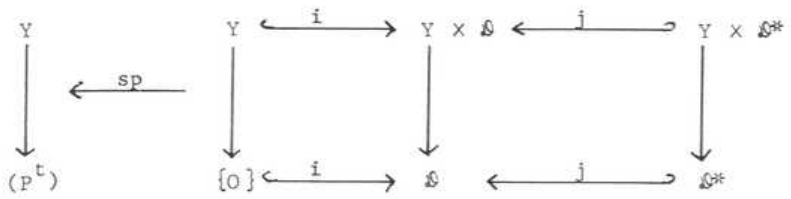
a*) le topos des faisceaux sur $Y \times D^*$ vérifiant (*) ;

b*) (pour $t \in D^*$) le topos des faisceaux F_t sur Y , munis d'une action de $\pi_1(D^*)$;

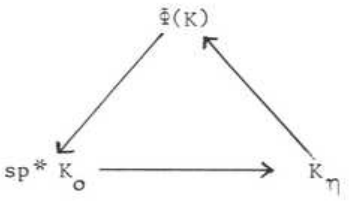
c*) le topos des foncteurs

(revêtements universels de D^*) $\longrightarrow$ (faisceaux sur Y).

1.2.5 Le topos $Y \times \mathcal{S}$ a les mêmes propriétés de fonctorialité en Y que les topos $Y \times_S S$ de l'exposé XIII, et nous nous dispenserons d'en faire la liste. Citons simplement, pour fixer les notations, le diagramme



1.2.6. Soit K un complexe de faisceaux abéliens sur $Y \times \mathbb{D}$. On procède comme en XIII 1.4.2 pour déduire de K un triangle distingué dans $K(Y \times \mathbb{D}^*)$



Cette construction passe à la catégorie dérivée et définit un foncteur

$$D(Y \times \mathbb{D}) \longrightarrow (\text{triangles distingués de } D(Y \times \mathbb{D}^*)) \ .$$

Supposons D orienté (par exemple analytique complexe) et soit T le générateur positif de $\pi_1(D^*)$ (1.1.6). Soit $K \in \mathrm{Ob}\, D(Y \times \mathbb{D})$. On définit comme en XIII 1.4.3 la <u>variation</u> $V = \mathrm{Var}(T)$

$$V : \Phi(K) \longrightarrow K_\eta \ .$$

L'endomorphisme T-Id de K_η est le composé

$$T\text{-}Id : K_\eta \longrightarrow \Phi(K) \longrightarrow K_\eta \ .$$

1.2.7. Soient D un disque, $0 \in D$, $D^* = D - \{0\}$, $f : X \longrightarrow D$ une application continue et $X_o = f^{-1}(0)$. Nous nous proposons de définir un foncteur

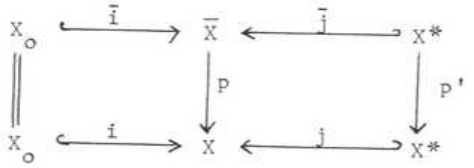
$$\Psi : (\text{faisceaux sur } X) \longrightarrow (\text{faisceaux sur } X_o \times \mathbb{D}) \ .$$

Soient $\widetilde{D}^*$ un revêtement universel de D^* , $\widetilde{D}$ comme en 1.1.9,

$\overline{X} = X \times_D \widetilde{D}$, $X^* = X - X_o = X \times_D D^*$ et $\overline{X}^* = \overline{X} - X_o = X \times_D \widetilde{D}^*$.

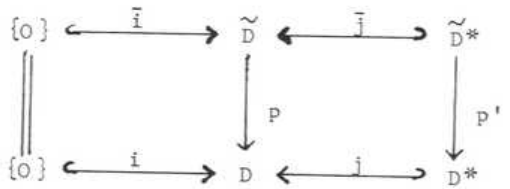
On a un diagramme commutatif

(1.2.7.1)



cartésien au-dessus du diagramme

(1.2.7.2)



Pour F un faisceau sur X , on pose (avec les notations de 1.2.4 c))

$$\Psi(F) = (i^*F,\ \bar{i}^*\bar{j}_*((jp')^* F),\ \alpha)$$

où $\alpha : i^*F = \bar{i}^* p^* F \longrightarrow \bar{i}^* \bar{j}_* ((jp')^* F) = \bar{i}^* \bar{j}_* \bar{j}^* p^* F$ est déduit, par application de $\bar{i}^*$, de la flèche d'adjonction $Id \longrightarrow \bar{j}_* \bar{j}^*$.

On définit aussi un foncteur

$$\Psi_\eta : (\text{faisceaux sur } X^*) \longrightarrow (\text{faisceaux sur } X_o \times \mathbb{G}^*)$$

par $\Psi_\eta(F) = \bar{i}^* \bar{j}_*(p'^* F)$.

1.2.8. Les propriétés de fonctorialité de Ψ sont les mêmes que celles de son analogue étudié en XIII 1.3.5 à 1.3.9.

1.3. Le foncteur $R\Psi$.

1.3.1. Soient D un disque, $0 \in D$, $D^* = D-\{0\}$, $f: X \to D$ une application continue et $X_0 = f^{-1}(0)$. Les foncteurs $R\Psi$ et $R\Psi_\eta$ sont les foncteurs dérivés des foncteurs Ψ et Ψ_η

$$R\Psi : D^+(X) \longrightarrow D^+(X_0 \times \mathbb{S})$$
$$R\Psi_\eta : D^+(X^*) \longrightarrow D^+(X_0 \times \mathbb{S}^*) \quad .$$

On note $R\Phi$ le foncteur composé $\Phi \circ R\Psi$.

$$R\Phi : D^+(X) \longrightarrow D^+(X_0 \times \mathbb{S}^*) \quad .$$

Les propriétés de ces foncteurs sont toutes pareilles à celles des foncteurs de même nom de XIII 2.1. Leur démonstration est bien plus élémentaire car, dans le cadre topologique, les théorèmes de changement de base pour un morphisme propre ou par un morphisme lisse (= localement isomorphe à $\mathbf{R}^n \times S \to S$) sont faciles à prouver. Voici les menus changements à apporter.

1.3.2. Le foncteur $Rf_!$ n'est défini que pour un morphisme séparé entre espaces localement compacts, et est le foncteur dérivé du foncteur image directe à supports propres $f_!$.

1.3.3. L'isomorphisme fondamental (2.1.8.3), pour un morphisme propre (et séparé) $f : X \to D$ est à récrire comme suit. Soit $p : \widetilde{D}^* \to D^*$ un revêtement universel de D^* . Pour tout voisinage U de 0 dans D , soit $\widetilde{U}^* = p^{-1}(U)$, et $X_{\widetilde{U}^*} = X \times_D \widetilde{U}^*$. Pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(f^{-1}(D^*))$, on a

(1.3.3.1) $$\varinjlim_U \mathbb{H}^i(X_{\widetilde{U}^*}, K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i(X_0, R\Psi_{\overline{\eta}}(K)) \quad .$$

Cet isomorphisme est intéressant surtout si $X^* = f^{-1}(D^*)$ est un fibré topologique sur D^* . Pour $U \subset D$ un disque tendant vers 0 , la suite spectrale

de Leray de $X_{\tilde{U}^*} \to \tilde{U}^*$ montre alors que pour tout faisceau localement constant Λ sur X^* et pour tout $t \in \tilde{U}^*$, on a

$H^i(X_{\tilde{U}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^i(X_t, \Lambda)$. Pour $t \in D^*$, on a donc

(1.3.3.2) $$H^i(X_t, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^i(X_o, R\Psi_t(\Lambda))$$

(X/D propre, X^* fibré, Λ localement constant).

Pour vérifier que X^* est un fibré sur D^*, on utilise en pratique le théorème d'isotopie de Thom dont une forme est énoncée ci-dessous. (Pour la démonstration de ce théorème, dont aucune conséquence ne servira dans les exposés suivants, je renvoie à Whitney et Mather).

1.3.4. Préliminaire: Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse ($=_{dfn}$ sans point critique) de variétés différentiables. Une connexion ∇ sur X/Y est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de X, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(df)$. Pour u un champ de vecteurs sur Y, il existe un et un seul champ de vecteurs $\nabla(u)$ sur X, relevant u, dans ce sous-fibré. On dit que ∇ est intégrable si $\nabla([u, v]) = [\nabla(u), \nabla(v)]$; pour f propre, une connexion intégrable définit des trivialisations locales sur Y de X/Y : $\alpha : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} X_o \times U$, compatible à la projection sur U, avec $d\alpha\,(\nabla(u)) = (0, u)$. Pour f non propre, le même résultat vaut sous des conditions convenables à l'infini, par exemple si les $\nabla(u)g$ sont nuls pour g une fonction d'exhaustion convenable.

1.3.5. Théorème d'isotopie de Thom.

Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D^* = D - \{0\}$ et $f : X \to D$ un morphisme propre d'espaces analytiques. Pour D remplacé par un disque plus petit et X par son image réciproque, il existe une stratification Σ de $X^* = f^{-1}(D^*)$ ayant les propriétés suivantes.

(a) Σ est une filtration $X^* = F_o \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} = \emptyset$ de X^* par des parties fermées dont l'adhérence $\bar{F}_i$ dans X est un sous-espace analytique de X.

(b) Les strates ouvertes $F_i - F_{i+1}$ sont lisses sur D^* .

(c) Σ vérifie les conditions (a) et (b) de Whitney.

Pour une telle stratification Σ , il existe sur les $F_i - F_{i+1}$ des connexions intégrables ∇_i telles que

(i) localement sur D^* , ∇_i définit une trivialisation de $F_i - F_{i+1}$;

(ii) ces trivialisations se recollent pour fournir des trivialisations locales de X^*/D^* .

Enfin, si (Y_α) est une famille finie de sous-espaces analytiques fermés de X , et quitte à retrécir D davantage, on peut trouver Σ tel que chaque Y_α soit réunion de composantes connexes de strates ouvertes $(F_i - F_{i+1})$. Une connexion ∇ comme plus haut trivialise alors localement $(X, (Y_\alpha))$.

1.3.6. On dispose encore de (1.3.3.2) pour l'hypercohomologie à valeurs dans un complexe de faisceaux K lorsque X est propre sur D et que la condition suivante est vérifiée

(*) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, D^* est recouvert par des ouverts U tels qu'il existe un isomorphisme compatible à la projection sur U $\varphi : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} Y \times U$ et un faisceau G sur Y tel que $\underline{H}^i(K)$ soit isomorphe, sur $f^{-1}(U)$, à $\varphi^* \mathrm{pr}_1^* G$.

Sous cette hypothèse, le triangle 1.2.1 fournit une suite exacte longue

$$(1.3.6.1) \quad \ldots \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_o, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_t, K) \longrightarrow \mathbb{H}^i(X_o, R\Phi_t(K)) \longrightarrow \ldots$$

D'après le théorème de Thom, la condition (*) est vérifiée (quitte à retrécir D) lorsqu'il existe une stratification analytique complexe de X telle que les $\underline{H}^i(K)$ soient localement constants sur chaque strate ouverte.

1.4. Un cas particulier.

Ce numéro ne sera pas utilisé dans la suite du séminaire. On y formalise une

construction esquissée dans l'introduction de XIII.

1.4.1. Soient D un disque orienté, $0 \in D$ et $D^* = D - \{0\}$. Un espace topologique $\mathcal{X}^*$ sur $\mathcal{D}^*$ est un foncteur

(revêtements universel de D^*) $\longrightarrow$ (espaces topologiques) .

Une fois choisi un revêtement universel $\widetilde{D}^*$, c'est un espace topologique X_η muni d'une action de $\pi_1(D^*)$; pour $\widetilde{D}^*$ le revêtement universel de (D^*, t), on le note $\mathcal{X}^*_t$. Un faisceau sur $\mathcal{X}^*$ est un foncteur

(revêtements universels de D^*) $\longrightarrow$ (espaces topologiques munis d'un faisceau),

soit encore un faisceau $\pi_1(D^*)$-équivariant sur X_η.

A $\mathcal{X}^*$, on associe l'espace topologique $\beta^* \mathcal{X}^* = X_\eta \times \widetilde{D}^* / \pi_1(D^*)$ sur D^*. Tout faisceau F sur $\mathcal{X}^*$ définit par passage au quotient un faisceau $\beta^* F$ sur $\beta^* \mathcal{X}^*$, d'où un diagramme commutatif de topos

$$\begin{array}{ccc} \beta^* \mathcal{X}^* & \longrightarrow & \mathcal{X}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^* & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D}^* \end{array} .$$

1.4.2. Un espace topologique $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{D}$ consiste en

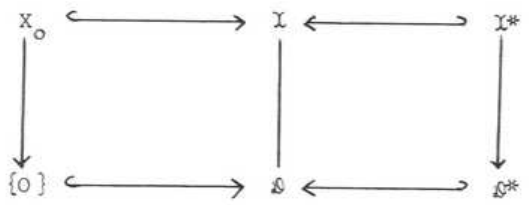
(a) un espace topologique $\mathcal{X}^*$ sur $\mathcal{D}^*$;

(b) un espace topologique X_o ;

(c) un morphisme $\pi_1(D^*)$-invariant $sp : X_\eta \to X_o$ ($\pi_1(D^*)$ agissant trivialement sur X_o) .

Un faisceau sur $\mathcal{X}$ consiste en un faisceau F_o sur X_o, un faisceau sur $\mathcal{X}^*$, donné par F_η, et un morphisme équivariant

$sp : sp^* F_o \longrightarrow F_\eta$ (ou $F_o \longrightarrow sp_* F_\eta$) . On dispose d'un diagramme commutatif



On dispose de plus d'un morphisme de topos $\Psi : \mathcal{X} \to X_o \times \mathcal{S}$, d'après la fonctorialité de la construction précédente appliquée à $(X_\eta , X_o, sp) \to (X_o, X_o, Id)$. On a

$$\Psi(F_o, F_\eta , sp) = (F_o, sp_* F_\eta , sp) \quad .$$

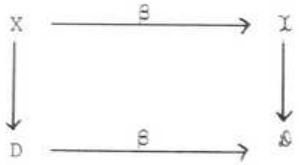
eau),

Ce morphisme induit $\Psi_\eta : \mathcal{X}^* \to X_o \times \mathcal{S}^*$.

1.4.3. A un espace topologique $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{S}$, on associe comme suit un espace topologique $X = \beta^* \mathcal{X}$ sur D . On adjoint à $X^* = \beta^* \mathcal{X}^*$ la fibre X_o en O , en prenant pour système fondamental de voisinage de $x_o \in X_o$ les $V \cup (sp^{-1}(V) \times \tilde{U}^*/\pi_1(D^*))$ pour V un voisinage de x_o dans X_o , U un voisinage de O dans D et $\tilde{U}^* = U \times_D \tilde{D}^*$. Notons j (resp. i) l'inclusion de X^* (resp. X_o) dans X . Pour F un faisceau sur $\mathcal{X}^*$, on a

$$i^* j_* \beta^* F = (sp_* F_\eta)^{\pi_1(D^*)} \quad .$$

On en tire un diagramme commutatif de topos



tel que, pour tout faisceau F sur $\mathcal{X}$, on ait

(1.4.3.1) $\qquad \Psi(F) \xrightarrow{\sim} \Psi(\beta^* F)$.

Proposition 1.4.4. La flèche (1.4.3.1) se dérive en un isomorphisme

$$R\Psi \xrightarrow{\sim} R\Psi \circ \beta^*$$

entre foncteurs de $D^+(\mathcal{X})$ dans $D^+(X_o \times \mathcal{S})$.

Soit $\bar{j}$ l'inclusion de $\bar{X}^* = X \times_D \widetilde{D}^* \simeq X_\eta \times \widetilde{D}^*$ dans $\bar{X} = X \times_D \bar{D}$. La proposition se ramène à vérifier que pour tout faisceau abélien F flasque sur X_η , $pr_1^* F$ est acyclique pour le foncteur $\bar{j}_*$. Cette assertion, à son tour, se ramène à la suivante (pour $B = \widetilde{D}^*$), bien connue, qui se démontre par un argument d'homotopie.

Soit F un faisceau abélien sur un espace Y , et B un disque. On a

$$H^i(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^i(Y \times B, pr_1^* F) \ .$$

1.4.5. La proposition 1.4.4 fournit un procédé de calcul de $R\Psi$ pour les faisceaux sur X de la forme $\beta^* F$, ramenant pour l'essentiel le calcul de $R\Psi$ à celui de $R\,sp_*$.

1.4.6. Nous aurons plus tard à considérer le cas où X_η est localement compact et où X_o se déduit de X_η en contractant en un point O une partie compacte $V \subset X_\eta$, sp étant la flèche de contraction et l'action de $\pi_1(D^*)$ étant triviale en dehors de V . Le théorème de changement de base pour le morphisme propre sp fournit alors, pour $K \in Ob\ D^+(\mathcal{X}^*)$

$$(1.4.6.1) \qquad R\Psi_\eta(\beta^* K)_o = R\Gamma(V, K)$$

$$(1.4.6.2) \qquad R\Gamma_{\{O\}} R\Psi_\eta(\beta^* K) = R\Gamma_V(X_\eta, K)$$

(cohomologie à support) .

Pour K sur $\mathcal{X}$, avec $sp : sp^* K_o \longrightarrow K_\eta$ un quasi-isomorphisme en dehors de V , on a $R\Phi(K) = 0$ en dehors de O . En particulier, pour un faisceau constant Λ sur X , on a

$$R^i\Phi(\Lambda) = \tilde{H}^i(V, \Lambda) \text{ concentré en } O$$

(groupes de cohomologie réduit).

1.4.7. Le cas qui nous intéresse est celui où X_η est une variété différentiable et où $V \subset X_\eta$ est une sous-variété à bord, d'intérieur V^o ; $X-\{0\}$ est alors une variété différentiable, obtenue en recollant $\beta^* X_\eta$ et le fibré constant sur D de fibre $X_\eta - V$. L'application

$$H^i_c(V^o, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^i_V(X_\eta, \Lambda) \qquad (1.4.7.1)$$

est un isomorphisme. Ces groupes sont aussi notés $H^i(V \bmod \partial V, \Lambda)$.

L'isomorphisme (1.4.7.1) définit un isomorphisme

$$R\Gamma_c(V^o, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\{0\}} R\Psi_\eta(\Lambda) \qquad (1.4.7.2)$$

et la <u>variation</u> est définie (par le procédé de XIII 2.4.5 et via (1.4.7.2)) par un morphisme de source la cohomologie réduite de V

$$\mathrm{Var} : R\widetilde{\Gamma}(V, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_c(V^o, \Lambda) \qquad (1.4.7.3)$$

T induit un automorphisme, encore noté T , de la paire $(V, \partial V)$ et la restriction ∂T de T à ∂V est l'identité. Il doit être vrai que la variation 1.4.7.3 coincide avec le morphisme variation classique (3.1.9) attaché à un tel automorphisme T . Un énoncé de ce type sera démontré en 3.1.10.

§ 2. <u>Le théorème de comparaison</u>

2.1. Pour tout schéma X de type fini sur $\mathbb{C}$, nous noterons X_{cl} l'espace $X(\mathbb{C})$, muni de sa topologie usuelle.

Soit S une courbe lisse sur $\mathbb{C}$, i.e. un schéma lisse séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, purement de dimension 1. Soient $0 \in S(\mathbb{C})$, $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma séparé de type fini et Λ un anneau noethérien de torsion (par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). On pose $X_o = f^{-1}(0)$.

2.2. Nous noterons S^h le trait hensélien henselisé de S en 0, et η le point générique de S^h. On dispose d'un foncteur

$$\Psi : (\text{faisceaux sur } X) \xrightarrow{\text{restriction}} (\text{faisceaux sur } X \times_S S^h) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow^{\Psi} (\text{faisceaux sur } X_o \times S^h) .$$

Le foncteur dérivé de Ψ est le composé

$$R\Psi : D(X, \Lambda) \longrightarrow D(X \times_S S^h, \Lambda) \xrightarrow{R\Psi} D(X_o \times S^h, \Lambda) .$$

2.3. Soit $D \subset S_{cl}$ un disque contenant 0. Le foncteur composé Ψ_{cl} (ou simplement Ψ)

$$\Psi_{cl} : (\text{faisceaux sur } X_{cl}) \xrightarrow{\text{restriction}} (\text{faisceaux sur } X_{cl} \times_{S_{cl}} D) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow^{\Psi} (\text{faisceaux sur } (X_o)_{cl} \times \mathcal{S})$$

est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix de D (rappelons que $\mathcal{S}$ ne change pas quand on remplace D par un disque plus petit). Son dérivé est le composé

$$R\Psi_{cl} : D(X_{cl}, \Lambda) \longrightarrow D(f_{cl}^{-1}(D), \Lambda) \xrightarrow{R\Psi} D(X_o \times \mathcal{S}, \Lambda) .$$

2.4. On définit de même

$$R\Psi_{\eta} : D(X-X_o, \Lambda) \longrightarrow D(X_o \times \eta, \Lambda)$$

$$R\Psi_{\eta\, cl} : D((X-X_o)_{cl}, \Lambda) \longrightarrow D(X_o \times \mathcal{S}^*, \Lambda) .$$

2.5. La construction 1.1.11 définit un morphisme de topos de $\mathcal{S}^*$ dans η qui se prolonge en

$$\varepsilon : \mathcal{S} \longrightarrow S^h .$$

Ce morphisme, et $\varepsilon : X_{o\, cl} \longrightarrow X_o$ (SGA4 XI 4), définissent

$$\varepsilon : X_{o\, cl} \times \mathcal{S} \longrightarrow X_o \times S^h .$$

Si $\tilde{D}^*$ est un revêtement universel de D^* et que $k(\bar{\eta})$ est la clôture algébrique correspondante (1.1.10) de $k(\eta)$, on a

$$\varepsilon^*(F_o, F_\eta, \alpha) = (\varepsilon^* F_o, \varepsilon^* F_\eta, \varepsilon^* \alpha) .$$

2.6. Soit $\tilde{D}^*$ un revêtement universel de D^* , $k(\bar{\eta})$ la clôture algébrique correspondante de $k(\eta)$ et $\bar{S}$ le normalisé de S^h dans $k(\bar{\eta})$. Ecrivons $\bar{S}$ comme limite projective de S-schémas affines S_i ; pour chaque i , et après avoir remplacé D par un disque plus petit D_i , on dispose d'un morphisme naturel de S_{cl}-espaces $\tilde{D}_i \xrightarrow{a_i} S_{i_{cl}}$. Soit $j_i : U_i \hookrightarrow S_i$ l'ouvert de S_i complément de l'image O du point fermé de $\bar{S}$, et $i : O \hookrightarrow S_i$.

Soit F un faisceau sur X . Soit $F_{cl} = \varepsilon^* F$. Notons encore j_i l'inclusion de $X \times_S U_i$ dans $X \times_S S_i$, i celle de X_o dans $X \times_S S_i$, et F l'image réciproque de F sur $X \times_S S_i$. On a

$$\Psi(F) = (i^* F, \varinjlim i^* j_{i_*} j_i^* F, \varinjlim (\varphi_i)) .$$

Les foncteurs ε^* et image réciproque commutent. Le morphisme $\varepsilon^* j_{i*} \longrightarrow (j_{i_{cl}})_* \varepsilon^*$ fournit donc

$$c_i : (i^* j_{i*} j_i^* F)_{cl} \longrightarrow i^* j_{i*} j_i^* (F_{cl}) .$$

Soit $\bar{j}$ (resp. $\bar{j}_i$) l'inclusion de $\tilde{D}^*$ (resp. $\tilde{D}_i^*$) dans $\tilde{D}$ (resp. $\tilde{D}_i$), et les inclusions $X \times_S \tilde{D}^* \hookrightarrow X \times_S \tilde{D}$, $X \times_S \tilde{D}_i^* \hookrightarrow X \times_S \tilde{D}_i$ qui s'en déduisent. La flèche d'adjonction $\mathrm{Id} \longrightarrow a_{i*} a_i^*$ définit

$$i^* j_{i*} j_i^* F_{cl} \longrightarrow i^* \bar{j}_{i*} \bar{j}_i^* \bar{F}_{cl} = i^* \bar{j}_* \bar{j}^* \bar{F}_{cl} ,$$

d'où par passage à la limite

$$c_\eta : \Psi_{\bar{\eta}}(F)_{cl} \longrightarrow \Psi_{cl}(F_{cl}) .$$

Ce morphisme définit le <u>morphisme de comparaison</u>

(2.6.1) $\quad c : \varepsilon^* \Psi(F) \longrightarrow \Psi_{cl}(\varepsilon^* F)$.

On définit de même

(2.6.2) $\quad c_\eta : \varepsilon^* \Psi_\eta(F) \longrightarrow \Psi_\eta(\varepsilon^* F)$.

2.7. Les morphismes 2.6.1 et 2.6.2 se dérivent en

$$c : \varepsilon^* R\Psi \longrightarrow R\Psi_{cl} \circ \varepsilon^*$$

$$c_\eta : \varepsilon^* R\Psi_\eta \longrightarrow R\Psi_{\eta\, cl} \circ \varepsilon^* .$$

Théorème 2.8. Soit $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, \Lambda)$ (resp. $\mathrm{Ob}\, D(X-X_o, \Lambda)$) un complexe de faisceaux de Λ-modules dont les faisceaux de cohomologie $H^i(K)$ sont constructibles. Alors, le morphisme de comparaison

$$c : \varepsilon^* R\Psi(K) \longrightarrow R\Psi_{cl}(\varepsilon^* K)$$

(resp. $\quad c : \varepsilon^* R\Psi_\eta(K) \longrightarrow R\Psi_{\eta\, cl}(\varepsilon^* K)$)

est un isomorphisme.

Il suffit de prouver l'assertion pour $R\Psi_\eta$; de plus, les deux membres de (2.7) étant des foncteurs triangulés de dimension cohomologique finie, il suffit de traiter le cas où K est réduit à un faisceau F (placé en degré 0). La démonstration est toute pareille à celle du théorème de finitude XIII 2.3.1 : $R\Psi$ et $R\Psi_{cl}$ ayant les mêmes propriétés de variance, on se ramène par les dévissages de loc. cit. (où on se permet de retrécir S) au cas où X est régulier, $f^{-1}(0)$ un diviseur à croisements normaux dans X et où F est $\mathbb{Z}/\ell$. On compare alors I 3.3 à son analogue transcendant.

§ 3. Singularités isolées

3.1. La variété des cycles évanescents.

3.1.1. Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, X un espace analytique, $0 \in X$ et $f : X \to D$ un morphisme tel que $f(0) = 0$. On suppose que f est lisse en dehors de 0 (en particulier, X est lisse en dehors de 0). On se propose d'étudier les cycles évanescents au voisinage de 0 ; on ne restreint donc pas la généralité en supposant X plongé dans $\mathbb{C}^n \times D \subset \mathbb{C}^{n+1}$, de façon compatible à la projection sur D, et de sorte que 0 s'envoie sur 0.

3.1.2. Soit $\delta(x)$ une fonction analytique réelle sur X (restriction à X d'une fonction analytique réelle sur $\mathbb{C}^{n+1}$), telle que, pour $x \in X_o = f^{-1}(0)$, on ait

(a) $\delta(x) \geq 0$;

(b) $\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On prendra par exemple pour δ le carré de la distance euclidienne, dans $\mathbb{C}^{n+1}$, de x à 0. Le lieu des points critiques de la restriction de δ à X_o est analytique réel donc, dans un voisinage convenable de 0, n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Remplaçant X par un voisinage ouvert de 0 et appliquant Sard, on peut donc obtenir la situation suivante

(c) pour $r > 0$ convenable, $X_o \cap \delta^{-1}([0, r])$ est compact,

(d) sur X_o, δ n'a pas de valeur critique $\leq r$.

Quitte à rétrécir X davantage, on a alors

(e) il existe une fonction C^∞ $\tau(s)$ $(0 \leq s \leq r)$, avec $\tau(0) = 0$ et $\tau'(s) > 0$ pour $s > 0$, telle que, pour $0 < s \leq r$ et $0 \leq |t|^2 \leq \tau(s)$, $X_t = f^{-1}(t)$ soit transverse à l'hypersurface réelle $\delta(x) = s$ de X et que la boîte

$$B_{t,d} = \{x \in X \mid \delta(x) \leq d \text{ et } |f(x)|^2 < t\}$$

soit propre sur le disque ouvert D_t de rayon $t^{1/2}$.

Soit $L = X_o \cap \delta^{-1}(r)$. D'après (c) et (d), il existe un homéomorphisme de $X_o \cap \delta^{-1}([0, r])$ avec le cône ($L \times [0, r]$/ contraction de $L \times \{0\}$ en un point), transformant δ en la 2e coordonnée, et C^∞ en dehors de l'origine.

3.1.3. Soient $d \leq r$ et $t \leq r(d)$. En dehors de 0 , $B_{t,d}$ est une variété à coins et la projection f de $B_{t,d}$ sur D_t une fibration. En particulier

(a) $B_{t,d}$ induit sur $D_t^* = D_t - \{0\}$ un fibré C^∞ en variétés compactes à bord;

(b) le bord $\delta(x) = d$ de ce fibré est prolongé en un fibré C^∞ $\partial B_{t,d}$ en variétés compactes sur D_t .

Soit $y \in D_t^*$. Nous appellerons la variété à bord $V = f^{-1}(y)$ la variété des cycles évanescents . Le disque étant contractile, le fibré $\partial B_{t,d}$ sur D_t est isomorphe au fibré constant de fibre ∂V , et l'ensemble des isomorphismes de fibré $\partial B_{t,d} \xrightarrow[\alpha]{\sim} \partial V \times D_t$, qui soit l'identité sur la fibre en y , est contractile. Choisissons en un, noté α . Relevons le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sur $S_{|y|}$ (circonférence de rayon $|y|$) en un champ de vecteur u sur $f^{-1}(S_{|y|})$ qui, au bord, soit compatible à α ($d\alpha(u) = (\frac{\partial}{\partial \theta}, 0)$) . L'ensemble de ces relèvements est contractile. Par intégration (tourner une fois dans le sens positif), u définit un difféomorphisme T de V sur elle-même, qui est l'identité sur ∂V ; c'est la transformation de monodromie . Elle est bien définie modulo isotopies mod ∂V .

En un sens qu'on laisse au lecteur le soins de préciser, (V, T) est indépendant des choix de t et s . J'ignore s'il est indépendant du choix de δ . On vérifie toutefois qu'il en est ainsi lorsqu'on se restreint à prendre pour δ la restriction à X d'une fonction f sur $\mathbb{C}^{n+1}$ telle que, sur l'espace tangent de Zariski de X_o en 0 , on ait $df = 0$ et $d^2f > 0$ (définie positif). Le point est que, pour δ et δ' de ce type, on peut choisir r comme en 3.1.2 (c) (d) uniformément pour tous les $\lambda\delta + (1-\lambda)\delta'$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$.

3.1.4. Soient (V, T) et (V_1, T_1) déduit de (V, T) par adjonction d'un collier:

$V_1 - V^o \simeq \partial V \times [0, 1]$ et T_1 est l'identité sur $V_1 - V^o$.

Soit $f' : W \longrightarrow D_t$ l'espace sur D_t suivant (cf. 1.4.3)

(a) Soient $\widetilde{D}_t^*$ un revêtement universel de D_t^* de point de base y et W^* le fibré sur D_t^* quotient de $V_1 \times \widetilde{D}_t^*$ par la relation engendrée par $(v, y) \simeq (T_1 v, e^{2\pi i} y)$.

(b) Puisque $T_1 | V_1 - V^o$ est trivial, on peut recoller W^* et le fibré trivial sur D_t de fibre $V_1 - V$ en un espace W_1 sur D_t .

(c) $W = W_1 \cup \{0\}$, avec $f'(0) = 0$. W est muni de l'unique topologie induisant celle de W_1 , pour laquelle f' soit continue et que $f'^{-1}(\bar{D}_{t'})$ $(t' < t)$ soit la compactification par un point de $W_1 \cap f'^{-1}(\bar{D}_{t'})$.

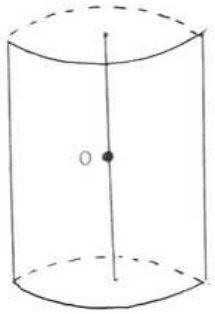
On munit $W - \{0\}$ de la connexion intégrable (1.3.4) pour laquelle la trivialisation fournie par (a) de l'image réciproque de W sur $\widetilde{D}^*$ soit horizontale.

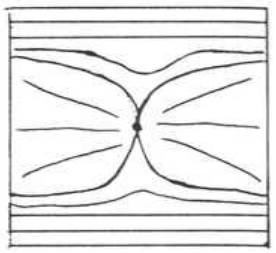
Proposition 3.1.5. Il existe un homéomorphisme Ψ , compatible à la projection sur D_t et envoyant 0 sur 0 , de $B_{s,t}$ avec W ; cet homéomorphisme peut être choisi un difféomorphisme en dehors de 0 .

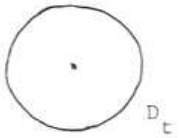
Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite du séminaire.

Soient $d_o < d_1 \leq r$, $t_o \leq \tau(d_o)$ et $y \in D^*_{t_o}$. On a $B_{t_o, d_o} \subset B_{t_o, d_1}$ et $B_{t_o, d_1} - B^o_{t_o, d_o}$ est un fibré sur $D_{|t|_o}$. Trivialisons-le et au-dessus de la circonférence $S_{|y|}$, relevons le champs de vecteur $\frac{\partial}{\partial \theta}$ de façon compatible à cette trivialisation. Soit T_1 l'endomorphisme correspondant de $V_1 = f^{-1}(y) \cap B_{t_o, d_1}$, et $V_o = f^{-1}(y) \cap B_{t_o, d_o}$. Alors, $(V_o \subset V_1, T_1)$ est isomorphe à $(V \subset V_1, T_1)$ de 3.1.4. Soit W construit à l'aide de $(V_o \subset V_1, T_1)$. On a $f'^{-1}(y) = V_1$, canoniquement. La démonstration montrera qu'on peut prendre Ψ qui induise l'identité $f^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} f'^{-1}(y)$.

Les dessins suivants (f, et sa restriction à $f^{-1}(\mathbf{R})$) résument la démonstration



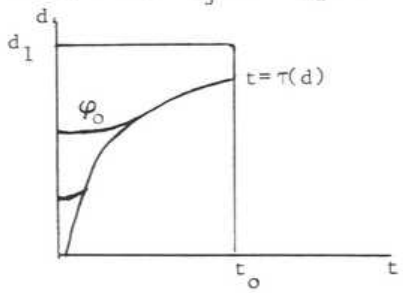




Soit $B^+ \subset B_{t_o,d_1}$ l'ensemble des x tels que $|f(x)|^2 \leq \tau(\delta(x))$. Soit φ_n une suite de fonction C^∞ de $[0, t_o]$ dans $(0, d_1]$ telle que, pour une suite $\tau_o > r_1 > \ldots$ tendant vers 0 , on ait

(a) pour $|t|^2 \geq r_i$, φ_i est la réciproque de la fonction τ .

(b) pour $|t|^2 < r_i$ et $j > i$, $\varphi_j(t) < \varphi_i(t)$



L'ensemble $B^+ - \{0\}$ est réunion des fibrés sur D_t B_i^+ : $\delta(x) \geq \varphi_i(|f(x)|^2)$. Un argument standard, utilisant que δ n'a pas de points critiques sur les fibres de $B^+ - \{0\} \longrightarrow D_t$, montre qu'il existe un difféomorphisme α_i de B_i^+ avec B_{i+1}^+ , compatible à la projection sur D_t , et l'identité en dehors d'un petit voisinage du sous-espace

$(\delta(x) = \varphi_i(|f(x)|^2)$, $|f(x)|^2 \leq r_i)$ de B_i^+ . Composant les α_i et passant à la limite, on obtient un difféomorphisme α de $B_o^+ - \{x \mid (x) = 0$ et $\delta(x) = \varphi_o(0)\}$ avec $B^+ - \{0\}$. Transportons par α une trivialisation du fibré B_o^+ sur D_t pour obtenir une connexion intégrable ∇' sur $B^+ - \{0\}$. On peut alors

(a) prolonger la restriction de cette connexion à $f^{-1}(S_{|y|}) \cap B^+$ en une connexion sur $f^{-1}(S_{|y|}) / S_{|y|}$ (ce prolongement donnant T_1) .

(b) prolonger à B_{t_o,d_1} le relèvement sur $B^+ - \{0\}$ fourni par ∇' du champ de vecteurs radial sur D_t .

Il existe alors une et une seule connexion intégrable ∇ sur B_{t_o,d_1} qui prolonge ∇' ,(a) et (b), et un et un seul difféomorphisme horizontal de $B_{t_o,d_1} - \{0\}$ avec $W - \{0\}$ qui soit l'identité sur $f^{-1}(y)$. Il répond au problème .

3.1.6. Une généralisation. Ce qui précède se généralise au cas où $f : X \to D$ est un morphisme tel que $0 \in X$ soit un point de non lissité isolé dans X_o . Le lieu de non lissité de f est alors fini sur D (quitte à rapetisser X et D). La variété des cycles évanescents V a alors un ensemble fini Σ de points critiques; $V - \Sigma$ est une variété différentiable à bord (de bord compact, mais non compacte). La transformation de monodromie T est l'identité sur le bord et laisse Σ stable. Enfin, 3.1.5 reste valable, l'homéomorphisme fibré Ψ étant un difféomorphisme en dehors du lieu critique, qu'il envoie sur ce qui dans W provient de Σ .

3.1.7. La proposition 3.1.5 permet d'utiliser les calculs de 1.4. On trouve ainsi que

(A) Les groupes de cycles évanescents $(R^i \varphi(\Lambda))_o$ sont les groupes de cohomologie réduits, à valeurs dans Λ , de la variété des cycles évanescents V .

(B) Les groupes $H^i_{\{0\}}(X_o, R\Psi(\Lambda))$ sont les groupes de cohomologie à support propre de V^o , à valeurs dans Λ .

(C) La variation

$$\mathrm{Var} : \tilde{H}^i(V, \Lambda) \longrightarrow H_c^i(V^o, \Lambda) = H^i(V \bmod \partial V, \Lambda)$$

est la variation classique, définie par l'automorphisme T de V (qui est l'identité sur ∂V).

3.1.8. Les assertions (A) (B) (C) sont en fait plus élémentaires que 3.1.5; en voici une démonstration-construction directe, qui nous dispensera de vérifier que les isomorphismes (A) (B) sont indépendants des choix faits dans la construction 3.1.5.

Soient $d \leq r$, $t \leq \tau(d)$ et B la boîte ouverte

$$B = \{x \mid \delta(n) < d \text{ et } |f(n)|^2 < t\} .$$

Soit $\tilde{D}^*$ un revêtement universel de D^* , et

(3.1.8.1)
$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xhookrightarrow{\bar{i}} & \tilde{D}_t & \xhookleftarrow{\bar{j}} & \tilde{D}_t^* \\ \| & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ \{0\} & \xhookrightarrow{i} & D_t & \xhookleftarrow{j} & D_t^* \end{array}$$

déduit de 1.2.7.2 par restriction à D_t . Soit

(3.1.8.2)
$$\begin{array}{ccccc} B_o & \xhookrightarrow{\bar{i}} & \bar{B} & \xhookleftarrow{\bar{j}} & \bar{B}^* \\ \| & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ B_o & \xhookrightarrow{i} & B & \xhookleftarrow{j} & B^* \end{array}$$

image réciproque de $f : B \longrightarrow D$ sur (3.1.8.1). On note encore f la projection de (3.1.8.2) sur (3.1.8.1).

(A) Par définition, $R^i\Psi_\eta(\Lambda)_o$ est la limite inductive, pour U parcourant les voisinages de O dans X , des groupes de cohomologie $H^i(U \times_D \tilde{D}^*, \Lambda)$. Faisons parcourir à U le système fondamental de O formé des boîtes B comme plus haut. Le produit fibré $U \times_D \tilde{D}^* = \bar{B}^*$ est un fibré de fibre V^o sur D_t^* (contractile). Le système inductif des $H^i(\bar{B}^*, \Lambda)$ est donc constant, de valeur $H^i(V^o, \Lambda) = H^i(V, \Lambda)$.

Les isomorphismes obtenus

(3.1.8.3) $\qquad R^i\Psi_\eta(\Lambda)_o = H^i(V, \Lambda)$

peuvent se préciser en un isomorphisme composé (cf. (B) ci-dessous).

(3.1.8.4) $$R\Psi_\eta(\Lambda)_o \xleftarrow{\sim} R\Gamma(B_o, R\Psi_\eta(\Lambda)) \xleftarrow{\sim} (Rf_* R\bar{j}_* \Lambda)_o \xleftarrow{\sim} R\Gamma(\tilde{D}_t, Rf_* R\bar{j}_* \Lambda)$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$R\Gamma(V, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(V^o, \Lambda) \xleftarrow{\sim} R\Gamma(\bar{B}^*, \Lambda) \quad .$$

Le complexe $R\Phi(\Lambda)_o$ est défini par le triangle distingué

$$\Lambda \longrightarrow (R\Psi_\eta \Lambda)_o \longrightarrow R\Phi(\Lambda)_o \longrightarrow \quad .$$

Les $R^i\Phi(\Lambda)_o$ sont donc les groupes de cohomologie réduits de V .

(B) Soit $\bar{\Phi}$ l'ensemble des fermés de $\bar{B}^*$ dont l'adhérence dans $\bar{B}$ est propre sur $\tilde{D}$. Les flèches suivantes sont des isomorphismes

(3.1.8.5) $$R\Gamma_{\{0\}}(R\Psi_\eta(\Lambda)) \xrightarrow[①]{\sim} R\Gamma_c(B_o, R\Psi_\eta(\Lambda)) \xleftarrow[②]{\sim} (Rf_! R\bar{j}_* \Lambda)_o$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ③\uparrow\wr$$
$$R\Gamma_c(V^o, \Lambda) \xleftarrow[⑤]{\sim} R\Gamma_{\bar{\Phi}}(\bar{B}^*, \Lambda) \xrightarrow[④]{=} R\Gamma(\tilde{D}_t, Rf_! R\bar{j}_* \Lambda) \quad .$$

(① parce que B_o est un cône (3.1.2) et que $R^i\Psi_\eta(\Lambda)$ est constant en dehors de 0 ;

② par le théorème de changement de base pour les images directes à support propre;

③ parce que $Rf_! R\bar{j}_* \Lambda$ est constant en dehors de 0 ,

④ est la version "catégorie dérivée" de la suite spectrale d'un foncteur composé;

⑤ parce que $\tilde{D}^*$ est contractile).

L'isomorphisme (3.1.8.5) fournit les isomorphismes voulus

(3.1.8.6) $$R^i\Gamma_{\{0\}}(R\mathcal{V}_\eta(\Lambda)) = H^i_c(V^o, \Lambda) .$$

Nous vérifierons (C) en 3.1.10.

3.1.9. (cf. [3]) Soient X un espace topologique, $i : Y \hookrightarrow X$ une partie fermée de X, T un automorphisme de X, induisant l'identité sur Y, et Λ un groupe abélien. Pour définir la variation Var, on choisit une résolution T-équivariante Λ^*_X de Λ sur X, une résolution Λ^*_Y du faisceau Λ sur Y, sur laquelle T agit trivialement par convention, et un morphisme équivariant

$$\varphi : \Lambda^*_X \longrightarrow i_*\Lambda^*_Y ,$$

qui résoud le morphisme évident $\varphi_o : \Lambda_X \longrightarrow i_*\Lambda_Y$. On suppose les faisceaux Λ^i_X et Λ^i_Y acycliques pour les foncteurs qui seront considérés. Passant aux sections globales, on trouve

$$\Gamma(\varphi) : \Gamma(\Lambda^*_X) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^*_Y) .$$

Supposons pour simplifier les $\Gamma(\varphi)^i$ surjectifs (sinon, on les rend surjectifs par addition à $\Gamma(\Lambda^*_X)$ du cône de $\Gamma(\Lambda^*_Y)$). On pose

$$R\Gamma(X \bmod Y, \Lambda) = \mathrm{Ker}(\Gamma(\varphi)) .$$

Sous des hypothèses raisonables, si Φ est l'ensemble des fermés de X disjoints de Y, on a

$$\Gamma_\Phi(X-Y, \Lambda^*_X) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X \bmod Y, \Lambda)$$

(quasi-isomorphisme). L'endomorphisme $T-1$ de $\Gamma(\Lambda^*_X)$ (T agit par transport de structure) est nul sur Λ (les constantes) et se factorise par $\mathrm{Ker}(\Gamma(\varphi))$, d'où dans la catégorie dérivée et sous les mêmes hypothèses, un morphisme variation

$$\mathrm{Var} : R\widetilde{\Gamma}(X, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_\Phi(X-Y, \Lambda)$$

(sans hypothèse, on trouve Var : $R\widetilde{\Gamma}(X, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma(X \bmod Y, \Lambda)$).

Cette description se simplifie si T est l'identité dans un voisinage de Y et, dans ce coisinage, est l'identité sur Λ_X^* . L'endomorphisme T-1 de $\Gamma(\Lambda_X^*)$ se factorise alors par $\Gamma_{\dot{+}}(\Lambda_X^*)$, et fournit la variation.

Proposition 3.1.10. Via les isomorphismes 3.1.8 (A) (B), la variation $(R\Phi_\eta(\Lambda))_o \to R\Gamma_{\{0\}}(R\Psi_\eta(\Lambda))$ est égale à la variation 3.1.9 définie par l'automorphisme T de V , identique sur ∂V .

Le lecteur est invité à faire un petit dessin plutôt que de lire la démonstration. Soient ${}_fB$ la boîte fermée de 3.1.2 et ${}_fC \subset {}_fB$ un collier le long du bord (${}_fC \simeq \partial_f B \times [0, 1]$ comme fibré sur D_t via un isomorphisme qui envoie $\partial_f B \times \{1\}$ identiquement sur $\partial_f B$). Soit

$$ {}_f\alpha : {}_fC \xrightarrow{\sim} (\partial V \times [0,1]) \times D_t $$

une trivialisation du fibré ${}_fC$ sur D_t , dont la fibre en $y \in D_t$ induite l'identité $\partial V = \partial(f^{-1}(y)) \xrightarrow{\sim} \partial V \times \{1\}$. Soit $C = {}_fC \cap B$ et

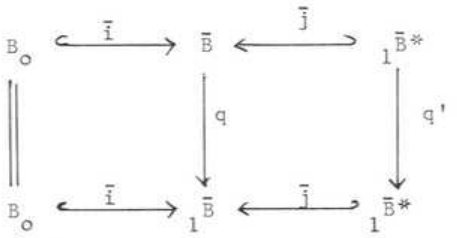
$$ \alpha : C \xrightarrow{\sim} (\partial V \times [0,1[) \times D_t $$

induit par ${}_f\alpha$. On garde les notations de 3.1.8.2.

Soient R la relation d'équivalence sur $\bar{B}$

$x = y$ ou $p(x), p(y) \in C$ et $\alpha(p(x)), \alpha(p(y))$ ont même image dans $\partial V \times [0,1[$.

Soient ${}_1\bar{B} = \bar{B}/R$, ${}_1\bar{B}^* = \bar{B}^*/R$ et ${}_1\bar{C}^* = p^{-1}(C)/R$. On dispose d'un diagramme commutatif



Soit Λ^* une résolution $\pi_1(D^*)$-équivariante de Λ par des faisceaux acycliques sur $\bar{B}^*$. Par définition, la variation se calcule à partir du morphisme de complexe

$$\Lambda\,[0] \longrightarrow \bar{i}^*\,\bar{j}_*\,(\Lambda^*) \quad .$$

Puisque $\Lambda \xrightarrow{\approx} Rq_*\Lambda$ et $\Lambda \xrightarrow{\approx} Rq'_*\Lambda$, on peut aussi la calculer à l'aide d'une résolution équivariante de Λ sur ${}_1\bar{B}^*$ et du morphisme

$$\Lambda[0] \longrightarrow \bar{i}^*\,{}_1\bar{j}_*(\Lambda) \quad .$$

Via (A) (B), on identifie alors la variation au morphisme composé

(3.1.10.1)
$$\begin{array}{ccccc} R\Gamma(V,\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(V^o,\Lambda) & \xleftarrow[①]{\sim} & R\Gamma({}_1\bar{B}^*,\ \Lambda) \\ & & & & \Big\downarrow \mathrm{Var} \\ & & R\Gamma_c(V^o,\Lambda) & \xleftarrow[②]{\sim} & R\Gamma({}_1\bar{B}^* \bmod {}_1\bar{C}^*,\Lambda) \end{array} \quad ,$$

où ① et ② sont déduits de l'inclusion de V^o dans ${}_1\bar{B}^*$, et où Var est la variation 3.1.9 pour ${}_1\bar{B}^*$ et l'action du générateur positif de $\pi_1(D^*)$ (ce groupe agit sur ${}_1\bar{B}^*$ via son action 1.15; il agit trivialement sur ${}_1\bar{C}^*$).

Choisissons une connexion ∇ sur B^*/D^* , compatible à la trivialisation de C . Cette connexion trivialise $\bar{B}^*$ et définit par passage au quotient $u : {}_1\bar{B}^* \longrightarrow V$. Pour T défini comme en 3.1.3, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 1\bar{B}^* & \xrightarrow{u} & V \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ 1\bar{B}^* & \xrightarrow{u} & V \end{array}$$

est commutatif. L'application u induit des isomorphismes en cohomologie, de sorte que (3.1.10) résulte de 3.1.10.1 et de la fonctorialité de la variation.

La proposition 3.1.10 sera censée justifier un calcul explicite que nous ferons plus tard et où, comme ici, T sera l'identité dans un voisinage de ∂V. On prendra une classe de cohomologie c, représentée par un courant C, et on utilisera que $Var(c)$ est représenté par le courant $TC - C$, à support compact dans V^o.

3.1.11. Pour calculer en pratique T, on procède souvent en deux étapes

(a) On fixe t et d avec $t \leq \tau(d)$, on choisit $y \in D_t$, et on choisit une connexion ∇ sur $f^{-1}(S_{|y|}) \cap B_{t,d}$. Cette connexion ∇ définit un difféomorphisme T_o de $V_o = f^{-1}(y) \cap B_{t,d}$ sur lui-même, qui n'est pas nécessairement l'identité sur le bord.

(b) On choisit une trivialisation de $\partial B_{t,d}$ sur D_t. L'intégration de ∇ fournit un difféomorphisme $\varphi(\theta)$ de ∂V avec $f^{-1}(e^{2\pi i\theta}y) \cap \partial B_{t,d}$, identifié à ∂V par la trivialisation. Pour $0 \leq \theta \leq 1$, $\varphi(\theta)$ est un chemin dans $Diff(\partial V)$, qui relie l'identité à ∂T_o.

Le couple (T_o, φ) obtenu dépend des choix arbitraires faits. L'ensemble de ces choix étant contractile, il n'en dépend pas à homotopie près. Pour T du type 3.1.3, (T, chemin trivial) est un (T_o, φ) du type considéré ici.

3.1.12. On sait que $Diff(V) \longrightarrow Diff(\partial V)$ est une fibration, de sorte que $T \longrightarrow (T$, trivial) induit une bijection entre

a) l'ensemble des difféomorphismes $T : V \longrightarrow V$ avec $\partial T = Id$, à isotopie près, avec

b) l'ensemble des couples (T_o, φ) , $T_o : V \xrightarrow{\sim} V$, φ classe d'homotopie de chemins de Id à ∂T , à isotopie près.

Un couple (T_o, φ) calculé par (a) (b) ci-dessus détermine donc T . Concrètement, on calcule T à l'aide de (T_o, φ) comme suit:

(α) On prend un collier $[0, 1] \times \partial V \xhookrightarrow{\alpha} V$ de ∂V dans V (avec $\alpha(1, x) = x$), et un représentant de φ tel que $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Diff}(\partial V)$, prolongé pour $x < 0$ par Id , soit C^∞ . Soit, dans le collier, $\beta(x) = \mathrm{pr}_1\, \alpha^{-1}(x)$ (β est sans point critique, à valeurs dans $[0, 1]$, et vaut 1 sur ∂V) .

(β) On prend $T = T_o$ en dehors du collier et, dans le collier,

$$T(x) = T_o(\varphi(\beta(x))^{-1}(x))$$

3.1.13. Voici une variante de 3.1.11(b) pour calculer la classe d'homotopie de chemins φ . Sur chaque rayon $\arg(z) = \theta$, on choisit une trivialisation du fibré $\partial B_{t,d}$, variant continument avec θ . On identifie $(\partial V)_o = f^{-1}(0) \cap \partial B_{t,d}$ à ∂V grâce à la trivialisation au-dessus du rayon passant par y . Soit $\Psi_\theta : V \longrightarrow f^{-1}(e^{i\theta} y) \cap B_{t,d}$ déduit de l'intégration de ∇ . Transportant à Ψ_θ le long des rayons, on obtient un difféomorphisme de $(\partial V)_o$, donc de ∂V , sur lui-même. C'est $\varphi(\theta)$.

3.2. La formule de Picard-Lefschetz (cas transcendant).

3.2.1. Nous nous proposons d'expliciter les résultats de 3.1 pour l'application $f = \sum_1^{n+1} z_i^2$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$. On prend pour δ la fonction $\Sigma |z_i|^2$, et une boîte $B = B_{a,b}$

$$\left| \Sigma\, z_i^{\,2} \right| \leq a^2$$

$$\Sigma\, |z_i|^2 \leq b^2$$

avec $0 < a < b$ (ce n'est que pour simplifier les notations qu'on prend une boîte

fermée plutôt qu'une boîte 3.1.2).

3.2.2. La variété des cycles évanescents V admet l'équation

$$\Sigma z_i^2 = a^2$$

(3.2.2.1)

$$\Sigma |z_i|^2 \leq b^2$$

Décomposons $z = (z_i)$ en parties réelle et imaginaire: $z = x + iy$. Les équations précédentes se récrivent

(3.2.2.2)
$$x^2 - y^2 = a^2$$
$$x.y = 0 \qquad \text{(i.e. } x \perp y \text{ dans } \mathbf{R}^n \text{)}$$
$$x^2 + y^2 \leq b^2$$

Prenons sur V le nouveau système de coordonnées $X = x/|x|$ et $Y = y(\frac{b^2-a^2}{2})^{-1/2}$. On a $x = X.(a^2 + y^2)^{1/2}$ et (3.2.2.2) se récrit

(3.2.2.3)
$$X^2 = 1$$
$$XY = 0$$
$$Y^2 \leq 1$$

Ceci identifie V au fibré en boules tangent à la sphère S^n .

3.2.3. L'application $\theta \longmapsto \exp(2\pi i\theta)a$ identifie $\mathbf{R}$ au revêtement universel de la circonférence S_a de rayon a et centre O de $\mathbb{C}$. Le fibré sur $\mathbf{R}$ image réciproque de B est isomorphe à $R \times V$. Nous le trivialiserons à l'aide de l'isomorphisme $v \longmapsto \exp(\pi i\theta)v$ de V avec la fibre de B en $\exp(2\pi i\theta)a$. Soit T_o de cette trivialisation comme en 3.1.11. En coordonnées (3.2.2.3), on a $T_o(X,Y) = (-X, -Y)$

3.2.4. Le fibré sur le disque D_a de rayon a , bord du "fibré" B , a pour équation

$$\Sigma |z_i|^2 = b^2 \quad , \quad f(z) \in D_a \ ,$$

la projection sur le disque étant f. Nous nous proposons de décrire une trivialisation de l'image réciproque de ce fibré au-dessus de chacun des rayons $e^{2\pi i\theta}\mathbb{R}^+ \cap D_a$.

Au dessus du rayon $\mathbb{R}^+ \cap D_a$, on prend pour trivialisation l'isomorphisme avec $(\mathbb{R}^+ \cap D_a) \times \partial V$ donné en coordonnées (3.2.2.3) sur ∂V par

$$z = x+iy \longmapsto (f(z), X, Y) = (f(z), x/|x|, y/|y|) \ .$$

Au-dessus de $(e^{2\pi i\theta}\mathbb{R}^+) \cap D_a$, on le trivialise par la trivialisation image de la précédente par multiplication par $e^{\pi i\theta}$. Appliquons 3.1.13 et prenons sur ∂V les coordonnées (X, Y)

$$X^2 = Y^2 = 1, \ XY = 0 \ . \tag{3.2.4.1}$$

On trouve que, si $\varphi(\theta)$ transforme (X, Y) en (X_θ, Y_θ), on a

$$X_\theta + i\,Y_\theta = e^{\pi i\theta}(X + i\,Y) \qquad (0 \le \theta \le 1) \tag{3.2.4.2}$$

3.2.5. En résumé, la variété des cycles évanescents V est le fibré en boules tangent à S^n. La transformation de monodromie est représentée par (T_o, φ), où T_o est la différentielle de l'application $x \longmapsto$ point antipodique, et où φ est le chemin suivant de Id à ∂T_o : par $\varphi(\theta)$, on déplace par transport parallèle chaque vecteur tangent unitaire le long de la geodésique qu'il engendre d'une longueur $+\pi\theta$ (le $+$ signifie: "dans le sens vers lequel pointe le vecteur"). Pour $\theta = 1$, on arrive au vecteur antipodique.

Par 3.1.13, on obtient la description suivante de T : soit φ une application C^∞ $[0,1] \to [0,1]$, valant 0 près de 0 et 1 près de 1. T consiste à déplacer u, le long de la geodésique qu'il engendre, d'une longueur $-\pi(1-\varphi(|u|))$ (près de $|u| = 1$, c'est l'identité, près de $|u| = 0$, c'est l'application antipodique).

3.2.7. Soient W une variété différentiable de dimension x et $p : T(W) \to W$ son fibré tangent (vu comme une variété).

Si $(x_1,\ldots,x_n)$ est un système de coordonnées locales sur W, $(x_1,\ldots,x_n, dx_1,\ldots,dx_n)$ est un système de coordonnées locales sur $T(W)$. Soit ε' l'orientation de $T(W)$ définie par ce système de coordonnées, elle ne dépend pas du choix des x_i, donc est globalement définie. Supposons W orientable. La sous-variété $W \subset T(W)$ (section 0), munie d'une orientation (resp. d'une orientation de son fibré normal), définit un élément w de $H_d(T(W))$ (resp. $H_c^d(T(W))$). On sait que la self-intersection de $W \subset T(W)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\int w \wedge w = \chi(W)$$

(pour l'orientation ε').

Dans le cas de la variété des cycles évanescents V, la structure complexe de V définit une orientation ε. Elle est liée à l'orientation ε' du fibré tangent à S^n par

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varepsilon' .$$

3.2.8. Le cycle évanescent δ est bien défini au signe près. Pour $n \neq 0$, c'est l'élément de $H_c^n(V^o)$ défini par la sous-variété $S^n \subset V^o$. Pour $n = 0$, V est réduit à deux points et c'est la différence de ces deux points. Pour l'orientation complexe de V, on a par 3.2.7

$$(3.2.8.1) \qquad (\delta, \delta) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + (-1)^n) .$$

3.2.9. Posons $\tilde{H}_c^i(V^o) = \mathrm{Ker}\,(H_c^i(V^o) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Z})$ (c'est H_c^i pour $i \neq 2n$). On a alors

$$\tilde{H}_c^i(V^o) = 0 \quad \text{pour } i \neq n$$
$$\tilde{H}_c^n(V^o) = \mathbb{Z}, \text{ engendré par } \delta .$$

Dualement, on a

$$\tilde{H}^i(V) = 0 \quad \text{pour } i \neq n$$
$$\tilde{H}^n(V) \xrightarrow[\sim]{(\ ,\ \delta)} \mathbb{Z} .$$

Pour $n \neq 0$, l'image de $\delta \in H_c^n(V^o)$ dans $H^n(V)$ est nulle pour n impair, et divisible par deux (et pas plus) pour n pair.

3.2.10. Calculons la variation

$$\mathrm{Var} : \tilde{H}^n(V) \longrightarrow H_c^n(V^o) \ .$$

Nous utiliserons d'abord l'orientation ϵ' , et supposerons que $n \neq 0$. Soit α une orientation du fibré tangent à S^n , et soit $\delta \in H_c^n(V^o)$ défini par $S^n \subset V^o$ et l'orientation α de son fibré normal. Le cocycle $\delta' \in H^n(V)$ tel que $(\delta' \delta) = 1$ est représenté par une fibre de la fibration de V^o sur S^n ; le fibré normal à cette fibré est le fibré constant, de valeur l'espace tangent en un point de S^n , et est muni de l'orientation α .

On notera que cette assertion ne dépend pas de la convention de signe choisie pour définir l'application

(sous-variété + orientation du fibré normal) $\longrightarrow$ cohomologie

(changer de convention change δ en $-\delta$ et δ' en $-\delta'$). Elle est valable si $\mathrm{Tr} : H_c^{2n}(V, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est défini comme suit :

(α) Ω_V^* étant une résolution molle de $\underline{\mathbf{R}}$, $\Gamma_c(\Omega_V^*)$ représente $R\Gamma(V, \mathbf{R})$, d'où un isomorphisme $H^i(\Gamma_c(V, \Omega_V^*)) = H_c^i(V, \mathbf{R})$ (on n'utilise pas le cobord itéré);

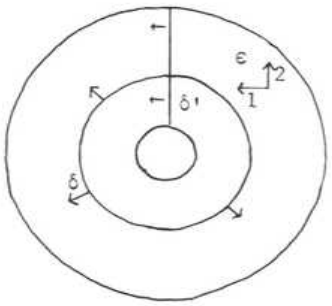
(β) Tr est l'intégration.

$T(\delta')$ coincide avec δ' dans un voisinage de ∂V , de sorte que $\mathrm{Var}(\delta') = T(\delta') - \delta'$ est à support compact dans V^o . On a

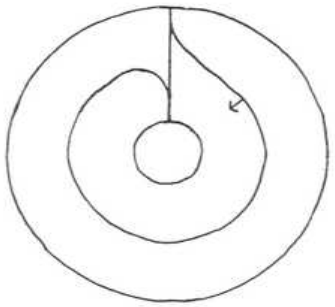
$$T(\delta') - \delta' \sim -\delta \ , \quad \text{d'où}$$

$$\mathrm{Var}(\delta') = -(\delta'\delta).\delta \ .$$

Voici le dessin pour $n = 1$. On dessine le fibré tangent à S^1 en faisant pointer vers l'extérieur les vecteurs pointant dans le sens trigonométrique choisi pour orienter S^1



δ, δ' et ε



Var(δ')

Pour l'orientation ε , on a donc

$$\mathrm{Var}(x) = -\,\varepsilon/\varepsilon'\,(x\delta)\delta \ .$$

Théorème 3.2.11. Le groupe $\widetilde{H}^n_c(V^o)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par le cycle évanescent δ . Le groupe $\widetilde{H}^n(V)$ est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$, et dual du groupe précédent. Les autres $\widetilde{H}^i_c(V^o)$ et $\widetilde{H}^i(V)$ sont nuls.

La variation est donnée par

$$\mathrm{Var}(x) = -\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(x\delta)\delta \ , \quad \text{et}$$

$$(\delta,\ \delta) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(1+(-1)^n)$$

Selon la congruence de n mod 4 , on a la table suivante

n mod 4	0	1	2	3
$(\delta,\ \delta)$	2	0	-2	0
$\mathrm{Var}(x)=$	$\pm(x\delta)\delta$	-	-	+	+
$T(\delta)=$	$(-1)^{n+1}\delta$	$-\delta$	δ	$-\delta$	δ

A titre de contrôle, on note qu'on a bien

$$T(\delta) = \delta + \mathrm{Var}(\delta) \ .$$

4. Cohomologie de De Rham

4.1. Soient D un disque analytique complexe, $0 \in D$, $D^* = D - \{0\}$ et $\widetilde{D}^*$ un revêtement universel de D^*. Soient X un espace analytique, $f : X \to D$ un morphisme et le diagramme (1.2.7.1)

(4.1.1)
$$\begin{array}{ccccc} X_o & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{j}} & \bar{X}^* \\ \| & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ X_o & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* \end{array}$$

On suppose que $X^* = X - X_o$ est non singulier (= lisse). Son revêtement $\bar{X}^*$ est donc lisse, on note $\Omega^*_{\bar{X}^*}$ le complexe de De Rham des faisceaux de formes différentielles holomorphes sur $\Omega^*_{\bar{X}^*}$. C'est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ (lemme de Poincaré holomorphe), d'où une flèche

(4.1.2)
$$\bar{j}_* \Omega^*_{\bar{X}^*} \longrightarrow R\bar{j}_* \mathbb{C}$$

dans $D^+(\bar{X}, \mathbb{C})$.

Proposition 4.2. Le morphisme (4.1.2) est un isomorphisme.

Il est clair que 4.1.1 est un quasi-isomorphisme en tout point de $\bar{X}^* \subset \bar{X}$. Il suffit donc de montrer que tout point $x \in X_o$ a un système fondamental de voisinages U dans $\bar{X}$ tels que

$$H^q(\bar{j}^{-1}(U), \Omega^p) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0 .$$

Pour V parcourant un système rondamental de x dans X, les $p^{-1}(V)$ forment un système fondamental de voisinages de x dans $\bar{X}$. En particulier, les $p^{-1}(V)$ pour V un voisinage de Stein de x dans X forment un système fondamental de voisinages de X. Pour V de Stein, $V-X_o$ est encore de Stein (car $X_o \cap V$ est défini par une équation dans V), ainsi que son revêtement $p'^{-1}(V-X_o) = \bar{j}^{-1}p^{-1}(V)$.

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\bar{X}^*$, on a donc

$$H^q(\bar{j}^{-1}\, p^{-1}(V),\ \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0 \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.3. L'isomorphisme (4.1.2) induit un isomorphisme

$$(4.3.1) \qquad \bar{i}^*\, \bar{j}_*\, \Omega^*_{\bar{X}^*} \xrightarrow{\sim} R\Psi_\eta(\mathbb{C}) \ .$$

Variante 4.4. Soit V un faisceau localement constant de vectoriels complexes de dimension finie sur X^* (un système local complexe). Le quasi-isomorphisme $V \longrightarrow \Omega^*_{X^*}(V)$ (lemme de Poincaré) induit un quasi-isomorphisme

$$(4.4.1) \qquad \bar{i}^*\, \bar{j}_*\, \Omega^*_{\bar{X}^*}(p'^*\, V) \xrightarrow{\sim} R\Psi_\eta(V) \ .$$

Nous nous proposons de montrer que 4.3.1 reste vrai lorsqu'on remplace $\bar{i}^*\, \bar{j}_*\, \Omega^*_{\bar{X}^*}$ par un sous-complexe défini par des conditions de croissance et de monodromie.

4.5. Soient $f : X^* \to D^*$ un espace topologique sur D^* , F un faisceau de $f^{-1}\mathcal{O}_{D^*}$-modules sur X^* et $\bar{F}$ son image réciproque sur $\bar{X}^* = X^* \times_{D^*} D^*$.

Soit $z : D \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement holomorphe de D dans $\mathbb{C}$, avec $z(0) = 0$. Par la suite, nous aurons toujours le droit de rétrécir D ; pour un disque assez petit, l'existence de z est une trivialité. On suppose choisie sur $\tilde{D}^*$ une fonction $\log z$ tel que $\exp(\log z) = z$, et on pose

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \ .$$

Le groupe $\pi_1(D^*)$ agit (par transport de structure) sur $H^0(\bar{X}^*, \bar{F})$. Un élément $f \in H^0(\bar{X}^*, \bar{F})$ est de détermination finie si l'ensemble de ses transformés sous $\pi_1(D^*)$ engendre un espace vectoriel $V(F)$ de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit T le générateur positif de $\pi_1(D^*)$. Pour que f soit de détermination finie,

il faut et il suffit qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul, tel que $P(T)(f) = 0$. Le polynôme P de plus petit degré tel que $P(T)(f) = 0$ est alors le polynôme minimal, égal au polynôme caractéristique, de T agissant sur $V(f)$. On dit que f est de <u>détermination finie unipotente</u> s'il existe A tel que

$$(T-1)^A f = 0 \quad .$$

Sur l'espace de ces sections, on définit $N = \frac{\log T}{2\pi i}$ par la somme finie

$$N(f) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n>0} \frac{(1-T)^n}{n} f \quad .$$

Pour f (resp. g) une section de détermination finie unipotente de $H^0(D^*, \mathbb{G})$ (resp. $H^0(\bar{X}^*, \bar{F})$), on a

$$N(f\,g) = N(f).g + f.\,N(g)$$

(le logarithme d'un autmorphisme est une dérivation).

On dit que f est de <u>détermination finie quasi-unipotente</u> s'il existe A et $B > 0$ avec

$$(T^B - 1)^A f = 0 \quad .$$

<u>Examples</u> 4.6. (pour $X = D^*$, $F = \mathbb{G}$)

$$(T - \exp(2\pi i\alpha))^{k+1} (z^\alpha (\log z)^k) = 0$$

$$N(\log z) = 1$$

$$N\frac{(\log z)^k}{k!}) = \frac{(\log z)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (0 \text{ pour } k = 0) \ .$$

<u>Proposition</u> 4.7. <u>Pour qu'une section</u> $f \in H^0(\bar{X}^*, \bar{F})$ <u>soit de détermination finie, il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire</u>

$$(4.7.1) \qquad f = \sum_{\alpha,k} f_{\alpha,k}\, z^\alpha \frac{(\log z)^k}{k!} \quad ,$$

<u>avec</u> $0 \leq \Re(\alpha) < 1$, $k \in \mathbb{N}$, <u>et les</u> $f_{\alpha,k} \in H^0(X^*, F)$ <u>presque tous nuls. Pour</u> f <u>de détermination finie, la décomposition</u> (4.7.1) <u>est unique</u>.

D'après 4.6, toute section (4.7.1) est de détermination finie. Soit réciproquement f de détermination finie: $P(T)\,(f) = 0$. Posons

$$P(X) = \prod_{\beta \in \mathbb{C}} (X-\beta)^{n'(\beta)} = \prod_{0 \le \Re(\alpha) < 1} (X-\exp(2\pi i\alpha))^{n(\alpha)}$$

avec $n(\alpha) = n'(\exp(2\pi i\alpha))$ presque toujours nul. Décomposant le $\mathbb{C}[X]$-module $V(f)$ en composante isotypique, on trouve que f admet une et une seule décomposition $f = \Sigma\, f'_\alpha$, avec

$$(T-\exp(2\pi i\alpha))^{n(\alpha)}\, f'_\alpha = 0 \ .$$

Pour $Q_\alpha \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme congru à 1 mod$(X-\exp(2\pi i\alpha))^{n(\alpha)}$ et à 0 mod $(X-\exp(2\pi i\alpha'))^{n(\alpha')}$ pour $\alpha' \neq \alpha$, on a $f'_\alpha = Q_\alpha(T)\,(f)$. Posons

$$f_\alpha = z^{-\alpha} f'_\alpha = z^{-\alpha}\, Q_\alpha(T)\,(f) \ . \tag{4.7.2}$$

Puisque $T(z^{-\alpha} f'_\alpha) = \exp(-2\pi i\alpha)\, z^{-\alpha}\, T(f'_\alpha)$, on a

$$(T-1)^{n(\alpha)}\, f_\alpha = 0 \ .$$

Si $f_\alpha = \Sigma\, f_{\alpha,k}\, \frac{(\log z)^k}{k!}$, avec $f_{\alpha,k} \in H^0(X^*, F)$, on a alors par 4.6 et l'identité $\Sigma\,(-1)^j \binom{k}{j} = \delta_{0,k}$

$$f_{\alpha,k} = \sum_{j \ge 0} (-1)^j \frac{(\log z)^j}{j!}\, N^{j+k} f_\alpha \ , \tag{4.7.3}$$

d'où l'unicité. Si réciproquement f_α est une section de détermination finie unipotente, $f_{\alpha,k}$ défini par (4.7.3) est nul pour k grand (car $N^k f_\alpha = 0$ pour k grand) et est invariant sous T , donc s'identifie à une section de F sur X^* . Montrons, ce qui revient au même, que $N f_{\alpha,k} = 0$: on applique à $N^k f_\alpha$ l'identité

$$N \sum_{j \ge 0} (-1)^j \frac{(\log z)^j}{j!} N^j = \sum_{j > 0} (-1)^j \frac{(\log z)^{j-1}}{(j-1)!} N^j + \sum_{j \ge 0} (-1)^j \frac{(\log z)^j}{j!} N^{j+1} = 0 \ .$$

On a enfin

$$\sum_{k\geq 0} f_{\alpha,k} \frac{(\log z)^k}{k!} = \sum_{j,k\geq 0} (-1)^j \frac{(\log z)^{j+k}}{j!\,k!} N^{j+k} f_\alpha$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum (-1)^j \binom{n}{j}\right) \frac{(\log z)^n}{n!} N^n f_\alpha = f_\alpha \quad ,$$

ce qui prouve 4.7.

Remarque 4.8.1. La condition $\Re(\alpha) \in [0, 1[$ de 4.7 peut se remplacer par $\alpha \in C$, pour C n'importe quel domaine fondamental pour $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Remarque 4.8.2. Soit f de détermination finie et sa décomposition (4.7.1). Pour $0 \leq \Re(\alpha) < 1$, et α tel qu'un $f_{\alpha,k} \neq 0$, soit $m(\alpha) = 1 + \sup\{k \mid f_{\alpha,k} \neq 0\}$. Si tous les $f_{\alpha,k}$ sont nuls, posons $m(\alpha) = 0$. Le polynôme caractéristique de T agissant sur $V(f)$ est

$$Pc(T, V(f)) = \prod (X - \exp(2\pi i\alpha))^{m(\alpha)}$$

En particulier, f est de détermination finie quasi-unipotente si et seulement si dans (4.7.1), on peut restreindre α à être dans $\mathbb{Q}$.

4.9. Revenons aux hypothèses plus restrictives de 4.1 et soit F un faisceau cohérent sur X dont la restriction à X^* soit localement libre.

Proposition 4.10. Soit f une section de détermination finie de l'image réciproque $\bar{F}$ de F sur $\bar{X}^*$. Pour que f soit à croissance modérée le long de X_o, il faut et il suffit que les $f_{\alpha,k}$ de la décomposition (4.7.1) soient méromorphe le long de X_o.

Pour la définition de "à croissance modérée", je renvoie à [1] 2.10. Il est clair sur (4.7.1), (4.7.2), (4.7.3) que f est à croissance modérée si et seulement si les $f_{\alpha,k}$ le sont; pour des sections de F sur X^*, on sait

que "à croissance modérée le long de X_o" équivaut à "méromorphe le long de X_o".

Pour $X = D$ et $F = \mathbb{C}$, 4.10 a le corollaire élémentaire suivant.

Corollaire 4.11. Soient K le corps de germes en 0 de fonctions méromorphes sur D, et K^m (resp. K^{mu}, K^{mqu}) la K-algèbre des germes en 0 de fonctions holomorphes sur $\widetilde{D}^*$, à croissance modérée en 0 et de détermination finie (resp. de détermination finie unipotente, resp. quasi-unipotente). Alors, K^m, K^{mu}, K^{mqu} admettent sur K les bases suivantes

K^m	les $z^\alpha(\log z)^k$	$(0 \le \Re(\alpha) < 1 , k \in \mathbb{N})$
K^{mu}	les $(\log z)^k$	
K^{muq}	les $z^\alpha(\log z)^k$	$(\alpha \in \mathbb{Q}, 0 \le \alpha < 1, k \in \mathbb{N})$

Sous les hypothèses de 4.9, notons $\Psi_\eta^m(F)$ (resp. $\Psi_\eta^{mu}(F)$, resp. $\Psi_\eta^{muq}(F)$) le sous-faisceau de $\bar{i}^*\bar{j}_*(\bar{F})$ formé des sections de $\bar{F}$ au voisinage des points de X_o qui soient à croissance modérée le long de X_o et de détermination finie (resp. finie unipotente, resp. finie quasi-unipotente). Soit $F^m \subset j_* j^* F$ le faisceau sur X des sections de j_*j^*F méromorphes le long de X_o. La proposition 4.10 a le corollaire suivant, indépendant des choix arbitraires de z et $\log z$

Corollaire 4.12. Les morphismes naturels

(i) $K^m \otimes_K i^* F^m \longrightarrow \Psi_\eta^m(F)$,

(ii) $K^{mu} \otimes_K i^* F^m \longrightarrow \Psi_\eta^{mu}(F)$,

(iii) $K^{muq} \otimes_K i^* F^m \longrightarrow \Psi_\eta^{muq}(F)$

sont des isomorphismes.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 4.13. Le morphisme naturel, induit par 4.3.1,

(4.13.1) $\Psi_\eta^{mqu}(\Omega_X^*) \longrightarrow R\Psi_\eta(\mathbb{C})$

est un isomorphisme dans $D^+(X_o, \mathbb{C})$.

Nous prouverons en fait des résultats plus généraux (4.15) (4.17.) dont l'énoncé requiert quelques préliminaires que le lecteur intéressé seulement par 4.13 pourra se dispenser de lire.

4.14. Soit V un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie sur X^* (un système local). Soit $\mathcal{V} = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$ le $\mathcal{O}$-module localement libre correspondant et ∇ la connexion intégrable sur $\mathcal{V}$ pour laquelle les sections locales de V soit horizontale. On sait que $\mathcal{V}$ admet un prolongement $\mathcal{V}^\sim$ en un faisceau cohérent sur X , tel que la connexion ∇ soit <u>régulière</u> le long de X_o relativement à ce prolongement. On sait aussi que deux tels prolongements sont méromorphiquement équivalents ([1] II 5.7); le faisceau $\psi_\eta^m(\mathcal{V}^\sim)$, (et ses variantes ψ^{mu} , ψ^{mqu}) , ne dépend donc pas du $\mathcal{V}$ choisi; on le note $\psi_\eta^m(\mathcal{V})$. On définit de même $\psi_\eta^m(\Omega_{X^*}^p(V)) = \psi_\eta^m(\Omega_X^p \otimes \mathcal{V})$, et ses variantes ψ^{mu} , ψ^{mqu} .

<u>Proposition</u> 4.15. <u>Le morphisme naturel, induit par</u> (4.4.1)

$$(4.15.1) \qquad \psi_\eta^m(\Omega_{X^*}^*(V)) \longrightarrow R\psi_\eta(V)$$

<u>est un isomorphisme dans</u> $D^+(X_o, \mathbb{C})$.

4.16. On dit que V comme en 4.14 est <u>unipotent</u> (resp. <u>quasi-unipotent</u>) le long de X_o si, pour tout morphisme u du disque standard D_o dans X , avec $u^{-1}(X_o) = \{0\}$, la transformation de monodromie du système local u^*V sur D_o^* est unipotente (resp. quasi-unipotente).

<u>Proposition</u> 4.17. <u>Si</u> V <u>est</u> quasi-unipotent, <u>le morphisme naturel induit par</u> (4.4.1)

$$(4.17.1) \qquad \psi_\eta^{mqu}(\Omega_{X^*}^*(V)) \longrightarrow R\psi_\eta(V)$$

<u>est un isomorphisme dans</u> $D^+(X_o, \mathbb{C})$.

Le théorème 4.13 est le cas particulier de 4.17 où $V = \underline{\mathbb{C}}$.

4.18. Nous traiterons d'abord le cas où X est lisse et où $(X_o)_{red}$ est un diviseur à croisements normaux dans X . Les théorèmes étant locaux, on peut supposer que f est l'application $f(\underline{z}) = \prod_1^d z_i^{n_i}$, $(0 < d \leq e,\ n_i > 0)$ de $X = D^e$ dans D , où D désigne cette fois le disque standard $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et il suffit de prouver que la fibre en $0 \in D^e$ de (4.15.1) (resp. 4.17.1) est un quasi-isomorphisme.

Soit U un voisinage de 0 dans D^e de la forme $|z_i| < a$ $(0 < a \leq 1)$. On définit U_o , $\bar{U}$, U^*, $\bar{U}^*$ en prenant l'image réciproque de U dans 4.1.1. La cohomologie de U^* ou $\bar{U}^*$ est indépendante de a , de sorte que

$$H^*(\bar{U}^*, V) \xrightarrow{\sim} (R^* \Psi_\eta(V))_o \quad .$$

Le groupe fondamental $\mathbb{Z}^d$ de $X^* = (D^*)^d \times D^{e-d}$ (égal à celui de U^*) étant abélien, V admet une filtration finie de quotients successifs des systèmes locaux de rang un. Par dévissage, nous pouvons donc supposer V de rang un.

Pour $\mathcal{U}^\sim$ comme en 4.14, nous noterons $j_*^m \Omega^*_{X*}(V)$ le sous-complexe de $j_* \Omega^*_{X*}(V)$ de composantes les $(\Omega^p_X \otimes \mathcal{U}^\sim)^m$. D'après [1] II 6.4.1 et 6.8, l'application naturelle déduite du quasi-isomorphisme $V \xrightarrow{\approx} \Omega^*_{X*}(V)$ (lemme de Poincaré holomorphe),

(4.18.1) $$j_*^m \Omega^*_{X*}(V) \longrightarrow Rj_* V$$

est un quasi-isomorphisme. On a

(4.18.2) $$H^*((j_*^m \Omega^*_{X*}(V))_o) \xrightarrow{\sim} (R^* j_* V)_o \xleftarrow{\sim} H^*(U, V) \quad .$$

Ceci sera le seul ingrédient analytique de cette partie 4.18 de la démonstration.

Lemme 4.18.3. Pour V de rang un, on a

(i) pour V non trivial : $H^*(U^*, V) = 0$

(ii) pour $V = \underline{\mathbb{C}}$: $H^*(U^*, V) = \overset{*}{\Lambda}\, \mathbb{C}^d$.

En effet, U^* a le type d'homotopie d'un tore.

Soit η le générateur de $H^1(D^*, \mathbb{Z})$, et son image réciproque dans $H^1(U^*, \mathbb{Z})$.

Lemme 4.18.4. Pour V de rang un, l'application naturelle

$$H^*(U^*, \mathbb{C}) \xrightarrow[(4.18.1)]{\sim} H^*((j^m_* \Omega^*_{X^*}(V))_o) \longrightarrow H^*(\varprojlim{}^{mu}_{\eta}(\Omega^*_{X^*}(V))_o)$$

identifie $H^*(\varprojlim{}^{mu}_{\eta}(\Omega^*_{X^*}(V))_o)$ à $H^*(U^*, V)/\eta\, H^*(U^*, V)$.

Utilisons 4.12 (ii), et l'identité $d \log f = \Sigma\, n_i \dfrac{dz_i}{z_i}$. Le complexe $\varprojlim{}^{mu}_{\eta}(\Omega^*_{X^*}(V))_o$ s'identifie au complexe simple $\underline{\underline{s}}\, K$ associé (en prenant des sommes) au complexe double K de composantes

$$K^{-p,n+p} = \frac{(\log f)^p}{p!} \cdot (j^m_* \Omega^n_{X^*}(V))_o \ .$$

Ce complexe est dans un mauvais quadrant ($p \le 0$, $q \ge 0$, $p+q \ge 0$); toutefois, $\underline{\underline{s}}\, K$ est limite inductive des sous-complexe $\underline{\underline{s}}\, \sigma_{p \ge p_o}(K)$ de composantes

$$(\underline{\underline{s}}\, \sigma_{p \ge p_o} K)^n = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p \ge p_o}} K^{pq} \ ,$$

et cela suffit à justifier l'argument ci-dessous.

La suite spectrale de la filtration par le premier degré s'écrit

$$E_1^{-p,n+p} = H^n(U^*, V) \qquad (p \ge 0) \ ,$$

avec $d_1 = 2\pi i \eta \wedge : H^n(U^*, V) \longrightarrow H^{n+1}(U^*, V)$.

Si V est non trivial, $E_1 = 0$ par 4.18.3 et 4.18.4 se réduit à $0 = 0$. Supposons que $V = \underline{\mathbb{C}}$. Les (E_1, d_1) sont alors des complexes de Koszul, éventuellement tronqués, de sorte que (acyclicité du complexe de Koszul)

$$E_2^{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 0$$

$$E_2^{On} = H^n(U^*, V)/\eta\, H^{n-1}(U^*, V)$$

ce qui vérifie 4.18.4.

Pour $\beta \in \mathbb{C}^*$, notons V_β le système local de rang un sur D^*, d'image réciproque sur $\widetilde{D}^*$ trivialisée, et de monodromie β. Notons encore V_β son image réciproque sur U^*. Sur $\bar{U}^*$, l'image réciproque de $V \otimes V_\beta$ est canoniquement isomorphe à V.

Lemme 4.18.5. Pour V de rang un, l'application

$$\bigoplus_{\beta \in \mathbb{C}^*} H^*(U^*, V \otimes V_\beta)/\eta\, H^*(U^*, V \otimes V_\beta) \longrightarrow H^*(\bar{U}^*, V)$$

est bijective.

Soit k le pgcd des n_i. L'espace $\bar{U}^*$ à k composantes connexes, paramétrée par les racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité: sur celle, $\bar{U}^*_\xi$, d'indice ξ, l'image réciproque de la fonction $z^{1/k}$ sur $\widetilde{D}^*$ coïncide avec l'image réciproque de la fonction $\xi : \prod_1^d z_i^{n_i/k}$ sur U^*. La composante $\bar{U}^*_\xi$ a le type d'homotopie d'un tore, et la suite

$$0 \longrightarrow \pi_1(\bar{U}^*_\xi) \longrightarrow \pi_1(U^*) \longrightarrow \pi_1(D^*)$$

est exacte. Notons $\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ l'application $\pi_1(U^*) \to \pi_1(D^*)$. Si $\mathrm{Ker}(\varphi)$ agit non trivialement sur V, les deux membres de 4.18.4 sont nuls. Sinon, remplaçant V par un $V \otimes V_\beta$, on peut supposer que V est trivial, soit $V = \mathbb{C}$. On a alors en cohomologie complexe

$$H^0(\bar{U}^*) \otimes H^*(U^*)/\eta\, H^*(U^*) \xrightarrow{\sim} H^*(\bar{U}^*)$$

et on conclut en notant que V_β est trivial sur U^* si $\beta^k = 1$, que

$$\bigoplus_{\beta^k=1} H^0(U^*, V_\beta) = \bigoplus_{\beta^k=1} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{U}^*, \mathbb{C}) \quad ,$$

et que, pour $\beta^k \neq 1$, $H^*(U^*, V_\beta) = 0$.

Remarque 4.18.6. Si V est quasi-unipotent, on peut dans 4.18.5 remplacer la sommation sur $\mathbb{C}^*$ par une sommation sur les racines de l'unité: la preuve est la même.

Appliquant 4.12, on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^*\Psi^m(\Omega^*_{X^*}(V))_o & \xleftarrow[4.12]{\sim} & \bigoplus_\beta H^*\Psi^{mu}(\Omega^*_{X^*}(V\otimes V_\beta)) & \xleftarrow[4.18.4]{\sim} & \bigoplus_\beta H^*(U^*, V\otimes V_\beta)/\eta\, H^*(U^*, V\otimes V_\beta)) \\ \downarrow & & & & \downarrow 4.18.5 \\ H^* R\Psi(V)_o & \longleftarrow\!\!\!\!\!\!\sim & & & H^*(\bar{U}^*, V) \end{array} ,$$

dont 4.15 résulte. On obtient 4.17 en y remplaçant Ψ^m par Ψ^{mqu} , la sommation sur β par une sommation sur les racines de l'unité et 4.18.5 par 4.18.6.

4.19. Déduisons 4.15 et 4.17 du cas particulier 4.18. Soit $u : Y \longrightarrow X$ une résolution de (X, X_o) , c'est-à-dire un morphisme propre, induisant un isomorphisme $Y^* \xrightarrow{\sim} X^*$, tel que Y soit lisse et que $(Y_o)_{red}$ soit un diviseur à croisements normaux de Y . Si V est quasi-unipotent le long de X_o , son image réciproque u^*V est quasi-unipotente le long de Y_o .

Pour tout faisceau cohérent F sur X , notons F^m ou $j^m_* j^* F$ le sous-faisceau de $j_* j^* F$ formé des sections méromorphe, si f est l'équation de X_o , $j^m_* j^* F$ est la limite inductive du système inductif

$$F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \longrightarrow \cdots\cdots \qquad (4.19.1)$$

Le lemme suivant est prouvé dans [2].

Lemme 4.19.2. *Pour tout faisceau cohérent F sur X , on a*

$$F^m \xrightarrow{\sim} u_*(u^* F)^m$$

et $R^i u_* (u^* F)^m = 0$ *pour* $i > 0$.

D'après le théorème de Grauert, les $R^i u_* u^* F$ sont des faisceaux cohérents. Les noyaux et conoyaux de $F \longrightarrow u_* u^* F$, et les $R^i u_* F$ $(i > 0)$ sont nuls en dehors de X_o, donc localement annulés par une puissance de f. Puisque u est propre, $R^i u_*$ commute aux limites inductives filtrantes, en particulier à la limite inductive (4.19.1), et (4.19.2) en résulte.

De 4.19.2 et 4.12 on déduit que, sous les hypothèses de loc. cit. et désignant encore par u l'application de Y_o dans X_o induite par u, on a:

Lemme 4.19.3. Les morphismes

$$\Psi^m_\eta(F) \longrightarrow u_* \Psi^m_\eta(u^* F) \longrightarrow Ru_* \Psi^m_\eta(u^* F)$$

sont des isomorphismes.

Que la seconde flèche soit un isomorphisme signifie que $R^i u_* \Psi^m_\eta(u^* F) = 0$ pour $i > 0$. Ceci résulte de 4.12 et de $R^i u_*(i \cdot u^* F^m) = 0$ pour $i > 0$, qui résulte de $R^i u_*(u^* F^m) = 0$ pour $i > 0$ et du théorème de changement de base pour le morphisme propre u.

Pour prouver 4.15, il reste à contempler le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\Psi^m(\Omega^*_{X^*}(V)) & \underset{(4.19.3)}{=\!=\!=} & u_* \Psi^m(\Omega^*_{Y^*}(u \cdot V)) & \xrightarrow[(4.19.3)]{\sim} & Ru_* \Psi^m \Omega^*_{Y^*}(u \cdot V) \\
\downarrow & & & & \int (4.18) \\
R\Psi(V) & & \xrightarrow{\qquad (1.3.1;\ \text{XIII } 2.1.7.1) \qquad} & & Ru_* R\Psi(u^* V) \ .
\end{array}$$

On procède de même pour 4.17, en remplaçant partout Ψ^m par Ψ^{mqu}.

Remarque 4.20. Le théorème 4.13 fournit une incarnation du théorème de monodromie au niveau des complexes.

Bibliographie

[1] P. Deligne - Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Math. 163, Springer Verlag.

[2] A. Grothendieck - On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. IHES 29, 95-103 (1966).

[3] K. Lamotke - Isolated critical points and monodromy.

SGA 7

Exposé XV

La formule de Picard-Lefschetz

par P. DELIGNE

§1. Singularités quadratiques ordinaires (formes canoniques) 2

1.1 Rappels 2
1.2 Singularités quadratiques ordinaires 4
1.3 Modules de singularités quadratiques 10

§2 Calcul des cycles évanescents dans un cas quadratique ordinaire standard 13

2.1 Préliminaire : la cohomologie d'un cône 13
2.2 Cycles évanescents 17

§3 La formule de Picard-Lefschetz 23

3.1 Résultats préliminaires 23
3.2 Dimension relative paire 24
3.3 Dimension relative impaire 26
3.4 Résumé 31

§1 Singularités quadratiques ordinaires (formes canoniques)

Dans ce §, on reprend les résultats de VI 6, en adoptant un point de vue "hensélien" plutôt que "formel". On donne des singularités quadratiques ordinaires et de leurs déformations des formes canoniques, sous lesquelles elles se mettent localement pour la topologie étale.

Les résultats sont conséquence facile de VI 6, du théorème des fonctions implicites (sous la forme de Tougeron) et du théorème de R. Elkik sur les modules henséliens versels de singularités isolées. Lors du séminaire oral, on ne disposait pas encore de ce dernier; un théorème plus faible, ne couvrant que le cas (qui nous suffisait) des intersections complètes, avait été démontré et ne sera pas publié.

1.1. Rappels

1.1.1 Soit $f : X \to S$ un morphisme, X pouvant localement être décrit par p équations dans l'espace affine relatif A_S^{n+p} de dimension $n+p$ sur S. L'idéal jacobien $J^n(X/S)$ a été défini en VI 5. Si X est le sous-schéma de A_S^{n+p} défini par les équations $f_i = 0$ $(1 < i \leq p)$, c'est le faisceau d'idéaux engendré par les mineurs $p \times p$ de la matrice jacobienne $(\partial f_i/\partial x_j)$. Le théorème suivant est bien connu. Un cas particulier de son analogue formel est démontré dans Bourbaki Alg. Comm. III §4, n° 6, cor. 3 au Th. 2; l'analogue C^∞ est démontré dans Tougeron (idéaux de fonctions differentiables - Thèse - mai 1967 - Rennes); le cas considéré ici est traité dans Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES 36 (Zariski's volume) lemme 5.10.

1.1.2 Théorème (Tougeron-Artin). Soient S le spectre d'un anneau local hensélien A, $f : X \to S$ un morphisme comme en 1.1.1., a et I deux idéaux de A distincts de A, et δ' un faisceau d'idéaux de X contenu dans $J^n(X/S)$. On suppose I de type fini. Soit s une section de f au-dessus de S/I : $s \in X(A/I)$. Notons $s^*\delta'^2$ l'idéal de A image réciproque dans A de l'idéal $s^*\delta'^2$ de A/I.

Si $(s^*\delta'^2).a \supset I$, alors, il existe une section s_1 de f : $s_1 \in X(A)$

congrue à s modulo $(s^*\delta').a$.

1.1.3. Soit S le spectre d'un anneau local hensélien, de point fermé s . Soient X_o' un schéma de type fini sur k(s) , lisse en dehors d'un point fermé x_o , et X_o l'hensélisé de X_o' en x_o . Nous nous intéressons aux systèmes

$$\begin{array}{ccc} X_o & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ s & \hookrightarrow & T \longrightarrow S \end{array}$$

du type suivant

(a) T est local hensélien essentiellement de présentation finie sur S(I 0.0.5); le morphisme $T \to S$ est local et induit un isomorphisme sur les corps résiduels;

(b) X est local hensélien plat et essentiellement de présentation finie sur T ;

(c) la fibre spéciale de X/T est munie d'un k(s) - isomorphisme avec X_o .

Ce sont les S-déformations henséliennes de X_o . Un morphisme de (X,T) dans (X',T') est un diagramme commutatif de S-schémas

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T' \end{array}$$

induisant l'identité de X_o par passage aux fibres spéciales.Une déformation X/T est dite verselle (minimally versal) si

(a) Pour tout morphisme $X''/T'' \longrightarrow X'/T'$, tel que $T'' \to T'$ soit un plongement fermé, l'application

$$\mathrm{Hom}(X'/T' , X/T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X''/T'' , X/T)$$

est surjective. En particulier (faire $X''/T'' = X_o/s$) , $\mathrm{Hom}(X'/T', X/T) \neq \emptyset$.

(b) Pour $T' = \mathrm{Spec}(k(s)[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$, l'application "image réciproque" : $\mathrm{Hom}(T',T) \to$ (classes d'isomorphie de déformations de X_o sur T') est bijective.

1.1.4. Théorème (R. Elkik). Il existe une S-déformation hensélienne verselle de X_o (et une seule à isomorphisme non unique près). Si S est noethérien, pour que X/T en soit une, il faut et il suffit X induise sur le complété $\hat{T}$ de T une S-déformation formelle verselle de X_o (minimally formal versal deformation, VI 1.9 et VI 4).

Pour la démonstration de ce théorème délicat, on renvoie à R. Elkik (séminaire de l'ENS, 1971/72).

1.2. Singularités quadratiques ordinaires

Soit y un point fermé d'un schéma Y de type fini sur un corps k de caractéristique p , et soit n la dimension de Y en y .

Définition 1.2.1 (= VI 6.6)

(i) Pour k algébriquement clos, on dit que y est un point quadratique ordinaire de Y si le complété $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ de l'anneau local de Y en y est isomorphe au quotient de $k[[x_1,\ldots x_{n+1}]]$ par l'idéal engendré par une seule série formelle f , qui s'écrive

(4.2.1) $$f(\underline{X}) = Q(\underline{X}) = + \text{ termes d'ordre } > 2$$

avec $Q(\underline{X})$ une forme quadratique ordinaire.

(ii) Si k est une clôture algébrique de k , on dit que y est un point quadratique ordinaire de Y si les points de $\overline{Y} = Y \otimes_k \overline{k}$ au-dessus de y sont des points quadratiques ordinaires de $\overline{Y}$.

1.2.2. Si dans cette définition on remplace "forme quadratique ordinaire" par "forme quadratique non dégénérée", on obtient la notion de point quadratique non dégénéré (VI 6.0). Pour que y soit un point quadratique non dégénéré de Y , il faut et il suffit qu'il soit un point quadratique ordinaire et que soit $p \neq 2$,

soit n est impair.

Exemple 1.2.3. Soit $Q(\underline{X})$ une forme quadratique non dégénérée à $n+1$ variables sur k. Soit Y_o le cône quadratique dans $\mathbb{E}_k^{n+1}$ d'équation $Q = 0$. Alors, l'origine, qu'on notera y_o, est un point quadratique non dégénéré de Y_o.

Exemple 1.2.4. Supposons que $p = 2$ et que $n = 2m$. Soit $a \in k$, et soit Q un polynôme

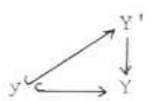
$$Q(\underline{X}) = (X_o^2 - a) + \sum_{0<i\leq j\leq 2m} a_{ij}x_ix_j .$$

On suppose que la forme quadrique à $2m$ variables $\sum_{0<i\leq j} a_{ij}x_ix_j$ est non dégénérée, et on désigne par y_o le point fermé de $\mathbb{E}_k^{n+1}$ de coordonnées $(\sqrt{a},0,\ldots,0)$. Alors, y_o est un point quadratique ordinaire du sous-schéma Y_o de $\mathbb{E}_k^{n+1}$ d'équation $Q = 0$.

Exemple 1.2.5. Soit k' une extension finie séparable de k et soit Y_o un k'-schéma du type considéré en 1.2.3 (resp. 1.2.4). Si l'on regarde le schéma Y_o comme un k-schéma, alors y_o est un point quadratique non dégénéré (resp. ordinaire) de Y_o. L'extension k' de k s'identifie à la plus grande sous-extension séparable de $k(y_o)$.

Théorème 1.2.6. *Supposons que y soit un point quadratique ordinaire du k-schéma Y, et soit k' la plus grande sous-extension séparable de $k(y)$. Il existe alors un k'-schéma $Y_o \subset \mathbb{E}_{k'}^{n+1}$ du type 1.2.3. ou 1.2.4., et un k-isomorphisme ϖ entre l'hensélisé $Y_{(y)}$ de Y en y et l'hensélisé $Y_{o(y_o)}$ de Y_o en y_o.*

Notons tout d'abord qu'il existe un voisinage étale Y' de y dans Y



qui soit un k'-schéma. Le schéma $Y_{(y)}$ est en effet canoniquement un k'-schéma.

Remplaçant (k,Y,y) par (k',Y',y), ceci nous ramène au cas où $k = k'$, ie. au cas où $k(y)$ est radiciel sur k.

Le $k(y)$-vectoriel $(\Omega^1_{Y/k})_y$ est de dimension $n+1$: il suffit de le vérifier après extension des scalaires de $k(y)$ à sa clôture algébrique, et après complétion en y ; c'est alors évident. Un voisinage de y dans Y est donc un sous-schéma d'un k-schéma lisse Z de dimension $n+1$. De plus, quitte à remplacer Y et Z par des voisinages convenables de y, on a que l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ qui définit Y est principal (même chanson que plus haut), défini par une équation f.

Lemme 1.2.7. Supposons que y soit un point quadratique non dégénéré de Y et que $k(y)$ soit radiciel sur k. Alors, au voisinage de y, $J^n_{Y/k}$ (1.1.1) est monogène, concentré en y et de rang 1 sur k. En particulier $k(y) = k$.

Il suffit de prouver la première assertion après passage à la clôture algébrique de k, et après complétion en y. Elle est alors évidente par calcul direct: avec les notations de 1.2.1, il résulte de Nakayama que les $\partial f/\partial x_i$ (a fortiori f et les $\partial f/\partial x_i$) engendrent l'idéal maximal.

Prouvons 1.2.6 pour y non dégénéré. Nous pouvons supposer et supposerons que $k(y) = k$, que Y est défini par une équation f dans un schéma lisse Z, et qu'il existe un morphisme étale $x : Z \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}_k$ de Z dans $\mathbb{E}^{n+1}_k$ (un "système de coordonnées locales x_i") qui envoye y sur 0. Il existe alors une forme quadratique non dégénérée à $n+1$ variables Q telle que, en y,

$$f = Q(x_i) + \text{termes d'ordre} > 2 .$$

Soit Y_o défini par Q comme en 4.3.

Sur Y, le système des x_i est une "solution approchée" de l'équation $Q(x_i) = 0$: si m est l'idéal qui définit y, on a

$$Q(x_i) \in m^3 \quad (\text{sur } Y) .$$

Puisque Q est non dégénérée, l'idéal de $\mathbb{E}_k^{n+1}$ engendré par les $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ est l'idéal maximal en 0, et l'image réciproque de cet idéal par $x = (x_i) : Y \longrightarrow \mathbb{E}_k^{n+1}$ est m. D'après le théorème des fonctions implicites 1.1.2. (appliqué avec $a = m$ et $\delta' = J$) il existe sur l'hensélisé $Y_{(y)}$ des fonctions x_i', congruents aux x_i mod m^2 (le $s^*\delta_S'.a$ de loc. cit.), qui vérifient $Q(x_i') = 0$. Elles fournissent l'isomorphisme cherché entre $Y_{(y)}$ et $Y_{o(y_o)}$.

Lemme 1.2.8. *Supposons que y soit un point quadratique ordinaire dégénéré ($p = 2$, n pair), et que $k(y)$ soit radiciel sur k. Alors, au voisinage de y, $T^1_{Y/k}$ est monogène, concentré en y et de rang 2 sur k. En particulier, soit $k(y) = k$, soit $k(y)$ est isomorphe à $k(\sqrt{a})$ avec $a \in k$, $a \notin k^2$.*

Procédons comme en 1.2.7 : avec les notations de 1.2.1, il suffit de vérifier que

$$\dim_k(k[[X_1,\ldots,X_{n+1}]] / (f, \tfrac{\partial f}{\partial x_i}))) = 2 .$$

Dans un système de coordonnées convenable $x_o, x_1, \ldots, x_{2m}$, la série formelle f s'écrit

$$f = x_o^2 + \sum_1^m x_i\, x_{i+m} + R \qquad (\text{ordre } R \geq 3)$$

Soient alors n' l'idéal engendré par f et les $\partial f/\partial x_i$, n celui engendré par x_o^2 et les $x_i (i \neq 0)$ et q l'idéal maximal. Prouvons que $n = n'$. On a clairement $n' \subset n$, et il suffit de vérifier que $n' + nq = n$ (Nakayama). Modulo nq, on a $f \equiv x_o^2$; modulo $nq + (x_o^2)$, on a $\partial f/\partial x_i \equiv x_{i+m}$ et $\partial f/\partial x_{i+m} \equiv x_i$ $(1 \leq i \leq m)$, d'où l'assertion.

Sous les hypothèses de 1.2.8, si $k = k(y)$, on désignera par a un quelconque carré dans k.

Lemme 1.2.9. Soient V un fibré vectoriel sur un schéma S, et T un sous-schéma de $\mathbb{E}_S(V)$ localement libre de rang 2 sur S. Alors, T est contenu dans une et une seule droite de $\mathbb{E}_S(V)$.

Le problème est local (fppf) sur S ; on peut donc supposer que T/S admet une section. Par translation, on peut supposer que T contient la section 0. Soit n l'idéal de T qui définit 0 : n est localement libre de rang un sur S. Chaque forme linéaire homogène $v \in V$ sur $\mathbb{E}_S(V)$ définit un élément de n, d'où un épimorphisme de V dans n. Son noyau définit la droite cherchée.

1.2.10. En particulier, si A est un sous-schéma radiciel de rang 2 de l'espace affine $\mathbb{E}_k^{n+1}$ sur un corps k de caractéristique 2, il existe $a \in k$ tel que, dans un système de coordonnées affines convenables, A ait pour équations $x_o^2 - a = 0$, $x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Il suffit de prendre les x_i s'annulant sur la droite définie par A.

1.2.11. Prouvons 1.2.6 pour y dégénéré ($p = 2$ et $n = 2m$). nous pouvons supposer et supposerons que $k(y) = k(\sqrt{a})$, que Y est défini par une équation f dans un schéma lisse Z, et qu'il existe un système de coordonnées locales en y $x = (x_i)_{0 \leq i \leq 2m} : Z \longrightarrow \mathbb{E}_k^{2m+1}$ qui envoye y en le point fermé $(\sqrt{a}, 0, \ldots, 0)$, et tel que $J^n_{Y/k}$ soit isomorphe, au voisinage de y, à $\mathcal{O}_Y/(x_o^2 - a, x_1, \ldots, x_{2m})$.

On a alors, quitte à remplacer f par un multiple

$$f = (x_o^2 - a) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2m} a_{ij}\, x_i x_j + R \quad , \quad \text{où}$$

(a) la forme à $2m$ variables $\sum a_{ij}\, x_i x_j$ est non dégénérée;

(b) après extension des scalaires à $\bar{k}$, R est d'ordre ≥ 3 en $x_o - \sqrt{a}$ et les x_i.

Soit Y_o défini par

$$Q = x_o^2 - a + \Sigma\, a_{ij}\, x_i x_j$$

comme en 1.2.4.

Sur Y, on peut encore regarder le système des x_i comme une solution approchée de l'équation $Q(X_i) = 0$. Cette fois, l'idéal δ image réciproque par χ de l'idéal engendré par les $\partial Q/\partial X_i$ vérifie $\mathcal{O}_Y/\delta \simeq J^n_{Y/k}$, ie est

$$\delta = (x_o^2 - a\ ,\ (x_i)_{1 \le i}) \quad \text{en } y\ .$$

Soit q l'idéal maximal qui définit y. Pour conclure comme dans le cas non dégénéré, par une application du théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que

(1.2.11.1) $$Q(x_i) \equiv 0 \pmod{\delta^2 q} \quad \text{sur } Y\ .$$

Soit $\overline{q}$ l'idéal qui définit y, après extension des scalaires à la clôture algébrique de k. On vérifie que

$$\delta^2 \overline{q} \cap \mathcal{O}_{Y,y} = \delta^2 q\ ,$$

de sorte qu'il suffit de vérifier 4.11.1 après extension des scalaires à $\overline{k}$: on peut supposer que $a = 0$. En y, on a alors

$$\delta^2 q = (x_o^5\ ,(x_o^3\, x_i)_{1\le i}\ ,\ (x_o x_i x_j)_{1\le i,j}\ ,\ (x_i x_j x_k)_{1\le i,j,k})\ .$$

De là, on tire que $\delta^2 q \supset q^5$ et que

$$x_o^2 f \equiv x_o^4 \pmod{\delta^2 q}\ ,\ \text{d'où}\ \ \delta^2 q + (x_o^2 f) \supset q^4\ ,$$

$$x_o f \equiv x_o^3 \pmod{\delta^2 q + q^4}\ ,\ \text{d'où}\ \ \delta^2 q + (x_o f) \supset q^3\ .$$

On a enfin

$$Q(x_i) \equiv 0 \qquad (\delta^2 q + (f)) \ \underline{\text{sur}} \ Z \ ,$$

ie 1.2.11.1.

Remarque 1.2.12. Soit Q une forme quadratique non nécessairement homogène à $n+1$ variables, non identiquement nulle, et supposons que le sous-schéma Y de $\mathbb{E}^{n+1}_k$ d'équation Q présente en un point y une singularité quadratique ordinaire. Par un changement linéaire (non homogène) de variables, on peut alors mettre Y sous la forme 1.2.3 ou 1.2.4. Dans le cas non dégénéré, $k(y) = k$, et il suffit de mettre y à l'origine des coordonnées. Dans le cas dégénéré, il suffit que le support de $T^1_{Y/k}$ soit sur la droite $x_i = 0$ $(1 \le i \le 2m)$ (cf. 1.2.9.).

1.3 Modules de singularités quadratiques

La proposition suivante résulte du théorème de R. Elkik 1.1.4. et de calculs explicites laissés au lecteur (essentiellement contenus dans VI 6).

Proposition 1.3.1. Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma hensélien local de point fermé s, et soit $Y_o \subset \mathbb{E}^{n+1}_{k(s)}$ un schéma du type 1.2.3. ou 1.2.4.

(i) Prenons Y_o de type 1.2.3, défini par l'équation

$$Q(\underline{X}) = \sum_{i \le j} \overline{a}_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (\overline{a}_{ij} \in k(s))$$

et relevons les $\overline{a}_{ij}$ en des éléments a_{ij} de A. Alors, le schéma hensélien versel sur S des déformations de la singularité de Y_o en y_o est

$$T = \mathrm{Spec}(A\{b\}) \ ,$$

la déformation verselle étant l'hensélisé en y_o du T-schéma $Y \subset \mathbb{E}^{n+1}_T$ d'équation

$$\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j - b = 0 \quad .$$

(ii) Prenons Y_o de type 1.2.4, défini par l'équation

$$Q(\underline{x}) = (x_o^2 - \overline{a}) + \Sigma\, \overline{a}_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \qquad (\overline{a}, \overline{a}_{ij} \in k(s))$$

et relevons les $\overline{a}_{ij}$ et $\overline{a}$ en des éléments a_{ij} et a de A . Alors, le schéma hensélien versel sur S des déformations de la singularité de Y_o en y_o est

$$T = \mathrm{Spec}(A\{b,c\}) \quad ,$$

la déformation verselle étant l'hensélisé en y_o du T- schéma $Y \subset \mathbb{E}_T^{n+1}$ d'équation

$$(x_o^2 - a) + \Sigma\, a_{ij} x_i x_j + b x_o + c = 0$$

La proposition suivante résulte aussitôt de 1.2.6 et 1.3.1.

Corollaire 1.3.2. Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma hensélien local de point fermé s et soit $f : X \to S$ un morphisme plat de présentation finie. On suppose qu'en le point fermé x de X_s , X_s présente une singularité quadratique ordinaire, que $k(x)$ est radiciel sur $k(s)$, et que X_s est de dimension n .

(i) Pour x non dégénéré : il existe une forme quadrique non dégénérée à $n+1$ variables Q , à coefficients dans A , et b dans l'idéal maximal de A , tel que le S-schéma hensélisé de X en x soit isomorphe à l'hensélisé en l'origine du sous-schéma de $\mathbb{E}_S^{n+1}$ d'équation (1.3.1(i)) $Q - b = 0$.

(ii) Pour x dégénéré ($n = 2m$, $\mathrm{car}(k(s)) = 2$) : il existe une forme quadratique non homogène à $n+1$ variables, à coefficients dans A

(4.14.2)
$$Q(\underline{X}) = x_o + b x_o + c + \sum_{1 \le i \le j \le 2m} a_{ij}\, x_i x_j \quad ,$$

telle que b soit dans l'idéal maximal, que la forme à $2m$ variables $\sum a_{ij} x_i x_j$ soit non dégénérée et que le S-schéma hensélisé de X en x soit isomorphe à l'hensélisé en $(\sqrt{c},0,\ldots,0)$ du sous-schéma de $\mathbb{E}_S^{n+1}$ d'équation $Q = 0$.

Remarque 1.3.3. Dans le cas (i), si l'hensélisé x de X_s est isomorphe par un isomorphisme φ à l'hensélisé en 0 de $X_o \subset \mathbb{E}_k^{n+1}$, d'équation $\sum \bar{a}_{ij} x_i x_j = 0$, et si les a_{ij} relèvent les $\bar{a}_{ij}$, on peut prendre $Q = \sum a_{ij} x_i x_j$.

Dans le cas (ii), si l'hensélisé en x de X_s est isomorphe par un isomorphisme φ à l'hensélisé en $(\sqrt{a},0,\ldots,0)$ de $X_o \subset \mathbb{E}_k^{n+1}$ d'équation $(x_o^2 + \bar{a}) + \sum \bar{a}_{ij} x_i x_j$, et si les a_{ij} relèvent les $\bar{a}_{ij}$, on peut prendre $Q = x_o^2 + bx_o + c + \sum a_{ij} x_i x_j$, avec $c \equiv \bar{a}$ mod l'idéal maximal.

Dans les deux cas, l'isomorphisme promis en 1.3.2 peut être pris prolongeant φ .

Corollaire 1.3.4. Soit $f : X \to S$ comme en 1.3.2. Il existe un voisinage U de x dans X tel que les points de non lissité de f contenus dans U soient des points quadratiques ordinaires de leur fibre.

§2. Calcul des cycles évanescents dans un cas quadratique ordinaire standard

2.1. Préliminaire : la cohomologie d'un cône.

2.1.1. Soit $Y \subset \mathbb{P}^r$ une variété projective sur un corps algébriquement clos k. Posons les notations suivantes.

$X \subset \mathbb{A}^{r+1}$ est le cône projetant affine, d'origine O ;

$X_{(o)}$ est l'hensélisé de X en O ;

$X^* = X - \{O\}$ et $X^*_{(o)} = X_{(o)} - \{O\}$;

$X_1 \subset \mathbb{P}^{r+1}$ est le cône projetant projectif de Y ; on a $X = X_1 - Y$;

$\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_{(O)}$, $\widetilde{X}_1$ sont les éclatés de X, $X_{(O)}$, X_1 en O ;

Y_o est l'image réciproque de O dans $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_{(O)}$ ou $\widetilde{X}_1$;

$h : \widetilde{X}_1 \to Y$ est la projection naturelle ;

$y_o, y_\infty : Y \to \widetilde{X}_1$ sont les sections de h d'image Y_o et Y ;

F est un groupe abélien de torsion premier à la caractéristique de k ; tous les groupes de cohomologie considérés seront à coefficients dans F, qui ne sera pas mentionné.

Notre but dans ce n° est de relier les cohomologies de $X^*_{(o)}$ et Y.

Proposition 2.1.2. On a

(i) $H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(\{O\}) = \begin{cases} F & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$;

(ii) $H^i_{\{O\}}(X) \xrightarrow{\sim} H^i_c(X)$.

Cette proposition se démontre par un argument d'homotopie, qu'il nous va falloir formaliser.

Soit k un corps algébriquement clos, U et V deux schémas sur k, Λ un anneau de torsion premier à la caractéristique de k, $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(U,\Lambda)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(V,X)$.

Appelons "morphisme" f de (U,K) dans (V,L) un couple formé de $f : U \to V$ et de $\varphi : f^*L \to K$. Un tel morphisme induit sur la cohomologie

$$f^* : H^*(V,L) \longrightarrow H^*(U,K) \quad .$$

Disons que deux "morphismes" f_o et f_1 sont homotopes s'il existe un schéma connexe de type fini T sur k, deux points 0 et 1 de T et un "morphisme" H de $(U \times T, pr_1^* K)$ dans (V,L) qui induise f_o et f_1 en prenant les fibres en 0 et 1.

Lemme 2.1.3. Si f_o est homotope à f_1, alors f_o^* coïncide avec f_1^*.

On sait qu'il existe une suite de points $0 = x_o, x_1, \ldots, x_n = 1$ de T, des courbes lisses et connexes Γ_i et des morphismes $a_i : \Gamma_i \to T$ tels que x_i et x_{i+1} soient dans l'image de a_i. Pour construire les Γ_i, on normalise un sous-schéma connexe de dimension 1 de T qui contienne 0 et 1. Ceci nous ramène au cas où T est une courbe lisse. Soient

$$\begin{array}{ccc} U \times T & \xrightarrow{pr_1} & U \\ {\scriptstyle pr_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \xrightarrow{t} & k \end{array} \quad .$$

En vertu du théorème de changement de base par un morphisme lisse, appliqué à t, on a

$$t^* R f_* K \xrightarrow{\sim} R pr_{2*} (pr_1^* K) \quad .$$

L'application f_i^* $(i = 0,1)$ se factorise alors en

$$H^n(V,L) \xrightarrow{H^*} H^n(U \times T, pr_1^* K) \longrightarrow H^o(T, R^n pr_{2*} (pr_1^* K))$$

$$H^o(T, t^* H^n(U,K)) \qquad \text{fibre en } i$$

$$H^n(U,K)$$

et est donc indépendante de i .

2.1.3. Prouvons 2.1.2. L'application identique de X est homotope (grâce aux homothéties) à l'application de X dans X constante de valeur 0 ; (i) en résulte.

Utilisant des homothéties de rapport tendant vers l'infini, on voit que Y est un rétracte par déformation de X_1^* et (ii) se déduit du lemme des 5 et du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial} & H^i_{\{0\}}(X) & \longrightarrow & H^i(X_1) & \longrightarrow & H^i(X_1^*) & \xrightarrow{\partial} \\ & \downarrow & & \| & & \downarrow \wr & \\ \xrightarrow{\partial} & H^i_c(X) & \longrightarrow & H^i(X_1) & \longrightarrow & H^i(Y) & \xrightarrow{\partial} \end{array}$$

Corollaire 2.1.4. $H^i(X^*) \xrightarrow{\sim} H^i(X^*_{(0)})$.

On applique le lemme des 5 au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^i_{\{0\}}(X) & \longrightarrow & H^i(X) & \longrightarrow & H^i(X^*) & \longrightarrow \\ & \wr\downarrow & & (2.1.2(i))\downarrow\wr & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^i_{\{0\}}(X_{(0)}) & \longrightarrow & H^i(X_{(0)}) & \longrightarrow & H^i(X^*_{(0)}) & \longrightarrow \end{array}$$

2.1.5. Utilisant la suite spectrale de Leray de $h|\widetilde{X}_1 - Y_o$ et $h|\widetilde{X}_1 - Y$, on trouve que les morphismes de restriction

$$H^i(\widetilde{X}_1 - Y_o) \xrightarrow{\sim} H^i(Y)$$

$$H^i(\widetilde{X}) \xrightarrow{\sim} H^i(Y_o) = H^i(Y)$$

sont des isomorphismes. Via ces isomorphismes, les suites exactes longues de cohomologie des couples $(\widetilde{X}_1 - Y_o, Y)$, $(\widetilde{X}_1 - Y, Y_o)$ sont les lignes d'un diagramme

(2.1.5.1)
$$\begin{array}{ccccccc} H^{i-1}(X^*) & \longrightarrow & H^{i-2}(Y)(-1) & \xrightarrow{\eta} & H^i(Y) & \longrightarrow & H^i(X^*) \longrightarrow \\ \| & & \| & & \downarrow -1 & & \| \\ H^{i-1}(X^*) & \longrightarrow & H^{i-2}(Y)(-1) & \xrightarrow[-\eta]{} & H^i(Y) & \longrightarrow & H^i(X^*) \longrightarrow \end{array} .$$

Lemme 2.1.6. Les flèches notées η et $-\eta$ de 2.1.5.1 sont les cup-produits avec la classe de cohomologie d'une section hyperplane. Le diagramme 2.1.5.1 est commutatif.

La première assertion résulte de ce que η (resp. $-\eta$) est la restriction à Y (resp. $Y_o \sim Y$) de la classe de cohomologie du faisceau inversible $\mathcal{O}(Y)$ (resp. $\mathcal{O}(Y_o)$) sur $\widetilde{X}_1 - Y_o$ (resp. $\widetilde{X}_1 - Y$).

Utilisons la suite spectrale de Leray de h : les deux lignes de (2.1.5.1) s'obtiennent en appliquant le foncteur $H(Y, \ )$ à des triangles distingués

$$y_{\infty *} Ry_\infty^! F \longrightarrow R(h|\widetilde{X}_1 - Y_o)_* F \xrightarrow{①} R(h|X^*)_* F \xrightarrow{②}$$

et
$$y_{o *} Ry_o^! F \longrightarrow R(h|\widetilde{X}_1 - Y)_* F \longrightarrow R(h|X^*)_* F \longrightarrow$$

les faisceaux de cohomologie non nuls des complexes sommets de ces triangles sont ceux d'indice (2), (0), (0 et 1), de sorte que les flèches ① et ② sont déterminées par leur effet sur les faisceaux de cohomologie. Ceci nous ramène au cas où Y est un point. Ce cas est laissé au lecteur.

2.1.7. La suite exacte longue du couple $(\widetilde{X}_{(0)}, Y_o)$ est un analogue local de la 2e ligne de (2.1.5.1). On a

$$H^i(\widetilde{X}_{(0)}) \xrightarrow{\sim} H^i(Y_o)$$

(théorème de changement de base pour le morphisme propre $\widetilde{X}_{(0)} \to X_{(0)}$; la suite exacte longue en question s'écrit donc

(2.1 7.1)
$$\begin{array}{ccccccc} H^{i-1}(X^*_{(0)}) & \longrightarrow & H^{i-2}(Y_o)(-1) & \xrightarrow{-\cap} & H^i(Y_o) & \longrightarrow & H^i(X^*_{(0)}) \\ \uparrow\wr & & \| & & \| & & \| \\ H^{i-1}(X^*) & \longrightarrow & H^{i-2}(Y)(-1) & \xrightarrow{-\cap} & H^i(Y) & \longrightarrow & H^i(X^*) \end{array} ,$$

la seconde ligne de ce diagramme commutatif étant celle de (2.1.5.1).

Le lemme technique suivant nous servira en 2.2.7.

Lemme 2.7.8.
$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-1}(Y_o) & \xleftarrow{\sim} & H^{n-1}(\tilde{X}) & \longrightarrow & H^{n-1}(X^*) & \longrightarrow & H^n_{\{x\}}(X) \longrightarrow H^n_c(X_s) \\ \| & & & & & & \| \\ H^{n-1}(Y) & & & \xrightarrow{\partial} & & & H^n_c(X_s) \end{array}$$

est anticommutatif.

D'après 2.1.7, il revient au même de prouver commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(X_1-\{0\}) & \xrightarrow{\partial} & H^n_{\{0\}}(X_1) = H^n_{\{0\}}(X) \\ \downarrow\wr & & \downarrow \\ H^{n-1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & H^n_c(X) \end{array}$$

C'est là un general non-sense.

2.2. Cycles évanescents .

2.2.1. Soient S un trait hensélien et $s, \eta, \bar{s}, \bar{\eta}$ comme en XIII 0.2.5 , $\Lambda = \mathbb{Z}/k$, avec k premier à la caractéristique résiduelle de S , $\mathbb{E}^{n+1}_S$ l'espace affine type de dimension $n+1$ sur S et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{E}^{n+1}_S$ défini par une équation quadratique $Q = 0$, non nulle modulo l'uniformisante

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i \leq j} a_{ij}\, x_i x_j + \sum b_i x_i + c \quad .$$

Si $\mathbb{E}_S^{n+1}$ est le complément dans $\mathbb{P}_S^{n+1}$ de l'hyperplan à l'infini H, alors X se déduit de la quadratique X_1 de $\mathbb{P}_S^{n+1}$ d'équation homogène

$$\sum_{i \leq j} a_{ij}\, x_i x_j + \sum b_i x_i z + c z^2 = 0 \qquad (2.2.1.1)$$

par soustraction de $Y = X_1 \cap H$.

Faisons les hypothèses suivantes.

(a) Y est une quadrique lisse sur S, ie. la forme quadratique $\sum_{i \leq j} a_{ij}\, x_i x_j$ est ordinaire;

(b) la quadrique X'_s est singulière, ie. $X_{\overline{s}}$ est un cône quadratique.

On désigne par x_o le point singulier de X_s, et par f la projection de X sur S.

Remarque 2.2.2. Si x_o est un point rationnel, on peut par translation le mettre à l'origine des coordonnées. Si $x_o = 0$, les b_i et c sont divisibles par l'uniformisante.

Le sous-schéma A de X_s d'équations $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ est concentré en x_o. Sauf dans le cas exceptionnel où $k(s)$ est de caractéristique 2 et où $n+1$ est pair, ce schéma est de degré un sur $k(s)$, donc x_o est rationnel. Dans le cas exceptionnel, il est ramifié sur $k(s)$ et de rang 2, de sorte que $k(x_o)$ est soit $k(s)$, soit une extension quadratique inséparable de $k(s)$. Les assertions faites sur A se vérifient le plus aisément après passage à la clôture algébrique $k(\overline{s})$ de $k(s)$.

Proposition 2.2.3. Sous les hypothèses de 2.2.1, les morphismes

$$H^i(X_{\overline{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i(X_{\overline{s}}, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)) \xrightarrow{\sim} R^i\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)_{x_o}$$

$$H^i_c(X_{\overline{\eta}}, \Lambda) \xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^i_c(X_{\overline{s}}, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)) \xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^i_{\{x_o\}}(X_{\overline{s}}, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda))$$

sont des isomorphismes.

Que les flèches de gauche soient des isomorphismes résulte de 2.1.8.6 et 2.1.10.5; que celles de droite en soient est un corollaire de 2.1.2; on dispose en effet d'un triangle distingué

$$(\Lambda \text{ sur } X_{\overline{s}})[0] \longrightarrow R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda) \longrightarrow R\Phi_{\overline{\eta}}(\Lambda)$$

et 2.1.2 s'applique à $(\Lambda \text{ sur } X_{\overline{s}})$, tandis que $R\Phi_{\overline{\eta}}(\Lambda)$ est à support dans x_o.

Corollaire 2.2.4. Si la fibre générale géométrique $X_{\overline{\eta}}$ est singulière, ie. est encore un cône quadratique, les faisceaux $R^i\Phi(\Lambda)$ sont tous nuls.

D'après 2.1.2, $\Lambda = H^o(X_{\overline{s}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^o(X_{\overline{\eta}}, \Lambda)$, et $0 = H^i(X_{\overline{s}}, \Lambda) = H^i(X_{\overline{\eta}}, \Lambda)$. On applique alors la suite exacte longue XIII, 2.1.8.9 (valide par XIII, 2.1.9).

2.2.5. Supposons maintenant que

(*) la fibre générale X_{η} est lisse.

Pour simplifier nous supposerons aussi S strictement hensélien. Il est facile de calculer les faisceaux de cycles évanescents à l'aide de 2.2.3 et XII 3.7. La cohomologie à coefficients dans Λ, considérée ici, se déduit de la cohomologie ℓ-adique de loc. cit. par la formule des coefficients universels (cf. 2.1.13). Voici les résultats.

A. Cohomologie sans support.

On a $R^i\psi_{\eta}(\Lambda) = 0$ si $i \neq 0, n$.

1) si $n \neq 0$: on a $\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda) = \Lambda$ De plus, $R^n\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)$ est (non canoniquement) isomorphe au faisceau Λ sur x_o prolongé par 0 sur X_s .

2) n quelconque : on vérifie que, même pour $n = 0$, $\Phi^i_{\overline{\eta}}(\Lambda) = 0$ pour $i \neq n$, et que $\Phi^n_{\overline{\eta}}(\Lambda)$ est (non canoniquement) isomorphe au faisceau Λ sur x_o prolongé par 0 sur X_s .

B Cohomologie à support dans x_o .

On a $H^i_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)) = 0$ pour $i \neq n, 2n$. On dispose de plus d'un morphisme trace

$$(2.2.5.1) \qquad tr : H^{2n}_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(n))) \longrightarrow \Lambda \ .$$

si $n \neq 0$: le morphisme (2.2.5.1) est un isomorphisme. De plus, $H^n_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(n)))$ est (non canoniquement) isomorphe à Λ .

C. Dualité. Pour $a \in R^n\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)_{x_o}$ et $b \in H^n_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(n)))$, posons $(a,b) = Tr(a \wedge b)$, où Tr est le morphisme XIII 2.2.6

$$Tr : H^{2n}_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\eta}(\Lambda(n))) \longrightarrow \Lambda \ .$$

Il résulte de la dualité de Poincaré sur $X_{\overline{\eta}}$ et des isomorphismes 2.2.3 que (a,b) met en dualité parfaite les Λ - modules libres $R^n\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda)_{x_o}$ et $H^n_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(n))$.

D. $n = 2m > 0$.

D'après XII 3.7, les groupes $H^n_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m)))$ et $R^n\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m))_{x_o}$ ont des générateurs naturels définis au signe près, soit δ et δ' . Soit ω l'application naturelle du premier de ces groupes dans le second. On peut normaliser les signes de δ et δ' de sorte que

$$(2.2.5.2) \qquad (\delta', \delta) = 1 \qquad \text{on a alors}$$

(2.2.5.3) $\varphi(\delta) = (-1)^m.2.\delta'$.

Soit Z l'extension quadratique séparable de $k(\eta)$ centre de la partie paire de l'algèbre de Clifford de la forme quadratique (2.2.1.1). Soit ε le caractère correspondant d'ordre 1 ou 2 du groupe d'inertie I. Pour $\sigma \in I$, on a

(2.2.5.4) $\sigma\delta = \varepsilon(\sigma)\delta$

(2.2.5.5) $\sigma\delta' = \varepsilon(\sigma)\delta'$.

Les formules (2.2.5.2) (2.2.5.3) (2.2.5.4) en cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2k$ impliquent que la variation est

(2.2.5.6) $\mathrm{Var}(\sigma)\ (a) = \frac{\varepsilon(\sigma)-1}{2}\ (-1)^m\ (a\delta).\delta$.

E. $n = 2m + 1$ - Cycles évanescents.

D'après XII 3.7, les groupes $H^n_{\{x_o\}}(X_s, R\psi_{\overline{\eta}}\ \Lambda(m))$ et $R^n\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m+1))_{x_o}$ ont des générateurs naturels définis au signe près, soit δ et δ' . Avec les notations de D , on peut normaliser les signes de δ et δ' de sorte que

(2.2.5.7) $(\delta', \delta) = 1$; on a

(2.2.5.8) $\varpi(\delta) = 0$.

F. $n = 2m + 1$ - La variation .

Le groupe d'inertie I agit trivialement sur la cohomologie de $X_{\overline{\eta}}$. Ceci résulte de XII 3.7 et du fait que I agit trivialement sur la cohomologie de $Y_{\overline{\eta}}$, Y étant propre et lisse sur S .

Pour σ dans le groupe d'inertie, on a nécessairement

(2.2.5.9) $D(\sigma)(\delta') = \chi(\sigma).\delta$, avec $\chi(\sigma) \in \Lambda(1)$.

La formule d'additivité (XIII, 1.4.3.4) s'écrit ici

$$\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma) + \chi(\tau) .$$

Soit $\varepsilon : I \longrightarrow \Lambda(1) = \mu_k$ l'homomorphisme tel que

$$\sigma(\sqrt[k]{t}) = \varepsilon(\sigma)\sqrt[k]{t}$$

pour t une uniformisante. λ est nécessairement un multiple de ε, vu la structure du groupe d'inertie modéré. La formule (2.2.5.9) se récrit

(2.2.5.10) $$\mathrm{Var}(\sigma)(a) = \lambda_X.\varepsilon(\sigma)(a\delta)\delta$$

pour $\lambda_X \in \Lambda$ convenable (dépendant de X/S). Nous déterminerons λ_X plus tard.

2.2.6. Nous allons donner des cycles δ et δ' de (D) et (E) une description de nature locale pour la topologie étale.

Le cas où n est pair est facile : si $2\nmid k$ ($\Lambda = \mathbb{Z}/k$), $\pm\delta$ est caractérisé par (2.2.5.3) (2.2.5.4), ie. par

(2.2.6.1) $$(\delta,\delta) = (-1)^m.2 \quad .$$

En général, $\pm\delta$ est l'image d'un quelconque cycle $\tilde{\delta}$, en cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}/2^a k$ (a grand), qui vérifie (2.2.6.1).

Supposons n impair; x_o est alors un point rationnel (2.2.2).

Soient $X_{s(o)}$ l'hensélisé en x_o de X_s, $\widetilde{X}_{s(o)}$ l'éclaté de $X_{s(o)}$ en x_o, Y_o l'image réciproque de x_o dans $X_{s(o)}$ (une quadrique) et $X^*_{s(o)} = X_{s(o)} - \{x_o\} = \widetilde{X}_{s(o)} - Y_o$. Considérons la flèche composée (cf. XIII, 2.4.6.1)

(2.2.6.2)
$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(Y_o,\Lambda(m)) & \xleftarrow{\sim} & H^{n-1}(\widetilde{X}_{s(o)},\Lambda(m)) & \longrightarrow & H^{n-1}(X^*_{s(o)},\Lambda(m)) \\ & & & & \downarrow \\ & & H^n_{\{x\}}(X_s,R\Psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m))) & \longleftarrow & H^n_{\{x\}}(X_s,\Lambda(m)) \end{array} \quad .$$

Lemme 2.2.7 La flèche 2.2.6.2 identifie $H^n_{\{x\}}(X_s,R\Psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m)))$ au quotient primitif de la cohomologie de dimension $2m$ de la quadrique Y_o de dimension $2m$; $\pm\delta$ est

est l'image des générateurs naturels de ce quotient primitif.

Les cycles $\pm\delta$ sont caractérisés par leur image dans $H^i_c(X_{\overline{\eta}},\Lambda(m))$; utilisant (2.1.7.1), ceci nous ramène à montrer que la flèche composée

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(Y_o,\Lambda(m)) & \xleftarrow{\sim} & H^{n-1}(\widetilde{X}_s,\Lambda(m)) & \longrightarrow & H^{n-1}(X^*_s,\Lambda(m)) \\ & & & & \downarrow \\ H^n_c(X_{\overline{\eta}},\Lambda(m)) & \xleftarrow{sp} & H^n_c(X_s,\Lambda(m)) & \longleftarrow & H^n_{\{x\}}(X_s,\Lambda(m)) \end{array}$$

envoie les générateurs distingués du quotient primitif du premier groupe sur les générateurs distingués du dernier groupe.

Appliquons 2.1.8. La flèche se récrit (au signe près)

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(Y_s,\Lambda(m)) & \xrightarrow{\partial} & H^n_c(X_s,\Lambda(m)) \\ \| & & \downarrow \\ H^{n-1}(Y_{\overline{\eta}},\Lambda(m)) & \longrightarrow & H^n_c(X_{\overline{\eta}},\Lambda(m)) \end{array}$$

et 2.2.7 en résulte.

§3. La formule de Picard Lefschetz

3.1 Résultats préliminaires

3.1.1. Soient S un trait hensélien et $f : X \to S$ un morphisme plat de type fini, purement de dimension relative n. On suppose que la fibre spéciale X_s est lisse, sauf en un ensemble fini de points Σ', où X_s présente une singularité quadratique ordinaire.

Soit Σ l'ensemble des points $x \in \Sigma'$ tel que la fibre générale X_η soit lisse dans un voisinage de x. Soit enfin Λ un anneau de torsion, premier à la caractéristique résiduelle de S.

Proposition 3.1.2. (i) Les faisceaux $R^i\Phi(\Lambda)$ sont nuls pour $i \neq n$.

(ii) Le faisceau $R^n\Phi(\Lambda)$ est seul en dehors de Σ. Sa restriction à Σ est un faisceau de Λ - modules de rang 1.

(iii) Pour tout point géométrique $\overline{x}$ de Σ, la forme (a,b) (2.2.5 (C)) met en dualité les Λ - modules $(R^n\psi(\Lambda))_{\overline{x}}$ et $H^n_{\{\overline{x}\}}(R^n\psi_\eta(\Lambda))$. Ceux-ci sont libres de rang un pour $n \neq 0$, de rang 2 pour $n = 0$.

Les assertions de 3.1.2 sont de nature locale pour la topologie étale. Ceci permet de ne traiter que le cas où S est strictement hensélien, et où X est l'hypersurface de l'espace affine relatif A^{n+1}_S défini par une équation quadratique vérifiant 2.2.1 (a) (b) (appliquer 1.3.2).

f est lisse en tout point de $X_s - \Sigma'$, de sorte que $R\Phi = 0$ en dehors de Σ'. D'après 2.2.4, $R\Phi$ est même nul hors de Σ. On peut maintenant supposer 2.2.5 (*). Les assertions (ii) et (iii) résultent alors de 2.2.5 (A) (B) (C).

3.2. Dimension relative paire.

On conserve les notations de 3.1, en prenant pour n un entier pair $2m$. On suppose pour simplifier S strictement hensélien (le cas général s'obtiendrait par descente).

Proposition 3.2.1. (i) Pour $x \in \Sigma$, le groupe $H^n_{\{x\}}(R^n\psi_\eta(\Lambda(m))$ a un générateur naturel δ, bien défini au signe près, caractérisé par les conditions d'être naturel en Λ et de vérifier

$$(\delta,\delta) = (-1)^m 2$$

(pour $n = 0$, ajouter la condition $Tr(\delta) = 0$) .

(ii) Pour un caractère $\varepsilon_x : I \longrightarrow \{\pm 1\}$ convenable (indépendant de Λ) du groupe d'inertie I , la variation s'écrit

$$Var(\sigma)\ (a) = (-1)^m \frac{(\varepsilon_x(\sigma)-1)}{2}\ (a\delta)\delta$$

(pour $a \in R^n \underline{\varepsilon}_{\eta}(\Lambda(m))$) . Il résulte que

$$\sigma(\delta) = \varepsilon_x(\sigma).\delta \ .$$

Passons à la limite pour ne traiter que le cas universel où Λ serait $\mathbb{Z}_\ell$. Au signe près, un seul δ peut alors vérifier les conditions de (i). Comme en 3.1.2, on se ramène alors au cas 2.2.5 (*), et on applique 2.2.5 (D).

Complément 3.2.2. Si, en $x \in \Sigma$, l'hensélisé $X_{(x)}$ de X en x est isomorphe à l'hensélisé en x_o du schéma projectif Q d'équation,

$$\sum_{i\leq j} a_{ij}\, x_i x_j = 0 \ ,$$

alors, le caractère ε_x est défini par l'extension quadratique séparable $Z(C^+(Q))$ du corps des fractions (ceci résulte de 2.2.5 (D)).

3.2.3. En caractéristique résiduelle $\neq 2$, on peut rendre 3.2.2 plus explicite. Dans ce cas, I admet un seul caractère non trivial ε d'ordre 2. Pour t une uniformisante, on a

$$\sigma(\sqrt{t}) = \varepsilon(\sigma)\sqrt{t} \ .$$

D'autre part, $X_{(x)}$ est alors isomorphe à l'hensélisé en 0 d'un schéma affine

$$\Sigma\, a_{ij}\, x_i x_j = b \quad ,$$

où b est dans l'idéal maximal et où $Q(x) = \Sigma\, a_{ij}\, x_i x_j$ est non dégénérée. L'idéal (b) définit l'image du sous-schéma de $X_{(x)}$ support de $J^n_{X_{(x)}/S}$. Le centre de l'algèbre de Clifford est isomorphe à $k(\eta)(((-1)^{m+1}.2b\ \det(a_{ij}))^{1/2})$ (Bourbaki, Alg. Ch 9, §9, n° 4 Rmq finale), d'où

$$\varepsilon_x = \varepsilon^{v(b)} \quad .$$

La variation est nulle si b est de valuation paire, et sinon $\varepsilon_x = \varepsilon$.

3.3. Dimension relative impaire

Pour démontrer la formule de Picard-Lefschetz en dimension relative impaire, nous devrons nous ramener au cas transcendant, traité en XIV 3.2.1.1. L'argument de spécialisation requis nous force à travailler sur une base qui ne soit plus de dimension un. Nous le ferons par des arguments ad hoc, adaptés au cas précis dont nous avons besoin : je ne dispose pas d'une théorie serviable sur une base de dimension > 1, et j'ai préféré ne pas recouvrir mon ignorance de généralités.

3.3.1. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma strictement local noethérien et $f : X \to S$ un morphisme plat de type fini, purement de dimension relative n, dont la fibre spéciale X_s n'a pour seuls points de non lissité que des points quadratiques non dégénérés. Soient s le point fermé de S, X_s la fibre spéciale et $x_o \in X_s$ un point singulier. D'après 1.3.2 (i), au voisinage de x_o, X/S est localement isomorphe à un S-schéma défini par une équation $Q-b = 0$ dans A^{n+1}_S, avec b dans l'idéal maximal et Q une forme quadratique non dégénérée. L'idéal (b) de A ne dépend que de $(X/S, x_o)$: dans un voisinage de x, il existe une section $s \in X(A/(b))$ de X sur $\mathrm{Spec}(A/(b))$, tel que $J^n_{X/S}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{s(\mathrm{Spec}(A/b))}$. On note s_x cette section et $b(x)$ un quelconque générateur de (b).

3.3.2. Supposons S normal, et soit $b \in A$. Pour n invertible dans A et $b \neq 0$, nous noterons $\varepsilon_b^{(n)}$ l'homomorphisme suivant du groupe de Galois du corps des fractions de A dans $\mathbb{Z}/(n)(1)$

$$\varepsilon_b^{(n)}(\sigma) = (\sigma \sqrt[n]{b})/\sqrt[n]{b} .$$

On a $(\varepsilon_b^{(nm)})^m = \varepsilon_b^{(n)}$. Si Λ est un $\mathbb{Z}/n$-algèbre, on note encore ε_b le composé $\mathrm{Gal} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)(1) \longrightarrow \Lambda(1)$. Il est indépendant de n.

Le caractère ε_b se factorise par $\pi_1(S-(\text{sous-schéma } b = 0))$.

3.3.3. Supposons que S soit un trait strictement hensélien, et que n soit impair : $n = 2m + 1$. Soient x un point singulier de X_s dans un voisinage duquel X_η soit lisse, et X_1/S un sous-schéma d'équation $Q - b = 0$ de A_S^{n+1} comme en 1.3.2 (i). L'hypothèse sur x signifie que b, nul modulo l'idéal maximal, n'est pas 0.

Soient $X_{s(x)}$ l'hensélisé de X_s en x, $\widetilde{X}_{s(x)}$ l'éclaté de $\widetilde{X}_s$ en x, Y la quadrique image réciproque de x et $\widetilde{X}^*_{s(x)} = X_{s(x)} - \{x\} = \widetilde{X}_{s(x)} - Y$. Le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(Y,\Lambda(m)) & \xleftarrow{\sim} & H^{n-1}(\widetilde{X}_{s(x)},\Lambda(m)) & \longrightarrow & H^{n-1}(X^*_{s(x)},\Lambda(m)) \\ & & & & \downarrow \\ & & H^n_{\{x\}}(X_s,R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m))) & \longleftarrow & H^n_{\{x\}}(X_s,\Lambda(m)) \end{array}$$

identifie ce dernier groupe au quotient primitif (XII 3.5), de la cohomologie de la quadrique Y. D'après (2.2.7), c'est en effet le cas dans une situation localement isomorphe. Les images des deux générateurs naturels de ce quotient (classes de cohomologie des génératrices de Y) sont deux vecteurs de base $\pm\delta$ de $H^n_{\{x\}}(X_s,R\psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m)))$.

3.3.4. Revenons aux hypothèses plus générales de 3.3.1, avec $n = 2m + 1$. Pour tout point singulier x de X_s, nous noterons encore $\pm\delta_x$ les sections de $R^n f_!\Lambda(m)$ sur S image des générateurs du quotient primitif de $H^{n-1}(Y,\Lambda(m))$ (même notation que plus haut) par le morphisme composé

$$H^{n-1}(Y,\Lambda(m)) \xleftarrow{\sim} H^{n-1}(\widetilde{X}_{s(x)},\Lambda(m)) \longrightarrow H^{n-1}(X^*_{s(x)},\Lambda(m))$$

$$\downarrow$$

$$H^0(S,R^n f_!\Lambda(m)) \xleftarrow{\sim} H^n_c(X_s,\Lambda(m)) \longleftarrow H^n_{\{x\}}(X_s,\Lambda(m)) \quad .$$

$\pm\delta_x$ est le <u>cycle évanescent</u> en x.

Lorsque S est un trait, $\pm\delta \in H^n_c(X_{\overline{\eta}},\Lambda(m))$ est l'image par XIII 2.1.8.4 de la classe (3.3.3) $\pm\delta \in H^n_{\{x\}}(X_s,R\Psi_{\overline{\eta}}(\Lambda(m)))$.

Nous prouverons simultanément les deux résultats suivants.

<u>Proposition</u> 3.3.5. <u>Pour</u> S <u>un trait hensélien et</u> X/S <u>comme en 3.3.3, la variation est donnée par</u>

$$\mathrm{Var}(\sigma)(a) = (-1)^{m+1}\,\varepsilon_{b(x)}(\sigma)(a\delta)\delta \ .$$

<u>Proposition</u> 3.3.6. <u>Soit</u> S <u>strictement local régulier et</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme propre et plat de dimension relative</u> $n = 2m + 1$ <u>tel que</u> X_s <u>présente un et un seul point de non lissité</u> x - <u>supposé quadratique non dégénéré. On suppose aussi que</u> $b(x)$ <u>est un paramètre. Alors, Galois agit sur la cohomologie de la fibre générale géométrique par</u>

$$\sigma(a) = a + (-1)^{m+1}\,\varepsilon_{b(x)}(\sigma)(a\delta_x)\delta_x \ .$$

(A) Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, S l'hensélisé

de $\mathrm{Spec}(k[T])$ en 0 . Prouvons 3.3.5 lorsque $b(x)$ est une uniformisante.

Par le principe de Lefschetz, on se ramène à supposer que $k = \mathbb{C}$. La question étant locale, on peut supposer que $f : X \to S$ se déduit par changement de base de l'application Σz_i^2 de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$. La construction donnée de $\pm\delta$ a un analogue transcendant, en cohomologique entière. Via XIV 2.1, $\pm\delta$ correspond donc à un cycle évanescent transcendant, image de

$$\pm\delta_{c\ell} \in H^n_{\{0\}}(X_o, R\Psi_{c\ell\eta}(\mathbb{Z})) \quad .$$

D'après XIV 2.1 et la propriété correspondante des cycles $\pm\delta$ algébriques, l'image de $\pm\delta_{c\ell}$ dans $H^n_{\{0\}}(X_o, R\Psi_{c\ell\eta}(\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est un générateur de ce groupe. Dès lors, $\pm\delta_{c\ell}$ sont deux générateurs de $H^n_{\{0\}}(X_o, R\Psi_{c\ell\eta}(\mathbb{Z}))$, et coïncident avec les cycles évanescents de XIV 3.2. La formule 3.3.5 résulte donc de XIV 3.2.11 (en toute rigueur, il faudrait avoir vérifié une compatibilité entre l'isomorphisme XIV 2.1 et les cup-produits et traces).

(B) Prouvons 3.3.6 pour X/S comme en (A) (et de plus propre).

Cela résulte de XIII 2.4.6.2.

(C) Soient p un nombre premier et S_o l'hensélisé strict de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ en (p,T) . Prouvons 3.3.6 pour X/S_o tel que $b(x) = T$.

La restriction du faisceau $R^i f_* \Lambda$ à l'hensélisé strict de S en (T) est justifiable de (B). Ce faisceau étant localement constant sur le complément du diviseur lisse $T = 0$, qui est d'inégale caractéristique, (C) résulte de (B) et du lemme d'Abhyankar.

(D) Dans au moins un cas où (C) s'applique, δ_x n'est pas un élément de torsion en cohomologie ℓ-adique.

Soient S_1 l'hensélisé strict de Spec($\mathbb{Z}$) en (p) et $V \subset \mathbb{P}^r/S_1$ une variété projective lisse sur S_1, purement de dimension relative n+1. On suppose qu'il existe un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes pour la fibre spéciale V_p de V/S_1 (XVII, 2.5); ce pinceau est défini par une droite d' dans la fibre spéciale de l'espace projectif $\check{\mathbb{P}}^r/S_1$ dual de $\mathbb{P}^r/S_1$. Relevons d' en une droite d de $\check{\mathbb{P}}^r/S_1$ et soit $X \to d$ le pinceau des sections hyperplanes de V paramétrées par d (XVIII 3.1). Le lieu exceptionnel Δ de d est étale sur S_1 (XVII 6). Par localisation étale en un point de $\Delta_p \subset d$, on obtient donc une situation (C).

Pour vérifier que δ_x n'est pas de torsion, il suffit de la faire après extension des scalaires de S_1 à $\mathbb{C}$. Prenons $V = \mathbb{P}^{n+1}$, et le plongement projectif défini par $\mathcal{O}(N)$. Pour $N \geq 2$, on peut appliquer XVII 2.5 (valable pour tout N dans ce cas particulier). On applique alors le lemme suivant.

Lemme 3.3.7. *Pour un pinceau de Lefschetz d'hypersurfaces de degré N grand dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ ($N \geq 3$ suffit), un cycle évanescent (en $\mathbb{Q}_\ell$ - cohomologie) est non nul.*

Ce lemme résulte de la théorie des pinceaux de Lefschetz, par exemple de XVIII 6.6.1. Il n'y a pas de cercle vicieux à utiliser ici ce résultat de XVIII, basé sur la "formule de Picard-Lefschetz", car nous disposons déjà de (A). On peut aussi utiliser la variante plus directe XIX n° 4, purement transcendante et qui ne dépend que de XIV 3.2.

(E) Preuve de 3.3.5 en caractéristique résiduelle p pour $(X/S, x \in X_s)$.

Soit X_o/S_o comme en (D). D'après 1.3.2 (i), il existe $g : S \to S_o$ tel que l'hensélisé en x_o de $g^* X_o = X_o \times_{S_o} S$ soit S-isomorphe à l'hensélisé de X en x. Il suffit donc de prouver 3.3.5 pour $g^* X_o$. On déduit par changement de base de (C) pour X_o/S_o que

$$\sigma(a) = a - (-1)^m \varepsilon_{b(x)}(\sigma)(a\delta_x)\delta_x$$

dans $H^n(X_{o\bar{\pi}})$, pour σ dans le groupe d'inertie. Soit π une uniformisante, comparons la formule ci-dessus avec (2.2.5.9), où $\varepsilon = \varepsilon_\pi$. On trouve que

$$\lambda_X \varepsilon_\pi(\sigma)(a\delta_x)\delta_x = -(-1)^m \varepsilon_{b(x)}(\sigma)(a\delta_x)\delta_x$$

dans $H^n(X_{o\bar{\pi}})$. Puisque δ_x n'est pas de torsion, nous pouvons simplifier cette formule par $(a\delta_x)\delta_x$; la formule 2.2.5.9, pour la valeur obtenue de λ_X , n'est autre que 3.3.5.

(F) Preuve de 3.3.6 (cas général)

3.3.6 se réduit du cas général de 3.3.5 comme (B) et (C) de (A).

3.4. Résumé.

Les propositions 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et 3.3.5 sont la "formule de Picard-Lefschetz". Cette formule est l'analogue algébrique de XIV 3.2.11, mais prend une forme très différente selon la parité de la dimension relative.

Dans le cas le plus intéressant où X/S est propre, les résultats peuvent se résumer comme suit.

Théorème 3.4 (Formule de Picard-Lefschetz). Soient S un trait strictement hensélien et $f : X \to S$ un morphisme propre et plat purement de dimension relative $n = 2m$ ou $2m + 1$. On suppose que X_η est lisse et que X_s ne présente que des singularités quadratiques ordinaires. Soit Σ le lieu singulier de X_s

(i) à chaque $x \in \Sigma$ est attaché un cycle évanescent $\pm \delta_x \in H_n(X_{\bar{\eta}})(m)$. Ces δ_x sont deux à deux orthogonaux. Pour n pair, on a $(\delta_x, \delta_x) = (-1)^m.2$.

(ii) On a $H^i(X_s) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{\eta}})$

pour $i \neq n$, $n+1$ et une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H^n(X_s) \longrightarrow H^n(X_{\overline{\eta}}) \xrightarrow{(\ ,\delta_x)} \bigoplus_{x\in\Sigma} \Lambda(n-m) \longrightarrow H^{n+1}(X_s) \longrightarrow H^{n+1}(X_{\overline{\eta}}) \longrightarrow 0$$

(iii) Des caractères locaux du groupe d'inertie sont définis :

n pair $\quad \varepsilon_x : I \longrightarrow \{\pm 1\}$

n impair $\quad \varepsilon_x : I \longrightarrow \Lambda(1)$.

Pour X régulier en x , ils sont surjectifs; pour x non dégénéré, ce sont l'unique caractère d'ordre 2 et le caractère canonique.

L'action du groupe d'inertie I est fournie par

$$n = 2m \qquad \sigma(a) = a + (-1)^m \sum_{x\in\Sigma} \frac{\varepsilon_x(\sigma)-1}{2} (a\delta_x)\delta_x$$

$$n = 2m+1 \qquad \sigma(a) = a - (-1)^m \sum_{x\in\Sigma} \varepsilon_x(\sigma)(a\delta_x)\delta_x \ .$$

En particulier

n pair $\quad \sigma(\delta_x) = \varepsilon_x(\sigma)\delta_x$

n impair $\quad \sigma(\delta_x) = \delta_x$.

SGA 7

Exposé XVI

La formule de Milnor

par P. Deligne

Dans cet exposé, on transpose en caractéristique p la formule donnée par Milnor [3] (voir aussi [2]), qui permet dans certains cas de calculer des dimensions d'espaces de cycles évanescents. La démonstration est de nature globale, et ne permet de traiter que le cas "géométrique" d'une base un trait hensélien d'égale caractéristique à corps résiduel parfait.

1. Enoncé du problème

1.1. Soient S un schéma régulier purement de dimension un, s un point fermé de S à corps résiduel parfait, $f : X \to S$ un morphisme plat de type fini, x_o un point fermé de la fibre X_s et $\overline{x}_o$ un point géométrique de X localisé en x_o. On suppose que

(a) x_o est un point de non lissité isolé de f : il existe n et un voisinage U de x_o, purement de dimension relative n, tel que $U - \{x_o\}$ soit lisse sur S ;

(b) X est régulier en x_o.

Sous ces hypothèses, X est une intersection complète relative sur S en x_o. On renvoie à l'exposé VI. 3.10 pour la définition de $D^1_{X/S}$. Dans le voisinage U de x_o, on a

$$D^1_{X/S} = \underline{H}^1(R\,\mathrm{Hom}(L\Omega_{X/S}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \quad ;$$

dans ce voisinage, $D^1_{X/S}$ est de longueur finie et de support contenu dans $\{x_o\}$.

Définition 1.2. Le nombre de Milnor $\mu = \mu(X/S,\bar{x}_o)$ de X/S en $\bar{x}_o$ est la longueur du $\mathcal{O}_{X,x_o}$-module défini par $D^1_{X/S}$.

Exemple 1.3. Prenons pour S une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k . Remplaçant X par un voisinage de x_o , on peut supposer X lisse sur k . Le complexe cotangent se réduit alors à la résolution suivante de $\Omega^1_{X/S}$

$$L\Omega_{X/S} = [f^*\Omega^1_{S/k} \to \Omega^1_{X/k}] \quad .$$

Choisissons une coordonnée locale $t : S \to \mathbb{E}^1_k$ sur S en s (t étale en s), désignons encore par f le composé $t \circ f$, et soit $(x_i)_{1\le i\le n+1}$ un système de coordonnées locales sur X en x_o . A ce moment, en x_o , $f^*\Omega^1_{S/k}$ a pour base df , et $\Omega^1_{X/k}$ a pour base les dx_i . Dès lors, $D^1_{X/S}$ s'identifie au quotient de $\mathcal{O}_X$ par l'idéal engendré par les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\mu = \dim_k \left(\mathcal{O}_{X,x_o}/\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)\right) \tag{1.3.1}$$

C'est là la définition qui figure dans Milnor.

Exemple 1.4. Supposons que X soit le sous-schéma de $\mathbb{E}^{n+1}_S$ défini par une équation g . Soit $i : X \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}_S$ le morphisme d'inclusion. Le complexe cotangent se réduit alors à

$$[(g)/(g)^2 \longrightarrow i^*\Omega^1_{\mathbb{E}^{n+1}/S}]$$

et $D^1_{X/S}$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_X$ par l'idéal engendré par les $(\partial g/\partial x_i)_{1\le i\le n+1}$, soit encore au quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{E}^{n+1}}$ par l'idéal engendré par g et les $\partial g/\partial x_i$.

Exemple 1.5. Prenons pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète V à corps résiduel parfait et de corps des fractions K . Soit X le normalisé de S

dans
est a
point
donc
(1.5.
et so
$v(d_{K'}$
(1.5.
1.6.
image
soit
ture
grou
Dans
$R^i\Phi_{\overline{\eta}}($
en
$\Phi^i_{\overline{\eta}}$ (
1.7.
Swan
de l
phism

dans une extension séparable K' de K . D'après 1.4 et [5] III 7.14 pg 68, $\Omega^1_{X/S}$ est alors isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_X$ par la différente $\mathcal{D}_{X/S}$. Si $\overline{x}_o$ est un point géométrique de X_s , localisé en $x_o \in X_s$, le nombre de Milnor en $\overline{x}_o$ est donc

$$\mu = \ell g(\mathcal{O}_{X,x_o}/\mathcal{D}_{X/S}) \quad . \tag{1.5.1}$$

Soient $\overline{s}$ un point géométrique de S localisé au point fermé s de S , et soit $d_{K'/K}$ un élément de V qui engendre l'idéal déscriminant, de valuation $v(d_{K'/K})$. Il résulte de 1.5.1 que

$$v(d_{K'/K}) = \sum_{x \in X(\overline{s})} \mu(X/S,x) . \tag{1.5.2}$$

1.6. Gardons les hypothèses de 1.1 , désignons par $\overline{s}$ le point géométrique de S image de $\overline{x}_o$, soit $S_{(\overline{s})}$ le spectre de l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_{S,s}$ en $\overline{s}$, et soit $X_{(\overline{s})}$ l'image réciproque de X sur $S_{(\overline{s})}$. Soient $\overline{\eta}$ le spectre d'une clôture algébrique du corps des fractions $k(\eta)$ de $S_{(\overline{s})}$, et $I = Gal(k(\overline{\eta})/k(\eta))$ le groupe d'inertie.

Soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de S . Dans un voisinage du point $\overline{x}_o$ de $X_{\overline{s}}$, les faisceaux de cycles évanescents $\Phi^i_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell) = R^i\Phi_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell)$ sur $X_{\overline{s}}$, relatifs au faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell$ sur $X_{(\overline{s})}$ sont concentrés en $\overline{x}_o$; de plus, le groupe d'inertie I agit sur les $\mathbb{Z}/\ell$ - vectoriels $\Phi^i_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell)_{\overline{x}_o}$.

Ceux-ci sont de dimension finie (XIII 2.4.2).

1.7. Soit I_1 un quotient fini du groupe d'inertie. Rappelons que le caractère de Swan Sw de I_1 est la différence $a - u$ du caractère d'Artin a et du caractère de la représentation d'augmentation u . Rappelons aussi qu'il existe, à isomorphisme près, un seul $\mathbb{Z}_\ell[I_1]$ - module projectif $S(I_1)$ de caractère Sw (voir [6]).

Soit V un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Z}/\ell$, muni d'une action de I : $\rho : I \to GL(V)$. Supposons que ρ se factorise par I_1. La dimension sauvage de V est alors

$$\dim Sw(V) = \dim_{\mathbb{Z}/\ell} \mathrm{Hom}_{I_1}(S(I_1) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} \mathbb{Z}/\ell , V) \quad . \tag{1.7.1}$$

Cet entier est indépendant du choix de I_1, car pour H distingué dans I_1, on a $S(I_1/H) \sim S(I_1)_H$.

On pose de plus

$$\dim tot(V) = \dim Sw(V) + \dim_{\mathbb{Z}/\ell}(V)$$

et on appelle ce nombre la dimension totale de V.

Définition 1.8. Avec la terminologie de 1.6 et 1.7, on appelle nombre de cycles évanescents de X/S en $\overline{x}_o$ (resp. nombre sauvage de cycles évanescents, resp. nombre total de cycles évanescents) l'entier

$$(-1)^n \dim \Phi_{\overline{x}_o} = \mathrm{dfn}\ (-1)^n \sum_i (-1)^i \dim \Phi^i_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell)_{\overline{x}_o}$$

$$(\mathrm{resp}\ (-1)^n \dim Sw\ \Phi_{x_o} = \mathrm{dfn}\ (-1)^n \sum_i (-1)^i \dim Sw\ \Phi^i_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell)_{\overline{x}_o}$$

$$\mathrm{resp}\ (-1)^n \dim tot\ \Phi_{x_o} = \mathrm{dfn}\ (-1)^n \sum_i (-1)^i \dim tot\ \Phi^i_{\overline{\eta}}(\mathbb{Z}/\ell)_{\overline{x}_o}$$

$$= (-1)^n(\dim \Phi_{x_o} + \dim Sw\ \Phi_{x_o}) \quad)$$

Conjecture 1.9. Sous les hypothèses de 1.1, le nombre de Milnor μ de X/S en $\overline{x}_o$ est égal au nombre total de cycles évanescents de X/S en $\overline{x}_o$.

Remarque 1.10. Soit S un trait hensélien de corps résiduel imparfait et $f : X \to S$

un morphisme lisse sauf en $x_o \in X_s$. On suppose X régulier en x_o . La définition 1.2 du nombre de Milnor μ garde un sens sous ces hypothèses, mais je n'ai plus d'interprétation géométrique de μ à proposer.

1.11. Dans la suite de ce n°, on suppose que $S = \mathrm{Spec}(V)$ est un trait hensélien à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé s , que $f : X \to S$ est un morphisme plat de type fini purement de dimension relative n , que X est régulier, que x_o est un point fermé de X_s et que $X - \{x_o\}$ est lisse sur S .

Ceci ne restreint pas la généralité.

Proposition 1.12. Si $n = 0$ (ie. X/S fini), la conjecture 1.9 est vraie pour $(X/S, x_o)$.

On peut supposer que X est le normalisé de S dans une extension finie K' du corps des fractions K . D'après 1.5, on a $\mu = v(d_{K'/K})$.

L'extension K' est définie par un sous-groupe ouvert H du groupe d'inertie I . Soit $H' \subset H$ un sous-groupe distingué ouvert de I et $I' = I/H'$. Soit $s_{I/H}$ le caractère de la représentation de permutation de I' sur I/H , a_I , le caractère de la représentation d'Artin, Sw_I , celui de la représentation de Swan et $u_{I'}$, celui de la représentation d'augmentation. D'après la "Fuhrerdiskriminantenproduktformel" d'Artin, l'idéal discriminant est le conducteur d'Artin de $s_{I/H}$ ([5] VI 3 cor 1 pg 111) :

$$\mu = (a_{I'}, s_{I/H}) = |I'|^{-1} \sum_{i \in I'} a_{I'}(i) s_{I/H}(i) \quad .$$

On a

$$a_{I'} = u_{I'} + Sw_{I'}$$

$$(u_{I'}, s_{I/H}) = \# I/H - 1$$

$$(Sw_{I'}, s_{I/H}) = \dim_{\mathbb{Z}/\ell} \mathrm{Hom}_I(S(I') \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell,\ \mathbb{Z}/\ell^{I/H})$$

$$= \dim_{\mathbb{Z}/\ell} \mathrm{Hom}_I(S(I') \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell, \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Z}/\ell^{I/H}))$$

et donc

$$a = (\# I/H - 1) + \dim Sw\,(\mathrm{Coker}(\mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Z}/\ell^{I/H}))\ .$$

On vérifie aussitôt que $\Phi^i = 0$ pour $i \neq 0$ et que

$$\Phi^0_{x_0} = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Z}/\ell^{I/H})\ ;$$

la formule en résulte.

Proposition 1.13. Si X_s présente en x_o une singularité quadratique ordinaire, la conjecture 1.9 est vraie pour $(X/S, x_o)$.

Cas 1. $n = \dim(X_s) = 2m - 1$.

Le problème est local pour la topologie étale sur X . On peut donc supposer que X_s est le sous-schéma de E_S^{n+1} défini par une équation f :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\, x_{i+m} + a = 0$$

a étant dans l'idéal maximal de V , et que x_o est l'origine des coordonnées. De plus, pour que X soit régulier en x_o , il faut et il suffit que a soit une uniformisante. D'après 1.4, on a

$$a = \ell g(\mathcal{O}_{\mathbf{E}_S^{2m}} / (f, \frac{\partial f}{\partial x_i})) = 1 \quad .$$

D'après , $\Phi^i_{x_o} = 0$ pour $i \neq n$, et $\Phi^n_{x_o}$ est de dimension un, avec action triviale de l'inertie. Le nombre sauvage de cycles évanescents est donc nul, et le nombre total de cycles évanescents est 1, ce qui vérifie 1.9.

Cas 2. $n = \dim(X_s) = 2m$, $\mathrm{car}(k(s)) \neq 2$.

Sous ces hypothèses, on peut prendre $X \subset \mathbb{E}^{n+1}_S$ défini par une équation f

$$\sum_{i=1}^{m} x_i x_{i+m} + x^2_{2m+1} + a = 0 \quad ,$$

a étant une uniformisante. Ici encore, $\mu = 1$, $\Phi^i_{x_o} = 0$ pour $i \neq n$ et $\Phi^i_{x_o}$ est de dimension un. Cette fois le groupe d'inertie agit par ± 1 sur $\Phi^n_{x_o}$, donc de façon modérée. Le nombre sauvage de cycles évanescents est encore nul, et 1.9 est vérifié.

Cas 3. $n = \dim(X_s) = 2m$, $\mathrm{car}(k(s)) = 2$.

Cette fois, on peut prendre $X \subset \mathbb{E}^{n+1}_S$ défini par l'équation f :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i x_{i+m} + (x^2_{2m+1} + a x_{2m+1} + b) = 0 \quad ,$$

avec a et b dans l'idéal maximal. Pour que X soit régulier, il faut et suffit que b soit une uniformisante; pour que la fibre générique de X soit lisse, il faut et il suffit que $a^2 - 4b \neq 0$.

Le nombre de Milnor μ de X/S coïncide avec celui de $X_o \subset \mathbb{E}^1_S$ défini par l'équation f_o

$$x^2 + ax + b = 0 \quad . \tag{1}$$

De même, les $\Phi^i_{x_o}$ sont nuls pour $i \neq n$, $\Phi^n_{x_o}$ est de dimension un, I agit sur $\Phi^n_{x_o}$ par ± 1 et le sous-groupe d'indice deux de I qui agit trivialement correspond à l'extension de K d'équation (1). Le nombre total de cycles évanescents de

X/S en x_o coïncide donc avec celui relatif à X_o/S, et la validité de 1.9 dans ce cas résulte de 1.12. Le nombre de Milnor est donné par (1.5)

(1.13.1) $$\mu = v(a^2 - 4b) \quad .$$

2. Le cas "géométrique"

On se propose de montrer que la conjecture 1.9 est vraie en égale caractéristique. Le résultat géométrique clef est le suivant. La possibilité de l'utiliser m'a été suggérée par des conversations avec B. Saint-Donat.

Proposition 2.1. *Soient S une courbe projective lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k, X une variété propre et lisse sur k, purement de dimension $n+1$, et $f : X \to S$ un morphisme lisse en dehors d'un ensemble fini F de points de X. Les caractéristiques d'Euler-Poincaré (en cohomologie étale) de S, X et de la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$ de f vérifient alors*

(2.1.1) $$\chi(X) = \chi(S)\,\chi(X_{\bar{\eta}}) - (-1)^n \sum_{x \in F} \mu(X/S,x) \, .$$

On sait que la caractéristique d'Euler-Poincaré de X coïncide avec la trace (ou intégrale sur X) de la dernière classe de Chern du fibré tangent

$$\chi(X) = \int c_{n+1}(\Theta_X) = (-1)^{n+1} \int c_{n+1}(\Omega^1_X) \quad .$$

Posons

$$\Omega^1_X = (\Omega^1_X \otimes (f^* \Omega^1_S)^{\otimes -1}) \otimes f^* \Omega^1_S \quad .$$

La classe totale de Chern du faisceau inversible $f^* \Omega^1_S$ est l'image réciproque de la classe totale de Chern de Ω^1_S sur S

$$c^*(f^*\Omega_S^1) = 1 + f^*c^1(S,\Omega_S^1)$$

et les cup-puissances de c^1 sont nulles :

$$(f^* c^1(S,\Omega_S^1))^n = f^*(c^1(S,\Omega_S^1)^n) = 0 \qquad (n > 1) \ .$$

On en déduit que

$$c^{n+1}(\Omega_X^1) = c^n(\Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1}) . f^*c_1(S,\Omega_S^1) + c^{n+1}(\Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1}) .$$

Si S est de genre g, alors $c_1(S,\Omega_S^1)$ est égal à $(2g - 2)$ fois la classe de cohomologie d'un quelconque point fermé s de S, d'où, pour X_s non singulier,

$$I = \int_X c^n(\Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1}) . f^*c_1(S,\Omega_S^1)$$

$$= (2g-2) . \int_X c^n(\Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1}) . f^*c_1(s)$$

$$= (2g-2) . \int_{X_s} c^n(X_s, \Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1} \otimes \mathcal{O}_{X_s})$$

De plus, sur X_s, $f^*\Omega_S^1$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_s}$ et $\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_s}$ figure dans une suite exacte

$$0 \to f^*\Omega_S^1 \otimes \mathcal{O}_{X_s} \to \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_{X_s} \to \Omega_{X_s}^1 \to 0 \ .$$

De là, on tire que

$$c^n(X_s, \Omega_X^1 \otimes (f^*\Omega_S^1)^{\otimes -1} \otimes \mathcal{O}_{X_s}) = c^n(X_s, \Omega_{X_s}^1) \quad \text{et}$$

$$I = (2g-2) . \int_{X_s} c^n(X_s, \Omega_{X_s}^1) = (-1)^{n+1} \chi(S) \chi(X_s) \ .$$

L'application canonique

$$f^* : f^*\Omega^1_S \to \Omega^1_X$$

s'identifie à une section a de $\Omega^1_X \otimes (f^*\Omega^1_S)^{\otimes -1}$. Une fois choisis des systèmes de coordonnées locales sur S et X, ce qui identifie $\Omega^1_X \otimes (f^*\Omega^1_S)^{\otimes -1}$ à $\mathcal{O}_X^{n+1}$, les coordonnées de a sont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. La section a ne s'annule donc que sur F, et d'après 1.3, la multiplicité du zéro de a en $x \in F$ est égale au nombre de Milnor $\mu(X/S,x)$.

Rappelons que si une section a d'un fibré vectoriel G de rang d sur un k-schéma propre et lisse X purement de dimension d ne s'annule qu'en des points isolés, alors la trace $\int_X c^d(G)$ est égale au nombre de zéros de a, comptés avec leurs multiplicités. On a ici

$$II = \int_X c^{n+1}(\Omega^1_X \otimes (f^*\Omega^1_S)^{\otimes -1}) = \sum_{x \in F} \mu(X/S,x) \quad .$$

Regroupant les termes, on trouve

$$\chi(X) = (-1)^{n+1}(I + II) = \chi(S).\chi(X_s) - (-1)^n \sum_{x \in F} \mu(X/S,x) \quad ,$$

d'où 2.1 puisque $\chi(X_s) = \chi(X_{\overline{\eta}})$.

Corollaire 2.2. Sous les hypothèses précédentes, si $n(X/S,x)$ est le nombre total de cycles évanescents en x de X/S (1.8), on a

$$\sum_{x \in F} \mu(X/S,x) = \sum_{x \in F} n(X/S,x) \quad .$$

La suite spectrale de Leray pour f fournit

$$\chi(X) = \Sigma\, (-1)^{p+q} \dim_{\mathbb{Z}/\ell} H^p(S, R^q f_* \mathbb{Z}/\ell) = \sum_q (-1)^q\, \chi(S, R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)$$

Pour tout faisceau constructible G de $\mathbb{Z}/\ell$ - modules sur S, on a ([4] ou SGA 5 X 7.2)

$$\chi(S,G) = \chi(S) \cdot \dim_{\mathbb{Z}/\ell}(G_{\overline{\eta}}) - \sum_{s\in S} \varepsilon_s(G) \quad ,$$

où, pour chaque $s \in S$, si on identifie $\overline{\eta}$ à la clôture algébrique du corps des fractions de l'hensélisé de S en s, on a

$$\varepsilon_s(G) = \dim(G_{\overline{\eta}}) - \dim(G_s) - \dim \mathrm{Sw}(G_{\overline{\eta}}) \quad .$$

Pour $s \in S$, on déduit des suites exactes XIII 2.4.6.3

$$\ldots \quad (R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_s \to (R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_{\overline{\eta}} \to \bigoplus_{x\in F(s)} \Phi^q_{\overline{\eta}} (\mathbb{Z}/\ell)_x \to \ldots$$

que

(a) $$\sum (-1)^q \dim(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_{\overline{\eta}} - \dim(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_s = \sum_{x\in F(s)} \sum (-1)^q \dim \Phi^q_{\overline{\eta}} (\mathbb{Z}/\ell)_x$$

(b) $$\sum (-1)^q \dim \mathrm{Sw}(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_{\overline{\eta}} = \sum_{x\in F(s)} \sum (-1)^q \dim \mathrm{Sw}\, \Phi^q_{\overline{\eta}} (\mathbb{Z}/\ell)_x$$

(c) $$\sum (-1)^q \varepsilon_s(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell) = \sum_{x\in F(s)} \dim \mathrm{tot}\, \Phi_x \quad .$$

La formule d'Euler-Poincaré se réduit donc à

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \sum (-1)^q \chi(S, R^q f_* \mathbb{Z}/\ell) \\
&= \sum (-1)^q \left(\chi(S).\dim(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_{\overline{\eta}} - \sum_s \varepsilon_s(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)\right) \\
&= \chi(S). \sum (-1)^q \dim(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell)_{\overline{\eta}} - \sum_s \sum (-1)^q \varepsilon_s(R^q f_* \mathbb{Z}/\ell) \\
&= \chi(S). \chi(X_{\overline{\eta}}) - \sum_s \sum_{x\in F(s)} \dim \mathrm{tot}\, \Phi_x \\
&= \chi(S). \chi(X_{\overline{\eta}}) - (-1)^n \sum_{x\in F} n(X/S,x)
\end{aligned}$$

Comparant cette formule avec (2.1.1), on trouve 2.2.

Corollaire 2.3. Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, si $x_o \in F$ et si pour tout $x \in F$ distinct de x_o, la fibre de f passant par x présente en x un point singulier quadratique ordinaire, alors

$$\mu(X/S,x_o) = n(X/S,x_o) \quad .$$

Pour $x \neq x_o$, on a d'après 1.13

$$\mu(X/S,x) = n(X/S,x) \quad ,$$

et il reste à appliquer 2.2.

Théorème 2.4. Soient S un trait hensélien d'égale caractéristique à corps résiduel parfait, $f : X \to S$ un morphisme plat de type fini et $\overline{x}$ un point géométrique de X, d'image dans X un point fermé x de X_s qui soit un point de non lissité isolé de X/S. On suppose que X est régulier en x. Alors, le nombre total (1.8) de cycles évanescents de X/S en $\overline{x}$ coïncide avec le nombre de Milnor $\mu(X/S,x)$.

Soit S' le trait hensélien déduit de S par extension du corps résiduel de $k(s)$ à sa clôture séparable, et soit $X' = X \times_S S'$. L'assertion 2.4 pour X/S équivaut alors à 2.4 pour X'/S'. Puisque $k(s)$ est déjà supposé parfait, on peut donc supposer le corps résiduel de S algébriquement clos.

Pour un tel S, soit S' le complété de S, et $X' = X \times_S S'$. Le nombre de Milnor de X/S en x est le même pour X/S et X'/S'. D'après XIII 2.4.2 il en est de même du nombre total de cycles évanescents. Ceci permet de supposer que S est de plus complet, donc isomorphe à $k[[t]]$ (avec k algébriquement clos). On a alors, pour X_s de dimension n en x :

Proposition 2.5. Il existe une variété projective et lisse Y sur k, purement de dimension $n+1$, un morphisme $f : Y \to \mathbb{P}^1_k$, lisse en dehors d'un ensemble fini F

de points de Y et $y_o \in F$ tels que

(a) si $y \in F$, $y \neq y_o$, alors y est un point singulier quadratique ordinaire de la fibre de f passant par y ;

(b) on a $f(y_o) = 0$, si $a : S \to \mathbb{P}^1_k$ est l'isomorphisme naturel entre S et le complété de $\mathbb{P}^1_k$ en 0, il existe un S-isomorphisme entre l'hensélisé de X en x et l'hensélisé de a^*Y en y_o.

Montrons que 2.5 ⇒ 2.4. D'après 2.3 et 2.5 (a), le nombre de Milnor de Y/T en y_o coïncide avec le nombre total de cycles évanescents. Comme plus haut, d'après XIII 2.4.2, on a le même résultat pour a^*Y/S, donc aussi pour $(X/S,x)$, qui par 2.5 (b) est localement isomorphe à $(a^*Y/S,y_o)$, pour la topologie étale.

Prouvons 2.5. Le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe, en tant que $k[[t]]$ - algèbre, à un quotient

$$\mathcal{O}_{X,x}\hat{} = k[[t,x_1 \ldots x_{n+1}]]/(f) .$$

On déduit alors du théorème des fonctions implicites XV 1.1.2 (= [1] lemme 5.10) qu'il existe un entier N tel que la condition 2.5 (b) soit vérifiée dès que $\mathcal{O}_{Y,y_o}\hat{}$ est $k[[t]]$ - isomorphe à $k[[t,x_1 \cdots x_{n+1}]]/(f_1)$, avec $f_1 - f$ dans la puissance $N^{\text{ième}}$ de l'idéal maximal m de $k[[t,x_1 \cdots x_{n+1}]]$.

Si (t_o,t_1) et $(x_o,\ldots,x_{n+1})$ sont les systèmes de coordonnées homogènes usuels sur $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^{n+1}$, on prendra pour $Y/\mathbb{P}^1$ la sous-variété de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1}$, définie par une équation

$$g(t_o,t_1 ; x_o,\ldots,x_{n+1}) = 0 , \tag{2.5.1}$$

homogène de degré d' en (t_o,t_1) et homogène de degré d'' en les x_i. En termes plus intrinsèques, g sera une section de $\mathcal{O}(d',d'') = pr_1^* \mathcal{O}(d') \otimes pr_2^* \mathcal{O}(d'')$.

La condition (b) sera alors vérifiée si

(2.5.2) $$g(1,t\ ;\ 1,x_1,\ldots,x_{n+1}) \equiv f \mod m^N \ .$$

Fixons d' et d" . Les g du type (2.5.1) sont alors les points (rationnels) d'un espace affine A sur k . Soit $u \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1}$. On désignera par B(u,k) l'espace affine dont les points sont les k-jets de sections de $\mathcal{O}(d',d")$ en u . Si $u_o = (1,0;1,0,\ldots,0)$ et si $u \neq u_o$, alors, pour d' et d" assez grand, l'application de restriction

(2.5.3) $$A \to B(u_o,N) \times B(u,2) \ ,$$

toujours linéaire, est surjective. Soit $C(u) \subset B(u,2)$ l'ensemble des 2-jets $h \in B(u,2)$ qui soient le 2-jet d'un germe $\tilde{h}$ nul ou tel que

(a) u se trouve sur la variété V d'équation $\tilde{h} = 0$;

(b) u n'est ni un point lisse, ni un point quadratique ordinaire de la fibre passant par u de $V/\mathbb{P}^1$.

On vérifie facilement que C(u) est fermé de codimension n + 3 dans B(u,2) .

Soit D le sous-espace affine de A formé des g vérifiant (2.5.2). Pour $u \neq u_o$, soit D(u) le sous-espace de D formé des g nuls ou tels que g(u) = 0 et que u ne soit ni un point lisse, ni un point quadratique ordinaire, de la fibre passant par u de la variété V d'équation g = 0 . Alors, si d' et d" sont assez grands pour que (2.5.3) soit surjectif, D(u) est de codimension n+3 dans D . La réunion des D(u) pour $u \neq u_o$ est donc de codimension $\geq 1 = (n+3) - (n+2)$, et un élément général g de D n'est dans aucun des D(u) . Il résoud le problème posé.

Bibliographie

[1] M. ARTIN : Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. IHES 36 (1969) (Zariski's volume).

[2] LE DUNG TRANG : Singularités isolées des hypersurfaces complexes. Pub. Centre Math. Ecole Polytechnique, Mai 69.

[3] J. MILNOR : Singular points of complex hypersurfaces. Princeton univ. press, 1968.

[4] M. RAYNAUD : Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. Séminaire Bourbaki 286, février 1965.

[5] J.P. SERRE : Corps locaux. Publ. Inst. Math. un. Nancago VIII. Hermann 1962.

[6] J.P. SERRE : SGA 5, IX. Introduction à la théorie de Brauer. Reproduit dans : Représentations linéaires des groupes (3e partie). Hermann. Paris 1967.

S G A 7

EXPOSE XVII

PINCEAUX DE LEFSCHETZ: THEOREME D'EXISTENCE

par N. M. KATZ

0. Introduction

Dans le présent exposé (qui, dans le séminaire oral, se plaçait avant les exposés XIV, XV consacrés à la formule de Picard-Lefschetz), nous introduisons les "pinceaux de Lefschetz" de sections hyperplanes d'un schéma projectif et lisse, nous en donnons des conditions d'existence; dans l'exposé suivant, nous en faisons une étude cohomologique élémentaire, basée sur la structure connue de la cohomologie des variétés éclatées. Le fait que certaines hypothèses sur les pinceaux de Lefschetz que nous sommes amenés à introduire sont souvent satisfaites résultera de la formule de Picard-Lefschetz de Exp. XV, de nature moins élémentaire que les résultats du présent exposé et du suivant.

Certains développements du présent exposé et du suivant se trouveront exposés ailleurs dans un cadre plus général (schémas de base généraux, hypothèses de quasi-projectivité au lieu de projectivité, etc.), notamment l'étude pré-cohomologique des pinceaux de sections hyperplanes (et des pinceaux de Lefschetz plus particulièrement) dans EGA V, et l'étude cohomologique des schémas éclatés dans

l'exposé de JOUANOLOU SGA 5 VII; le lecteur trouvera également dans EGA V des démonstrations où la chasse aux diagrammes intrinsèque remplace l'usage des coordonnées, qu'affectionne le rédacteur du présent exposé.

Je tiens à remercier P. DELIGNE et P. GRIFFITHS pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la conception de cet exposé. Dans tout cet exposé, k désigne un corps algébriquement clos, sauf mention expresse du contraire.

1. Un rappel sur les singularités quadratiques (cf VI 6).

1.1. Soit Y un k-schéma purement de dimension n. Un point fermé $y \in Y$ s'appelle une singularité quadratique ordinaire de Y si :

a) le complété $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ de l'anneau local de y dans Y est isomorphe au quotient $k[[T_1,\ldots,T_n]]/(Q(T))$ des series formelles en $n=1+\dim_k Y$ variables par l'idéal engendré par un élément $Q(T)$.

b) Q ne commence qu'en degré deux, et la sous-variété de $\mathbb{P}_k^{n-1}$ définie par l'annulation de la partie homogène de degré deux de $Q(T)$ est lisse sur k si $n \geq 2$, et la partie homogène de $Q(T)$ de degré deux est non-nulle si $n = 1$.

Si la caractéristique de k est différente de deux, ou si n est pair, la condition b) équivaut à la condition

b') Q ne commence qu'en degré deux, et la matrice hessienne de Q

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial T_i \partial T_j}(0) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

est inversible,

Comme on voit en s'appuyant sur le critère jacobienne de lissité.

La "forme standard" pour la partie homogène de degré deux Q_2 d'une série Q vérifiant b), forme qui peut être obtenue après un changement de variable linéaire, est

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} Q_2(T) = \sum_{i=1}^{[n/2]} T_{2i-1} T_{2i} & \text{si } n \text{ est pair} \\ Q_2(T) = T_n^2 + \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} T_{2i-1} T_{2i} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

comme on voit par la théorie des formes quadratique (Bourbaki, Alg.X).

1.2. Un point fermé $y \in Y$ qui vérifie a), b) s'appelle singularité quadratique non-dégénérée. Comme le déterminant de la matrice hessienne est identiquement nul en caractéristique deux si n est impair, les singularités quadratiques non-dégénérées en dimension n n'existent que si, ou bien n est pair, ou bien si k est de caractéristique différente de deux cas dans lesquels ce sont exactement les singularités quadratiques ordinaires.

2. Les pinceaux de Lefschetz : énoncé des résultats

2.1. Désignons par $\mathbb{P}^r$ l'espace projectif à r dimensions sur k, par $\check{\mathbb{P}}^r$ l'espace projectif dual des hyperplans dans $\mathbb{P}^r$, et par $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$ la variété des droites dans $\check{\mathbb{P}}^r$. Un point $D \in Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$ s'appelle un pinceau d'hyperplans dans $\mathbb{P}^r$. Considérant D comme une droite dans $\check{\mathbb{P}}^r$, on écrit, par abus de notation, $D=\{H_t\}_{t\in D}$, les H_t étant les hyperplans de $\mathbb{P}^r$ qui sont les points de la droite D. On appelle axe de D la sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^r$ de codimension deux qui est l'intersection $H_o \cdot H_\infty$ de deux éléments distincts quelconques du pinceau. Considérant l'axe de D comme un point de $Gr(r-2, \mathbb{P}^r)$, la variété des sous-variétés linéaires de dimension r-2 dans $\mathbb{P}^r$, la flèche D $\longrightarrow$ l'axe de D n'est autre que l'isomorphisme bien connu d'orthogonalité

$$Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r) \xrightarrow{\sim} Gr(r-2, \mathbb{P}^r) \quad .$$

2.2. Soit X un k-schéma, propre, lisse et irréductible, de dimension $n \geq 1$, muni d'un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. Un pinceau $D = \{H_t\}_{t \in \mathbb{P}}$ d'hyperplans dans $\mathbb{P}^r$ s'appelle un pinceau de Lefschetz (par rapport au plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$) si

a) l'axe de D coupe transversalement X (EGA IV 17.13.7);

b) il existe un ouvert dense U de D tel que pour tout $t \in U$, l'hyperplan H_t coupe transversalement X ;

c) pour $t_o \in D-U$, H_{t_o} coupe transversalement X sauf en

un point, qui est un point singulier quadratique ordinaire de $X \cdot H_{t_o}$.

Nous allons voir plus bas (3.2.1) que les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert de $Gr(1, \mathbb{P}^r)$.

2.3. Le plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ s'appelle un plongement de Lefschetz si les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert dense dans $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$ *).

2.4. Rappellons maintenant la notion de multiple d'un plongement donné $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. C'est le composé du plongement donné $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ et du d-ième plongement de Segre, $S_d : \mathbb{P}^r \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$ qui s'écrit en termes des coordonnés homogènes $X_o,\ldots,X_r$ dans $\mathbb{P}^r$

$$(X_o,\ldots,X_r) \xrightarrow{S_d} (,\ldots,X^W,\ldots)$$

où $X^W = X_o^{W_o} \ldots X_r^{W_o}$ parcourt les monômes de degré d en $X_o,\ldots,X_r$. Remarquons qu'une "section de X par une hypersurface de degré d " **) pour un plongement donné n'est autre qu'une

*) ou plus correctement, dans l'ensemble des points fermés de $Gr(1,\check{\mathbb{P}}^r)$. Nous nous permettrons par la suite de tels abus de langage.

**) En Anglais, on dit plus commodément: hypersurface section of degree d .

"section hyperplane" pour le d-ième multiple de ce plongement.

Théorème 2.5. Soit X irréductible, propre et lisse sur k de dimension $n \geq 1$, muni d'un plongement $i : X \hookrightarrow P^r$. Alors

2.5.1. Tout multiple d-ième de i, avec $d \geq 2$, est un plongement de Lefschetz.

2.5.2. Si k est de caractéristique nulle, le plongement donné i est un plongement de Lefschetz.

La démonstration se coupe en plusieurs morceaux, qui suivent.

3. La variété duale

3.1. Soit I l'Idéal dans $\mathbb{P}^r$ qui définit X. On désigne par N le faisceau conormal I/I^2, faisceau localement libre de rang $r-n$ sur X, et par $\mathbb{P}(N)$ le fibré projectif au-dessus de X formé des droites dans $\overset{\vee}{N}$. (Pour $X = \mathbb{P}^r$, $\mathbb{P}(N)$ est vide.)
Le fibré $\mathbb{P}(N)$ s'identifie à la sous-variété de $X \times \overset{\vee}{\mathbb{P}}^r$ formée des couples (x, H) tels que H soit tangent à X en x, par la flèche $\mathbb{P}(N) \xrightarrow{\nu} X \times \overset{\vee}{\mathbb{P}}^r$

(3.1.1) $\mathbb{P}(I/I^2)_x \ni F \xrightarrow{\nu}$ (x, l'hyperplan d'équation $\sum \frac{\partial F}{\partial X_i}(x) T_i$),

F désignant une section locale de I/I^2. On définit

(3.1.2) $\varphi : \mathbb{P}(N) \longrightarrow \overset{\vee}{\mathbb{P}}^r$

comme étant le composé $\mathbb{P}(N) \xrightarrow{\nu} X \times \overset{\vee}{\mathbb{P}}^r \xrightarrow{pr_2} \overset{\vee}{\mathbb{P}}^r$.

3.1.3. On désigne par $\check{X}$ l'image de φ ; c'est l'ensemble des hyperplans qui ne coupent pas transversalement X , et s'appelle la variété duale de X (plongé dans $\mathbb{P}^r$ par i) .

Proposition 3.1.4. La variété duale $\check{X}$ est irréductible et propre de dimension $\leq r-1$.

Démonstration. C'est l'image par φ de $\mathbb{P}(N)$, lui-même irréductible de dimension $r-1$ si $X \neq \mathbb{P}^r$, et vide si $X = \mathbb{P}^r$.

Remarque 3.1.5. Il est possible de préciser l'interprétation de $\mathbb{P}(N)$ de la façon suivante. Soit $\underline{Y} \subset X \times \check{\mathbb{P}}^r$ le sous-schéma de $X \times \check{\mathbb{P}}^r$ "d'incidence" , dont la fibre en tout point H de $\check{\mathbb{P}}^r(k)$ est $X.H$. Il est immédiat que $\underline{Y}$ est lisse de dimension $n+r-1$, comme fibré projectif de dimension relative $r-1$ sur X , donc $Y \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^r$ fait de $\underline{Y}$ une intersection complète relative de dimension relative virtuelle $(n+r-1)-r = n-1$. Ceci posé, le sous-schéma jacobien $J_{n-1}(\underline{Y}/\check{\mathbb{P}}^r)$ (VI 5.2) n'est autre que $\mathbb{P}(N)$. Grâce à la compatibilité de la formation du sous-schéma jacobien d'une intersection complète relative avec tout changement de base, on en déduit que pour toute droite D dans $\check{\mathbb{P}}^r$, le sous-schéma jacobien $J_{n-1}(\tilde{X}/D)$, où $\tilde{X} = \underline{Y} \times_{\check{\mathbb{P}}^r} D$, n'est autre que $\mathbb{P}(N) \times_{\check{\mathbb{P}}^r} D$.

Proposition 3.2. Le sous-ensemble B de $\check{X}$ formé des hyperplans H tel que $X \cdot H$ ait un et un seul point singulier, et que ce point

soit quadratique ordinaire, est ouvert .

C'est un cas particulier de XV 1.3.2, , s'appuyant la théorie des "modules henséliens" de R. ELKIK (XV 1.1.4). Le cas où on se restreint aux points quadratiques non dégénérés (i.e. où car(k) $\neq 2$ ou n=dim X est paire) est d'ailleurs évident grâce à 3.3 ci-dessous (dont la démonstration n'utilise pas 3.2).

Corollaire 3.2.1. Sous les hypothèses de 3.2, désignons par F le fermé $\check{X}$-B de $\check{X}$. Alors les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert dans $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$, et les conditions suivantes sont équivalentes:

3.2.2. Le plongement donné $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ est un plongement de Lefschetz;

3.2.3. il existe un pinceau de Lefschetz d'hyperplans (pour le plongement donné).

3.2.4. La codimension de F dans $\check{\mathbb{P}}^r$ est ≥ 2 .

Démonstration. Une droite D dans $\check{\mathbb{P}}^r$ est un pinceau de Lefschetz si et seulement si elle vérifie:

(3.2.5) L'axe de D coupe transversalement X ,

(3.2.6) D n'est pas contenue dans X ,

(3.2.7) D ne rencontre pas F .

Les conditions (3.2.5) et (3.2.6) définissent des ouverts de $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$, et, F étant fermé , il en est de même pour (3.2.7), donc les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert dans $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$. Parce que $\dim X \leq r-1$, l'ouvert (3.2.6) est non-vide, et donc dense. L'ouvert (3.2.5) est également non-vide, donc dense. En effet, soit H un hyperplan qui coupe transversalement X ; un tel H existe car $\dim \check{X} \leq r-1$. Parce que $\dim (\check{X} \cdot G) \leq r-1$, il existe un hyperplan G qui coupe transversalement $X \cdot H$, et par construction la droite D passant par H et G a une axe qui coupe transversalement X . Donc le plongement est de Lefschetz si et seulement si l'ouvert (3.2.7) est non-vide (et donc dense). Or, F étant fermé, (3.2.7) est non-vide si et seulement si F est de codimension ≥ 2 dans $\check{\mathbb{P}}^r$ (cf. EGA V, ou Mumford, Introduction to Algebraic Geometry, p. 88, Cor 3).

Corollaire 3.2.8. Sous les hypothèses de 3.2., supposons que $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ soit un plongement de Lefschetz. Soit H_o un hyperplan qui coupe transversalement X , et désignons par $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$ la sous-variété de $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)$ formée des droites passant par H_o . Alors les pinceaux de Lefschetz passant par H_o forment un ouvert dense dans $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$.

Démonstration. D'après (3.2.1), les-dits pinceaux forment un ouvert dans $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$. L'argument qu'on vient de donner pour

établir que les ouverts (3.2.5) et (3.2.6) sont non-vides démontre que leurs intersections avec $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$ sont également non-vides. Il reste à prouver qu'il y a des droites passant par H_o qui ne rencontrent pas F. Pour ceci, soit T un hyperplan dans $\check{\mathbb{P}}^r$ qui ne contient pas H_o. On a un isomorphisme

$$Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o} \xleftarrow{\sim} T$$

la droite passant par H_o et τ $\longleftarrow\!\!\shortmid$ τ

donc $Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$ "est" un espace projectif de dimension r-1. Les droites la-dedans passant par un point de F y forment un fermé de dimension $\leq r-2$, étant l'image du morphisme

$$F \longrightarrow Gr(1, \check{\mathbb{P}}^r)_{H_o}$$

$$f \longmapsto \text{la droite passant par } H_o \text{ et par } f .$$

Proposition 3.3. Le morphisme $\varphi : \mathbb{P}(N) \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^r$ est net (= non ramifié) en un point fermé (x_o, H) si et seulement si le point x_o est une singularité quadratique non-dégénérée (1.2) de $X \cdot H$. En particulier, le sous-ensemble de $\mathbb{P}(N)$ formé des points (x, H) tel que x soit une singularité quadratique non-dégénérée de $X \cdot H$ est ouvert.

Démonstration. Nous pouvons nous borner au cas $X \neq \mathbb{P}^r$. Les propriétés prétendues équivalentes étant indépendantes du choix particulier des coordonnés, on peut les expliciter à l'aide de coordonnés choisies d'une façon très particulière. Or, X étant une sous-variété lisse de $\mathbb{P}^r$ de dimension $n \geq 1$, on peut choisir des coordonnés homogènes $X_0,\ldots,X_r$ dans $\mathbb{P}^r$ de telle façon que

3.3.1. le point $x_o \in \mathbb{P}^r$ soit $(1, 0,\ldots,0)$;

3.3.2. posant $x_i = X_i/X_o$ pour $i = 1,\ldots,r$, de sorte que le complété $\hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}^r,x_o}$ s'identifie à $k[[x_1,\ldots,x_r]]$, l'idéal définissant la trace de X dans $\operatorname{Spec} \hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}^r,x_o}$ est engendré par des éléments g_i $(i=1,\ldots,r-n)$ dans $\underline{O}_{\mathbb{P}^r,x}$ qui, dans $\hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}^r,x_o}$ s'écrivent

$$g_i = x_{n+i} - h_i(x_1,\ldots,x_n) \quad , \quad i = 1,\ldots,r-n$$

où les $h_i(x_1,\ldots,x_n)$ sont des séries en $x_1,\ldots,x_n$ seulement qui se trouvent dans le carré de l'idéal maximal de $k[[x_1,\ldots,x_n]]$.

3.3.3. l'hyperplan H provient, via (3.1.1) de g_{n-r} .

Il résulte de (3.3.2) que, posant $V = \operatorname{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X,x_o})$, il y a une trivialisation $(I/I^2)|V \simeq \underline{O}_V^{r-n}$

(3.3.4) $$(\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-n}) \longmapsto \sum_1^{n-r} \lambda_i g_{n+i}$$

Il résulte de ceci et de (3.3.3) qu'il existe un voisinage W de (x, H)

dans $\mathbb{P}(N)|V$ tel qu'on ait $V \times \mathbb{A}^{r-n-1} \simeq W$, l'isomorphisme étant donné par

$$(3.3.5)\quad (v,(\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-n-1}))\in V\times\mathbb{A}^{r-n-1} \longmapsto (v,(g_{r-n}+\sum_1^{n-r-1}\lambda_i g_i)\in \mathbb{P}(I/I^2)|V$$

(où l'on pose $\lambda_i = \wedge_i / \wedge_{n-r}$).

En particulier, le complété $\hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}(\check{N}),(x,H)}$ de l'anneau local de $\mathbb{P}(N)$ en (x, H) s'identifie à $k[[x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-n-1}]]$. Exprimons maintenant φ en termes de ces coordonnés, au niveau des complétés:

$$(3.3.6)\quad \varphi(x,\lambda) = \varphi(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-n-1})$$

$$= \text{l'hyperplan d'équation } \sum_{i=0}^{n+r}\varphi_i(x,\lambda)T_i = 0 \ .$$

Comme l'hyperplan image $\Sigma\,\varphi_i\,T_i$ contient le point (x) , point qui s'écrit en coordonnés homogènes

$$(3.3.7)\quad (x) = (1,x_1,\ldots,x_n,\ h_1(x),\ldots,h_{r-n}(x)\ ,$$

on a

$$(3.3.8)\quad \varphi_o(x,\lambda)= -\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i(x,\lambda)-\sum_{i=1}^{r-n} h_i(x)\varphi_{n+i}(x,\lambda)$$

dans $\hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}(N),(x_o,H)}$ et, d'après (3.1.1), pour $i \geq 1$, posant $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_k(\hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}^r,x_o}, \hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}^r,x_o})$:

$$(3.3.9)\quad \varphi_i(x,\lambda) = D_i(g_{r-n}+\sum_{i=1}^{r-n-1}\lambda_i\ g_i)\ (x) \quad \text{dans } \hat{\underline{O}}_{\mathbb{P}(N),(x_o H)}$$

Rappellant $g_i = x_{n+i} - h_i(x_1,\dots,x_n)$, on a

(3.3.10) $\varphi_i(x,\lambda) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(h_{r-n} + \sum_{i=1}^{r-n-i} \lambda_i h_i)$ pour $1 \le i \le n$,

(3.3.11) $\varphi_i(x,\lambda) = \lambda_i$ pour $1 \le i \le n$,

et

(3.3.12) $\varphi_r(x,\lambda) = 1$.

Désignons par m l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}(N),\,(x_o,H)}$. Compte tenu de ce que $h_i \equiv 0 \bmod m^2$ pour $i = 1,\dots,r-n$, on trouve

(3.3.13) $\varphi_o(x,\lambda) \equiv 0 \bmod m^2$

(3.3.14) $\varphi_i(x,\lambda) \equiv -\frac{\partial h_{r-n}}{\partial x_i} \bmod m^2$ pour $i=1,\dots,n$.

Mettant ensemble les formules (3.3.11) - (3.3.14), on trouve que la matrice jacobienne de φ en le point (x_o,H) est

(3.3.15)

$$
\begin{array}{r}
1\,\{ \\
n\,\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
r-n-1\,\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
1\,\{
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \qquad\qquad n & & \qquad\qquad r-n-1 & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{\partial^2 h_{r-n}}{\partial x_1 \partial x_1}(0) & \cdots\cdots & -\dfrac{\partial^2 h_{r-n}}{\partial x_n \partial x_1}(0) & \cdots 0 & \cdots\cdots & 0 \\
-\dfrac{\partial^2 h_{r-n}}{\partial x_1 \partial x_n}(0) & \cdots & -\dfrac{\partial^2 h_{r-n}}{\partial x_n \partial x_n}(0) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & 0 & 1\ 0 & & 0 \\
0 & & . & 0\ 1\ 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0\ . & & \\
 & & & & . & . \\
 & & & & . & 0 \\
0 & & 0 & 0\ 0 & \cdots 0 & 1 \\
0 & \cdots\cdots & . & \cdots & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Donc φ est net en (x_o, H) si et seulement si la matrice hessienne

$$\left(\frac{\partial^2 h_{r-n}}{\partial x_i\ \partial x_j}(0) \right) \quad 1 \leq i,\ j \leq n$$

est inversible. D'autre part, (3.3.2) et (3.3.3) nous assurent que le complété de l'anneau local de x_o en $X \cdot H$ est

(3.3.16) $$k[[x_1, \ldots, x_n]] \,/\, (h_{r-n}(x_1, \ldots, x_n))$$

et on conclut grâce à la définition (1.2).

Exemple 3.4. Supposons que X soit une hypersurface dans $\mathbb{P}^r$, définie par une équation homogène $F(X_o,\dots,X_r) = 0$. Alors $\mathbb{P}(N) = X$, et $\varphi : X \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^r$ s'exprime, en coordonnés homogènes, par

$$(3.4.1) \qquad \varphi(X_o,\dots,X_r) = \left(\frac{\partial F}{\partial X_o},\dots,\frac{\partial F}{\partial X_r}\right) .$$

C'est le "morphisme de GAUSS".

Donnons un exemple où φ est partout ramifié (i.e. non net). Pour ceci, soit p la caractéristique de k, r un entier ≥ 1, et prenons l'hypersurface X d'équation

$$(3.4.2) \qquad \sum_{i=0}^{r} X_i^{p^r+1} = 0 ,$$

pour laquelle on a

$$(3.4.3) \qquad \varphi(X_o,\dots,X_r) = (X_o^{p^r},\dots,X_r^{p^r})$$

de sorte que $\check{X}$ est reduit à un point si $p = 0$, et $\check{X} \simeq X$, avec φ le morphisme de Frobenius si $p > 0$. On observera qu'il résulte de 3.3 (ou de 3.5.0 plus bas) que si $p > 2$, le plongement envisagé n'est pas un plongement de Lefschetz.

Reprenons le cas général.

Proposition 3.5. Supposons que le morphisme $\varphi : \mathbb{P}(N) \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^r$ soit génériquement net (i.e. ne soit pas partout ramifié). Alors φ induit un morphisme birationnel de $\mathbb{P}(N)$ sur $\check{X}$. Plus précisement, les trois ouverts suivants de X sont identiques:

a) le plus grand ouvert de lissité de $\check{X}$,

b) le plus grand ouvert V de $\check{X}$ tel que $\varphi : \mathbb{P}(N) \longrightarrow \check{X}$ induise un isomorphisme $\varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V$,

c) l'ouvert (cf. 3.2) de $\check{X}$ formé des hyperplans H tels que $X \cdot H$ ait un et un seul point singulier, ce dernier étant quadratique non-dégénéré.

Corollaire 3.5.0 Supposons car.k$\neq$2 ou dim X paire. Le plongement donné est un plongement de Lefschetz si et seulement si l'une des deux conditions est satisfaite: a) φ est génériquement net, ou b) dim $\check{X} \leq r-2$.

En effet, la suffisance résulte du critère (3.2.4), car, par 3.5, on a ou F = lieu sing$(\check{X})$, donc dim $F <$ dim$(\check{X}) = r-1$, ou dim$(\check{X}) \leq r-2$. Pour la nécessité, on observe que si D est un pinceau de Lefschetz et si dim $\check{X} = r-1$, il existe $x \in D \cap \check{X}$, et par 3.3 et la définition (2.2 c)) φ est net en les points de $\varphi^{-1}(x)$, donc génériquement net, cqfd.

Démonstration de 3.5 L'hypothèse implique dim $\check{X}$ = dim $\mathbb{P}(N)(=r-1)$, d'où résulte (3.2) que $\check{X}$ est une hypersurface irréductible dans $\check{\mathbb{P}}^r$.

Soit R le lieu de ramification de φ , qui est par hypothèse un fermé de $\mathbb{P}(N)$ de dimension au plus $r-2$, de sorte que $\varphi(R)$ est un fermé de $\check{X}$ de dimension au plus $r-2$. Désignons par V' l'ouvert dense de $\check{X}$

$$(3.5.1) \qquad V' = (\check{X} - \varphi(R)) \cap (\check{X} - \text{lieu sing}(\check{X})) ,$$

et par $\underline{F}$ son complémentaire dans $\check{X}$

$$(3.5.1.1) \qquad \underline{F} = \varphi(R) \cup \text{lieu sing}(\check{X}) .$$

Nous allons prouver d'abord que φ induit un isomorphisme de $\varphi^{-1}(V')$ avec V' par la méthode naive de construire un inverse $\psi : V' \longrightarrow \varphi^{-1}(V')$. En effet, considérant $\varphi^{-1}(V')$ comme plongé dans $X \times V'$ via (3.1.1) , de sorte que φ s'identifie à pr_2 , on voit que la construction de ψ équivaut à la construction d'un morphisme $\psi_1 : V' \longrightarrow \mathbb{P}^r$ tel que le diagramme

$$(3.5.2) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(N) \supset \varphi^{-1}(V') & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \psi_1 \\ X & \hookrightarrow & \check{\mathbb{P}}^r \end{array}$$

soit commutatif (on pose $\psi(v) = (\psi_1(v), v) \in \check{\mathbb{P}}^r \times V'$) .

Pour ceci, remarquons que pour une hypersurface quelconque dans un espace projectif, le morphisme de GAUSS (3.4.1) est "défini" en tout point lisse. Appliquons ceci a l'hypersurface $\check{X}$ dans $\check{\mathbb{P}}^r$; comme V' est

contenu dans V , l'ouvert de lissité de $\check{X}$, le morphisme de GAUSS nous donne un morphisme, noté ψ_1 :

$$\psi_1 : V' \longrightarrow \check{\check{\mathbb{P}}}^r \simeq \mathbb{P}^r \quad . \tag{3.5.3}$$

Il reste à vérifier la commutativité du diagramme (3.5.2). Soit alors (x_o, H_o) un point fermé $\varphi^{-1}(V')$; il faut vérifier que x_o , considéré comme étant un hyperplan dans $\check{\mathbb{P}}^r$, est tangent à $\check{X}$ en H_o , i.e. on va démontrer que pour $(x_o, H_o) \in \varphi^{-1}(V')$, H_o tangent à X en x_o $\Rightarrow x_o$ tangent à $\check{X}$ en H_o . Comme φ est net en (x_o, H_o) , et $\check{X}$ est lisse en $H_o = \varphi(x_o, H_o)$, φ induit un isomorphisme des espaces tangents

$$T_{\mathbb{P}(N)}((x_o, H_o)) \xrightarrow{\ \varphi\ } T_{\check{X}}(H_o) \quad , \tag{3.5.4}$$

de sorte que la première partie de la démonstration s'achève par le lemme suivant.

Lemme 3.6 (EULER). Soit (x_o, H_o) un point fermé de $\mathbb{P}(N)$, et désignons par T_L le fibré tangent de l'hyperplan L dans $\check{\mathbb{P}}^r$ défini par x_o . Alors dans $T_{\check{\mathbb{P}}^r}(H_o)$ on a

$$\varphi\,(T_{\mathbb{P}(N)}((x_o, H_o))) \subset T_L(H_o) \quad .$$

Démonstration. Choisissons des coordonnés homogènes $X_o, \ldots, X_r$ dans $\mathbb{P}^r$, en termes desquelles x_o devient le point $\underline{A} = (A_o, \ldots, A_r)$.

Un point de $T_X(x_o)$ est un point de $\mathbb{P}^r$ à valeurs dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$,

(3.6.1) $$\underline{A} + \varepsilon\, \underline{B} \quad ,$$

tel que pour toute section locale H de I, on ait

(3.6.2) $$\sum_{i=0}^{r} B_i \frac{\partial H}{\partial X_i}(\underline{A}) = 0 \quad .$$

Choisissons de plus une section locale H de I qui donne lieu à H_o par (3.1.1). Par la trivialité locale de $\mathbb{P}(N)$ au-dessus de X, un point de $T_{\mathbb{P}(N)}((x_o,H_o))$ se représente par un point

(3.6.3) $$(\underline{A} + \varepsilon\, \underline{B}\ ,\ H + \varepsilon\, F) \quad ,$$

où F est une section locale de I, et où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont comme ci-dessus. L'image par φ de (3.6.3) est l'hyperplan à coefficients dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ d'équation (c.f. 3.1.1)

(3.6.4) $$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial}{\partial X_i}(H+\varepsilon F)\,(\underline{A}+\varepsilon\underline{B})T_i \quad ,$$

de sorte que le lemme équivaut à la formule

(3.6.5) $$\sum_{i=0}^{r} A_i \frac{\partial}{\partial X_i}(H+\varepsilon F)\,(\underline{A}+\varepsilon\underline{B}) = 0 \quad .$$

Compte tenu de ce que $\varepsilon^2 = 0$, et la formule de Taylor, on a

(3.6.6) $$\frac{\partial}{\partial X_i}(H+\varepsilon F)(\underline{A}+\varepsilon\underline{B}) = \frac{\partial H}{\partial X_i}(\underline{A}) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial X_i}(\underline{A}) + \varepsilon \sum_{j=0}^{r} B_j \frac{\partial^2 H}{\partial X_j \partial X_i}(\underline{A}) \quad ,$$

donc il suffit de vérifier les trois formules suivantes:

$$(3.6.7) \qquad \sum_{i=0}^{r} A_i \frac{\partial H}{\partial X_i}(\underline{A}) = 0 \ ,$$

$$(3.6.8) \qquad \sum_{i=0}^{r} A_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(\underline{A}) = 0 \ ,$$

$$(3.6.9) \qquad \sum_{i,j=0}^{r} A_i B_j \frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j}(\underline{A}) = 0 \ .$$

Or, H et F étant homogènes de degré zéro, la formule d'Euler donne

$$(3.6.10) \qquad \Sigma X_i \frac{\partial H}{\partial X_i} = 0 \ , \quad \Sigma X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0$$

et, $\frac{\partial H}{\partial X_j}$ étant homogène de degré -1 , cette formule donne

$$\sum_i X_i \frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} = - \frac{\partial H}{\partial X_j} \ ,$$

de sorte que (3.6.9) se récrit

$$(3.6.11) \qquad - \sum_j B_j \frac{\partial H}{\partial X_j}(\underline{A}) = 0 \ ,$$

qui n'est autre que (3.6.2).

Ceci démontre que φ induit un isomorphisme

$$(3.6.12) \qquad \varphi^{-1}(V') \xrightarrow{\sim} V'$$

dont l'inverse est ψ . Remarquons maintenant que le morphisme

$$(3.6.13)\qquad \begin{cases} \psi : V' \longrightarrow \mathbb{P}^r \times V' \subset \mathbb{P}^r \times \check{X} \\ \psi(v) = (\psi_1(v), v) \end{cases}$$

s'étend en un morphisme

$$(3.6.14)\qquad \begin{cases} \widetilde{\psi} : V \longrightarrow \mathbb{P}^r \times V \\ \widetilde{\psi}(v) = (\widetilde{\psi}_1(v), v) \quad , \end{cases}$$

où l'on désigne par

$$(3.6.15)\qquad \widetilde{\psi}_1 : V \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

le morphisme de GAUSS, vu comme défini sur V tout entier.

On vient de démontrer l'inclusion

$$(3.6.16)\qquad \psi(V') \subset \mathbb{P}(N)$$

ce qui implique, V' étant dense dans V , et $\mathbb{P}(N)$ étant fermé dans $\mathbb{P}^r \times \check{X}$, l'inclusion

$$(3.6.17)\qquad \widetilde{\psi}(V) \subset \mathbb{P}(N)$$

Il est évident qu'on a même

$$(3.6.18)\qquad \widetilde{\psi}(V) \subset \varphi^{-1}(V) \ .$$

Encore par "continuité" , les relations

$$\begin{cases} \psi \circ \varphi = id_{\varphi^{-1}(V')} \\ \varphi \circ \psi = id_{V'} \end{cases}$$

impliquent les relations

$$\begin{cases} \tilde{\psi} \circ \varphi = id_{\varphi^{-1}(V)} \\ \varphi \circ \tilde{\psi} = id_{V} \end{cases} ,$$

ce qui démontre que les ouverts 3.5 a) et 3.5 b) sont identiques.

Démontrons que les ouverts 3.5 a) et 3.5 c) sont identiques. On remarque d'abord que, d'après 3.3, l'ouvert 3.5 c) est le sous-ensemble $\underline{U}$ de $\check{X}$ défini par

$$(3.6.19) \qquad \underline{U} = \{ x \in \check{X} \mid \varphi^{-1}(x) \text{ contient exactement un point, et en ce point } \varphi \text{ est net.} \} .$$

Or $\varphi^{-1}(\underline{U})$ est normal (étant lisse) et le morphisme induit

$$\varphi : \varphi^{-1}(\underline{U}) \longrightarrow \underline{U}$$

est birationnel (on l'a déja démontré), radiciel (par définition de $\underline{U}$) et propre. Donc

$$\varphi : \varphi^{-1}(\underline{U}) \longrightarrow \underline{U}$$

est le <u>normalisé</u> de $\underline{U}$. En particulier, $\underline{U}$ est <u>géométriquement unibranche</u> . Comme $\varphi : \varphi^{-1}(\underline{U}) \longrightarrow \underline{U}$ est <u>net</u> , il s'en déduit (EGA IV 18.10.1) qu'il est <u>étale</u> . Par EGA IV 18.10.18, on conclut alors que c'est une immersion ouverte, donc un isomorphisme, donc que

U est lisse, i.e. qu'on a l'inclusion 3.5 c) $\subset$ 3.5 a). D'autre part, (3.6.19) rend évidente l'inclusion 3.5 b) $\subset$ 3.5 c), et on conclut, compte tenu de ce que 3.5 a) = 3.5 b).

Nous pouvons maintenant démontrer:

3.7. Le théorème 2.5 est vrai dans le cas car.k $\neq 2$, ainsi que dans le cas X de dimension paire.

Démonstration. Compte tenu de 3.5.0 et de 3.3, il suffit de vérifier:

(3.7.1) Pour tout point fermé $x_o \in X$, et tout entier $d \geq 2$, il existe une hypersurface H de degré d tangente à X en x_o , telle que x_o soit une singularité quadratique ordinaire de X.H.

Or, prenant convenablement des coordonnés homogènes $X_o,\ldots,X_r$, on peut supposer que x_o est le point $(1,0,\ldots,0)$, et que les fonctions X_i/X_o , $i = 1,\ldots,n$, donnent des coordonnés locales sur X dans un voisinage de x_o . On prend pour H l'hypersurface d'équation

$$(3.7.1.1) \qquad H = X_o^{d-2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{si car.(k)} \neq 2$$

$$(3.7.1.2) \qquad H = X_o^{d-2} \sum_{i=1}^{n/2} X_i\, X_{n/2+i} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$(3.7.1.3) \qquad H = X_o^{d-2} \left(X_n^2 + \sum_{i=1}^{[n/2]} X_i\, X_{\lceil n/2 \rceil + i}\right) \text{ si } n \text{ est impair .}$$

Pour l'énoncé 2.5.2, remarquons qu'ou bien φ est génériquement net, et 3.5.0 s'applique, ou bien φ est partout ramifié, ce qui implique $\dim X \leq r-2$, k étant de caractéristique nulle. Dans ce dernier cas, le critère (3.2.4) est trivialement vérifié.

4. Le cas général

Nous allons esquisser une autre méthode de démonstration de 2.5 valable en toute caractéristique, en admettant l'énoncé suivant, voisin de 3.1, et cas particulier de XV 1.1.4.

(4.1) Le sous-ensemble de $\mathbb{P}(N)$ formé des points (x, H) tels que x soit une singularité quadratique ordinaire de $X \cdot H$ est ouvert.

Remarquons que 4.1 résulte de 3.3, sauf si $\mathrm{car}(k) = 2$ et $\dim X$ impaire.

4.1.1. Désignons par R_1 le fermé de $\mathbb{P}(N)$ complément de l'ouvert 4.1, et par F_1 son image $\varphi(R_1) \subset \check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^r$.

Lemme 4.1.2. Si l'ouvert 4.1 est non-vide, alors $\mathrm{codim}_{\check{\mathbb{P}}^r}(F_1) \geq 2$

Démonstration. Par hypothèse, $\dim(R_1) < \dim(\mathbb{P}(N)) = r-1$, et $F_1 = \varphi(R_1)$.

4.1.3. Désignons par F_2 la partie de $\check{X}$ formée des hyperplans qui sont tangents à X en au moins deux points. On remarque que F_2 n'est

pas fermé, mais qu'on a

4.1.4. l'adhérence de $F_2 \subset F_1 \cup F_2$,

ceci à cause du fait que $F_1 \cup F_2 = F$ (cf. 3.2) est fermé. (L'inclusion 4.1.4. "dit" qu'une confluence de deux singularités n'est pas quadratique ordinaire.) En tout cas la construction de 4.2.4. montrera que F_2 est constructible. Pour démontrer 2.5.1 nous allons appliquer le critère 3.2.4. Pour ceci, il faudra savoir que $\operatorname{codim}_{\check{\mathbb{P}}^r}(F_1) \geq 2$ et que $\operatorname{codim}_{\check{\mathbb{P}}^r}(F_2) \geq 2$. D'autre part, 3.8.1 et 4.1.2 nous assurent que, remplaçant le plongement donné par son d-ième multiple, $d \geq 2$, on aura $\operatorname{codim}_{\check{\mathbb{P}}^r}(F_2) \geq 2$. On conclut que 2.5.1 sera prouvé, une fois connue la

Proposition 4.2. Soit X une sous-variété lisse et irréductible de $\mathbb{P}^r$, de dimension $n \geq 1$. Pour tout entier $d \geq 2$, la partie F_2 de $\check{\mathbb{P}}^{\binom{n+d}{d}-1} = \check{\mathbb{P}}^N$ formée des hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^r$ qui sont tangentes à X en au moins deux points est de codimension ≥ 2 dans $\check{\mathbb{P}}^N$.

4.2.1. Commencons par le cas spécial $d = 2$ et X une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^r$. Or, il suffira de trouver une droite dans $\check{\mathbb{P}}^N$ qui ne rencontre pas F (cf. 3.2.4). Choisissons des coordonnés homogènes $X_o,\ldots,X_r$ dans $\mathbb{P}^r$ de telle façon que X soit défini par

$X_{n+1}=\ldots=X_r = 0$, et des coordonnés homogènes (λ, μ) dans $\mathbb{P}^1$.

Pour n pair, $n = 2k$, on prend le pinceau de quadriques

$$(4.2.2) \qquad H_{(\lambda,\mu)}= \lambda X_o^2+(\lambda X_k+\mu X_o)X_{2k}+\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda X_i+\mu X_{i+1})X_{k+i} \quad ;$$

pour n impair, $n = 2k+1$, on prend le pinceau

$$(4.2.3) \qquad H_{(\lambda,\mu)}= (\lambda X_1+\mu X_o)X_o + \sum_{i=1}^{k} (\lambda X_{2i}+\mu X_i)X_{2i+1} \quad .$$

Dans les deux cas, on constate que $X\cdot H_{(\lambda,\mu)}$ est lisse pour $(\lambda,\mu) \neq (0,1)$, et que $X\cdot H_{(0,1)}$ n'a qu'un point singulier, qui est même quadratique ordinaire, et donc que le pinceau ne coupe pas F .

4.2.4. Désignons par $Btg^d(X)$ la sous-variété de $\check{\mathbb{P}}^N \times (X\times X-\Delta(X\times X))$ formée des triples (H, x_1, x_2) tels que H est une hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^r$ qui est tangente à X en x_1 et en x_2 , et $x_1 \neq x_2$. L'image de $Btg^d(X)$ par pr_1 est l'ensemble F_2 de (4.2), de sorte qu'il suffira de démontrer

(4.2.5) $\dim Btg^d(X) \leq N-2$ si $d \geq 3$, ou si $d = 2$ et X n'est pas linéaire.

Pour ceci, désignons par $Lin(X\times X)$ la sous-variété de $X\times X-\Delta(X\times X)$

$$(4.2.6) \qquad Lin(X\times X)=\{(x_1,x_2)\in X\times X \mid x_1\neq x_2 \text{ , et la droite engendrée par } x_1,x_2 \text{ est tangente à X en } x_1\}$$

$$\{(x_1,x_2)\in X\times X \mid x_1 \neq x_2 \text{ et } x_2 \in X\cap Tg_{(x_1)}\} \quad .$$

On a évidemment :

4.2.7. Si X n'est pas une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^r$, alors

$$\dim \mathrm{Lin}(X \times X) < 2\dim X \ .$$

Donc pour (4.2.5) il suffira de démontrer que les fibres du morphisme

$$(4.2.8) \qquad \mathrm{Btg}^d(X) \xrightarrow{pr_{2,3}} X \times X - \Delta(X \times X) \ ,$$

considérés comme des sous-variétés de $\check{\mathbb{P}}^N$, sont

$$(4.2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de codimension} \geq 2\dim(X)+1 \quad \text{au-dessus de} \quad \mathrm{Lin}(X \times X) \ , \\ \text{de codimension} \geq 2\dim(X)+2 \quad \text{au-dessus de} \quad X \times X - \Delta(X \times X) - \mathrm{Lin}(X \times X) \end{array} \right\} .$$

L'énoncé (4.2.9) est une conséquence du lemme suivant, en prenant pour L_i l'espace tangent à X en x_i, $i=1,2$.

Proposition 4.3. Soient x_1 et x_2 deux points distincts fermés de $\mathbb{P}^r$, et L_1 et L_2 deux sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}^r$ tels que $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in L_2$. Dans l'espace $\check{\mathbb{P}}^N = \check{\mathbb{P}}^{\binom{r+d}{d}-d}$ des hypersurfaces de degré d, le sous-espace linéaire formé des hypersurfaces tangentes à L_1 en x_1 et à L_2 en x_2 est de codimension

$$\left\{ \begin{array}{ll} = \dim L_1 + \dim L_2 + 2 & \text{si } d \geq 3, \text{ ou si } d=2 \text{ et } L_1 \cap L_2 \text{ ne contient pas} \\ & \text{la droite } (x_1,x_2) \text{ contenant } x_1, x_2 \\ = \dim L_1 + \dim L_2 + 1 & \text{si } d=2 \text{ et } L_1 \cap L_2 \text{ contient la droite } (x_1,x_2). \end{array} \right.$$

Démonstration. Pour $d \geq 3$, il faut prouver que $\dim L_1 + \dim L_2 + 2$ conditions linéaires sont indépendantes , de sorte qu'il suffit de traiter le cas $L_1 = L_2 = \mathbb{P}^r$, i.e. de trouver "combien" d'hypersurfaces sont singulières en x_1 et en x_2 . Or, en termes de coordonnés homogènes choisies de telle façon que $x_1 = (1,0,\ldots 0)$ et $x_2 = (0,1,0\ldots,0)$, l'hypersurface d'équation $\Sigma A_W x^W$ est singulière en $(1,0,..,0)$ si et seulement si les coéfficients des monômes $X_o^{d-1}X_i$, $i=0,\ldots,r$, sont tous nuls, et elle est singulière en $(0,1,0,..0)$ si et seulement si les coefficients des monômes $X_1^{d-1}X_i$, $i=0,\ldots,r$, sont tous nuls. Pour $d \geq 3$, les monômes $X_o^{d-1}X_i$, $i=0,\ldots,r$ et $X_1^{d-1}X_i$, $i=0,\ldots,r$ sont tous distincts, ce qui donne l'énoncé voulu pour $d \geq 3$.

Pour $d = 2$, le même calcul donne l'inégalité

$$\text{codim} \geq \dim L_1 + \dim L_2 + 1 \ ,$$

(car le monôme $X_o X_1$ est compté deux fois).

Vérifions que si $L_1 \cap L_2$ ne contient pas la droite (x_1,x_2), alors les conditions de tangentialité sont indépendentes. On se ramène au cas $L_1 = \mathbb{P}^r$, L_2 un hyperplan dans $\mathbb{P}^r$ qui ne contient pas la droite (x_1,x_2) . On choisit des coordonnés homogènes $X_o,\ldots,X_r$ de telle façon que $x_1 = (1,0,\ldots,0)$, $x_1 = (0,1,0\ldots0)$ et L_2 soit l'hyperplan $X_o = 0$. Or, une quadrique $\sum_{i\leq j} A_{ij} X_i X_j$ est singulière en $(1,0,..,0)$ si et seulement si $A_{oj} = 0$ pour $j = 0,\ldots,r$, et tangente à

$X_o = 0$ en $(0,1,\ldots,0)$ si et seulement si $A_{ij} = 0$ pour $j = 1,\ldots,r$, ce qui fait ensemble $2r+1 = \dim L_1 + \dim L_2 + 2$ conditions indépendentes.

Pour le cas où $L_1 \cap L_2$ contient la droite (x_1,x_2), on se ramène au cas $L_1 = L_2 =$ la droite (x_1,x_2) . En termes de coordonnés homogènes dans lesquelles $x_1 = (1,0,..,0)$, $x_2 = (0,1,0,\ldots 0)$, la quadrique $\sum_{i\leq j} A_{ij} X_i X_j$ passe par $(1,0,..0)$ et y est tangente à L_1 si et seulement si $A_{oo} = A_{o1} = 0$; elle passe par $(0,1,0\ldots 0)$ et y est tangente à L_2 si et seulement si $A_{11} = A_{o,1} = 0$, ce qui ne fait ensemble que $3 = \dim L_1 + \dim L_2 + 1$ conditions.

5. Le degré de la variété duale par voie "élémentaire"

(Cf. XVIII 3.2. pour une autre méthode dans le cas où dim X est pair ou car(k) ≠ 2 .)

Nous employons toujours les notations de 2.2, donc $X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ est une sous-variété lisse irréductible de dimension n .

5.1. Commençons par considérer le morphisme (3.1.1)

$$(5.1.0) \qquad \nu : \mathbb{P}(N) \longrightarrow X \times \check{\mathbb{P}}^r$$

d'un point de vue plus "fonctoriel" . (Je tiens à remercier S. KLEIMAN pour m'avoir signalé la formulation qui suit.) On a une suite exacte

de faisceaux cohérents sur X

$$(5.1.1) \qquad 0 \longrightarrow \check{N} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}/k} \mid X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part, "écrivant les formes différentielles sur $\mathbb{P}^r$ en coordonnés homogènes" , on trouve une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}^r$

$$(5.1.2) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^r/k} \longrightarrow (\underline{O}_{\mathbb{P}}(-1))^{r+1} \longrightarrow \underline{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow 0$$

qui, restreinte à X , donne alors une suite exacte

$$(5.1.3) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^r/k} \mid X \longrightarrow (\underline{O}_X(-1))^{r+1} \longrightarrow \underline{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow 0 \quad .$$

Mettant ensemble 5.1.1 et 5.1.3, on trouve une inclusion

$$(5.1.4) \qquad \check{N} \hookrightarrow (\underline{O}_X(-1))^{r+1} \quad ,$$

qui donne, par transposition, une surjection,

$$(5.1.5) \qquad \underline{O}_X(1)^{r+1} \longrightarrow N$$

d'où une immersion fermée

$$(5.1.6) \qquad \alpha : \mathbb{P}(N) \longrightarrow \mathbb{P}(\underline{O}_X(1)^{r+1}) \simeq X \times \check{\mathbb{P}}^r$$

qui n'est autre que (5.1.0).

5.2. L'idée du calcul.

Nous supposons à partir de maintenant que $\check{X} = \varphi(\mathbb{P}(N))$ est de dimension $r-1$, donc que c'est une hypersurface dans $\check{\mathbb{P}}^r$. Le calcul de son degré se fait naturellement en introduisant les classes de Chern [1].

Pour toute variété projective et lisse T, nous notons par $CH(T)$ son anneau de Chow, qui est un anneau gradué (par la codimension d'un cycle). Etant donné un élément $z \in CH(T)$, nous notons par

$$\int_T z$$

le degré de sa composante de degré zéro (qui est un 0-cycle). La classe dans $CH^1(T)$ d'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur T sera noté également $\underline{L}$ quand aucun confusion n'est à craindre (par exemple, quand elle se trouve sous le signe d'intégration $\int_T$).

Ceci posé, notant par L la classe dans $CH(\check{\mathbb{P}}^r)$ d'une droite, on a

$$\deg(\check{X}) = \int_{\check{\mathbb{P}}^r} L \cdot \check{X} \quad . \tag{5.2.1}$$

Or, $\check{X}$ est "ensemblistement" l'image de $\mathbb{P}(N)$ par φ (3.1.2). Mais, du point de vue de l'homomorphisme "image directe"

$$\varphi_* : CH(\mathbb{P}(N)) \longrightarrow CH(\check{\mathbb{P}}^r)$$

on a

$$\varphi_*(\mathbb{P}(N)) = \deg(\varphi)\cdot \check{X} \quad ,$$

de sorte que 5.2.1 se récrit

$$(5.2.2) \qquad \deg(\check{X}) = \frac{1}{\deg(\varphi)} \int_{\check{\mathbb{P}}^r} L\cdot\varphi_*(\mathbb{P}(N)) \quad ;$$

par abus de notations, dans $\deg(\varphi)$, φ désigne évidemment le morphisme $\mathbb{P}(N) \longrightarrow \check{X}$ induit par (3.1.2), qui est un entier ≥ 0 , nul si et seulement si $\dim X < r-1$ $(=\dim \mathbb{P}(N))$.

Par la formule de projection pour φ , ceci se récrit

$$(5.2.3) \qquad \deg(\check{X}) = \frac{1}{\deg(\varphi)} \int_{\mathbb{P}(N)} \varphi^*(L) \quad .$$

Désignons par $\eta \in CH(\check{\mathbb{P}}^r)$ la classe d'un hyperplan, de sorte que $L = \eta^{r-1}$, et (5.2.3) se récrit

$$(5.2.4) \qquad \deg(\check{X}) = \frac{1}{\deg(\varphi)} \int_{\mathbb{P}(N)} (\varphi^*(\eta))^{r-1} \quad .$$

Calculons maintenant la classe $\varphi^*(\eta)$ en termes "concrets" .

Notons par ξ (resp. τ) le faisceau inversible canonique $\underline{O}_{\mathbb{P}(N)}(1)$ sur $\mathbb{P}(N)$ (resp. $\underline{O}_{\mathbb{P}(\underline{O}_X(1)^{r+1})}$ sur $\mathbb{P}(\underline{O}_X(1)^{r+1})$) . Par fonctorialité, nous avons (cf. (5.1.6))

$$(5.2.5) \qquad \alpha^*(\tau) = \xi \quad .$$

D'autre part, moyenant l'identification $\mathbb{P}(\underline{O}_X(1)^{r+1}) \simeq X \times \check{\mathbb{P}}^r$, on a évidemment, posant $H = \underline{O}_X(1)$,

$$\tau = pr_1^*(H) \otimes pr_2^*(\eta) \quad . \tag{5.2.6}$$

Désignons par $\pi : \mathbb{P}(N) \longrightarrow X$ le morphisme structural, on a

$$\begin{cases} \pi = pr_1 \circ \alpha \\ \varphi = pr_2 \circ \alpha \quad , \end{cases}$$

d'où, appliquant α^* aux deux membres de (5.2.6), on trouve, par (5.2.5)

$$\xi = \alpha^*(\tau) = \pi^*(H) \otimes \varphi^*(\eta) \quad . \tag{5.2.6}$$

Dans $CH(\mathbb{P}(N))$, on a donc

$$\varphi^*(\eta) = \xi - \pi^*(H) \quad , \tag{5.2.7}$$

et (5.2.3) se récrit

$$\deg(\check{X}) = \frac{1}{\deg(\varphi)} \int_{\mathbb{P}(N)} (\xi - \pi^*(H))^{r-1} \quad . \tag{5.2.8}$$

Le deuxieme membre de 5.2.8 "se calcule" grâce au lemme suivant (cf. 5.3.3) :

Lemme 5.3. Soient X une variété quasi-projective, lisse et connexe de dimension n , et M un faisceau localement libre de rang fini a sur X . Notons par ξ le faisceau inversible $\underline{O}_{\mathbb{P}(M)}(1)$ sur $\mathbb{P}(M)$,

et par $\pi : \mathbb{P}(M) \longrightarrow X$ le morphisme structural. On sait que $CH(\mathbb{P}(M))$ est un $CH(X)$ module (via π^*) qui est libre, de base $1, \xi, \ldots, \xi^{a-1}$, où ξ satisfait à l'équation

$$(5.3.1) \qquad \xi^a - C_1\xi^{a-1} + C_2\xi^{a-2} - C_3\xi^{a-3} \ldots = 0 \ ,$$

les C_i dénotant les classes de Chern dans $CH(X)$ de M. On pose $C(M) = 1+C_1+C_2+\ldots$, la classe de Chern totale de M ; c'est un élément inversible de $CH(X)$.

Alors:

(i) On a la formule

$$(5.3.2) \qquad \pi_*\left(\frac{\xi^{a-1}}{1+\xi}\right) = \frac{1}{C(M)} \ .$$

(ii) Soit $F(T) \in CH(X)[T]$ un polynôme à coefficients dans $CH(X)$, tel que le coefficient de T^i soit un élément homogène de degré $n+a-1-i$. Donc $F(\xi)$ est un élément de degré "maximum" $n+a-1=\dim \mathbb{P}(M)$ dans $CH(\mathbb{P}(M))$. Ceci posé, on a

$$(5.3.3) \qquad \int_{\mathbb{P}(M)} F(\xi) = (-1)^{a-1} \int_X \frac{F(-1)}{C(M)} \ .$$

Démonstration. Commençons par déduire (5.3.3) de (5.3.2).

Ecrivons

$$(5.3.4) \qquad \frac{1}{C(M)} = \sum_{j \geq 0} b_j \ , \quad b_o = 1 \ , \ b_j \text{ de degré } j \text{ dans } CH(X)$$
$$b_j = 0 \text{ pour } j < 0 \ ,$$

de sorte que (5.3.2) se récrit

(5.3.5) $\qquad \pi_*(\xi^{a-1+j}) = (-1)^j b_j$ pour $a-1+j \geq 0$,

(compte tenu que $\pi_*(\xi^j) = 0$ si $j < a-1$ pour raison de degrés).

Déduisons-en (5.3.3). Par linéarité, il suffit de traiter le cas $F(T) = uT^{a-1+j}$, u homogène de degré $n-j$ dans $CH(X)$. Par (5.3.5) et la formule de projection pour π , on a

$$(5.3.6) \qquad \int_{\check{\mathbb{P}}(M)} F(\xi) = \int_{\mathbb{P}(M)} \pi^*(u)\cdot\xi^{a-1+j} = \int_X u\cdot\pi_*(\xi^{a-1+j}) = (-1)^j \int_X u\cdot b_j \ .$$

D'autre part,

$$5.3.7. \qquad (-1)^{a-1}\int_X \frac{F(-1)}{C(M)} = (-1)^{a-1}\int_X \frac{(-1)^{a-1+j}u}{C(M)} = (-1)^j \int_X \sum_i u\, b_i \ ,$$

et compte tenu de ce que $\deg(u) = n-j$, et $\deg(b_i) = i$, on a

$$\int_X u\cdot b_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \ ,$$

de sorte que (5.3.7) se récrit

$$(5.3.8) \qquad (-1)^{a-1}\int_X \frac{F(-1)}{C(M)} = (-1)^j \int_X u\cdot b_j \ ,$$

d'où l'implication annoncée.

Démontrons maintenant (5.3.2), ou se qui revient au même, (5.3.5).

On sait que

$$\pi_*(\xi^j) = 0 \quad \text{si} \quad j < a-1$$

pour une raison de degré, et que

$$\pi_*(\xi^{a-1}) = 1_X$$

pour une raison géométrique (ξ^{a-1} rencontre chaque fibre "en un point"), de sorte que, par la formule de projection, on a

$$\pi_*\Big(\sum_{j=0}^{a-1} \pi^*(U_i)\, \xi^i\Big) = U_{j-i} \quad . \tag{5.3.9}$$

Par (5.3.9), l'énoncé 5.3.5 est conséquence du lemme suivant dans lequelle ξ devient T , et C_i devient S_i, compte tenu de l'équation 5.3.1.

Lemme 5.4. Soit a un entier > 0 , et désignons par A l'anneau $Z[[X_1,\dots,X_a]]$ des séries formelles en a indéterminées. Désignons par B la A-algèbre

$$B = A[[T]] \,/\, \Big(\prod_{i=1}^{a} (T-X_i)\Big) \quad ,$$

de sorte que B est un A-module libre , à base $1,T,\dots,T^{a-1}$,

$$B = A\,T^{a-1} \oplus A\,T^{a-2} \oplus \dots \oplus A \quad . \tag{5.4.1}$$

Désignons par $S_i \in A$ la i-ième fonction symétrique

$$S_i = \sum_{1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_i \le a} X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_i} ,$$

de sorte que

$$(5.4.2) \qquad \sum_{i=0}^{a} (-1)^i S_i T^{a-i} = 0 \quad \text{dans } B .$$

L'élément $1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_a$ est inversible dans A, nous écrivons son inverse

$$(5.4.3) \qquad \frac{1}{\sum_{i=0}^{a} S_i} = \sum_{j \ge 0} b_j , \qquad b_j \text{ homogène de degré } j \text{ dans } A , \quad b_o = 1 .$$

D'autre part, pour tout entier $j \ge 0$ on définit un élément $a_j \in A$ homogène de degré j en écrivant, par 5.4.1

$$(5.4.4) \qquad T^{a-1+j} = a_j T^{a-1} + ? \, T^{a-2} + ? \, T^{a-3} + \ldots + ? \quad , \text{ les } ? \in A .$$

Ceci posé, on a pour tout $j \ge 0$

$$(5.4.5) \qquad a_j = (-1)^j b_j .$$

Démonstration. Compte tenu de la définition (5.4.3) des b_j, tout revient à démontrer qu'on a

$$a_o = 1$$

$$\text{(5.4.6)} \qquad \sum_{i=0}^{a} (-1)^i S_i \, a_{j-i} = 0 \qquad \text{si} \quad j > 0 \ .$$

Or, on a évidemment $a_o = 1$, et la deuxième relation (pour $j > 0$ donné) n'est autre que celle déduite, en prenant le coefficient de T^{a-1} (via 5.4.1), de la relation

$$\text{(5.4.7)} \qquad \sum_{i=0} (-1)^i S_i \, T^{a-1+j-i} = 0 \quad \text{dans} \quad B \ ,$$

relation obtenue en multipliant 5.4.2 par T^{j-1} , cqfd.

Corollaire 5.5. On a la formule

$$\text{(5.5.1)} \qquad \deg(\overset{\vee}{X}) = \frac{(-1)^n}{\deg(\varphi)} \int_X \frac{(1+H)^{r-1}}{C(N)} \ .$$

Démonstration. On applique (5.3.3) (pour $M = N$, le faisceau normal de $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$) à (5.2.8).

Ecrivons, pour une variété quasi-projective et lisse S , sa classe de Chern totale (cf. 5.3)

$$\text{(5.5.2)} \qquad C(S) \overset{\text{dfn}}{=\!=} C(T_S)$$

où T_S désigne le fibré tangent de S .

La duale de la suite exacte (5.1.2) montre qu'on a

(5.5.3) $\qquad C(\mathbb{P}^r) = (1 + H)^{r+1}$ dans $CH(\mathbb{P}^r)$.

La duale de la suite exacte (5.1.1) montre qu'on a

(5.5.4) $\qquad C(N)\, C(X) = C(\mathbb{P}^r)|X$ dans $CH(X)$.

Mettant ensemble (5.5.3) et (5.5.4), (5.5.1) se récrit

Corollaire 5.6. On a la formule

$$(5.6.1) \qquad \deg(\overset{\vee}{X}) = \frac{(-1)^r}{\deg(\varphi)} \int_X \frac{C(X)}{(1+H)^2} \quad .$$

(5.7) Pour une variété S projective et lisse, on définit sa caractéristique d'Euler-Poincaré par

$$(5.7.1) \qquad \chi(S) = \int_S C(S) \quad .$$

Proposition 5.7.2. Désignons par Y une section hyperplane lisse de X, et par Δ une section lisse de X par un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^r$ de codimension deux. On a

$$(5.7.3) \qquad \deg(\overset{\vee}{X}) = \frac{(-1)^n}{\deg(\varphi)} \left[\chi(X) + \chi(\Delta) - 2\chi(Y)\right] \quad .$$

6. Le cas d'une base générale

6.1. Soient S un schéma et $\bar{s}$ un point géométrique de S, défini par une clôture algébrique du corps résiduel $k(s)$ pour $s \in S$. Désignons par $\mathbb{P}^r$ l'espace projectif à r dimensions sur S, par $\check{\mathbb{P}}^r$ l'espace projectif dual et par $I \subset \mathbb{P}^r \times_S \check{\mathbb{P}}^r$ la variété d'incidence. Soit $D \subset \check{\mathbb{P}}^r$ une droite, définie par un point à valeurs dans S d'une grassmannienne convenable, et Δ l'axe du pinceau d'hyperplans correspondant (cf. 2.1).

Soit X un S-schéma propre et lisse, purement de dimension $n \geq 1$, muni d'un plongement projectif $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. Soient $\tilde{X} = (X \times_S D) \cap I$ le schéma sur D de fibres les sections hyperplanes de X paramètrées par D, et u la projection de $\tilde{X}$ sur D.

Notons par un indice $\bar{s}$ le changement de base par $\bar{s} \longrightarrow S$.

Supposons que $\Delta_{\bar{s}}$ soit transverse à $X_{\bar{s}}$. Alors, au-dessus d'un voisinage U de s dans S, Δ est transverse à X. On suppose dans ce qui suit que $U = S$. Le schéma $\tilde{X}$ est alors lisse sur S, et un voisinage de l'image réciproque de Δ dans $\tilde{X}$ est lisse sur D.

Supposons de plus qu'une des sections hyperplanes de $X_{\bar{s}}$ appartenant au pinceau $D_{\bar{s}}$ soit lisse. Alors, après que l'on ait remplacé S par un voisinage convenable de s, le sous-schéma F de $\tilde{X}$ défini par l'idéal jacobien $J^{n-1}(\tilde{X}/D)$ est fini et plat sur S.

Démonstration. Notons $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion. On a

$$N_{Y \longrightarrow X} = H|Y = i^* H \quad ,$$

de sorte que la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow i^* T_X \longrightarrow i^* H \longrightarrow 0$$

donne

$$C(Y) = i^* \left(\frac{C(X)}{1+H} \right) \quad . \tag{5.7.4}$$

On a donc

$$\chi(Y) = \int_Y i^* \left(\frac{C(X)}{1+H} \right)$$

et, en appliquant la formule de projection

$$\chi(Y) = \int_X i_* i^* \left(\frac{C(X)}{1+H} \right) = \int_X \frac{H \cdot C(X)}{1+H} \quad . \tag{5.7.5}$$

Itérant ce calcul, on trouve pour Δ

$$\chi(\Delta) = \int_Y \frac{H\, C(Y)}{1+H} = \int_Y i^* \left(\frac{H}{(1+H)} \cdot \frac{C(X)}{(1+H)} \right) = \int_X \frac{H^2\, C(X)}{(1+H)^2} \quad , \tag{5.7.6}$$

de sorte que

$$\chi(X) - 2\chi(Y) + \chi(\Delta) = \int_X C(X) \left[1 - \frac{2H}{1+H} + \frac{H^2}{(1+H)^2} \right]$$

$$= \int_X \frac{C(X)}{(1+H)^2} \quad ,$$

ce qui achève la démonstration, compte tenu de 5.6.1.

6.2. Le lieu exceptionnel du pinceau D est le diviseur de Cartier relatif E de D/S défini par le $\mathcal{O}_D$-Module $u_*\mathcal{O}_F$, fini et plat sur S . Localement sur D, si $\mathcal{O}_D^n \xrightarrow{v} \mathcal{O}_D^n \longrightarrow u_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0$ est une présentation de $u_*\mathcal{O}_F$, E a pour équation $\det(v) = 0$. La formation de E est compatible à tout changement de base.

Le diviseur $E_{\overline{s}}$ de $D_{\overline{s}}$ s'écrit $\Sigma\, n(P).P$, pour $n(P)$ la somme des colongeurs de l'idéal jacobien $J^{n-1}(\widetilde{X/D})$ en les points critiques de u d'image P .

Proposition 6.3. Si $D_{\overline{s}}$ est un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de $X_{\overline{s}}$, et si car $k(s) \neq 2$ ou que n est pair, il existe un voisinage U de s dans S tel que

(a) Pour tout point géométrique $\overline{t}$ de U, $D_{\overline{t}}$ est un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de $X_{\overline{t}}$

(b) Au-dessus de U, le lieu exceptionnel E est étale sur S.

Pour prouver (a) et (b), il suffit de noter que, sous les hypothèses faites, $D_{\overline{s}}$ vérifie la condition c) de 2.2 si et seulement si le diviseur $E_{\overline{s}}$ est réduit. On pourrait, en invoquant 3.3, n'utiliser que la moitié la plus facile ($\Longrightarrow$) de cette équivalence.

6.3. La proposition devient fausse dans le cas d'exception cité. Toutefois, si S est de caractéristique 2 et que n est impair, il existe un voisinage U , de S au-dessus duquel (a) est vrai, et on peut définir un diviseur E' étale sur U tel que $E = 2\,E'$. Nous ne ferons pas usage de ce résultat.

Références

[1] GROTHENDIECK, A. La théorie des Classes de Chern, Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, 137-154.

S G A 7

E X P O S E XVIII

ETUDE COHOMOLOGIQUE DES PINCEAUX DE LEFSCHETZ

par N. Katz (*)

SOMMAIRE

1. La cohomologie d'un fibré projectif. 2

2. La cohomologie des variétés éclatées. 4

3. L'éclatement associé à un pinceau. 13

4. La cohomologie de l'éclatement associé à un pinceau. 17

5. Etude cohomologique du morphisme $p : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ associé à un pinceau. 24

   5.1. L'homomorphisme de restriction $H^*(\tilde{X}) \longrightarrow H^*(Y)$. 24

   5.2. Le "théorème de Lefschetz vache" (LV). 27

   5.3. La condition (A). 33

   5.8. L'homomorphisme de Griffiths. 47

   5.9. Un exemple où l'hypothèse (A) n'est pas vérifié. 57

6. Applications de la théorie locale des cycles évanescents (Picard-Lefschetz). 58

(*) D'après des notes (succintes) de GROTHENDIECK.

INTRODUCTION

Dans le présent exposé nous donnons la structure cohomologique élémentaire des pinceaux de Lefschetz. Les sections 1-4 donnent les faits
2 "bien connus" sur la structure cohomologique des fibrés projectifs et des
4 éclatements. Dans 5 nous faisons l'étude qui figure dans le titre, en supposant que X satisfait au "théorème de Lefschetz vache" (5.2), et
13 que le pinceau D en question satisfait à une certaine condition (A)
17 de nature locale sur D (5.3). Les résultats principaux sont 5.6,
24 5.7 et 5.8.7, ce dernier intervenant de façon essentielle dans la
24 démonstration du théorème de GRIFFITHS dans XX. Dans la dernière
27 section, de nature nettement moins élémentaire, nous nous appuyons
33 sur l'exposé SGA 1 XIII de Mme. RAYNAUD sur le groupe fondamental
47 "modéré", et sur la formule de Picard-Lefschetz (XVI) pour démontrer :

57 (1) La condition (A) est souvent satisfaite (6.3, 6.4) ;

(2) Sauf dans le cas dim(X) impair et caractéristique = 2 , le
58 groupe de monodromie d'un pinceau de Lefschetz agit irréductiblement sur la "cohomologie évanescente", et transitivement (modulo signe) sur l'ensemble des

"cycles évanescents locaux" associés (via la formule de Picard-Lefschetz) aux divers "points critiques" du pinceau (6.6 et 6.7).

1. La cohomologie d'un fibré projectif

Théorème 1.1. (DELIGNE). Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, ℓ un nombre premier inversible sur S, $u \in H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ (resp. $u \in H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ une classe de cohomologie sur X, et $\mathfrak{F}$ un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau (resp. $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau) sur X . On suppose qu'il existe un entier n tel que pour tout entier j et tout entier $i > 0$, l'application

$$(1.1.1) \qquad R^{n-i}f_*(\mathfrak{F}(j)) \xrightarrow{\wedge u^i} R^{n+i}f_*(\mathfrak{F}(j+i)) \quad ,$$

soit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux (resp. de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux) sur S . Alors pour tout morphisme $g : S \longrightarrow T$, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = R^p g_* R^q f_*(\mathfrak{F}) \Longrightarrow R^{p+q}(gf)_*(\mathfrak{F})$$

est dégénérée.

La démonstration se trouve dans [1, Prop. 2.4]. On remarquera que, grâce au théorème de changement de base pour un morphisme propre (SGA 4 XII 5.2), l'hypothèse se vérifie fibre par fibre.

Théorème 1.2. (Cf. SGA 5 VII 2.2.1). Soit $\mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibré vectoriel, localement libre de rang $1 + r$. Désignons par $f : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X$ le fibré projectif défini par $\mathcal{E}$, et par $u \in H^2(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell(1))$ la première classe de Chern du faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Alors, pour ℓ un nombre premier inversible sur X, on a

a) la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_* \mathbb{Z}_\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell) \tag{1.2.1}$$

dégénère.

b) la flèche

$$\bigoplus_{0 \le j \le n} H^{q-2-j}(X, \mathbb{Z}_\ell(-j) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell) \tag{1.2.2}$$

défini par $\oplus\, \tau_{q-2j} \longrightarrow \Sigma\, f^*(\tau_{q-2j}) \wedge u^j$

est un isomorphisme.

Démonstration. Les fibres de f étant des espaces projectifs de dimension r on sait que

$$R^i f_* \mathbb{Z}_\ell \xleftarrow{\wedge^{i/2} u} \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell\left(\frac{-i}{2}\right) & \text{pour } i \text{ pair, } 0 \le i \le 2r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Le théorème 1.1 s'applique à la situation (f, ℓ, u, $\mathbb{Z}_\ell$, r), d'où a).

D'après 1.2.3 on a

$$(1.2.4) \qquad E_2^{a,b} = \begin{cases} H^a(X, \mathbb{Z}_\ell\left(\frac{-b}{2}\right)) \text{ pour } b \text{ pair, } 0 \leq b \leq 2r \\ 0 \qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

donc le gradué associé de $H^q(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{Z}_\ell)$ pour la filtration provenant de la suite spectrale est $\bigoplus_{0\leq j\leq r} H^{q-2j}(X, \mathbb{Z}_\ell(-j))$. On voit tout de suite que, munissant $\bigoplus_{0\leq j\leq r} H^{q-2j}(X, \mathbb{Z}_\ell(-j))$ de la filtration

$$F^i = \bigoplus_{\substack{0\leq j\leq r \\ q-2j\leq i}} H^{q-2j}(X, \mathbb{Z}_\ell(-j)),$$

la flèche 1.2.2 est compatible aux filtrations, et qu'elle induit l'identité sur les gradués associés, d'où b).

2. La cohomologie des variétés éclatées (cf. SGA 5 VII 8)

2.1. Soient X un schéma lisse sur un corps k, et $\Delta \subset X$ un schéma lisse partout de codimension $1 + r$. On sait (EGA IV 19.4.9) qu'il existe un schéma lisse $\widetilde{X}$, muni d'un morphisme projectif

$$(2.1.1) \qquad f : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

tel que, posant

$$(2.1.2) \qquad \widetilde{\Delta} = f^{-1}(\Delta) = \Delta \times_X \widetilde{X} \quad ,$$

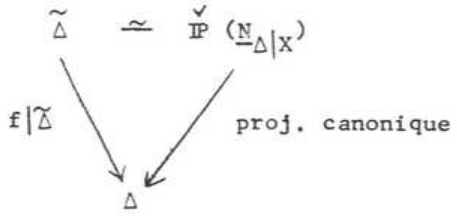
f induise un isomorphisme

$$(2.1.3) \qquad f / \widetilde{X} - \widetilde{\Delta} : \widetilde{X} - \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\sim} X - \Delta \quad ,$$

et qu'il existe un Δ-isomorphisme entre $\widetilde{\Delta}$ et $\check{\mathbb{P}}(\underline{N}_{\Delta/X})$, le fibré projectif

des droites dans le fibré normal $\underline{N}_{\Delta/X}$ de Δ dans X. On a donc un diagramme commutatif :

(2.1.4)



2.1.5. Dans le cas spécial X = Spec(A), Δ = Spec(A/I) où I = $(g_o,\ldots,g_r)$, $\widetilde{X}$ s'obtient par le procédé de Hopf (cf. EGA IV 19.4.11) :

On définit un morphisme de X - Δ dans $\mathbb{P}^r$ par

$$x \in X - \Delta \longrightarrow (g_o(x),\ldots,g_r(x)) \in \mathbb{P}^r \quad ,$$

et on considère son graphe Γ comme plongé dans $X \times \mathbb{P}^r$. Alors on définit $\overline{X}$ = l'adhérence schématique de Γ dans $X \times \mathbb{P}^r$, le morphisme $f : \overline{X} \longrightarrow X$ s'obtient comme le composé

$$\widetilde{X} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^r \xrightarrow{pr_1} X \quad .$$

2.1.6. De façon analogue (cf. encore EGA IV 19.4.11), si X est projectif, et si Δ est l'intersection de X avec 1 + r hypersurfaces, disons d'équations $G_i = 0$, i = 0,...,r, on considère encore le morphisme

$$X - \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

$$x \in X - \Delta \longrightarrow (G_o(x),\ldots,G_r(x)),$$

et on obtient $\widetilde{X}$ comme l'adhérence de son graphe dans $X \times \mathbb{P}^r$. De façon

concrète, en termes des coordonnées homogènes $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$ dans $\mathbb{P}^r$, $\widetilde{X}$ s'obtient comme le schéma de $X \times \mathbb{P}^r$ défini par les équations

(2.1.6.1) $\qquad \lambda_i\, G_j(X) - \lambda_j\, G_i(X) \qquad 0 \le i < j \le r$.

On voit par ces équations que le point (x,λ) se trouve dans $\widetilde{\Delta}$ si et seulement si $x \in \Delta$; autrement dit, $\check{\mathbb{P}}(\underline{N}_{\Delta/X})$ est le fibré projectif trivial

(2.1.6.2)
$$\begin{array}{ccc} \check{\mathbb{P}}(\underline{N}_{\Delta/X}) & \simeq & \Delta \times \mathbb{P}^r \\ & \searrow^{\text{proj.canonique}} \quad \swarrow_{pr_i} & \\ & \Delta & \end{array} .$$

On a le diagramme commutatif suivant

(2.1.6.3)
$$\begin{array}{ccccccc} \Delta \times \mathbb{P}^r & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{\Delta} & \hookrightarrow & \widetilde{X} & \hookrightarrow & X \times \mathbb{P}^r \\ & \searrow^{pr_1} & \downarrow{\scriptstyle f|\widetilde{\Delta}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow_{pr_1} & \\ & & \Delta & \hookrightarrow & X & & \end{array} ,$$

et l'inclusion composée $\Delta \times \mathbb{P}^r \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^r$ provient de $\Delta \hookrightarrow X$ par changement de base.

Théorème 2.2. Soient X lisse sur un corps k, Δ un sous-schéma lisse partout de codimension $1+r$, et $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ l'éclatement de X en Δ. Alors :

(2.2.1) La suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_* \mathbb{Z}_\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(\widetilde{X}_o, \mathbb{Z}_\ell)$$

dégénère.

2.2.2. Il existe un isomorphisme additif

$$H^q(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \xleftarrow{\sim} H^q(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^q(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)/\mathrm{Im}\, H^q(\Delta,\mathbb{Z}_\ell) \simeq$$

$$\overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} H^{q-2j}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-j)) \oplus H^q(X,\mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

Démonstration. Désignons par

(2.2.3) $$g : \widetilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$$

la restriction de f à $\widetilde{\Delta}$, et par

(2.2.4) $$\begin{cases} j : \Delta \hookrightarrow X \\ i : \widetilde{\Delta} \hookrightarrow \widetilde{X} \end{cases}$$

les inclusions, de façon à obtenir le diagramme commutatif

(2.2.5)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xleftarrow{\ i\ } & \widetilde{\Delta} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xleftarrow{\ j\ } & \Delta \end{array} \quad .$$

Celui-ci induit un homomorphisme des suites spectrales de Leray pour les morphismes f et g, et le faisceau $\mathbb{Z}_\ell$ sur $\widetilde{X}$ et $\widetilde{\Delta}$,

(2.2.6) $$E_r^{p,q}(f) \xrightarrow{(i^*,j^*)} E_r^{p,q}(g)$$

s :

D'autre part, f induisant un isomorphisme de $\widetilde{X} - \widetilde{\Delta}$ avec $X - \Delta$, nous avons, par le théorème de changement de base pour un morphisme propre,

$$(2.2.7)\qquad R^q f_* \mathbb{Z}_\ell \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell & \text{si } q = 0 \\ j_* R^q g_* \mathbb{Z}_\ell & \text{si } q > 0 \end{cases} ,$$

d'où

$$(2.2.8)\qquad E_2^{p,q}(f) \xrightarrow[\sim]{(i^*,j^*)} E_2^{p,q}(g) \quad \text{pour } q \neq 0 .$$

Nous allons démontrer par récurrence sur r que

$$(2.2.9)\qquad E_r^{p,q}(f) \xrightarrow{(i^*,j^*)}_{\sim} E_r^{p,q}(g) \quad \text{pour } q \neq 0,\ r \geq 2$$

et

$$(2.2.10)\qquad d_r^{p,q}(f) = 0 \quad \text{pour } r \geq 2 .$$

Admettons pour l'instant la formule

$$(2.2.11)\qquad d_r^{p,r-1}(f) = 0 \quad \text{pour } r \geq 2, \text{ tout } p .$$

Commençons par r = 2 . Nous avons un diagramme commutatif

$$(2.2.12)\qquad \begin{array}{ccc} E_2^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_2^{p,q}(g) \\ \downarrow{\scriptstyle d_2^{p,q}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle 0 = d_2^{p,q}(g)} \\ E_2^{p+2,q-1}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_2^{p+2,q-1}(g) \end{array} .$$

Pour $q \leq 0$, on a $E_2^{p+2,q-1}(f) = 0$, donc $d_2^{p,q}(f) = 0$. Pour $q = 1$, on a $d_2^{p,1}(f) = 0$ par (2.2.11), et pour $q > 1$, les flèches horizontales dans (2.2.12) sont des isomorphismes, et on sait que $d_2^{p,q}(g) = 0$ par 1.2 et 2.1.4. Ceci donne (2.2.10) pour r = 2, et (2.2.9) pour r = 2 n'est autre que (2.2.8).

Supposons connues (2.2.9) et (2.2.10) pour une valeur de $r \geq 2$. L'hypothèse (2.2.10) implique $E_r^{p,q}(f) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{p,q}(f)$, et par 1.2 on a $E_r^{p,q}(g) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{p,q}(g)$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_r^{p,q}(g) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ R_{r+1}^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_{r+1}^{p,q}(g) \end{array} \qquad (2.2.13)$$

ce qui donne (2.2.9) pour r+1, compte tenu de (2.2.9) pour r. Pour déduire (2.2.10) pour r+1, on regarde le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_{r+1}^{p,q}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_{r+1}^{p,q}(g) \\ \downarrow d_{r+1}^{p,q}(f) & & \downarrow 0 = d_{r+1}^{p,q}(g) \\ E_{r+1}^{p+r+1,q-r}(f) & \xrightarrow{(i^*,j^*)} & E_{r+1}^{p+r+1,q-r}(g) \end{array} \qquad (2.2.14)$$

Pour $q \leq r-1$, on a $E_{r+1}^{p+r+1,q-r}(f) = 0$, donc $d_r^{p,q}(f) = 0$. Pour $q = r$, on a (2.2.11), et pour $q > r$ les flèches horizontales dans (2.2.14) sont des isomorphismes, et $d_{r+1}^{p,q}(g) = 0$ par 1.2, d'où la conclusion voulue.

Il reste à vérifier (2.2.11), qui signifie que le "edge homomorphisme" composé

$$E_2^{p,0}(f) \longrightarrow E_3^{p,0}(f) \longrightarrow E_4^{p,0}(f) \longrightarrow \ldots E_\infty^{p,0}(f) \qquad (2.2.15)$$

est un isomorphisme, i.e. que

$$f^* : H^p(X, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^p(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \qquad (2.2.16)$$

est injectif. Or, il existe un inverse à gauche, savoir l'homomorphisme de Gysin (SGA 5 IV)

$$(2.2.17) \qquad f_* : H^p(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^p(X, \mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

qui vérifie en effet,

$$(2.2.18) \qquad f_* f^* = id.$$

comme il résulte de la formule de projection, et du fait que $f_*(1) = 1$, f étant birationnel donc de degré un.

Ceci démontre (2.2.1). Quant à (2.2.2), remarquons que le diagramme (2.2.5) donne, par passage à la cohomologie, un diagramme commutatif

$$(2.2.19) \qquad \begin{array}{ccc} H^p(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{i^*} & H^p(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) \\ \uparrow{\scriptstyle f^*} & & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\ H^p(X, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{j^*} & H^p(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \end{array} \quad ,$$

d'où un morphisme

$$(2.2.20) \qquad \frac{H^p(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)}{f^* H^p(X, \mathbb{Z}_\ell)} \xrightarrow{(i^*, j^*)} \frac{H^p(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)}{g^* H^p(\Delta, \mathbb{Z}_\ell)} \quad .$$

Désignons par F^i les filtrations de $H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ et de $H^\cdot(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell)$ provenant des suites spectrales de Leray, de sorte que (2.2.20) se récrit

$$(2.2.21)\qquad \frac{H^p(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell)}{F^pH^p(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell)} \xrightarrow{(i^*,j^*)} \frac{H^p(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)}{H^pF^p(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)}$$

Or, d'après (2.2.9), le gradué associé à la flèche (2.2.21) est un isomorphisme, donc (2.2.20) est un isomorphisme. D'autre part, (2.2.18) donne une décomposition en somme direct

$$(2.2.22)\qquad H^\cdot(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \underset{f_*\oplus(1-f^*f_*)}{\overset{f^*+\text{inclusion}}{\rightleftarrows}} H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell)\oplus \operatorname{Ker} f_* \quad ,$$

et (1.2.2) nous donne une décomposition en somme directe

$$(2.2.23)\qquad \frac{H^\cdot(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)}{g^*H^\cdot(\Delta,\mathbb{Z}_\ell)} \xleftarrow{\sim} \bigoplus_{1\le j\le r} H^{\cdot-2j}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-j)) \ ;$$

mettant ensemble l'isomorphisme (2.2.20) et les décompositions (2.2.22) et (2.2.23), on trouve (2.2.2), cqfd.

Remarque 2.2.24. Esquissons une deuxième démonstration de (2.2.2) nettement plus simple, valable dans le cas où X est propre sur k. Plus généralement, on trouve (sans hypothèse sur X) le résultat correspondant (2.2.26) en cohomologie à support propre. Nous avons les suites exactes de"cohomologie à supports propres", notée $H_c^\cdot$, pour les couples $(\widetilde{X},\Delta)$ et (X,Δ) qui forment un diagramme commutatif

$$(2.2.25)\quad \longrightarrow H_c^i(\widetilde{X}-\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^i(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^i(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^{i+1}(\widetilde{X}-\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)$$

$$\uparrow \wr \qquad \uparrow f^* \qquad \uparrow g^* \qquad \uparrow \wr$$

$$(2.2.26)\quad \longrightarrow H_c^i(X-\Delta,\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^i(X,\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^i(\Delta,\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H_c^{i+1}(X-\Delta,\mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

Or, le quotient du complexe acyclique (2.2.25) par le sous-complexe acyclique (2.2.26) nous donne le complexe acyclique

$$(2.2.27)\quad \longrightarrow 0 \longrightarrow \frac{H_c^i(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell)}{f^*H_c^i(X,\mathbb{Z}_\ell)} \longrightarrow \frac{H_c^i(\widetilde{\Delta},\mathbb{Z}_\ell)}{g^*H_c^i(\Delta,\mathbb{Z}_\ell)} \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

i.e, on trouve, sans considérer des suites spectrales, que (2.2.20) est un isomorphisme. Dès lors, les raisonnements qu'on vient de donner s'appliquent pour donner (2.2.2).

Corollaire 2.3. Posons

$$b_q(X) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^q(\chi,\mathbb{Q}_\ell), \quad \chi(X) = \Sigma(-1)^q b_q(X) \quad .$$

On a

$$(2.3.1)\qquad b_q(\widetilde{X}) = b_q(X) + \sum_{j=1}^{r} b_{q-j}(\Delta) \quad ,$$

$$(2.3.2)\qquad \chi(\widetilde{X}) = \chi(X) + r\,\chi(\Delta) \quad .$$

3. L'éclatement associé à un pinceau

3.1. Soient X projectif, lisse et irréductible sur un corps k algébriquement clos, de dimension u, et $D = \{H_\tau\}_{\tau \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau d'hypersurfaces dont l'axe coupe transversalement X, en Δ. Considérons alors l'éclatement de X en Δ, que nous allons décrire explicitement.

En termes d'équations, désignant par (λ,μ) des coordonnés homogènes de $\mathbb{P}^1$, et par F et G deux formes linéaires tels que F = G = 0 définisse l'axe du pinceau, le pinceau s'écrit

(3.1.1) $\qquad \lambda F - \mu G \quad .$

Le sous-schéma Δ est par définition l'intersection de X avec la sous-variété linéaire G = F = 0 . D'après 2.1.6,

(3.1.2) $\qquad \widetilde{X} = \{(x,(\lambda,\mu) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid \lambda F - \mu G = 0\} \quad ;$

c'est l'adhérence schématique, dans $X \times \mathbb{P}^1$, du graphe de l'application

(3.1.3) $\qquad X - \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^1$

$$x \longrightarrow (G(x),F(x)) \quad .$$

La grande vertu de $\widetilde{X}$ est d'être une variété projective (car plongée dans $X \times \mathbb{P}^1$) et lisse (car Δ l'est) sur k, qui admet un morphisme ρ vers $\mathbb{P}^1$, à savoir

(3.1.4) $\qquad \rho : \widetilde{X} \longrightarrow X \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{pr_2} \mathbb{P}^1 \quad ,$

dont les fibres sont les sections hyperplanes de X par les membres de notre pinceau

$$\rho^{-1}(t) = X_t \overset{\text{déf}}{=\!=} X.H_t \quad .$$

3.2. Le degré de la variété duale : méthode topologique.

Supposons en plus que le pinceau de 3.1 soit tel que

(3.2.1) X_t est lisse pour tout t contenu dans un ouvert non vide de $\mathbb{P}^1$,

(3.2.2) Si X_t est singulier, elle n'a que des singularités quadratiques non dégénérées (XVII 1.1) ;

ces conditions sont vérifiées en particulier pour un pinceau de Lefschetz (XVII 2.21) si car k ≠ 2 ou si X est de dimension paire.

Soient η le point générique de $\mathbb{P}^1$, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus, n la dimension de X, et χ la caractéristique d'Euler-Pincaré à valeurs dans le faisceau $\mathbb{Q}_\ell$. Alors la formule d'Euler-Poincaré XVI 2.1 appliquée au morphisme S, nous donne

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(\mathbb{P}^1)\,\chi(X_{\bar{\eta}}) + (-1)^n \sum_{\substack{\text{pts sing.}\\ \text{des fibres}}} 1 \quad , \tag{3.2.3}$$

formule qui, compte tenu de (2.2.2), se récrit

$$(-1)^n \left[\begin{array}{l}\text{nombre total des}\\ \text{points singuliers}\end{array}\right] = \chi(X) + \chi(\Delta) - 2\,\chi(X_{\bar{\eta}}) \tag{3.2.4}$$

On remarquera que la quantité $\chi(X) + \chi(\Delta) - 2\chi(X_{\bar{\eta}})$ est indépendante du choix particulier du pinceau, et ne dépend que du plongement de X dans un $\mathbb{P}^r$, et même seulement de la classe de Chern de $\mathcal{O}_X(1)$, cf. [XVII, 5.7.5 et 5.7.6].

3.2.5. Explicitons ceci dans un cas concret. Prenons $X = \mathbb{P}^2$, $\{H_\tau\}$ un pinceau de courbes de degré d dans $\mathbb{P}^2$ qui vérifie (3.1), (3.2.1) et (3.2.2). On a

$$\chi(X) = 3 \qquad \text{(en vertu de 1.2)}$$

(3.2.6) $$\chi(X_\eta) = -d(d-3) \qquad \text{(cf. SGA 5 VII 7.3)}$$

$$\chi(\Delta) = d^2 \quad ,$$

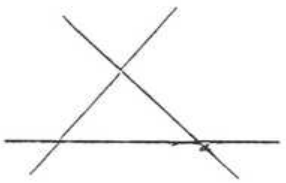
d'où

(3.2.7) le nombre total de points singuliers est $3\,(d-1)^2$

Prenons le cas particulier d = 3, et considérons la famille des courbes elliptiques (en caractéristique ≠ 3)

(3.2.8) $$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\mu\, XYZ \quad .$$

Les quatre fibres singulières sont au-dessus de μ = racine cubique de l'unité, et $\mu = \infty$, et chaque fibre singulière est l'union de trois droites comme ceci

(3.2.9)  ,

et a exactement trois points singuliers, tous quadratiques non-dégénérés. Cela fait ensemble douze points singuliers, et vérifie (3.2.7) dans cet exemple.

Proposition 3.2.10. Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ un plongement de Lefschetz (XVII 2.3), et supposons que $n = \dim X$ soit pair, ou que car. $k \neq 2$. Alors tout pinceau de Lefschetz, considéré comme droite dans $\check{\mathbb{P}}^r$, coupe $\check{X}$ en

$$(3.2.11) \qquad (-1)^{\eta} [\, \chi(X) + \chi(\Delta) - 2\, \chi(X_{\eta})]$$

points, et le coupe transversalement (EGA IV 17.13.7).

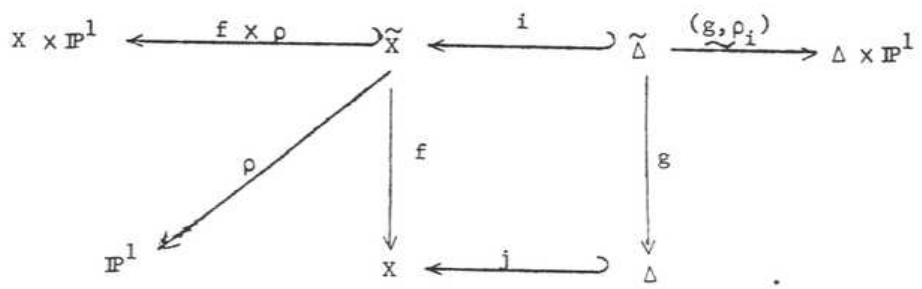
Démonstration. Par hypothèse, toute singularité d'une fibre du pinceau de Lefschetz est quadratique non-dégénérée, de sorte que (3.2.4) s'applique pour donner que le nombre des fibres singulières (chacune contenant exactement un point singulier) dans le pinceau D est le nombre (3.2.11). Or, la fibre X_τ est singulière si et seulement si $\tau \in \check{X} \cap D$. Pour voir la transversalité de l'intersection, on remarque que le nombre (3.2.11) est indépendant du choix particulier du pinceau de Lefschetz, et que, le pinceau générique étant un pinceau de Lefschetz, ce nombre (3.2.11) est le degré de $\check{X}$ (i.e. son degré comme hypersurface dans $\check{\mathbb{P}}^r$, qui est (par convention) 0 si $\dim \check{X} \leq r-2$). Or, si une droite D coupe une hypersurface de degré $d > 0$ en d points distincts x_i $(i \leq i \leq d)$, l'intersection est forcément transversale. En effet, la multiplicité d'intersection $\mu_i = \mathrm{rg}(D \cap \check{X} | x_i)$ de D et $\check{X}$ en un x_i est ≥ 1, donc comme $\sum^{d} \mu_i = d$, on a $\mu_i = 1$, pour tout i, i.e. $D \cap \check{X}$ est lisse, ce qui, équivaut à la transversalité, comme on voit aussitôt.

Remarque 3.2.12. Pour un pinceau de Lefschetz D dont on suppose déjà qu'il coupe $\check{X}$ transversalement (condition vérifiée en tous cas pour D assez générale), le résultat 3.2.10 peut être considéré aussi comme la conjonction de XVII 5.7.2 et du fait que deg $\varphi = 1$, contenu dans XVII 3.5. Bien entendu, le fait que tout pinceau de Lefschetz D coupe $\check{X}$ transversalement, établi ici via la formule d'Euler-Poincaré XVI 2.1, peut aussi se vérifier directement de façon élémentaire, en utilisant le fait que l'axe de D coupe X transversalement.

4. La cohomologie de l'éclatement associé à un pinceau

4.1. Nous reprenons la situation 3.1, résumée par le diagramme commutatif (cf. 2.1.6.3) :

(4.1.1)



Commençons par préciser (2.2.2) dans ce cas.

Proposition 4.2. Sous les hypothèses de 3.1 :

(4.2.1) Les homomorphismes de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$H^\cdot(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \underset{f^*+\mathrm{ind}}{\overset{f_*\oplus(1-f^*f_*)}{\rightleftarrows}} H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus \ker(f_*: H^\cdot(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \to H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell))$$

sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

(4.2.2) Les homomorphismes de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$H^\cdot(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \underset{f^*+i_*g^*}{\overset{f_*\oplus(g_*i^*)}{\rightleftarrows}} H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))$$

sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

(4.2.3) La structure d'algèbre sur $H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))$ déduite par "transport de structure" par (4.2.2) du cup-produit dans $H^\cdot(\widetilde{X},\mathbb{Z}_\ell)$, s'exprime, en termes des éléments

$$a,b \in H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell)\ ,\ x,y \in H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))\ ,$$

par les formules :

(4.2.3.1) $(0 \oplus x) \wedge (0 \oplus y) = -j_*(xy) \oplus 2xy\, c_1(\underline{O}_\Delta(1))$,

(4.2.3.2) $(a \oplus 0) \wedge (b \oplus 0 = ab \oplus 0$,

(4.2.3.3) $(a \oplus 0) \wedge (0 \oplus y) = 0 \oplus j^*(a)y$,

(4.2.3.4) $(0 \oplus x) \wedge (b \oplus 0) = 0 \oplus xj^*(b)$.

En particulier, pour

$$a \oplus x \in H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1)$$

$$b \oplus y \in H^{2n-\cdot}(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{2n-2-\cdot}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))\ ,$$

on a

(4.2.3.5) $\quad (a \oplus x) \wedge (b \oplus y) = ab - j_*(xy)$.

Autrement dit, la matrice d'intersection totale de $H^*(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c}\text{la matrice totale}\\ \text{des intersections sur } X\end{array}\right) & 0 \\ \hline 0 & -\left(\begin{array}{c}\text{la matrice totale}\\ \text{des intersections}\\ \text{sur } \Delta\end{array}\right) \end{array}\right).$$

Démonstration. On a déjà démontré (4.2.1) ;(cf. 2.2.22)). Pour (4.2.2), remarquons d'abord que, $g : \widetilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ étant un fibré projectif de rang un, la suite

$$(4.2.4)\quad 0 \longrightarrow H^*(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{g^*} H^*(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{g_*} H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \longrightarrow 0$$

est exacte (cf. (1.2.2)). Compte tenu de (2.2.26), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes

$$(4.2.5)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^*(X, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{f^*} & H^*(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g_* i^*} & H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle j^*} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H^*(\Delta, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g^*} & H^*(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{g_*} & H^{*-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Compte tenu du scindage (4.2.1), ceci donne un isomorphisme

$$(4.2.6) \qquad f_* \oplus g_* \, i^* : H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \, .$$

Le transposé de (4.2.5) donne un diagramme commutatif de suites exactes (après le décalage . $\xrightarrow{\sim}$ 2n-.)

$$(4.2.7) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \leftarrow & H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) & \xleftarrow{f_*} & H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) & \xleftarrow{i_* g^*} & H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle j_*} & & \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \| & & \\ 0 & \leftarrow & H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-2)) & \xleftarrow{g_*} & H^{\cdot-2}(\widetilde{\Delta}, \mathbb{Z}_\ell(-1)) & \xleftarrow{g_*} & H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) & \leftarrow & 0 \end{array}$$

et on obtient un isomorphisme

$$(4.2.8) \qquad H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{f^* + i_* g^*} H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \, .$$

Il reste à démontrer que le composé

$$(4.2.9) \qquad H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{f^* + i_* g^*} H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{f_* \oplus (g_* i^*)} H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$$

est l'identité. Or, on a

$f_* f^* = \mathrm{id}$ sur $H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell)$, par (2.2.18)

$g_* i^* f^* = 0$ par (4.2.5)

$f_* i_* g^* = 0$ par (4.2.7) ,

de sorte qu'il suffit de démontrer

$$(4.2.10) \qquad g_* i^* i_* g^*(X) = X \text{ pour } X \in H^\cdot(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \, .$$

Pour vérifier (4.2.10), remarquons d'abord que $i : \tilde{\Delta} \hookrightarrow \tilde{X}$ étant l'inclusion d'une sous-variété lisse de codimension un, on a [SGA 5 VII]

$$(4.2.11) \qquad i^* i_*(x) = c_1(\underset{\sim}{N}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})\ x$$

$$(4.2.12) \qquad i_*(x) i_*(y) = i_*(xy\ c_1(\underset{\sim}{N}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) \quad .$$

Ecrivons $\xi_X = \underset{\sim}{O}_X(1)$, $\xi_\Delta = \underset{\sim}{O}_\Delta(1)$, $\xi_{\mathbb{P}^1} = \underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, etc .

En vertu de EGA II 8.1.7, on a, si $\tilde{\mathfrak{J}}$ est l'Idéal $\tilde{\Delta}$ dans $\tilde{X}$

$$(4.2.13) \qquad \overset{\vee}{\underset{\sim}{N}}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}} \simeq \tilde{\mathfrak{J}}/\tilde{\mathfrak{J}}^2 \simeq \tilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\underset{\sim}{O}_{\tilde{X}}} \underset{\sim}{O}_{\tilde{\Delta}} \simeq \underset{\sim}{O}_{\tilde{X}}(1) \otimes_{\underset{\sim}{O}_{\tilde{X}}} \underset{\sim}{O}_{\tilde{\Delta}} = \underset{\sim}{O}_{\tilde{\Delta}}(1) \quad ,$$

où $\tilde{\Delta}$ est interprété comme $\mathbb{P}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, $\mathfrak{J}$ étant l'Idéal de Δ dans X . Or on a un isomorphisme canonique (Δ étant représenté comme intersection de X avec deux hyperplans donnés dans $\mathbb{P}^\vee$) ,

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \simeq \underset{\sim}{O}_\Delta^2(-1) \quad ,$$

-1))

qui donne naissance à l'isomorphisme

$$\tilde{\Delta} = \mathbb{P}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \simeq \mathbb{P}\,(\underset{\sim}{O}_\Delta^2(-1)) \overset{\alpha}{\simeq} \mathbb{P}(\underset{\sim}{O}_\Delta^2) \simeq \Delta \times \mathbb{P}^1$$

où α est l'isomorphisme canonique EGA II 4.1.4. Par loc. cit. cet isomorphisme transforme

$\underset{\sim}{O}_{\tilde{\Delta}}(1) = \underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)}(1) = \underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}(\underset{\sim}{O}_\Delta^2(-1))}(1)$ en $\underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}(\underset{\sim}{O}_\Delta^2)}(1) \otimes_{\underset{\sim}{O}_\Delta^2} \underset{\sim}{O}_\Delta(-1) = \underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes_K \underset{\sim}{O}_\Delta(-1)$,

de sorte que (4.2.13) s'écrit

$$(4.2.14) \qquad \overset{\vee}{\underset{\sim}{N}}_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}} \simeq (\rho i)^*(\underset{\sim}{O}_{\mathbb{P}}(1)) \otimes g^*(\underset{\sim}{O}_\Delta(-1)) \quad ,$$

d'où en prenant le c_1 des deux membres, le

Lemme 4.3. On a

$$c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}) = g^*(\xi_\Delta) - (\rho i)^*(\xi_{\mathbb{P}^1}) \quad .$$

Reprenons la démonstration de (4.2.10). D'après (4.2.11) et (4.3), il suffit de démontrer

$$g_*(g^*(x)[(\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})) - g^*(c_1(\xi_\Delta)]) = x \quad .$$

Or, d'après (4.2.4), $g_*g^* = 0$, et, compte tenu de ce que

$$\tilde{\Delta} \xrightarrow{g \times \rho_i} \Delta \times \mathbb{P}^1 \quad ,$$

on a

(4.3.1) $$g_*(g^*(x)\ (\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})) = x$$

(4.3.2) $$g_*(g^*(x)\ c_1(N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}})) = -x \quad .$$

Calculons maintenant la structure d'algèbre sur $H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1))$, déduite du cup-produit par transport de structure via (4.2.2). Soient a, b des éléments de $H^\cdot(X,\mathbb{Z}_\ell)$, x,y des éléments de $H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))$. Commençons par (4.2.3.1).

$$(0 \oplus x) \wedge (0 \oplus y) = ? \oplus ?'$$

$$? = f_*((i_*g^*(x))(i_*g^*(y))$$

$$= f_*(i_*(g^*(xy)\ c_1\ (N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}))) \quad \text{par (4.2.12)}$$

$$= j_*g_*(g^*(xy)\ c_1\ (N_{\tilde{\Delta}/\tilde{X}}))$$

$$= j_*(-xy) \quad \text{par (4.3.2)} .$$

$$?' = -g_*i^*(i_*g^*(x) \wedge i_*g^*(y))$$

$$= -g_*i^*(i_*(g^*(xy)\ c_1(\underline{N}_{\widetilde{\Delta}/\widetilde{X}}))) \quad \text{par (4.3.2)}$$

$$= -g_*(g^*(xy)(c_1(N_{\widetilde{\Delta}/\widetilde{X}}))^2) \quad \text{par (4.3.2)} \ ,$$

or,

$$(c_1(\underline{N}_{\widetilde{\Delta}/\widetilde{X}}))^2 = (g^*c_1(\underline{O}_{\Delta(1)}) - (\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1})))^2 \quad \text{par (4.3)}$$

$$= g^*((c_1(\xi_\Delta))^2) - 2g^*(c_1(\xi_\Delta))(\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))$$

$$(+ (\rho i)^*((c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))^2) = 0) \ ,$$

$$?' = -g_*(g^*(xy)g^*(c_1(\xi_\Delta)^2)) + g_*(2g^*(xy)g^*(c_1(\xi_\Delta)(\rho i)^*(c_1(\xi_{\mathbb{P}^1}))$$

$$? = 0 + 2xy\ c_1(\xi_\Delta) \quad \text{par (4.2.4) et (4.3.1)} \ ,$$

ce qui établit (4.2.3.1). Quant à (4.2.3.2) : $(a \oplus 0) \wedge (b \oplus 0) = ab \oplus 0$, ceci exprime que f* est un homomorphisme d'algèbres.

Prouvons (4.2.3.3). Or, la formule de projection implique $\text{Ker } f_* \cap \text{image } f^* \subset \text{Ker } f_*$, de sorte que

$$(a \oplus 0) \wedge (0 \oplus y) = 0 \oplus ? \ ,$$

où

(4.3.3) $$? = -g_*i^*(f^*(a)\ i_*g^*(y))$$

$$= - g_*(i^*f^*(a)\ g^*(y)\ c_1(\underset{\sim}{N}_{\widetilde{\Delta}/\widetilde{X}})) \quad \text{par (4.3.2)}$$

$$= - g_*(g^*(j^*(a))\ g^*(y)\ c_1(\underset{\sim}{N}_{\widetilde{\Delta}/\widetilde{X}}))$$

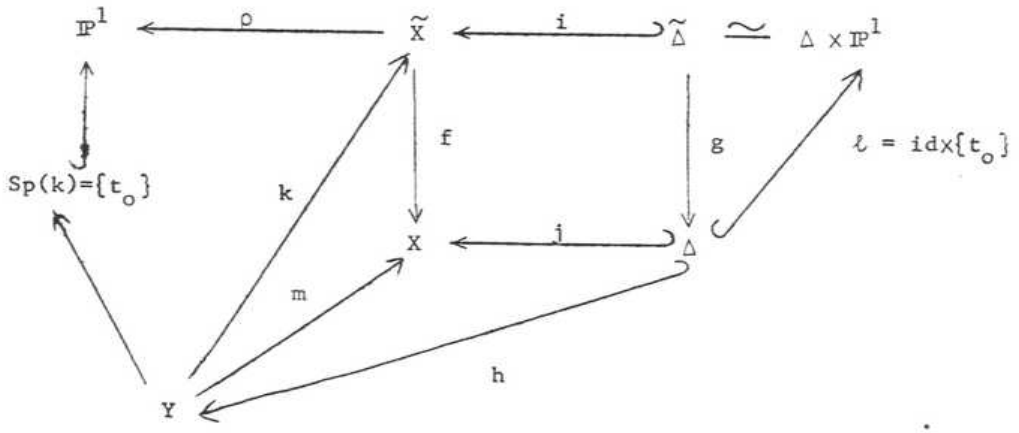
$$= j^*(a).y$$

ce qui établit (4.2.3.3). On remarque enfin que (4.2.3.4) se déduit de (4.2.3.3) par l'anticommutativité du cup-produit.

5. Etude cohomologique du morphisme $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ associé à un pinceau

5.1. L'homomorphisme de restriction $H^*(\widetilde{X}) \longrightarrow H^*(Y)$.

Désignons par Y une des fibres lisses de $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$, disons $Y = \rho^{-1}(t_o) = X.H_{t_o}$. On a le diagramme commutatif



Proposition 5.1.1. Sous les hypothèses de (3.1), Y désignant une fibre lisse :

(5.1.2) L'homomorphisme restriction

$$k^* : H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^\cdot(Y, \mathbb{Z}_\ell)$$

s'exprime (via (4.2.2)) par

$$H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h^*} H^\cdot(Y, \mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

(5.1.3) La flèche de Gysin

$$k_* : H^{\cdot-2}(Y, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \longrightarrow H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell)$$

s'exprime par

$$H^{\cdot-2}(Y, \mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{m_* \oplus (-h^*)} H^\cdot(X, \mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta, \mathbb{Z}_\ell(-1)).$$

Démonstration. Les sous-schémas lisses $\widetilde{\Delta}$ et Y de $\widetilde{X}$ se coupent transversalement en Δ, autrement dit, le carré de schémas lisses

(5.1.4)

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\ell} & \widetilde{\Delta} \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Y & \xrightarrow[k]{} & \widetilde{X} \end{array}$$

est cartésien, ce qui implique la formule [SGA 5. IV]

(5.1.5) $$h_*\ell^* = k^*i_* \quad , \quad \ell_*h^* = i^*k_* \quad .$$

Le composé

$$H^{\cdot}(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{f^*+i_*g^*} H^{\cdot}(\tilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{k^*} H^{\cdot}(Y,\mathbb{Z}_\ell)$$

est la somme de $k^*f^* = m^*$ et de $k^*i_*g^* = h_*\ell^*g^*$ par (5.1.5)), et $g.\ell = id_\Delta$, ce qui donne (5.1.2).

Le composé

$$H^{\cdot-2}(Y,\mathbb{Z}_{\ell(-1)}) \xrightarrow{k_*} H^{\cdot}(\tilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{f_*\oplus(g_*i^*)} H^{\cdot}(X,\mathbb{Z}_\ell) \oplus H^{\cdot-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))$$

est la somme de $f_*k_* = m_*$ et de $-g_*i^*k_* = g_*\ell_*h^* = -h^*$,

ce qui donne (5.1.3).

Corollaire 5.1.6. Sous les hypothèses de 5.1.1, pour $i \leq n-1$, les images de

$$m^* : H^i(X,\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^i(Y,\mathbb{Z}_\ell)$$

et de

$$k^* : H^i(\tilde{X},\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow H^i(Y,\mathbb{Z}_\ell)$$

sont égales.

Démonstration. D'après le "théorème de Lefschetz faible" sur les sections hyperplanes (SGA 5 VII 7.1), pour $i \leq n-1$ la flèche

$$(5.1.7) \qquad H^{i-2}(X,\mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{i^*} H^{i-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1))$$

est un isomorphisme, de sorte que pour $i \leq n-1$, l'image de h^* est égale, grâce à (5.1.2), à la somme de celle de m^* et de celle du composé

$$H^{i-2}(X,\mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{i^*} H^{i-2}(\Delta,\mathbb{Z}_\ell(-1)) \xrightarrow{h^*} H^i(Y,\mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

Or, par le formule de projection

$$h_*j^*(x) = h_*(h^*(m^*(x)) = m^*(x)h_*(1) = \xi_Y\, m^*(x)$$

$$= m^*(x\ \xi_X) \quad \text{puisque } m^*(\xi_X) = \xi_Y \quad ,$$

d'où l'inclusion $\operatorname{Im} k^i \subset \operatorname{Im} m^i$, cqfd.

$^{\cdot}{}_{\ell}(-1))$

5.2. Le "théorème de Lefschetz vache" (LV)

5.2.1. Soit S projectif de dimension n, sur le corps k (alg. clos) muni d'un plongement projectif $S \hookrightarrow \mathbb{P}$. Désignons par

$$u \in H^2(S, \mathbb{Z}_{\ell}(1))$$

la "classe de cohomologie d'une section hyperplane " (de sorte que u s'obtient comme l'image réciproque par le plongement $S \hookrightarrow \mathbb{P}$ de la première classe de Chern de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$, classe qui se trouve dans $H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{\ell}(1))$, et désignons par

$$L_S : H^{\cdot}(S, \mathbb{Q}_{\ell}(j) \longrightarrow H^{\cdot+2}(S, \mathbb{Q}_{\ell}(j+1))$$

l'opération "multiplication par u".

5.2.2. On dit que S (muni de u) vérifie (LV), (le "théorème de Lefschetz vache") si pour tout (ou un) entier j et tout entier $i > 0$, les applications

$$L_S^i : H^{n-i}(S, \mathbb{Q}_{\ell}(j)) \longrightarrow H^{n+i}(S, \mathbb{Q}_{\ell}(i+j))$$

sont des isomorphismes.

5.2.2.1. On conjecture que cette condition est vérifiée si S est lisse. C'est vrai si k est de caractéristique nulle [6], d'où on conclut, grâce au "théorème de spécialisation", SGA 4 XVI 2.2 qu'il en est de même si S, avec son plongement projectif, se remonte en caractéristique nulle. Donc on trouve que c'est vérifié pour S une intersection complète lisse. On sait également que c'est vrai pour S lisse de dimension ≤ 2 [2], et pour S une variété abélienne (soit "directement" (LIEBERMAN [4] et [2]), soit par le théorème de MUMFORD [5] qui dit qu'une variété abélienne polarisée se remonte, avec sa polarisation, en caractéristique nulle). Rappelons que pour une variété S projective, on définit pour $i \leq n$ la "partie primitive" de la cohomologie :

(5.2.2.2) $\quad \mathrm{Prim}^i(S,\mathbb{Q}_\ell(j)) = \mathrm{Ker}\,(L^{n-i+1} : H^i(S,\mathbb{Q}_\ell(j)) \to H^{2n-i+2}(S,\mathbb{Q}_\ell(j+2n-2i+2)))$

Si S vérifie (LV), on a pour $i \leq n$ la décomposition :

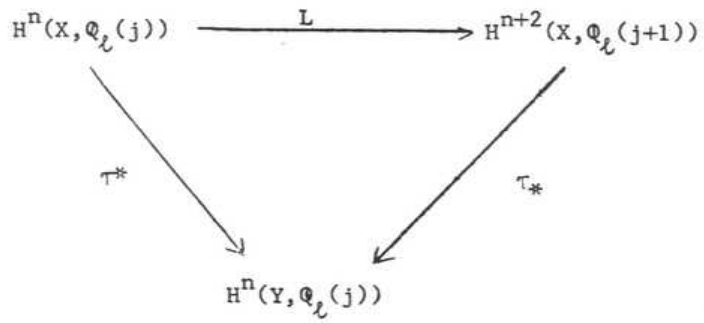
(5.2.2.3) $\quad H^i(S,\mathbb{Q}_\ell(j)) \xleftarrow[\sim]{1+L} \mathrm{Prim}^i(S,\mathbb{Q}_\ell(j)) \oplus H^{i-2}(S,\mathbb{Q}_\ell(j-1))$.

Proposition 5.2.3. Soit X projectif et lisse, vérifiant (LV). Désignons par $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplane lisse. Alors

(5.2.3.1) $\quad \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) = \mathrm{Ker}(\tau^* : H^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \to H^n(Y,\mathbb{Q}_\ell(j)))$.

Démonstration. On a, grâce à la formule de projection pour $m : Y \to X$, le diagramme commutatif

(5.2.3.2)



Par dualité et Lefschetz faible,

$$\tau_* : H^n(Y,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{n+2}(X,\mathbb{Q}_\ell(j+1))$$

est la transposée d'une isomorphisme, donc un isomorphisme, d'où la conclusion.

Lemme 5.2.4. Soient X projectif et lisse, et $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplane lisse. Alors X vérifie (LV) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

5.2.4.1. Y vérifie (LV) .

5.2.4.2. La restriction du cup-produit $H^{n-1}(Y,Q_\ell)$ au sous-espace $\mathrm{Im}\, H^{n-1}(X,Q_\ell)$ est une forme non-dégénérée.

Démonstration. On a

(5.2.4.3)
$$\begin{cases} L_X = \tau_*\tau^* \\ L_Y = \tau^*\tau_* \quad \text{(par 4.2.11)}, \end{cases}$$

de sorte que

$$L_X^{i+1} = \tau_* L_Y^i \tau^* \quad . \tag{5.2.4.4}$$

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{L_X^{i+1}} & H^{n+i+1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j+i+1)) \\ \downarrow \tau^* & & \uparrow \tau_* \\ H^{n-1-i}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{L_Y^i} & H^{n-1+i}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j+i)) \end{array} \tag{5.2.4.5}$$

on sait que τ^* est un isomorphisme pour $i \geq 1$ par "Lefschetz faible", et que τ_* l'est par dualité. Donc X vérifie (LV) si et seulement si Y vérifie (LV), et la flèche

$$L_X : H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j+1)) \tag{5.2.4.6}$$

est un isomorphisme. Pour achever la démonstration, il suffit de voir l'équivalence de 5.2.4.2 et 5.2.4.6. Pour ceci, soit $a, b \in H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$. Par la dualité de Poincaré sur X, (5.2.4.6) équivaut à :

(5.2.4.7) La forme bilinéaire

$$H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \times H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{2n}(X,\mathbb{Q}_\ell(2j+2))$$

$$(a,b) \longmapsto a.L_X(b)$$

est non-dégénérée.

Mais par (5.2.5) et la formule de projection, on a

$$a.L_X(b) = a.\tau_*(\tau^*(b)) = \tau_*(\tau^*(a).\tau^*(b)),$$

d'où l'équivalence de (5.2.4.7) et (5.2.4.2).

Corollaire 5.2.5. Soient X projectif et lisse, de dimension n, et $\tau : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une section hyperplan lisse. Supposons que X satisfait à la condition (LV). Alors pour $i \geq n$, la flèche

$$\tau^* : H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Q}_\ell(j))$$

est surjective.

Démonstration. Par (5.2.4.3), on a, pour $i \geq 0$

$$L_Y^{i+1} = \tau^* L_X^i \tau_* ,$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell(j+1)) & \xrightarrow{L_X^i} & H^{n-i}(X, \mathbb{Q}_\ell(j+i+1)) \\ \uparrow{\scriptstyle \tau_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^*} \\ H^{n-i-2}(Y, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{L_Y^{i+1}} & H^{n+i}(Y, \mathbb{Q}_\ell(j+i+1)) \end{array}$$

ce qui donne le résultat voulu, cqfd.

Lemme 5.2.6. Soit $f : F \longrightarrow B$ un morphisme propre et lisse, avec B connexe. Désignons par $\underline{O}_F(1)$ un module relativement ample sur F, et munissons chaque fibre géométrique $F_{\bar{b}}$ du module ample induit par $\underline{O}_F(1)$. Alors, si une des fibres géométriques satisfait la condition (LV), il en est de même pour toutes les autres.

Démonstration. Notons par $\xi_F \in H^2(F, \mathbb{Z}_\ell(1))$ la première classe de Chern de $\underline{O}_F(1)$. Cette classe, et ses puissances $\xi_F^i \in H^{ii}(F, \mathbb{Z}_\ell(i))$ induisent des endomorphismes par cup-produit

$$(5.2.6.1) \qquad \xi_F^i : R^{n-i}f_*\mathbb{Q}_\ell(j) \longrightarrow R^{n+i}f_*\mathbb{Q}_\ell(j+i)$$

où n désigne la dimension relative des fibres. Par le théorème de changement de base pour un morphisme propre [SGA 4 XII 5.2], toutes les fibres géométriques satisfont à la condition (LV) si et seulement si toutes les flèches (5.2.6.1) sont des isomorphismes. Or, par le théorème de spécialisation [SGA 4 XVI 2.2], les faisceaux $R^i f_*\mathbb{Q}_\ell(j)$ sont constants tordus, de sorte que les flèches (5.2.6.1) sont des isomorphismes si et seulement ils le sont au-dessus d'un point géométrique donné, cqfd.

Corollaire 5.2.7. Soit X propective et lisse. Si une section hyperplane lisse vérifie (LV), il en est de même pour toute section hyperplane lisse.

Démonstration. En effet, la famille universelle des sections hyperplanes lisses de X vérifie les hypothèses de 5.2.5.

5.3. La condition (A).

5.3.1. Soit

$$\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

la "fibration" associée à un pinceau dont l'axe coupe transversalement X, et dont la fibre générique est supposée lisse.

Désignons par U un ouvert non-vide de $\mathbb{P}^1$ au-dessus duquel ρ soit lisse, et par

(5.3.1.1) $$\nu : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

l'inclusion. Compte tenu de ce que les faisceaux $R^i_{\rho*}(\mathbb{Q}_\ell(j))$ sont constants tordus au-dessus de U, on voit que les faisceaux

$$\nu_*\nu^* R^i_{\rho*}(\mathbb{Q}_\ell(j))$$

sont essentiellement indépendants du choix de U, et que les homomorphismes canoniques "d'adjonction"

(5.3.2) $$R^i_{\rho*}\mathbb{Q}_\ell(j) \longrightarrow \nu_*\nu^* R^i_{\rho*}(\mathbb{Q}_\ell(j))$$

sont aussi indépendants du choix de U .

5.3.3. Remarquons que pour un pinceau quelconque de sections hyperplanes, le théorème de Lefschetz faible implique que pour $i \leq n-2$, l'immersion $\tilde{X} \xrightarrow{(f\times\rho)} X\times\mathbb{P}^1$ donne lieu à un isomorphisme de faisceaux sur $\mathbb{P}^1$

$$R^i_{\rho*}\mathbb{Q}_\ell(j) \xleftarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1} \ , \ i \leq n-2$$

i.e. $R^i\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$ est un faisceau constant pour $i \leq n-2$ et, a fortiori, les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i \leq n-2$.

5.3.4. On sait, par la théorie locale des cycles évanescents et notamment la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4), que, pour un pinceau de Lefschetz, les homomorphismes 5.3.2 sont des isomorphismes pour $i \neq n$, et sont surjectifs pour $i = n$.

5.3.5. On dit que ρ , ou le pinceau dont il provient, vérifie la condition (A), si tous les homomorphismes (5.3.2) sont des isomorphismes (ou, ce qui revient au même, s'ils le sont pour tout i, et $j = 0$) .

On verra plus bas (6.3, 6.4) que cette condition (A) a une nette tendance à être vérifiée.

Lemme 5.4. Si une des sections hyperplanes lisses de X (donc toute, par 5.2.7) vérifie (LV) (p.ex. si X vérifie (LV), cf. (5.2.4)), et si ρ vérifie l'hypothèse (A), alors toute fibre (y compris toute fibre singulière) vérifie (LV), et les faisceaux $R^i\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j))$ sont constants pour $i \neq n-1$.

Démonstration. Désignons par

$$L : R^i\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow R^{i+2}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j+1))$$

le morphisme multiplication par $f^*c_1(\mathcal{O}_X(1)) \in H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$; fibre par fibre, c'est l'opération envisagée dans (5.2.1). Par hypothèse, on a

un isomorphisme au-dessus de U

(5.4.1) $\quad \nu^*(L^i) : \nu^* R^{n-1-i}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\sim} \nu^* R^{n-1+i}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j+i))$

pour $i > 0$, tout j . Appliquant le foncteur ν_* , on obtient des isomorphismes

(5.4.2) $\quad (\nu_*\nu^*)\, L^i : \nu_*\nu^*\, R^{n-1-i}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\sim} \nu_*\nu^* R^{n-1+i}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j+i)),$

qui, compte tenu de (A) s'identifient aux morphismes

(5.4.3) $\quad L^i : R^{n-1-i}\rho^*\mathbb{Q}_\ell(j) \xrightarrow{\sim} R^{n-1+i}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j+i)$.

On conclut par 5.3.3.

5.4.4. Désignons par Y une fibre lisse de $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Par "Lefschetz faible", la flèche de restriction

$$H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \xhookrightarrow{m^*} H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j))$$

est injectif, et on a vu (5.2.4) que, si X vérifie (LV), le cup-produit sur $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j))$, restreint à $m^* H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$, reste non dégénéré. L'orthogonal de $H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$ dans $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j))$ est donc un sous-espace complémentaire de $H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$ dans $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}_\ell(j))$, qu'on appelle, suivant la terminologie classique, l'espace de cohomologie évanescente de Y . On définit un sous-faisceau correspondant de $\nu_*(R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j))$, où $\nu : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est un ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ , le "faisceau de cohomologie évanescente" $E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$ sur $\mathbb{P}^1$, par

(5.4.4.1) $E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) = \nu_* \left\{ \begin{array}{l} \text{l'orthogonal dans } \nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \text{ du} \\ \text{sous-faisceau constant } H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_U \end{array} \right\}$.

Il est clair que ce faisceau est indépendant du choix de U .

Lemme 5.5. Si X vérifie (LV) et si les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i = n-1$, par exemple si ρ provient d'un pinceau de Lefschetz (cf. (5.3.4)), on a une décomposition en somme directe

(5.5.1) $R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \simeq H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1} \oplus E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$.

Démonstration. Par (LV), on a une telle décomposition au-dessus de U :

(5.5.2) $\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \simeq H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_U \oplus \nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$,

à laquelle on applique ν_* .

Théorème 5.6. Soit X une variété projective, lisse et irréductible qui vérifie (LV) (5.2.2). Soit $\{H_\tau\}$ un pinceau d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X, en X_η et en Δ respectivement. Supposons que la projection $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ vérifie la condition (5.3.2). Alors :

(5.6.1) la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{m+q}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

dégénère. (NB. Ceci reste valable si, au lieu de supposer que X satisfait la condition (LV), on suppose seulement qu'une section hyperplane lisse Y y satisfait.)

5.6.2. Désignons par η le point générique de $\mathbb{P}^1$, par $\overline{\eta}$ le point générique géométrique, par $X_{\overline{\eta}}$ la fibre générique géométrique de ρ, et par π le groupe de Galois de $k(\overline{\eta})/k(\eta)$.

Pour $q \neq n-1$, on a des isomorphismes canoniques :

$$(5.6.2.1)\quad E_2^{0,q} \left(=H^0(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell)\right) \simeq H^q(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$(5.6.2.2)\quad E_2^{2,q} \left(=H^2(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell)\right) \simeq H^q(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1))$$

$$(5.6.2.3)\quad E_2^{p,q} \left(=H^p(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell)\right) = 0,\ p \neq 0,2 \quad .$$

Pour $q = n-1$, on a

$$(5.6.2.4)\quad E_2^{0,n-1} \left(=H^0(\mathbb{P}^1, R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell)\right) \simeq H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^\pi \simeq H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell) \ ,$$

$$(5.6.2.5)\quad E_2^{2,n-1} \left(=H^2(\mathbb{P}^1, R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell)\right) \simeq H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(-1))^\pi \simeq H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \quad .$$

(On trouvera la valeur manquante $E_2^{1,n-1}$ dans 5.7 ci-dessous).

Démonstration. Le théorème 1.1 s'applique, par (5.4.3), pour donner (5.6.1). Quant aux trois premières formules (5.6.2), elles résultent du fait que les $R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell$ pour $q \neq n-1$ sont constants (5.4) ; pour (5.6.2.3) il faut utiliser bien sûr que $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe. La première

égalité de (5.6.2.4) résulte de ce que $R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \nu_*\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell$, de sorte qu'on a $H^0(\mathbb{P}^1, R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \simeq H^0(U, \nu^*R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell)$, et de ce que $\nu^*R^{n-1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ est un faisceau "constant tordu" sur U, donc équivalent au π-module $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$. La deuxième égalité de (5.6.2.4) résulte de la dégénérescence, compte tenu de 5.1.6.

Passons à (5.6.2.5). Désignons par $F^\cdot$ la filtration définie sur $H^\cdot(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ par la suite spectrale. Par dégénérescence, $F^2 H^{n+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{2,n-1}$, et $gr^1 H^{n+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = E_2^{1,n} = 0$ (5.6.2.3), de sorte que (cf. 5.1.0)

$$(5.6.3) \qquad E_2^{2,n-1} = F^1 H^{n+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Ker}(H^{n+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, R^{n+1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell)$$

$$(\text{par (A)}) = \mathrm{Ker}(k^* : H^{n+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{n+1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)) \quad .$$

Par (5.1.2), k^* se récrit

$$(5.6.4) \qquad H^{n+1}(X, \mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-1}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h_*} H^{n+1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \quad ,$$

et, par (5.2.2.3) se récrit encore

$$(5.6.5) \quad \mathrm{Prim}^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(-1) \oplus H^{n-3}(X, \mathbb{Q}_\ell(-2)) \oplus H^{n-1}(\Delta, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*L+m^*L^2h_*} H^{n+1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell$$

Or, la flèche

$$H^{n-3}(X, \mathbb{Q}_\ell(-2) \xrightarrow{m^*L^2} H^{n+1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un isomorphisme, par (LV), car $m^*L_X^2 = L_{X_{\overline{\eta}}}^2 \cdot m^*$ (cf.(5.2.4) et (5.2.5)). Donc le noyau de (5.6.8) s'identifie (par $pr_1 \oplus pr_3$) à

$\mathrm{Prim}^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \oplus H^{n-1}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1))$. Par (LV),

$H^{n-1}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \xleftarrow[\sim]{L} H^{n-3}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-2)) \xleftarrow{\sim} H^{n-3}(X,\mathbb{Q}_\ell(-2))$, la dernière par Lefschetz faible. Par (5.2.2.3), on a donc

$$E_2^{2,n-1} \simeq H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \quad , \tag{5.6.6}$$

et l'autre égalité de (5.6.2.5) se déduit en "tordant" (5.6.2.4).

Remarque 5.6.7. On peut démontrer (5.6.1) sous des hypothèses nettement plus faibles, comme DELIGNE m'a expliqué:

Théorème 5.6.8. Soient X lisse de dimension n sur un corps k algébriquement clos, et

$$\rho : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$$

un morphisme projectif, dont la fibre générique est lisse. Supposons que :

(5.6.8.1) la fibre générique géométrique, munie de la restriction du module relativement ample $\mathcal{O}_X(1)$, satisfait à la condition (LV);

(5.6.8.2) les flèches (5.3.2) sont des isomorphismes pour $i \neq n$, et sont surjectives pour $i = n$ (condition satisfaite en particulier si ρ provient d'un pinceau de Lefschetz (cf. 5.3.4)). Alors, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} : H^p(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{Q}_\ell)$$

dégénère.

Remarque : Le même théorème vaut, avec la même démonstration, pour $\mathbb{P}^1_k$ remplacé par une courbe projective lisse irréductible quelconque.

Démonstration. Nous allons identifier, pour la démonstration, le faisceau $\mathbb{Q}_\ell(1)$ à $\mathbb{Q}_\ell$ (possible car on a pris k algébriquement clos). On peut évidemment supposer X connexe, et ρ surjectif, donc plat, à fibres de dimension n-1. Désignons par

$$\xi_X \in H^2(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

la première classe de Chern de $\underline{O}_X(1)$. Soit

$$\nu : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

l'inclusion d'un ouvert de lissité de ρ. Par 5.6.8.1 et 5.2.6, les flèches de cup-produit

$$\xi_X^i : \nu^* R^{n-1-i}\rho_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \nu^* R^{n-1+i}\rho_* \mathbb{Q}_\ell$$

sont des isomorphismes, pour $i \geq 1$, de sorte que, en appliquant le foncteur ν_*, on trouve des isomorphismes (compte tenu de 5.6.8.2) pour $i \geq 2$

$$(5.6.8.3) \qquad \xi_X^i : R^{n-1-i}\rho_* \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R^{n-1+i}\rho_* \mathbb{Q}_\ell ,$$

et, pour $i = 1$, un isomorphisme

$$(5.6.8.4) \qquad \xi_X : R^{n-2}\rho_* \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \nu_* \nu^* R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell .$$

Cette dernière flèche se factorise en

$$(5.6.8.5) \qquad R^{n-2}\rho_* \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\xi_X} R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\text{flèche d'adjonction}} \nu_* \nu^* R^n \rho_* \mathbb{Q}_\ell ,$$

de sorte qu'on a une décomposition canonique

$$(5.6.8.6)\quad R^n\rho_*\mathbb{Q}_\ell \xleftarrow[\sim]{\xi_X+\mathrm{ind}} R^{n-2}\rho_*\mathbb{Q}_\ell \oplus \mathrm{Local}^n\mathbb{Q}_\ell$$

où l'on a posé

$$(5.6.8.7)\quad \mathrm{Local}^n\mathbb{Q}_\ell = \mathrm{Ker}(R^n\rho_*\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \nu_*\nu^*R^n\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \quad .$$

On remarque que le faisceau $\mathrm{Local}^n\mathbb{Q}_\ell$ est concentré aux points de $\mathbb{P}^1$ où la fibre de ρ n'est pas lisse, de sorte que, compte tenu encore de (5.6.8.3), on trouve

$$(5.6.8.8)\quad H^j(\mathbb{P}^1, R^{n-2-i}\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow[\sim]{\xi_X} H^j(\mathbb{P}^1, R^{n-1+i}\mathbb{Q}_\ell) \quad \text{si } i,j \geq 1 \ .$$

Démontrons maintenant la dégénérescence. Compte tenu de ce que $E_2^{p,q} = 0$ sauf pour $p = 0, 1, 2$, il suffit de prouver que les opérations

$$d_2 : H^0(\mathbb{P}^1, R^i\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1, R^{i-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell)$$

sont nulles. Pour $q \leq n-1$, posons

$$(5.6.8.9)\quad \mathrm{Prim}(E_2^{p,q}) = \mathrm{Ker}(\xi_X^{n-q} : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p,2n-q}) \quad .$$

Grâce à (5.6.8.3) et (5.6.8.6), impliquant l'<u>injectivité</u> de $\xi_X : H^p(\mathbb{P}^1, R^{n-2}\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^1, R^1\rho_*\mathbb{Q}_\ell)$, pour $q \leq n-1$, on a

$$(5.6.8.10)\quad E_2^{p,q} \xleftarrow[\sim]{1+\xi_X+\xi_X^2+\ldots} \mathrm{Prim}\,(E_2^{p,q}) \oplus \mathrm{Prim}(E_2^{p,q-2}) \oplus \mathrm{Prim}(E_2^{p,q-4}) \ .$$

Pour voir qu'on a

$$d_2^{p,q} = 0 \quad \text{pour } q \leq n-1 \ ,$$

remarquons simplement que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}(E_2^{p,q}) & \xrightarrow{\xi_X^{n-q}=0} & E_2^{p,2n-q} \\ \downarrow{\scriptstyle d_2^{p,q}} & & \downarrow{\scriptstyle d_2^{p,2n-q}} \\ E_2^{p+2,q-1} & \xrightarrow[\sim]{\xi_X^{n-1-(q-1)}} & E_2^{p+2,2n-q-1} \end{array}$$

(la flèche du bas étant un isomorphisme grâce à (5.6.8.8)), entraîne que $d_2^{p,q}$ tue $\mathrm{Prim}(E_2^{p,q})$ pour $q \leq n-1$, et donc, par (5.6.8.10), que d_2 tue $E_2^{p,q}$ pour $q \leq n-1$. Par (5.6.8.3), ceci implique aussi que d_2 tue $E_2^{p,q}$ pour $q \geq n+1$. Donc il reste à prouver que l'homomorphisme

$$d_2^{0,n} : E_2^{0,n} \longrightarrow E_2^{2,n-1}$$

est nul, ou, ce qui revient au même, que

(5.6.8.12) $$\dim E_3^{2,n-1} = \dim E_2^{2,n-1} \ .$$

Nous avons déjà démontré qu'on a

(5.6.8.13) $$\dim E_2^{p,q} = \dim E_3^{p,q} \quad \text{pour } (p,q) \neq (0,n), (2,n-1)$$

et, pour une raison de degrés,

(5.6.8.14) $$E_3^{p,q} = E_\infty^{p,q} \quad \text{pour } \underline{\text{tout}} \text{ couple } (p,q) \ .$$

Par(5.6.8.14), on a

$$b_i(X) = \dim H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = \sum_{p+q=i} \dim E_3^{p,q} \quad ,$$

et, compte tenu de (5.6.8.13), on a

(5.6.8.15) $$b_{n-1}(X) = \dim E_2^{c,n-1} + \dim E_2^{1,n-2} + \dim_2^{2,n-3}$$

et

(5.6.8.16) $$b_{n+1}(X) = \dim E_2^{0,n+1} + \dim E_2^{1,n} + \dim E_3^{2,n-1} \quad .$$

Par la dualité de Poincaré, on a

(5.6.8.17) $$b_{n-1}(X) = b_{n+1}(X) \quad .$$

Remarquons d'abord que, par (5.6.8.8), on a

$$\dim E_2^{1,n} = \dim E_2^{1,n-2} \quad ,$$

de sorte que (par 5.6.8.17) la démonstration de (5.6.8.12) est terminée une fois connue

(5.6.8.18) $$\dim E_2^{2,n-3} = \dim E_2^{0,n+1} \quad ,$$

(5.6.8.19) $$\dim E_2^{0,n-1} = \dim E_2^{2,n-1} \quad .$$

Or, ces deux formules résultent de (5.6.8.2) et la dualité de Poincaré pour les fibres lisses de ρ, compte tenu du lemme suivant, appliqué à $\mathbb{P}^1$ et aux faisceaux $R^{n-3}\rho_*\mathbb{Q}_\ell$ et $R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell$.

Lemme 5.6.9. (cf. SGA 5 I § 5 et SGA 4 XVIII). Soit D une courbe propre, lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos. Désignons par $i : \eta \longrightarrow D$ l'inclusion du point générique, et par F un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur D tel que $F \xrightarrow{\sim} i_* i^* F$. Alors

$$H^2(D,F) \simeq H^0(D,\check{F}(-1))^\vee ,$$

où $\check{F} \simeq i_*((i^*F)^\vee)$.

Corollaire 5.6.10. (Utilise Picard-Lefschetz). Soit $\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la "fibration" provenant d'un pinceau de Lefschetz, et supposons que les fibres lisses satisfont à la condition (LV). Alors

(5.6.10.1) $H^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)^\pi = \mathrm{Im}\,(H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell))$.

Démonstration. Par 5.3.4 (qui utilise la formule de Picard-Lefschetz), 5.6.8 s'applique, et donne

$$H^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)^\pi = \text{Image } H^i(\tilde{X},\mathbb{Q}_\ell) .$$

Il reste à voir que $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ et $H^i(\tilde{X},\mathbb{Q}_\ell)$ ont la même image dans $H^i(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$. Or, ceci est vrai pour $i \leq n-1$ par 5.1.6, et pour $i \geq n$ par 5.2.5.

Passons maintenant au calcul le plus important :

Théorème 5.7. Sous les hypothèses de 5.6, posant

$E^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(j))$ = orthogonal dans $H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(j))$ de l'image de $H^{n-2}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$

(partie "évanescente" de la cohomologie de Δ, cf. 5.4.4), on a une décomposition en somme directe (cf. 4.2)

(5.7.1) $E_2^{1,n-1} = H^1(\mathbb{P}^1, R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \xleftarrow[f^*+i_*g^*]{} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \oplus E^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1))$.

Démonstration. Par dégénérescence on a

$$E_2^{1,n-1} \simeq F^1 H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \Big/ F^{2}H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \quad .$$

On a par (A) :

(5.7.2) $F^1 H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Ker}\,(k^* : H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell))$,

(par 5.1.2) $\simeq \mathrm{Ker}: (H^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+h^*} H^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell))$.

Par (LV), k^* se récrit encore

(5.7.3) $\mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \oplus H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*+m^*L+h_*} H^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$,

et la flèche du milieu

(5.7.4) $H^{n-2}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m^*L} H^n(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$

est un isomorphisme (cf. 5.2.3 et (5.2.2.3)), de sorte que, désignant par

(5.7.5) $\wp : H^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell)$

la projection sur la partie primitive, on a

(5.7.6) $F^1 H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow[\wp f_* \oplus (-g_* 2^*)]{\sim} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1))$.

Par (5.6.2.2) et dégénérescence, on a

(5.7.7) $F^2 H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \simeq E_2^{2,n-2} \simeq H^{n-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(-1))$.

D'autre part, l'inclusion de $F^2H^N(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) = H^{n-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(-1))$ dans $H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell)$ est par la flèche k_* de Gysin. (En toute riqueur, la flèche de Gysin n'est définie que comme une flèche

$$H^{i-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)) \longrightarrow H^i(X\times_k k(\overline{\eta}),\mathbb{Q}_\ell) \quad ,$$

mais compte tenu de ce qu'on a un isomorphisme canonique (SGA 4 XII 5.4) pour tout corps K/k algébriquement clos

$$H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i(X\otimes_k K,\mathbb{Q}_\ell) \quad ,$$

nous espérons que le lecteur nous permettra de tels abus.) D'après (5.1.3), la flèche de Gysin s'exprime par

$$(5.7.8) \qquad H^{n-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(-1)) \xrightarrow{m_* \oplus(-h^*)} H^n(X,\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \quad .$$

Par Lefschetz faible,

$$m_* H^{n-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(-1)) = m_*m^* H^{n-2}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1)) = L_X H^{n-2}(X,\mathbb{Q}_\ell(-1))$$

est l'orthogonal de la partie primitive, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$(5.7.9) \qquad \begin{array}{ccc} F^2H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) & \hookrightarrow & F^1H^n(\widetilde{X},\mathbb{Q}_\ell) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle k_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pf}_*\oplus -g_*i^*} \\ H^{n-2}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(-1)) & \xrightarrow{0\oplus h^*} & \mathrm{Prim}(X,\mathbb{Q}_\ell)\oplus H^{n-2}(\Delta,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \end{array}$$

ce qui donne bien (5.7.1), cqfd.

Remarque 5.7.10. Dans 5.7, l'hypothèse (A) peut-être remplacée par celle, plus faible, que pour q = n, les flèches

$$H^q(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, R^q\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \tag{5.7.11}$$

et

$$H^q(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^q(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \tag{5.7.12}$$

aient même noyau, comme le montre notre démonstration. En l'absence de cette condition, la conclusion peut tomber en défaut, cf. 5.9.

5.8. L'homomorphisme de Griffiths.

5.8.1. Soit f: T $\longrightarrow$ S un morphisme de schémas. La suite spectrale de Leray définit une filtration (F^i) sur les $H^*(T, \mathbb{Q}_\ell(j))$. On définit

$$\mathrm{Prim}^*(T/S, \mathbb{Q}_\ell(j)) = F^1H^*(T, \mathbb{Q}_\ell(j)). \tag{5.8.1.1}$$

Grâce au fait que la suite spectrale de Leray est contenu dans le "premier quadrant", on a

$$E_\infty^{0,\cdot} \hookrightarrow E_2^{0,\cdot} \tag{5.8.1.2}$$

de sorte que

$$\mathrm{Prim}^*(T_{/S}, \mathbb{Q}_\ell(j) = \mathrm{Ker}\,(H^*(T, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^0(S, R^*f_*\mathbb{Q}_\ell(j)) . \tag{5.8.1.3}$$

Pour la même raison, on a

$$E_\infty^{1,\cdot} \hookrightarrow E_2^{1,\cdot} . \tag{5.8.1.4}$$

(-1))

Le composé

$$(5.8.1.5)\quad \mathrm{Prim}^i(T/S,\mathbb{Q}_\ell(j)) = F^1H^i(T,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow \mathrm{gr}^1H^i(T,\mathbb{Q}_\ell(j)) = E_\infty^{1,i-1}$$

$$\downarrow$$

$$H^1(S,R^{i-1}_{f_*}\mathbb{Q}_\ell(j)) = E_2^{1,i-1}$$

sera dénoté

$$(5.8.1.6)\qquad U^i : \mathrm{Prim}(T_{/S},\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(S,R^{\cdot-1}f_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \quad .$$

5.8.2. Soit maintenant X projective, lisse, et irréductible, $D = \{H_\tau\}$ un pinceau d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X. Désignons par $U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$ un ouvert de lissité non vide de la projection $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ et soit $\widetilde{X}|U = \widetilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} U$. On a le diagramme commutatif

$$(5.8.2.1)\qquad \begin{array}{ccccc} & & \widetilde{X} & \xleftarrow{\alpha} & \widetilde{X}|U \\ & \swarrow^{f} & & & \\ X & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho|U} \\ & & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow[\nu]{} & U \end{array} \quad .$$

Le morphisme $\rho|U : \widetilde{X}|U \longrightarrow U$ étant propre et lisse, on a, par le théorème de la spécialisation de la cohomologie (SGA 4 XVI 2.2)

(5.8.2.2) $\quad \mathrm{Prim}^{\cdot}(\widetilde{X}|U/U, \mathbb{Q}_\ell(j)) = \mathrm{Ker}(H^{\cdot}(\widetilde{X}|U, \mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^{\cdot}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(j)))$,

donc, d'après (5.2.3.1), on a

Proposition 5.8.2.3. Sous les hypothèses (5.8.2), pour $x \in H^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j))$, on a l'équivalence

(5.8.2.4) $\quad x \in \mathrm{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \Longleftrightarrow \alpha^* f^*(x) \in \mathrm{Prim}^n(\widetilde{X}|U/U, \mathbb{Q}_\ell(j))$.

Si de plus ρ vérifie l'hypothèse (A) de 5.3, on a

(5.8.2.5) $\quad x \in \mathrm{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \Longleftrightarrow f^*(x) \in \mathrm{Prim}^n(\mathbb{X}/\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell(j))$.

Démonstration. (5.8.2.4) est prouvé. Quant à (5.8.2.5), l'hypothèse (A) implique que $H^0(\mathbb{P}^1, R^n\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow[\sim]{\nu^*} H^0(U, \nu^* R^n\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j))$, donc [f*(x) est primitif rel. à $\mathbb{P}^1\alpha$] $\Longrightarrow \alpha^* f^*(\alpha)$ l'est rel. à U .

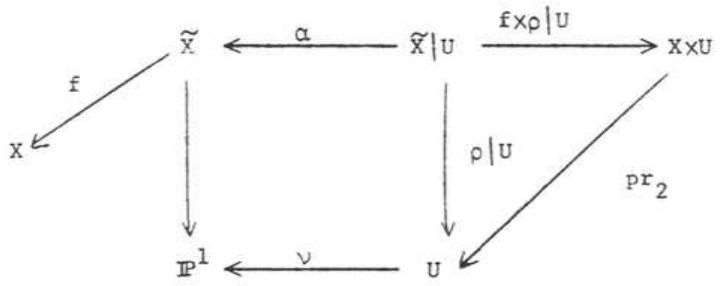
Définition 5.8.3. Dans la situation 5.8.2, l'homomorphisme composé

(5.8.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\alpha^* f^*} & \mathrm{Prim}^n(\widetilde{X}|U/U, \mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & \searrow^{\mathrm{Grif}} & \downarrow \gamma \\ & & H^1(U, \nu^* R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array}$$

s'appelle l'homomorphisme de Griffiths (pour X, relatif au pinceau donné D).

Ajoutons au diagramme (5.8.2.1) la famille constante au-dessus de U, de fibre X

(5.8.3.2)



Théorème 5.8.4. Supposons que X vérifie (LV) (5.2.2), et que ρ vérifie l'hypothèse (A) (5.3). Alors pour tout $U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$, ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ, l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe", qui est, par définition, le composé

$$\text{(5.8.4.1)} \qquad \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\mathrm{Grif}} H^1(U,\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow \frac{H^1(U,\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j))}{(f\times\rho|U)^*H^1(U,H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_U)}$$

$$\simeq H^1(U,E^{n-1}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j))$$

est injectif.

Démonstration. Par (5.5.1), on a, au-dessus de $\mathbb{P}^1$,

(5.8.4.2) $$R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \simeq H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_{\mathbb{P}^1} \oplus E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) ,$$

et au-dessus de U, on a

(5.8.4.3) $$\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \simeq H^{n-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j))_U \oplus \nu^*E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) ,$$

ce qui permet de récrire (5.8.4.1) comme indiqué :

(5.8.4.4) $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\mathrm{Grif}} & H^1(U,\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(U,\nu^*E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array} .$$

D'après (5.7.1), la flèche (qui n'est défini que grâce à l'hypothèse (A))

(5.8.4.5) $$u : \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1,R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell)$$

est injective. La décomposition (5.8.4.2), compte tenu de ce que $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe, donne

(5.8.4.6) $$H^1(\mathbb{P}^1,R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell) \simeq H^1(\mathbb{P}^1,E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) ,$$

de sorte qu'on peut compléter (5.8.4.4) en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\quad\mathrm{Grif}\quad} & H^1(U,\nu^*R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \\ \big\downarrow u & & \big\downarrow \\ H^1(\mathbb{P}^1,E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\quad\nu^*\quad} & H^1(U,\nu^*E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array} \tag{5.8.4.7}$$

Il suffit maintenant de voir que la flèche en bas est injective, ce qui résulte du fait

$$E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \simeq \nu_*\nu^*E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) \tag{5.8.4.8}$$

par le lemme (bien connu !) suivant :

Lemme 5.8.5. Soient $\nu : A \longrightarrow B$ un morphisme de topos, et soit F un faisceau sur A. Alors la flèche canonique

$$H^1(B,\nu_*F) \longrightarrow H^1(A,F) \tag{5.8.5.1}$$

est injective.

Démonstration. Dans une suite spectrale du premier quadrant, on a

$$E_2^{1,0} \simeq E_\infty^{1,0} \quad . \tag{5.8.5.2}$$

Donc pour la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(B,R^q\nu_*F) \Longrightarrow H^{p+q}(A,F)$$

on a

(5.8.5.3) $$E_2^{1,0} = H^1(B,\nu_*F) \simeq E_\infty^{1,0} = F^1H^1(A,F) \quad .$$

Prenant $F = \nu^*E$, E un faisceau sur B, on trouve

(5.8.5.4) $$H^1(B, \nu_*\nu^*E) \hookrightarrow H^1(A,\nu^*E) \quad .$$

5.8.6. Soit $L/k(\eta)$ une extension finie du corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$, et posons

(5.8.6.1) $$S = \text{le normalisé de } \mathbb{P}^1 \text{ dans } L \quad .$$

Faisons le changement de base $S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dans la situation (5.8.3.2)

(5.8.6.1 bis)
$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{X} & \xleftarrow{\alpha_S} & \widetilde{X}_S \\ & \swarrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_S} \\ X & & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi} & S \end{array} \quad .$$

Pour tout ouvert $V \xhookrightarrow{\mu} S$ au-dessus duquel ρ_S soit lisse, on obtient après le changement de base $V \xrightarrow{\pi\mu} \mathbb{P}^1$ dans (5.8.3.2),

(5.8.6.2)
$$\begin{array}{ccccccc} & & \widetilde{X} & \xleftarrow{\alpha_V} & \widetilde{X}_V & & \\ & \swarrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_V} & \searrow^{f\times\rho_V} & \\ X & & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi\mu} & V & & X\times V \\ & & & & & \searrow_{pr_2} & \end{array} \quad ,$$

et on a encore (cf. (5.8.2.3))

(5.8.6.3) $\quad (\alpha_V f)^* \operatorname{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \subset \operatorname{Prim}^n(\widetilde{X}_V/_V , \mathbb{Q}_\ell(j))$,

de sorte qu'on peut parler encore de l'homomorphisme de Griffiths

(5.8.6.4) $\quad \operatorname{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(V, R^{n-1}\rho_{V_*}\mathbb{Q}_\ell(j))$.

Corollaire 5.8.7. Avec les notations précédentes, et sous les hypothèses de 5.8.4, l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe", i.e. le composé

(5.8.7.1) $\quad \operatorname{Prim}^n(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) \xrightarrow{\text{Grif}} H^1(V, R^{n-1}\rho_{V_*}\mathbb{Q}_\ell(j))$

$$\downarrow$$

$$H^1(V, (\pi\,\mu)_* E^{n-1}\rho_*(\mathbb{Q}_\ell(j))) \xrightarrow{\simeq} \frac{H^1(V, R^{n-1}\rho_{V_*}\mathbb{Q}_\ell(j))}{(f\times\rho_V)^* H^1(V, H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(j))_V)}$$

est injectif.

Démonstration. Par le théorème de la spécialisation pour la cohomologie, on a

$$R^{n-1}\rho_{V_*}\mathbb{Q}_\ell(j)) \quad = \quad (\pi\,\mu)^* R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$$

de sorte que par la décomposition (5.8.4.2), (5.8.7.1) se récrit bien comme indiqué

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \xrightarrow{\text{Grif}} & H^1(V,(\pi\,\mu)_* R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(V,(\pi\,\mu)_*\, E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array} .$$

Il suffit donc de démontrer l'injectivité de

$$\mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(V,\mu^*\,\pi^*\,E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j))$$

pour $V \xhookrightarrow{\mu} S$ arbitrairement petit. On est ramené au cas

$$\begin{cases} U \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1 & \text{un ouvert de lissité de } \rho \\ V \xrightarrow{\pi_\nu} U & \text{le normalisé de U dans L} \end{cases} .$$

Du diagramme commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \xhookrightarrow{\mu} & S \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xhookrightarrow{\nu} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

on conclut que

$$\mu^*\pi^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j) = \pi_U^*\nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell$$

de sorte que (5.8.7.3) se factorise

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^n(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) & \longrightarrow & H^1(U,\nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \\ & & \Big\downarrow \pi_U^* \\ & & H^1(V,\pi_U^*\nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \end{array} .$$

Or, il suffit, grâce à (5.8.4), de vérifier que

$$\pi_U^* : H^1(U,\nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)) \longrightarrow H^1(V,\pi_U^*\nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j))$$

est injectif. Comme $\pi_U : V \longrightarrow U$ est fini et plat, la théorie de la trace [SGA 4 XVII 6.2] nous fournit, pour tout $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau F sur U (p.ex. $F = \nu^* E^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell(j)$) une application

$$\mathrm{tr}_{\pi_U} : H^1(V,\pi_U^*) \longrightarrow H^1(U,F(j))$$

qui vérifie

$$\mathrm{tr}_\pi \circ \pi^* = \deg(\pi_U).\mathrm{id} ,$$

ce qui implique l'injectivité de $H^*(U,F) \longrightarrow H^*(V,\pi_U^*F)$, et achève la démonstration.

5.9. Un exemple où l'hypothèse (A) n'est pas vérifiée.

Soit X une surface quadratique lisse dans $\mathbb{P}^3$. Alors X vérifie (LV) (5.2.4). Prenons un pinceau (de Lefschetz, si l'on veut) d'hyperplans dont l'élément générique et l'axe coupent transversalement X. Alors (comme m'a fait observer Deligne) la projection $\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ne vérifie pas (A). En effet, $R^2\rho_*\mathbb{Q}_\ell$ n'est pas constant, car les fibres singulières sont des courbes coniques singulières, donc sont réductibles, et pour un pinceau de Lefschetz, sont chacun la réunion de deux droites qui se coupent en un point (c'est la définition d'un pinceau de Lefschetz dans ce cas simple). Donc

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(H^2 \text{ (fibre sing., } \mathbb{Q}_\ell)\right) = 2$$

bien que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \left(H^2 \text{ (fibre lisse, } \mathbb{Q}_\ell)\right) = 1 \quad .$$

De plus, la conclusion du théorème 5.8.4 est ici fausse. Désignons par $U \xhookrightarrow{\nu} \mathbb{P}^1$ un ouvert de lissité $\neq \emptyset$ de ρ. Comme les fibres de ρ au-dessus de U sont des courbes lisses de genre zéro, on a

$$\nu^*R^1\rho_*\mathbb{Q}_\ell = 0$$

et donc

$$H^1(U, \nu^*R^1\rho_*\mathbb{Q}_\ell) = 0 \quad ,$$

de sorte que l'homomorphisme de Griffiths

$$\mathrm{Prim}^2(X,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\quad \mathrm{Grif} \quad} H^1(U, v^*R^1\rho_*\mathbb{Q}_\ell)$$

est nul. Mais sur une surface quadratique, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}\left(\mathrm{Prim}^2(X,\mathbb{Q}_\ell)\right) = 1 \quad .$$

On voit de même que la conclusion de 5.7 est ici en défaut.

6. Application de la théorie locale des cycles evanescents (Picard-Lefschetz).

Proposition 6.1. Désignons par Z une hypersurface dans l'espace projectif $\mathbb{P}^r_k$, $r \geq 2$, k étant un corps algébriquement clos. Soit

$$i_o : D_o \hookrightarrow \mathbb{P}^r$$

l'inclusion d'une droite qui ne coupe Z qu'en son ouvert de lissité, et le coupe transversalement. Choissisons un point géométrique $\overline{a}$ de $D_o - D_o \cap Z$, et désignons par

$$\pi_1^{\mathrm{mod}}(D_o - D_o \cap Z, \overline{a})$$

le quotient de $\pi_1(D_o - D_o \cap Z, \overline{a})$ qui classifie les revêtements étales de $D_o - D_o \cap Z$ qui sont modérément ramifiés en tout point de $D_o \cap Z$. Alors

6.1.1. L'homomorphisme canonique

(6.1.1.1) $\quad i_{o_*} : \pi_1^{mod}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a}) \longrightarrow \pi_1^{mod}(\mathbb{P}^r - Z, \bar{a})$

est surjectif.

6.1.2. Chaque choix d'un point géométrique $\bar{x}_o \in D_o \cap Z$ et d'un "chemin" dans D_o entre $\bar{x}_o$ et $\bar{a}$ détermine un homomorphisme

(6.1.2.1) $\quad \prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{mod}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a})$

dont l'image est "le" groupe d'inertie en $\bar{x}_o$. Prenant le composé de ce morphisme et de i_{o_*}, on trouve un homomorphisme

(6.1.2.2) $\quad \prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{mod}(\mathbb{P}^r - Z)$.

Si Z est irréductible, tous ces homomorphismes sont conjugués entre eux.

Démonstration. Désignons par T le sous-schéma de la grassmanniene formée des droites dans $\mathbb{P}^r$ qui

(i) passent par $\bar{a}$

(ii) ne coupent Z qu'en son ouvert de lissité, et l'y coupent transversalement, par η son point générique, et par $i_\eta : D_\eta \longrightarrow \mathbb{P}^r \otimes_k k(\eta)$ la droite correspondante (qui est donc une droite "joingnant $\bar{a}$ au point générique de $\mathbb{P}^r_k$"). Choisissons aussi un point géométrique $\bar{\eta}$ au-dessus de η, et notons par $D_{\bar{\eta}}$ la droite "géométrique" correspondante. Soit o le point T correspondant à la droite donnée D_o .

D'après (SGA 1, XIII 2.8), il existe un homomorphisme de spécialisation (dépendant d'un chemin entre $\bar{\eta}$ et 0 dans T, donc défini à conjugaison près)

(6.1.3) $$\pi_1^{mod}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z), \bar{a}) \xrightarrow{\bar{\eta} \longrightarrow o} \pi_1^{mod}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a})$$

tel que l'on ait :

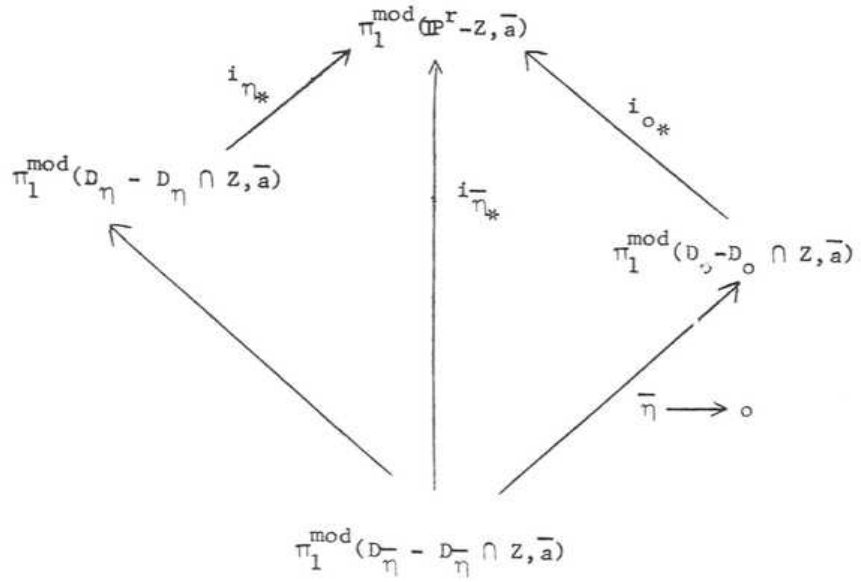
6.1.4. Les homomorphisme (6.1.2.1) de monodromie locale

$$\prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1(D_o - D_o \cap Z, \bar{a})$$

s'obtiennent en prenant le composé de la flèche de spécialisation (6.1.3) avec les homomorphismes de monodromie locale pour $D_{\bar{\eta}}$,

(6.1.4.1) $$\prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{mod}(D_{\bar{\eta}} - D_{\bar{\eta}} \cap Z, \bar{a}) \xrightarrow{\bar{\eta} \longrightarrow o} \pi_1^{mod}(D_o - D_o \cap Z, \bar{a}) \ ;$$

(6.1.5) le diagramme suivant est commutatif



Admettons ceci, et prouvons d'abord 6.1.1. Or, par la commutativité de 6.1.5, il suffit de démontrer que l'homomorphisme

$$i_{\overline{\eta}*} : \pi_1^{mod}(D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z, \overline{a}) \longrightarrow \pi_1^{mod}(\mathbb{P}^r - Z, \overline{a})$$

est surjectif, et pour ceci il suffit de démontrer que l'homomorphisme analogue des π_1 immodérés

$$(6.1.6) \qquad i_{\overline{\eta}} : \pi_1(D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z, \overline{a}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^r - Z, \overline{a})$$

est surjectif, i.e. que pour tout revêtement étale $E \longrightarrow \mathbb{P}^r - Z$, avec E connexe (et donc irréductible, $\mathbb{P}^r - Z$ étant lisse, donc unibranche (EGA IV 18.10.3)), son image réciproque $E_{\overline{\eta}} = E \times_{\mathbb{P}^r - Z} (D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z)$ au-dessus de $D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z$ reste géométriquement irréductible. Pour ceci, il suffit d'utiliser la variante suivante du théorème de Bertini (EGA V ....) (pour la flèche composé $E \longrightarrow \mathbb{P}^r - Z \hookrightarrow \mathbb{P}^r$, et $s = 1$):

6.1.6.1. Théorème de Bertini : Soit k un corps, $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}^r_k$, et $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ un morphisme non constant, où X est un schéma algébrique géométriquement irréductible. Pour chaque entier $s < \dim \overline{f(X)}$, désignons par L_t le sous-espace linéaire générique de codimension s de $\mathbb{P}^r$. Alors $X_t = f^{-1}(L_t)$ est géométriquement irréductible.

Etablissons maintenant 6.1.2. D'après 6.1.4, et la commutativité de (6.1.5), il suffit de démontrer que tous les homomorphismes de monodromie locale (6.1.3) pour $D_{\overline{\eta}}$

(6.1.7.1) $$\prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{mod}(D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z, \overline{a})$$

deviennent conjugués après la composition avec l'homomorphisme

(6.1.7.2) $$\pi_1^{mod}(D_{\overline{\eta}} - D_{\overline{\eta}} \cap Z, \overline{a}) \longrightarrow \pi_1^{mod}(D_\eta - D_\eta \cap Z, \overline{a}) \quad .$$

Pour prouver ceci, remarquons que pour tout K fini et galoisien sur $k(\eta)$, $k(\eta) \subset K \subset K(\overline{\eta})$, le schéma

$$D_K \overset{def}{=\!=} D_\eta \times_{k(\eta)} K$$

est un revêtement étale de D_η, de sorte que $D_K - D_K \cap Z$ est un revêtement modéré de $D_\eta - D_\eta \cap Z$, d'où on déduit une action de $\pi_1^{mod}(D_{\overline{\eta}} - D_\eta \cap Z, \overline{a})$ sur le schéma $D_K \cap Z$. Nous prenons K suffisament grand pour que tous les points de $D_K \cap Z$ soient K-rationnels, ceci étant possible car par hypothèse le schéma $D_\eta \cap Z$ est <u>étale</u> sur $k(\eta)$.

Il reste à démontrer que le groupe $\pi_1^{mod}(D_\eta - D_\eta \cap Z, \overline{a})$ agit de façon <u>transitive</u> sur les points de $D_K \cap Z$, pour établir la conjugaison des homomorphismes composés d'inertie locale

$$\prod_{\ell \neq car(k)} \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \pi_1^{mod}(D_\eta - D_\eta \cap Z, \overline{a})$$

pour les divers points de $D_K \cap Z$. Or, l'action sur $D_K \cap Z$ de $\pi_1^{mod}(D_\eta - D_\eta \cap Z, \overline{a})$ se factorise par le quotient canonique

$$\pi_1^{mod}(D_\eta - D_\eta \cap Z, \overline{a}) \longrightarrow \pi_1(\eta, \overline{\eta}) = Gal(/k(\eta) \quad ,$$

et l'action de $Gal(/k(\eta))$ sur $K_K \cap Z$ est celle qui est compatible avec l'inclusion

$$D_K \cap Z \hookrightarrow \mathbb{P}^r_k \times_k K \quad ,$$

où $Gal(/k(\eta))$ n'agit sur $\mathbb{P}^r_k \times_k K$ que via le deuxième facteur. Ceci posé, on voit que l'énoncé voulu équivaut à ce que le schéma $D_\eta \cap Z$ n'a qu'un point (i.e. que c'est le spectre d'un corps). Or, en termes terre à terre, ceci n'est autre que le fait suivant (du style Bertini) (où l'on prend pour Z une équation affine $F = 0$, et on suppose que le point $\bar{a}$ est l'origine) :

Fait 6.1.8. Soit k un corps algébriquement clos, $r \geq 2$, et $F(X_1,\ldots,X_r) \in k[X_1,\ldots,X_r]$ un polynôme irréductible. Alors le polynôme

$$G(T) = F(X_1 T,\ldots,X_r T) \in k(X_1,\ldots,X_r)[T]$$

est irréductible (en tant que polynôme en T à coefficients dans $k(X_1,\ldots,X_r)$.

Ceci termine la démonstration de 6.1.2, cqfd.

Remarque 6.1.9. Une autre méthode de démonstration de 6.1.2, valable sous des conditions nettement plus générales, consisterait à s'assurer simplement d'une compatibilité générale pour les "homomorphismes de monodromie", disant que les homomorphismes composés de 6.1.2 sont conjugués de l'homomorphisme de monodromie relatif au point générique de Z (donc sont conjugués entre eux !).

Corollaire 6.1.10. Soit X une variété projective, lisse et connexe de dimension n sur un corps k algébriquement clos k. Supposons que $n = \dim X$ soit pair, ou que $\mathrm{card}(k) \neq 2$. Soit D un pinceau de Lefschetz pour X, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. Alors la représentation naturelle de $\pi_1(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$ sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise par $\pi_1^{mod}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$. Si cette représentation est non triviale, alors $D \cap \check{X} \neq \emptyset$ et le groupe d'inertie en tout point de $D \cap \check{X}$ agit non trivialement.

Démonstration. Si $\dim(\check{X}) \leq r-2$, alor $D \cap \check{X}$ est vide, et il n'y a rien à prouver, compte tenu que $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe. Sinon, $\check{X}$ est une hypersurface dans $\mathbb{P}^r$ (XVII, 3.1.4), et, par 3.2.10 et XVII 3.5, 6.1.1 s'applique (prenant $\check{X}$ pour Z, D pour D_o). Le fait que l'action de π_1 sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ soit modérée a été vue dans la théorie locale, avec la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4), rappelée plus bas. Compte tenu du fait (non trivial!) que $\pi_1^{mod}(D - D \cap \check{X}, \bar{\eta})$ est engendré par les groupes d'inertie en les différents points de $D \cap \check{X}$ (SGA 1 XIII 2.10), on a la conclusion voulue. Nous allons utiliser le résultat précédent pour étudier maintenant la condition (A) de (5.3.5). Rappelons d'abord le résultat suivant (XV 3.4), conséquence facile de la formule de Picard-Lefschetz :

Proposition 6.2. Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension n sur le corps algébriquement clos k. Désignons par D un pinceau de Lefschetz, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. Alors le pinceau D satisfait à la condition (A) si et seulement si le groupe d'inertie en tout point de $D \cap \check{X}$ agit non trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Théorème 6.3. Sous les hypothèses de 6.2, on a :

(6.3.1) Si n= dim X est impair, la condition (A) est vérifiée pour tout pinceau de Lefschetz pour X.

(6.3.2) Supposons que n = dim X soit pair, ou que car(k) $\neq$ 2. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) D ne satisfait pas à la condition (A) (5.3.5)

(ii) $\pi_1(D-D \cap \check{X})$ agit trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$, et $D \cap \check{X} \neq \emptyset$.

(iii) Il existe un point de $D \cap \check{X}$ dont le groupe d'inertie agit trivialement sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

(iv) Le faisceau $R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell$ est un faisceau constant sur D et $D \cap \check{X}$ est non vide.

(v) Le faisceau $R^{n-1}\rho_*\mathbb{Q}_\ell|U$ est un faisceau constant sur U (où U est un ouvert non vide D au-dessus duquel ρ soit lisse), et ρ n'est pas lisse.

(6.3.3) Si de plus X satisfait à la condition (LV) (5.2.2), ces conditions (i) -(v) sont aussi équivalentes à la condition :

(vi) la flèche de restriction

$$H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est surjective (donc un isomorphisme par "le théorème de Lefschetz faible").

Démonstration. L'assertion 6.3.1 résulte de XV 3.4.

Passons aux équivalences de 6.3.2 ; (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) par 6.2, (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) par 6.1.6, (ii) $\Longleftrightarrow$ (v) par tautologie, et (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) par 5.3.4. Enfin, si X satisfait à la condition (LV), 5.6.10 donne l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (vi), cqfd.

Remarque 6.3.4. On voit que la condition (A) ne dépend pas du choix du pinceau de Lefschetz D, mais seulement de l'immersion (de Lefschetz) $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ envisagée. C'est en effet clair par (6.3.1) si dim X est impair, et si dim X est pair, la condition (A) signifie aussi que le système local sur $\mathbb{P}^r - X$ formé des $H^{n-1}(X \cap H_s, Q_\ell)$ est constant, comme il résulte du critère (ii), et du fait que le système local envisagé est modérément ramifié en le point générique de $\check{X}$ et de la surjectivité (6.1.2).

Corollaire 6.4. Sous les hypothèses de 6.2, supposons que n = dim X est paire, ou que car(k) $\neq 2$ et que X satisfait à la condition (LV). Alors il existe un entier d_o tel que pour $d \geq d_o$, tout pinceau de

Lefschetz de sections de X par des hypersurfaces de degré d satisfait à la condition (A).

Démonstration. D'après l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (vi) de (6.3.2), il suffit de voir que, désignant par Y(d) une section hypersurface lisse de X de degré d, on a

(6.4.1) $\qquad \dim H^{n-1}(Y(d),\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \infty$ pour $d \longrightarrow \infty$.

En effet, on a le résultat précis suivant :

Lemme 6.4.2. Soit X une variété projective, lisse, et connexe de dimension $n \geq 1$ sur un corps algébriquement clos k, et désignons par Y(d) une section hypersurface de degré d. Alors il existe un polynôme $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ tel que

(6.4.2.1) $\quad f(T) = \deg(X)\, T^n +$ un polynôme de degré $\leq n-1$

(6.4.2.2) pour $d \geq 1$, $f(d) = \dim H^{n-1}(Y(d), \mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration. D'après (XVII 5.7.5), désignant par C(X) la classe de Chern totale de X, et par H la première classe de Chern d'un hyperplan, on a la formule suivante pour la caractéristique d'Euler-Poincaré de Y(d)

$$(6.4.2.3) \qquad \chi(Y(d)) = \int_X \frac{d\,H.C(X)}{1+dH} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} d^i \int_X H^i . C_{n-i} \quad .$$

On a, d'autre part, par dualité de Poincaré et Lefschetz faible

$$\chi(Y(d)) = (-1)^{n-1}\dim H^{n-1}(Y(d),\mathbb{Q}_\ell) + 2\sum_{i\geq 1}(-1)^{n-1-i}\dim H^{n-1-i}(X,\mathbb{Q}_\ell). \quad (6.4.2.4)$$

Mettant ensemble (6.4.2.3) et (6.4.2.4) donne le résultat voulu.

6.5. Un rappel sur la formule de Picard-Lefschetz (XV 3.4).

Soient S le spectre d'un anneau de valuation hensélien strict η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η, et s son point fermé. Soit

$$\rho : X \longrightarrow S$$

un morphisme propre, avec X un schéma régulier connexe de dimension n, tel que ρ est lisse en dehors d'un point x, point qui se trouve dans la fibre spéciale, et qui est une singularité quadratique ordinaire de la fibre spéciale.

Désignons par I le groupe d'inertie de S en s. On sait (XV 3.4) que I agit trivialement sur $H^i(X_{\bar{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$ pour $i \neq n-1$, et que son action sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$ est donnée par les formules suivantes :

6.5.1. Si $n = 2m+1$, alors I agit à travers un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (NB. si car.k $\neq 2$, il y a un seul tel quotient). Il existe un élément $\delta \in H^{n-1}(X_{\bar{\eta}},\mathbb{Q}_\ell(m))$, uniquement déterminé au signe près, qui s'appelle le cycle évanescent en le point s, tel qu'on ait

(6.5.1.1) $\delta.\delta = (-1)^m 2$ dans $H^{2n-2}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(n-1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell$,

(6.5.2.2) l'élément non trivial σ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $H^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par la symétrie

$$\sigma\, x = x - (-1)^m (x\delta)\delta \quad .$$

[L'élément $x.\delta$ est dans $H^{2n-2}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(-m)$, donc le produit $(x.\delta)\delta$ définit un élément de $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.]

6.5.2. Si $n = 2m + 2$, alors I agit à travers son quotient canonique $\mathbb{Z}_\ell(1)$. Il existe un élément $\delta \in H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)$, élément canoniquement déterminé au signe près et qui s'appelle le cycle évanescent en le point s, tel que $\sigma \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ agit sur $\chi \in H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par la transvection

(6.5.2.1) $$\sigma(x) = x - (-1)^m \sigma.(x.\delta)\delta \quad .$$

[Le produit $x.\delta$ est dans $H^{2n-2}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell(-m-1)$, donc son produit par $\sigma \in \mathbb{Z}_\ell(1)$ définit un élément $\sigma.(x.\delta) \in \mathbb{Q}_\ell(-m)$, et cet élément, multiplié par $\delta \in H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)$ donne l'élément $\sigma.(x.\delta)\delta \in H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.]

Reprenons le cas global :

Théorème 6.6. Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension n sur un corps algébriquement clos k. On suppose n pair ou car $k \neq 2$. Soient D un pinceau de Lefschetz pour X, η son point générique, $\overline{\eta}$ un

point géométrique au-dessus de η, et $s_1,\dots,s_N$ les points de $D \cap \overset{\vee}{X}$. Choisissons par chaque i un isomorphisme ℓ_i entre $\bar{\eta}$ et le point générique géométrique de $\mathfrak{S}_i$ = le hensélisé strict de D en s_i, de sorte que le groupe I_i d'inertie de δ_i en S_i agit sur $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ et définit le cycle évanescent (6.5) en s_i

$$\delta_i \in H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(m)) \ , \ m = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n}{2} - 1 & \text{si } n \text{ pair} . \end{cases}$$

On suppose les ℓ_i choisis de telle façon que les $I_i \subset \pi = \pi_1^{mod}(D-D \cap \overset{\vee}{X}, \bar{\eta})$ engendrent topologiquement le groupe π_1 (ce qui est possible, en vertu de SGA 1 XIII 2.10). Ceci posé, on a :

6.6.1. Si X satisfait à la condition (LV), l'espace de cohomologie évanescente $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)$ ($\overset{\text{dfn}}{=\!=}$ l'orthogonal de $H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(m))$ dans $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)$, cf. 5.4.4) est engendré par les cycles évanescents δ_i, i=1,...,N .

6.6.2. Les cycles évanescents δ_i sont conjugués, au signe près, sous le groupe de monodromie globale $\pi_1(D - D \cap \overset{\vee}{X})$.

Démonstration. Pour prouver 6.6.1, notons que, par la formule de Picard-Lefschetz 6.5, on a, posant $\pi = \pi_1(D - D \cap \overset{\vee}{X})$, et grâce au fait que les I_i engendrent π :

(6.6.3) $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m)^\pi$ = l'orthogonal dans $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ du sous-espace engendré par les δ_i .

Par 5.6.10, on a

(6.6.4) $H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))^\pi = \mathrm{Im}(H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)))$,

de sorte que prenant les orthogonaux des deux membres de (6.6.3), on trouve 6.6.1.

Pour prouver 6.6.2, on remarque simplement que le cycle évanescent δ_i est déterminé au signe près, par la représentation du groupe d'inertie en s_i . Donc on n'a qu'a appliquer 6.1.2, qui donne la conjugaison dans $\pi_1^{mod}(\mathbb{P}^r - X, \overline{\eta})$ des homomorphismes d'inertie composés

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_\ell(1) & \longrightarrow & \pi_1^{mod}(D - D \cap \overset{\vee}{X}, \overline{\eta}) \\ & & \downarrow \\ & & \pi_1^{mod}(\overset{\vee}{\mathbb{P}}^r - \overset{\vee}{X}, \overline{\eta}) \end{array} .$$

Ceci donne la <u>conjugaison</u> (à signe près) des cycles évanescents qu'ils déterminent, par des éléments de $\pi_1^{mod}(\overset{\vee}{\mathbb{P}}^r - \overset{\vee}{X}, \overline{\eta})$, et la démonstration s'achève par 6.1.1, qui donne la surjectivité de

$$\pi_1^{mod}(D - D \cap \overset{\vee}{X}) \longrightarrow \pi_1^{mod}(\overset{\vee}{\mathbb{P}}^r - \overset{\vee}{X}) .$$

Corollaire 6.7. Sous les hypothèses de 6.6, supposons que X satisfait à la condition (LV). Alors :

6.7.1. La représentation de $\pi_1(D - D \cap \check{X})$ sur $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est absolument irréductible.

6.7.2. Si n est pair, tout sous-groupe d'indice fini dans $\pi_1(D - D \cap \check{X})$ agit de façon absolument irréductible sur $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration. On peut évidemment remplacer le module envisagé par le tordu $E = E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$. Soit $\overline{E} = E \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et soit χ un élément $\neq 0$ de $\overline{E}$. Pour démontrer 6.7.1, il faut prouver que le sous $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-vectoriel de $\overline{E}$ engendré par χ et ses conjugués sous π est $\overline{E}$ tout entier. D'après 6.6.1 et 6.6.2, il suffit de prouver que ce sous-module contient un des cycles évanescents δ_i. Mais comme χ satisfait (LV), la restriction de la forme de cup-produit à $H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(m)) \hookrightarrow H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ est non dégénérée, donc aussi la restriction à l'orthogonal $E^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$, donc en vertu de (6.6.1) il existe au moins une valeur de i telle que l'on ait :

$$x.\delta_i \neq 0 \quad .$$

Pour cet i, il existe par 6.5 un élément σ_i du groupe d'inertie en s_i tel que

(6.7.3) $\qquad \sigma_i(x) - x = \text{un multiple non nul de } \delta_i \ ,$

ce qui achève la démonstration de 6.7.1.

Quant à 6.7.2, on a n-1 impair, donc $\delta.\delta = 0$, et pour toute puissance k.ième de σ_i on a, en itérant 6.5.2,

$$\sigma_i^k(x) = X + k\,\sigma_i(x.\delta_i)\,\delta_i \quad . \tag{6.7.4}$$

Donc un sous Q_ℓ-module M de E est stable sous l'action de π si et seulement il l'est sous un sous-groupe d'indice fini, car les deux conditions équivalent à la condition

$$x \in M \Longrightarrow \forall_i \text{ tel que le cup-produit } x.\delta_i \neq 0, \text{ alors } \delta_i \in M.$$

Donc on est ramené à l'énoncé 6.7.1 déjà prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Pub. Math. IHES 35, 1968, 259-278.

[2] S. KLEIMAN. Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, 1968.

[3] S. LEFSCHETZ. L'analyse situs et la Géométrie Algébrique, Gauthiers-Villars, Paris 1924.

[4] D. LIEBERMAN. Higher Picard Varieties, Amer. J. Math, 15 (4) 1968 p.1165-1199.

[5] D. MUMFORD. non publié.

[6] A. WEIL. Variétés Kählériennes, Hermann, Paris 1958.

S G A 7
Exposé XIX

Le théorème de Noether

par P. Deligne

Sommaire

1. Enoncé des théorèmes 1
2. Complément à XVIII 4
3. Preuve de 1.3 5
4. Deuxième complément à XVIII 8
5. Les cas d'exception au théorème de Noether. 11

1. Enoncé des théorèmes

Le présent exposé est une mise au goût du jour de la démonstration de Lefschetz [3] page 108 du théorème de Noether (1.2) ci-dessous.

1.1 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soient $d \geq 1$ et $\underline{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq d}$ une suite d'entiers ≥ 1. Une intersection complète V de dimension n et de multidegré $\underline{a}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+d}$ sur k sera dite *générique* si, sur une extension de k, elle est projectivement isomorphe à une intersection complète définie par des équations dont les coefficients sont algébriquement indépendants sur le corps premier. Dans ce qui suit et sauf mention expresse du contraire, *on suppose que* $d \geq 1$ et que $a_i \geq 2$.

Théorème 1.2 *Soit* $V \subset \mathbb{P}^{2+d}$ *une surface intersection complète générique de multidegré* $\underline{a}$. *On suppose que* $\underline{a} \neq (2), (3), (2, 2)$. *Alors, toute courbe (réduite) tracée sur* V *est l'intersection (schématique) de* V *et d'une hypersurface de* $\mathbb{P}^{2+d}$.

Montrons que le théorème résulte de son corollaire

(1.2.1) $\quad \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}^{2+d}) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V)$.

Si C est une courbe tracée sur V, (1.2.1) implique que $\mathcal{O}(C) \simeq \mathcal{O}(n)$ pour n convenable; si H est une section hyperplane, $n = (\Pi\, a_i)^{-1}.(C, H) > 0$. Il reste à prouver que le système linéaire induit sur V par $|n\,H|$ est complet. Ecrivons V comme intersection d'hypersurfaces H_i de degré a_i et soit $V_i = H_1 \cap \ldots \cap H_i$. On vérifie par récurrence sur i que le système linéaire induit par $|n\,H|$ sur V_i est complet: dans la suite exacte

$$H^0(V_i, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow H^0(V_{i+1}, \mathcal{O}(n)) \longrightarrow H^1(V_i, \mathcal{O}(n - a_{i+1}))\ ,$$

le dernier groupe est nul (FAC).

Théorème 1.3 *Soit $V \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ une intersection complète de dimension paire $2n \neq 0$ et de multidegré $\underline{a}$ générique. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes*

(a) *k n'est pas de caractéristique 2, et $(2n; \underline{a})$ est distinct de $(2n; 2)$, $(2n; 2, 2)$, $(2; 3)$.*

(b) *le nombre de Hodge $h^{2n,0}$ est non nul, i.e. $\Sigma\,(a_i - 1) > 2n$.*

Alors, toute classe de cohomologie algébrique dans $H^{2n}(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ est un multiple rationnel de la classe η^n des sections linéaires.

Déduisons 1.2.1 de 1.3. Les cas d'exceptions dans 1.2 sont exactement ceux pour lesquels $\Sigma(d_i - 1) \leq 2$; on peut donc appliquer 1.3 (b) à la surface V de 1.2. On sait que $\mathrm{Pic}^\tau(V) = 0$ (XI 1.8); donc que $\mathrm{Pic}(V)$ s'injecte dans $H^2(V, \mathbb{Q}_\ell(1))$. D'après 1.3, tout élément de $\mathrm{Pic}(V)$ est un multiple rationnel de la classe η de $\mathcal{O}(1)$, et on conclut par (XI 1.8).

Il est clair que la validité de 1.2 et 1.3 ne dépend pas de l'intersection complète générique choisie, mais seulement de p, n et $\underline{a}$.

Théorème 1.4. Soit $X \subset \mathbb{P}$ une variété projective lisse purement de dimension $2n+1$ sur k. Soit $\ell \subset \check{\mathbb{P}}$ un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de X. Pour k de caractéristique 2, on suppose que ℓ est même un pinceau de Lefschetz générique.

On suppose que X vérifie (LV) (XVIII 5.2.2).

Soit V la section hyperplane générique dans le pinceau ℓ. L'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

(a) Aucune classe de cohomologie $\neq 0$ dans la partie évanescente $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ du groupe de cohomologie $H^{2n}(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ n'est algébrique.

(b) Les classes de cohomologie algébrique engendrent $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$.

Précisons le sens du mot générique dans 1.4.

(a) Soit G la grassmanienne des droites de l'espace projectif $\check{\mathbb{P}}$ dual de $\mathbb{P}$. Appelons "point géométrique" de G un morphisme du spectre d'un corps algébriquement clos dans G.

Tout point géométrique $\bar{s} \to G$ définit un pinceau de sections hyperplanes ℓ de la variété déduite de X par extension des scalaires de k à $k(\bar{s})$. On dit que ℓ est générique si $\bar{s}$ est localisé au point générique de G.

(b) Soit ℓ un pinceau de sections hyperplanes (une droite de $\check{\mathbb{P}}$). Tout point géométrique $\bar{s} \to \ell$ définit une section hyperplane de la variété déduite de X par extension des scalaires de k à $k(\bar{s})$. On dit qu'elle est générique si $\bar{s}$ est localisé au point générique de ℓ.

Soient $\bar{s}$ comme ci-dessus, d'image dans ℓ le point générique s et $S \subset \ell$ l'ensemble fini des points de ℓ donnant lieu à une section hyperplane singulière. Le groupe de monodromie $\pi_1(\ell - S, \bar{s})$, quotient de $Gal(k(\bar{s})/k(s))$, agit sur $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$. Si k n'est pas de caractéristique 2, cette action est irréductible (XVIII 6.7); au n° 2 ci-dessous, on montrera que ce résultat reste valable sans hypothèse de caractéristique pour un pinceau générique. Le sous-espace de $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ engendré par les classes de cohomologie algébrique est stable sous le groupe de monodromie (i.e. sous Galois); c'est donc tout ou rien, ce qui prouve 1.4.

Corollaire 1.5 Soit $V \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ une intersection complète de dimension paire 2n et de multidegré a générique. On a soit

(a) Toute classe de cohomologie algébrique dans $H^{2n}(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ est multiple rationnel de η^n .

(b) $H^{2n}(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ est engendré par des classes de cohomologie algébrique.

Si (b) est vérifié, pour toute intersection complète de dimension 2n et multidegré a sur un corps algébriquement clos de caractéristique p , $H^{2n}(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ est engendré par les classes algébriques.

On applique 1.4 pour X une intersection complète de dimension 2n+1 et de multidegré $(a_1 \ldots a_{d-1})$ générique et pour ℓ un pinceau générique de sections de X par des hypersurfaces de degré a_d (cf. XVII 2.4). En fait, on pourrait aussi prendre X de multidegré $(a_1 \ldots a_d)$ et ℓ un pinceau générique de sections hyperplanes. La remarque finale résulte de ce qu'une classe de cohomologie algébrique reste algébrique par spécialisation.

2. Complément à XVIII

Proposition 2.1 Soient $X \subset \mathbb{P}$ une variété projective lisse purement de dimension paire 2n sur un corps algébriquement clos k , et $\ell \subset \check{\mathbb{P}}$ un pinceau de Lefschetz générique de sections hyperplanes de X . Soient s un point géométrique de ℓ , H_s la section hyperplane correspondante, $S \subset \ell$ l'ensemble des valeurs exceptionnelles du pinceau et $\pi_1(\ell - S, s)$ le groupe de monodromie.

On suppose que X vérifie (LV) .

Alors, la représentation de $\pi_1(\ell - S, s)$ sur la cohomologie évanescente $Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell) \subset H^{2n}(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ est absolument irréductible.

Rappelons que $Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ est l'orthogonal de l'image de $H^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dans $H^{2n}(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$, image égale au sous-groupe des invariants sous le groupe de monodromie (XVIII 5.6.10).

La droite projective $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe. Le groupe $\pi_1(\mathcal{L} - S, s)$ est donc (topologiquement) engendré par les sous-groupes d'inertie en les points de S - et leurs conjugués. Son image dans $GL(H^n(H_s, \mathbb{Q}_\ell))$ est donc (topologiquement) engendrée par les $x \longrightarrow x - (-1)^n(x\ \delta)\delta$, pour δ conjugué à un cycle évanescent. L'image de $H^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dans $H^{2n}(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ est donc l'orthogonal du sous-espace engendré par les cycles évanescents et leur conjugués: $Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ est engendré par les cycles évanescents et leur conjugués.

Pour un pinceau de Lefschetz <u>générique</u> , les arguments du n° 6 de XVIII montrent encore que les cycles évanescents δ relatifs aux différents points de S sont conjugués entre eux.

Soit $V \subset Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ un sous-espace invariant $\neq 0$. Il existe un conjugué δ d'un cycle évanescent et $v \in V$ tels que $(v, \delta) \neq 0$ (c'est ici qu'on utilise (LV)). Puisque $v - (-1)^m(v\ \delta)\delta \in V$, on a $\delta \in V$. Le sous-espace V , contenant un cycle évanescent (et tous ses conjugués) coïncide avec $Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$.

Cet argument reste valable après extension du corps de coefficients $\mathbb{Q}_\ell$, d'où l'absolue irréductibilité.

<u>Remarque</u> 2.2 Lorsqu'on omet l'hypothèse (LV) , les arguments qui précèdent prouvent encore que tout sous-espace invariant de $H^{2n}(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ contient $Ev(H_s, \mathbb{Q}_\ell)$ ou est contenu dans l'image de $H^{2n}(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Le même résultat vaut pour X de dimension paire (et tout pinceau de Lefschetz).

3. Preuve de 1.3

3.1 Il s'agit de prouver que, sous les hypothèses du théorème, 1.5 (b) n'est pas vérifié. Le cas où $h^{0,2n} \neq 0$ sera traité par Katz en XXI 4.1 (la condition $h^{0,2n} \neq 0$ équivaut à $\Sigma d_i - (2n + r + 1) \geq 0$, ce nombre étant l'entier m tel que $\Omega^{2n}_V \simeq \mathcal{O}(m)$). Les résultats du présent exposé ne servirons plus dans la suite de séminaire, de sorte qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

3.2 Lorsque $k = \mathbb{C}$, on démontre 1.3 en notant que si 1.5 (b) est vérifié, la cohomologie de V est purement de type (n,n) , la cohomologie algébrique étant de type (n,n) . Ceci n'est le cas que dans les cas exceptionnels exclus de 1.3 (XI 2.9). Par le principe de Lefschetz, 1.3 est donc vrai en caractérisitque 0 .

Proposition 3.3 *Plaçons-nous sous les hypothèses de* 1.4, *et supposons* (b) *vérifié. Soit* $Ev(V, \mathbb{Q})$ *le* $\mathbb{Q}$*-sous-espace vectoriel de* $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ *engendré par les classes de cohomologie algébrique.*

(a) *On a* $Ev(V, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$. *Sur* $Ev(V, \mathbb{Q})$, *la forme d'intersection est rationnelle définie, de signe* $(-1)^n$.

(b) *Les cycles évanescents et leur conjugués sont dans* $Ev(V, \mathbb{Q})$; *ils y forment un système de racine irréductible de type* A, D *ou* E .

(c) *Le groupe de monodromie (image de* $\pi_1(\ell - S, \bar{s})$ *dans* $GL(Ev(V, \mathbb{Q}))$) *est fini; c'est le groupe de Weil du système de racines* (b) .

Sauf le caractère défini de la forme d'intersection, (a) résulte de ce que la forme d'intersection est non dégénérée sur $Ev(V, \mathbb{Q}_\ell(n))$ (par (LV)) et rationnelle sur $Ev(V, \mathbb{Q})$.

La condition 1.4 (b) équivaut à dire qu'il existe sur V des cycles algébriques modulo équivalence numérique non invariants par la monodromie. Cette condition est donc indépendante de ℓ . Soit x un tel cycle algébrique, et δ le cycle évanescent relatif à $s_o \in S$ et à un chemin ch de $\bar{s}$ (définissant V) à s_o . Pour ch convenable, $(x\ \delta) \neq 0$. Le transformé galoisien $\sigma(x) = x-(-1)^n(x\delta)\delta$ de x est encore algébrique; $(x\delta)\delta$ est donc algébrique, image d'un cycle y indépendant de ℓ . Le nombre rationnel $\frac{(-1)^n}{2}(y, y) = (x\delta)^2$ est donc indépendant de ℓ ; c'est un carré dans tous les corps $\mathbb{Q}_\ell$, donc un carré, et $\pm (x, \delta)$ est dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ . Ceci montre non seulement que $\delta \in Ev(V, \mathbb{Q})$, mais encore que le cycle algébrique modulo équivalence numérique $\pm \delta = (\sigma(x) - x)/(x, \delta)$, est indépendant de ℓ .

Un cycle algébrique sur une variété V est toujours défini sur une extension finie de tout corps de définition de V. Il en résulte que $\pi_1(\mathcal{L} - S, s)$ agit sur $Ev(V, \mathbb{Q})$ via un groupe fini. Ce groupe est engendré par les réflexions associées aux cycles évanescents δ et leur conjugués (XVIII 6.6.1 et n° 2). Les δ et leur conjugués forment donc un système de racines de groupe de Weil le groupe de monodromie. De plus, toutes les racines de ce système de racines sont conjuguées sous le groupe de Weil: il est de type A, D ou E.

La forme d'intersection est, à un facteur près, l'unique forme invariante sous le groupe de Weil. Elle est donc définie. Son signe se détermine en calculant

$$(\delta, \delta) = (-1)^n . 2 \quad .$$

Proposition 3.4 *Si* $k = \mathbb{C}$, *et sous les hypothèses de* 1.4, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *le groupe de monodromie est fini;*

(ii) *la cohomologie évanescente* $Ev(V)$ *est purement de type* (n, n).

Soit $\tilde{X} \longrightarrow \mathcal{L}$ le fibré de fibres les sections hyperplanes appartenant au pinceau $\mathcal{L}$, et V_s la fibre en $s \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$. Les $Ev(V_s)$ forment une variation algébrique de structures de Hodge sur $\mathcal{L}$. D'après le théorème de la partie fixe [2] 4.1.2 appliqué à un revêtement fini de $\mathcal{L}$ (cf. [2] 4.1.3.3), (i) implique que la structure de Hodge des $Ev(V_s)$ est localement constante. Le groupe de monodromie agit donc par automorphismes de la structure de Hodge. Pour T une transformation de Picard-Lefschetz, $Im(T-1)$ est une sous-structure de Hodge de rang un, donc de type (n, n), engendrée par un cycle évanescent δ. Les cycles évanescents étant de type (n, n), $Ev(V_s)$ tout entier l'est.

Réciproquement, si $Ev(V)$ est purement de type (n, n), la forme d'intersection sur $Ev(V)$ est définie et le groupe de monodromie fini (cf. [2] 4.1.3.3).

Remarque 3.5 Si les conditions équivalentes de 3.3 sont vérifiées, on voit comme en 3.3 que les cycles évanescents (et leurs conjugués) forment un système de racines de type A, D ou E dont le groupe de monodromie est le groupe de Weil.

3.6. Prouvons 1.3 pour k de caractéristique finie $\neq 2$. Soient $S = \mathrm{Spec}(V)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique de corps résiduel k, et $X \subset \mathbb{P}^{2n+d}_S$ une intersection complète de dimension relative $2n+1$ et de multidegré $(a_1 \ldots a_{d-1})$ sur S. Soit $\mathcal{L}$ un pinceau de Lefschetz de sections hypersurfaces de degré a_d de X (en fibre spéciale, $\mathcal{L}_s$ est un pinceau de Lefschetz pour X_s). Soit $f : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{L} \simeq \mathbb{P}^1_S$ le fibré de fibres les sections du pinceau. Le lieu exceptionnel $T \subset \mathcal{L}$ est étale sur S (XVII 6; on utilise ici que $p \neq 2$). Le faisceau $R^{2n}f_* \mathbb{Q}_\ell$ est localement constant sur $\mathcal{L} - T$; il est donc modérément ramifié et sa monodromie est la même en caractéristique p et en caractéristique 0. Si 1.5 (b) est vérifié, on déduit donc de 3.3 (c) et 3.4 que le groupe de cohomologie $H^{2n}(V)$ des intersections complètes complexes de dimension $2n$ et multidegré $\underline{a}$ est purement de type (n, n), ce qui n'arrive que dans les cas exclus par 1.3 (XI 2.9).

4. Deuxième complément à XVIII

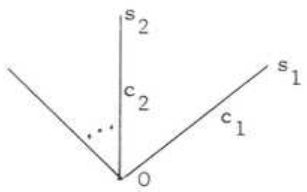
Dans ce numéro, nous travaillons sur $\mathbb{C}$ et en cohomologie entière (transcendante). Nous reprenons, avec des méthodes plus proches de celles de Lefschetz, certains des résultats de XVIII. Dans XVIII, ils n'étaient prouvés qu'après tensorisation avec $\mathbb{Q}$ (on plutôt $\mathbb{Q}_\ell$, ce qui revient au même).

4.1 Soient $X \subset \mathbb{P}$ une variété projective complexe lisse purement de dimension $n+1$ et $\mathcal{L}$ un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de X, d'axe A. On désigne aussi par $\mathcal{L}$ l'espace des paramètres du pinceau, isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Soit $S \subset \mathcal{L}$ l'ensemble des valeurs exceptionnelles. Pour $s \in \mathcal{L}$, on notera H_s la section hyperplane correspondante de X (de dimension n).

Soit $T(A)$ un voisinage tubulaire fermé de $A \cap X$ dans X, de bord transverse à tous les H_s.

Soient $0, \infty$ deux points dans $\mathcal{L} - S$, et soit α un difféomorphisme orienté de $\mathcal{L} - S$ vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ envoyant 0 sur 0, ∞ sur ∞ et S dans la circonférence de rayon un centrée en 0. Le composé αf de α et de la projection sur $\mathcal{L}$ fait de $X - T(A)^0$ un fibré singulier en variétés à bord sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (une singularité au-dessus de chaque point de $\alpha(S)$). Nous noterons c_s le segment de droite joignant 0 à $\alpha(s)$.

Omettant la mention de α, on a la figure



Au voisinage de $s \in S$ et du point singulier x_s de $H_s \subset X$, on se trouve (dans des coordonnées locales convenables) dans la situation étudié en XIV 3.2. Si α est choisi holomorphe près de s, on peut même trouver des coordonnées locales sur X et $\mathcal{L}$ telles que f s'écrive Σz_i^2 et que $\alpha^{-1}(c_s)$ soit " z réel positif". Au-dessus de l'intersection d'un voisinage de s et de $\alpha^{-1}(c_s) - s$, on peut alors considérer le fibré en sphères réelles $\Delta'_s \subset X$, défini par " z_i réel". Pour $t \to s$, la fibre Δ'_{st} de Δ'_s en t tend vers x_s. On notera Δ_s la réunion de $\{x_s\}$ et d'un fibré en sphères au-dessus de $\alpha^{-1}(c_s) - \{s\}$, contenu dans $X - T(A)$ et qui prolonge Δ'_s. Δ_s est un disque plongé dans X, de bord $H_o \cap \Delta_s$ une sphère qui représente le cycle évanescent δ_s en s, transporté dans H_o le long du chemin $\alpha^{-1}(c_s)$.

Appliquons la théorie de Morse à la fonction $|\alpha f|^2$, pour étudier comment change l'homotopie de

$$\{x \in X \mid x \in T(A) \text{ ou } |\alpha f(x)|^2 \leq r\}$$

lorsque r croît. Soit

$$X^- = \{x \in X \mid x \in T(A) \quad \text{ou} \quad a\ f(x) \neq \infty\} \ .$$

On trouve que l'inclusion

$$H_o \cup \bigcup_{s \in S} \Delta_s \hookrightarrow T(A) \cup H_o \cup \bigcup_{s \in S} \Delta_s \hookrightarrow X^-$$

est une équivalence d'homotopie. On sait, encore par la théorie de Morse, que $X - X^-$ peut se rétracter par déformation sur un sous-complexe de dimension réelle $\leq n$. Au total, on a donc le résultat suivant

Théorème 4.2. Il existe un sous-complexe Σ compact et de dimension (réelle) $\leq n$ de $H_\infty^{aff} = H_\infty - A$ tel que l'inclusion

$$H_o \cup \bigcup_{s \in S} \Delta_s \longrightarrow X - \Sigma$$

soit une équivalence d'homotopie.

4.3 La soustraction de Σ est sans effet sur les groupes de cohomologie, d'homologie ou d'homotopie d'indice $i \leq n$ de X . Puisque $H_o \cup \bigcup_{s \in S} \Delta_s$ se déduit de H_o en attachant des $n+1$-disque le long de sphères représentant les cycles évanescents, on trouve en homologie

$$\mathbb{Z}^S \longrightarrow H_n(V_o) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow 0 \ .$$

La suite exacte analogue en cohomologie, et celle qui s'en déduit par dualité de Poincaré, forment un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbb{Z}^S & & \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle (\ ,\delta_s)} & & \\ \mathbb{Z}^S & \xrightarrow{\Sigma\, n_s \delta_s} & H^n(V_o) & \longrightarrow & H^{n+2}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & \nearrow{\scriptstyle \cap\eta} & & & \\ & & H^n(X) & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array} \qquad (4.3.1)$$

5. Les cas d'exception au théorème de Noether

Dans ce numéro, nous persistons à travailler sur $\mathbb{C}$, en cohomologie entière.

5.1 Soient $2n$, d et $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_d)$ $(d \geq 1,\ a_i \geq 2)$ tels que la cohomologie de dimension $2n$ des intersections complètes lisses V de dimension $2n$ et de multidegré $\underline{a}$ soit purement de type (n, n). En d'autres termes, $n = 0$ ou $(2n; \underline{a})$ est égal à $(2n; 2)$, $(2n; 2, 2)$ ou $(2; 3)$ (XI 2.9).

Supposons que V se déduise d'une intersection complète $X \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ (resp. $X \subset \mathbb{P}^{2n+d+1}$) de dimension $2n + 1$ et de multidegré $(a_1,\ldots,a_{d-1})$ (resp. $(a_1,\ldots,a_d)$) en prenant une section par une hypersurface de degré a_d (resp. une section hyperplane) appartenant à un pinceau de Lefschetz $\mathcal{L}$.

La partie évanescente $\mathrm{Ev}(V)$ de $H^{2n}(V)$, égale à la partie primitive de cette cohomologie est, d'après 4.3.1, engendrée sur $\mathbb{Z}$ par les cycles évanescents. C'est l'orthogonal de la puissance η^n de la classe de cohomologie η d'une section hyperplane.

Puisque sur $H^{2n}(V)$ la forme d'intersection est unimodulaire, et que η^{2n} n'est pas le multiple by $(b > 1)$ d'une autre classe de cohomologie (XI 1.6 (iv)), le discriminant de la forme d'intersection sur $\mathrm{Ev}(V)$ est égal à $(\eta^n, \eta^n) = \prod a_i$.

Soit R le système de racines dans $H^{2n}(V)$ formé des cycles évanescents et de leurs conjugués. On a sur R les informations suivantes

(a) R est vide ou de type A, D ou E ;

(b) le rang de R est donné en XI 1.10 ;

(c) le discriminant est $\prod a_i$. Dans les tables, ce discriminant est l'ordre du centre du groupe simple simplement connexe complexe correspondant. L'argument par lequel nous avons calculé le discriminant montre que ce centre, dual du quotient du réseau des poids par celui des racines, est cyclique.

Dans tous les cas de figure, ces informations déterminent R complètement si $n \neq 0$. On trouve:

Proposition 5.2 (i) Pour V une quadrique de dimension paire, R est de type A_1
(ii) Pour V une surface cubique, R est de type E_6 .
(iii) Pour V de dimension $2n$, et l'intersection de deux quadriques, R est de type D_{2n+3} .

5.3. Supposons que $n \neq 0$. L'ensemble R^1 des vecteurs de longueur ± 2 dans $Ev(V)$ est aussi un système de racine, ayant les mêmes caractéristiques (a) (b) (c) que R . On a donc $R = R^1$. Soit π_1 le groupe fondamental de l'espace des paramètres de toutes les intersections complètes $V \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ du type considéré. L'image de π_1 dans $GL(Ev(V))$ est le groupe de Weil de R . Dans tous les cas de figure, c'est le groupe d'automorphismes du triple

$$(H^{2n}(V),\ \eta^n\ ,\ \text{forme d'intersection}).$$

5.4. Avec R remplacé par R^1 de 5.3, le résultat 4.2 (ii) est bien connu [1] et pour les petites valeurs de n , 4.2 (iii) était connu, au moins par Manin ($n = 0$ est trivial; une surface intersection de deux quadriques est une surface de del Pezzo). Une étude détaillée de l'intersection de deux quadriques a été faite par M. Reid [4]. Il déduit 4.2 (iii) d'une étude de la géométrie des sous-espaces linéaires de dimension n sur une intersection de deux quadriques $V \subset \mathbb{P}^{2n+2}$.

Bibliographie

[1] E. CARTAN. Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et les 27 droites d'une surface cubique.
Bull. Sc. Math. 70 1946 p. 42-45, Oeuvres, partie I, tome 2 p. 1353.

[2] P. DELIGNE. Théorie de Hodge II. Publ. Math. IHES 40, 1971 p. 5-58.

[3] S. LEFSCHETZ. L'analysis situs et la géométrie algébrique. Gauthier-Villars 1924 (réédité dans Selected papers - Chelsea).

[4] M. REID. Thèse, Cambridge 1972.

[5] J.P. SERRE. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. LXI (1955) p. 197-278 (cité FAC)

S G A 7

E X P O S E XX

LE THEOREME DE GRIFFITHS

par N. KATZ

0. Introduction

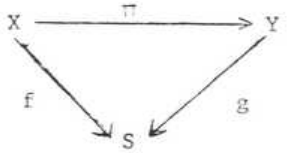
On démontre le théorème de GRIFFITHS [1], qui donne une façon systématique (bien que non-constructive) de "trouver" des cycles algèbriques qui sont $\mathbb{Q}_\ell$-cohomologues à zéro, mais donc aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro. La démonstration donnée ici (due à GROTHENDIECK) est la traduction en termes purement algébriques de la démonstration originelle, plus au moins transcendante, de GRIFFITHS. Dans toutes les deux, c'est le théorème d'irréductibilité XVIII 6.7 qui est un point-clef (cf. 3.1.6 et 3.2).

1. Le formalisme des classes primitives

Dans toute la suite, on suppose fixé un nombre premier ℓ. Tous les schémas envisagés sont supposés à caractéristiques $\neq \ell$.

Considérons la situation

(1.0.1)



dans laquelle on suppose

(1.0.3) f, g lisses de dimensions relatives à d_1 et d_2 ,

(1.0.4) π propre .

Compte tenu de ce que X et Y sont lisses sur S , la propreté de π nous donne un morphisme de Gysin (SGA 5 IV)

$$(1.0.5) \qquad \pi_* : H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q-2(d_1-d_2)}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i-(d_1-d_2))) .$$

Localisant sur S (au sens étale), on obtient également un morphisme de faisceaux sur S

$$(1.0.6) \qquad \pi_* : R^q f_*(\mathbb{Q}_\ell(i) \longrightarrow R^{q-2(d_1-d_2)} g_*(\mathbb{Q}_\ell(i-d_1-d_2)) ,$$

et, appliquant le foncteur $H^p(S, \quad)$, un morphisme

$$(1.0.7) \qquad \pi_*: H^p(S, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^p(S, R^{q-2(d_1-d_2)} g_*(\mathbb{Q}_\ell(i-d_1+d_2))) .$$

Définition 1.0.8. Soient $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ et $('E_r^{p,q}, 'd_r^{p,q})$ deux suites spectrales (dans une catégorie abélienne donnée), et $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Le décalage de $('E_r^{p,q}, 'd_r^{p,q})$ par (a, b) est la suite spectrale $("E_r^{p,q}, "d^{p,q})$, avec

$$(1.0.9) \qquad \begin{cases} "E_r^{p,q} = 'E_r^{p+a,q+b} \\ "d_r^{p,q} = d_r^{p+a,q+b} \end{cases}$$

1.0.10. Un morphisme de suites spectrales de $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ dans $({}''E_r^{p,q}, {}''d_r^{p,q})$ s'appelle un morphisme de bidegré (a, b) de $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ dans $({}'E_r^{p,q}, {}'d_r^{p,q})$.

Le lemme suivant est une conséquence triviale de la théorie du morphisme de Gysin (SGA 5, IV).

Lemme 1 1. Il existe un morphisme canonique π_* de bidegré $(a,-2(d_1-d_2))$ des suites spectrales de Leray

$$R^p\alpha_*R^qf_*\mathbb{Q}_\ell(i) \Longrightarrow R^{p+q}(\alpha f)_*\,\mathbb{Q}_\ell(i) \tag{1.1.0}$$

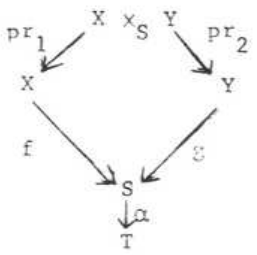
et

$$R^p\alpha_*R^qg_*\mathbb{Q}_\ell(i-d_1+d_2) \Longrightarrow R^{p+q}(\alpha g)_*\,\mathbb{Q}_\ell(i-d_1+d_2) \quad , \tag{1.1.1}$$

qui sur le terme E_2 est donné par (1.0.7), et sur l'aboutissement par (1.0.5).

1.2. Considérons maintenant la situation

(1.2.1)



,

dans laquelle S, X, f, Y, g sont comme dans (1.0.2) - (1.0.4), mais en supposant maintenant également f propre.

Soit

(1.2.2) $z \in H^a(X \times_S Y, \mathbb{Q}_\ell(b))$.

Alors z induit une application (encore notée z)

(1.2.3) $z : H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$

par la formule

(1.2.4) $z(x) = pr_{2*}(z \wedge pr_1^*(x))$,

où pr_{2*} est l'homomorphisme de Gysin Par localisation étale sur S , z définit également

(1.2.5) $z : R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i) \longrightarrow R^{q+a-2d_1} g_* (\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$,

et, appliquant $H^p(S, \text{---})$, des applications

(1.2.6) $H^p(S, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^p(S, R^{q+a-2d_1} g_*(\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)))$.

Lemme 1.3 La classe z définit un morphisme de bidegré $(0, b-2d_1)$ des suites spectrales de Leray

(1.2.7) $H^p(S, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell(i)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$

et

(1.2.8) $H^p(S, R^q g_* \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$,

qui sur les termes E_2 est donné par (1.2.6), et par (1.2.3) sur les aboutissements.

Démonstration. Compte tenu de la formule (1 2.4) et de ce que la "multiplication par z " définit un morphisme de bidegré (0, a) de suites spectrales de Leray

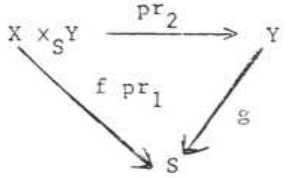
$$(1.2.9)\qquad H^p(S,\ R^q(pr_1\ f)_*\ \mathbb{Q}_\ell(i)) \Rightarrow H^{p+q}(X\times_S Y,\ \mathbb{Q}_\ell(i))$$

$$\Big\downarrow z$$

$$(1.2.10)\qquad H^p(S,\ R^{q+a}(pr_1\ f)_*\ \mathbb{Q}_\ell(i+b)) \Rightarrow H^{p+q+a}(X\times_S Y,\ \mathbb{Q}_\ell(i+b))\ ,$$

on n'a qu'à appliquer 1 1. à la situation

(1.2.11)



Corollaire 1 4. Dans la situation (1 2.1) - (1 2.2), le morphisme (1 2 3)

$$(1.4.1)\qquad z : H^q(X,\ \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1}(Y,\ \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1))$$

transforme classe primitive (XVIII 5.8.1) en classe primitive, et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Prim}^q(X/S,\ \mathbb{Q}_\ell(i)) & \xrightarrow{z} & \mathrm{Prim}^{q+a-2d_1}(Y/S,\ \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \\ \downarrow u_f & & \downarrow u_g \\ H^1(S,\ R^{q-1}f_*\mathbb{Q}_\ell(i)) & \xrightarrow{z} & H^1(S,\ R^{q+a-2d_1-1}g_*\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \end{array} \qquad (1.4\ 2)$$

(où u_f, u_g sont les homomorphismes canoniques de XVIII 5.8.1).

1.5. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique de S (au-dessus d'un point η de S), et soit

$$(1\ 5.1) \qquad z_{\bar{\eta}} \in H^a(X_{\bar{\eta}} \times_{k(\bar{\eta})} Y_{\bar{\eta}},\ \mathbb{Q}_\ell(b))$$

la classe induite par z sur la fibre géométrique correspondante de

$$(1.5.2) \qquad X \times_S Y \longrightarrow S \ .$$

Proposition 1.5 3. Supposons f, g propres, S annexe, et soit $q \in \mathbb{Z}$. Si la classe $z_{\bar{\eta}}$ induit l'homomorphisme nul

$$(1.5.3) \qquad 0 = z_{\bar{\eta}} : H^{q-1}(X_{\bar{\eta}},\ \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+a-2d_1-1}(Y_{\bar{\eta}},\ \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)),$$

alors, pour tout $X \in \mathrm{Prim}^q(X/S,\ \mathbb{Q}_\ell(i))$, on a

$$(1.5.4) \qquad u_g(z(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad H^1(S, R^{q+a-2d_1-1}g_*\mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1)) \ .$$

Démonstration Par la commutativité de (1.4.2), il suffit de voir que z induit l'homomorphisme nul

$$(1.5.5) \qquad z: R^{q-1}f_* \mathbb{Q}_\ell(i) \xrightarrow{0} R^{q+a-2d_1-1} g_* \mathbb{Q}_\ell(i+b-d_1).$$

Or f et g étant propres et lisses, les faisceaux $R^\cdot f_* \mathbb{Q}_\ell(\cdot)$ et $R^\cdot g_* \mathbb{Q}_\ell(\cdot)$ sont constants stordus (SGA 4 XVI 2.2), donc équivalents à leurs valeurs en $\bar{\eta}$, vus comme modules sous $\pi_1(S, \bar{\eta})$.

1.6. Une Construction de Manin

Supposons données deux sections de $f : X \longrightarrow S$:

$$(1.6.0) \qquad S \underset{t_2}{\overset{t_1}{\rightleftarrows}} X \quad ,$$

à chacune on associe sa classe de cohomologie

$$(1.6.1) \qquad cl(t_i) = t_{i*}(1) \in H^{2d_1}(X, \mathbb{Q}_\ell(d_1)) .$$

Si les fibres de $f : X \longrightarrow S$ sont géométriquement connexes, (plus généralement si pour $s \in S$, $f(s)$ et $g(s)$ appartiennent à la même composante connexe de X_s) on voit bien que

$$(1.6.2) \qquad cl(t_1) - cl(t_2) \in Prim^{2d_1}(X/S, \mathbb{Q}_\ell(d_1)) .$$

On désigne par

(1.6.3) $\quad u_f(t_1-t_2) \in H^1(S, R^{2d_1-1}f_*\mathbb{Q}_\ell(d_1))$

son image par

(1.6.4) $\quad u_f : \mathrm{Prim}^{2d_1}(X/S, \mathbb{Q}_\ell(d_1)) \longrightarrow H^1(S, R^{2d_1-1}f_*\mathbb{Q}_\ell(d_1))$.

(C'est un analogue $u(t_1 - t_2)$ de cet élément que Manin étudie dans [5]).

1.6.5. Soit maintenant z un cycle algébrique sur $X \times_S Y$ de codimension $\geq b$ sur chaque fibre de $X \times_S Y$ (*), qui détermine une classe de cohomologie (SGA 5 IV):

(1.6.6) $\quad cl(z) \in H^{2b}(X \times_S Y, \mathbb{Q}_\ell(b))$.

Cette classe définit une application (cf (1.2.3))

(1.6.7) $\quad cl(z) \cdot H^{2d_1}(X, \mathbb{Q}_\ell(d_1)) \longrightarrow H^{2b}(Y, \mathbb{Q}_\ell(b))$,

et si les cycles $z(t_1)$ et $z(t_2)$ sont définis, on a (grâce à la compatibilité SGA 5 IV du cup-produit avec les intersections de cycles):

(*) Si S est lisse sur un schéma T (p. ex. T=Spec k, k un corps), il suffirait de supposer z de codimension $\geq b$ sur chaque fibre au-dessus de T .

(1.6.8) $\quad cl(z)\,(cl(t_1) - cl(t_2)) = cl(z(t_1) - z(t_2))$.

La commutativité de (1 4.2) nous donne

(1.6.9) $\quad cl(z)\,(u_f(t_1 - t_2)) = u_g(cl(z(t_1) - z(t_2)))$

Comme corollaire de 1.5.3 , on a alors:

Proposition 1 7. Soient t_1 et t_2 deux sections de $f : X \longrightarrow S$, f étant supposé à fibres connexes, et soit z un cycle algébrique sur $X \times_S Y$ de codimension b , tel que le cycle algébrique

(1.7.1) $\quad z(t_1) - z(t_2)$

soit défini. Alors sa classe de cohomologie est primitive (XVIII 5.8.1). Si le cycle algébrique $Z_{\bar\eta}$ sur $X_{\bar\eta} \times Y_{\bar\eta}$ induit l'homomorphisme nul

(1.7.2) $\quad z_{\bar\eta} : H^{2d_1-1}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(d_1)) \xrightarrow{0} H^{2b-1}(Y_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(b))$

alors

(1.7.3) $\quad u_g(z(t_1) - z(t_2)) = 0$ dans $H^1(S, R^{2b-1}g_* \mathbb{Q}_\ell(b))$,

(où u_g est l'homomorphisme de XVIII 5.8.1 intervenant dans 1.4).

2. Un rappel sur le niveau (Cf. [2], 9.7, 10.1])

2.0.1. Soit X propre et lisse sur un corps k algébriquement clos. On a vu (1.2.3) que, pour tout

(2.0.2) T propre, lisse et connexe sur k de dimension d ,

et tout

(2.0.3) cycle algébrique z de codimension b sur T x X,

la classe de cohomologie

(2.0.4) $cl(z) \in H^{2b}(T \times X , \mathbb{Q}_\ell(b))$

donne lieu aux applications

(2.0.5) $cl(z) : H^q(T, Q_\ell(i)) \longrightarrow H^{q+2b-2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(i+b-d))$.

On définit la filtration par le co-niveau (N^j) de $H^q(X,\mathbb{Q}_\ell(i))$

(2.0.6) $N^j H^q(X,\mathbb{Q}_\ell(i)) = \sum_{(T,z)} \text{images } cl(z):H^{q-2j}(T,\mathbb{Q}_\ell(i-j)) \longrightarrow H^q(X,\mathbb{Q}_\ell(i))$,

la somme étant étendue aux couples

(2.0.7) (T, z) T/k propre lisse et connexe de dimension d

z cycle algébrique sur TxX de codimension j+d.

Il faut remarquer qu'on parle parfois de la filtration F^j croissante "par le niveau" , défini par

(2.0.8) $F^j H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) = N^{\left[\frac{g-i}{2}\right]} H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$.

Remplaçant (T, z) par $(\mathbb{P}^1 \times T, \{pt\} \times z)$, on voit que

(2.0.9) $$N^j H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \subset N^{j-1} H^q(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) .$$

Evidemment on a:

Proposition 2.1. Soient X propre, lisse et géométriquement connexe sur un corps k, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $X_{\bar{k}} = X \otimes_k \bar{k}$. Alors $\mathrm{gal}(\bar{k}/k)$, agissant sur $H^q(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$, préserve la filtration par le co-niveau.

Des raisonnements standards (cf [2]) montrent les énoncés suivants.

Proposition 2.2. La filtration par le niveau est invariante par extension des corps algébriquement clos k'/k.

Proposition 2.3. Soient S un schéma réduit et irréductible, à point générique η, et

$$\pi : X \longrightarrow S$$

un morphisme propre et lisse, à fibres géométriquement connexes. Si, pour des entiers j et q donnés, on a pour la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$

(2.3.1) $$H^q(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) = N^j H^q(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

alors il existe un ouvert non-vide $U \subset S$ tel que en tout point $u \in U$, on ait pour la fibre géométrique $X_{\bar{u}}$

(2.3.2) $$H^q(X_{\bar{u}}, \mathbb{Q}_\ell) = N^j H^q(X_{\bar{u}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

3. Application aux pinceaux de Lefschetz

3.1. A partir de maintenant, on fixe :

(3.1.0) k , un corps algébriquement clos,

(3.1.1) $X \subset \mathbb{P}^r$, un k-schéma projectif, lisse et connexe de dimension paire n , qui vérifie (LV) (XVIII 5.2.2) .

Prenons

(3.1.2) $D = \{H_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau de Lefschetz d'hypersurfacesde degré d , à fibre générique

(3.1.3) X_η , η = le point générique de $\mathbb{P}^1$.

Posons (cf. XVIII 5.4.4)

(3.1.4) $m : X_{\bar\eta} \hookrightarrow X \times_k k(\bar\eta)$ l'inclusion ,

(3.1.5) $E^{n-1}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i))$ = l'orthogonal de $m^* H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$ dans $H^{n-1}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i))$.

Nous avons vu (XVIII 6.7.2) que la formule de Picard-Lefschetz entraîne

(3.1.6) Si n est pair, tout sous-groupe d'indice fini dans $gal(k(\bar\eta)/k(\eta))$ agit de façon irréductible sur $E^{2n-1}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i))$.

Proposition 3.2. Soit $D = \{H_t\}$ un pinceau de Lefschetz, et supposons $n = 2m$ pair. Alors ou bien

(3.2.1) $H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \subset m^* H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) + N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$

ou bien:

(3.2.2) Pour toute courbe C propre et lisse sur $k(\bar{\eta})$, et tout cycle algébrique z sur $C \times X_{\bar{\eta}}$ de codimension m, l'homomorphisme induit (1.2.3)

(3.2.3) $cl(z) : H^1(C, \mathbb{Q}_\ell(1+i-m)) \longrightarrow H^{2m-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$

a son image dans $m^* H^{2m-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$.

Démonstration. Supposons que l'image d'un tel homomorphisme (3.2.3) n'est pas contenu dans $m^* H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$, ou, ce qui revient au même, que son image dans $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) = H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \; H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$

n'est pas nulle. Comme cette image est évidemment stable sous les opérations d'un sous-groupe d'indice fini dans $gal(k(\bar{\eta})/k(\eta))$, l'irréductibilité (3.1.6) de $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)$ se récrit en disant

$$H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) = m^* H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) + \text{l'image de (3.2.3)}$$

et, par définition,

l'image de (3.2.3) = l'image par $cl(z)$ de $H^1(C, \mathbb{Q}_\ell(1+i-m))$

$$\subset N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \quad ,$$

de sorte qu'on a bien trouvé

$$H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) = m^* H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) + N^{m-1} H^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

3.3. La condition (B).

3.3.1. On dira que l'inclusion

$$m : X_{\overline{\eta}} \hookrightarrow X \times_k k(\overline{\eta})$$

vérifie la condition (B) s'il existe

(3.3.2) $V_{\overline{\eta}}$, un cycle algébrique de codimension n-1 sur $X_{\overline{\eta}} \times (X \times_k k(\overline{\eta}))$ tel que l'application qu'il définit

(3.3.3) $V_{\overline{\eta}} : H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$

soit inverse à gauche de

(3.3.4) $m^* : H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{n-1}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$,

i.e. tel que l'on ait

(3.3.5) $V_{\overline{\eta}}\ m^* = id$.

(3.4). Cette condition (B) est vérifiée si l'opération $\wedge$ [4, 1.4.2.1] est algébrique (cf. [4, 2.12 (ii)]. On conjecture que $\wedge$ est toujours algébrique, donc que la condition (B) est toujours vérifiée, et on sait le vérifier dans de nombreux cas [4]. Elle est vérifiée trivialement pour X une intersection complète de dimension paire car alors on sait (IX 1.6) que

(3.4.1) $$H^{n-1}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) = 0 .$$

4. Le théorème de GRIFFITHS

Théorème 4.1. Soit X projectif, lisse et connexe sur k, de dimension paire $n = 2m \geq 4$ Soit D un pinceau de Lefschetz de sections par des hypersurfaces de degré d. On suppose

(4.1.0) X vérifie (L V) (XVIII 5.2.2),

(4.1.1) le pinceau D vérifie l'hypothèse (A) (XVIII 5.3)

(4.1.2) le pinceau D vérifie (3.2.2), i.e. (3.2) la cohomologie évanescente $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ n'est pas de niveau ≤ 1,

(4.1.3) l'inclusion $m^* : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X \times_k k(\bar{\eta})$ vérifie l'hypothèse (B) (3.3).

Alors, si un cycle algébrique z de codimension m sur X est tel que sa restriction (en tant que cycle algébrique) à $X_{\bar{\eta}}$ satisfasse

(4.1.4) $z_{\bar{\eta}} = z|X_{\bar{\eta}}$ est algébriquement équivalent à zéro

Alors (4.1.5) z est $\mathbb{Q}_\ell$-cohomologue à zéro, i.e. $cl(z) \in H^{2m}(X, \mathbb{Q}_\ell(m))$ est nul.

4.2. Une remarque sur le cas où X est une intersection complète. Comme on a déjà remarqué (cf. XVIII 5.2.5, et (3.4)), les hypothèses (4.1.0) et (4.1.3) sont alors automatiquement vérifiées. Quant à l'hypothèse (4.1 1), on a vu (XVIII 6.3.4, 6.4) qu'elle est vérifiée pour un pinceau d'hypersurfaces de degré $d > 2n$ D'autre part, on va prouver dans le prochain exposé la condition (4.1 2) pour un pinceau "général" d'hypersurfaces de degré $d > 2n$ (XXI 5.2). Donc un pinceau "général" d'hypersurfaces de degré $d > 2n$ vérifie toutes les hypothèses du théorème 4.1.

4.3. Revenant au cas où X est quelconque, il semble très plausible que pour un degré d assez grand, toutes les conditions de 4.1 sont vérifiées pour D, du moins pour D assez général. On a déjà vu que c'est le cas pour (4.1.1) (XVIII 6.4), et on a signalé qu'on conjecture que (4.1.0) et (4.1.3) sont vérifiés en tous cas (et c'est vrai en tous cas pour (4.1.0) si car $k = 0$). Quant à la condition (4.1.2), elle est vérifiée (grâce à la théorie de Hodge) pour d grand si car $k=0$, et des arguments heuristiques (que le lecteur trouvera en appendice à l'exposé suivant) rendent plausibles qu'il en est encore de même si car $k > 0$. Plus généralement, ces arguments (théorie de Hodge, resp. cohomologie cristalline) prouvent (resp. rendent plausible) que pour une variété projective lisse X de dimension n, et pour tout pinceau de Lefschetz D d'hypersurfaces de degré d assez grand (resp. tout pinceau D "assez général" d'hypersurfaces de degré d) la cohomologie évanescente $E^{n-1}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est de niveau égal à $n-1$ (i.e. n'est pas de niveau $\leq n-3$, i.e. n'est pas de coniveau 1).

4.4. Démonstration du théorème de Griffiths.

Soit z un cycle algébrique de codimension n sur X, tel que

(4.4.1) $z_{\bar{\eta}} = z|X_{\bar{\eta}}$ est algébriquement équivalent à zéro.

Par définition, il existe

(4.4.2) une courbe $C_{\bar{\eta}}$, propre, lisse et connexe sur $k(\bar{\eta})$,

(4.4.3) deux sections $t_i(\bar{\eta}) : Sp(k(\bar{\eta})) \longrightarrow C$, $i=1,2$,

(4.4.4) un cycle algébrique $P_{\bar{\eta}}$ sur $C_{\bar{\eta}} \times X_{\bar{\eta}}$, de codimension n , tels que

(4.4.5) $z_{\bar{\eta}} = P_{\bar{\eta}}(t_1(\bar{\eta})) - P_{\bar{\eta}}(t_2(\bar{\eta}))$ sur $X_{\bar{\eta}}$.

Considérons le cycle $P_{\bar{\eta}}$ comme une <u>correspondance algébrique</u> sur $(C_{\bar{\eta}}, X_{\bar{\eta}})$, définissant une correspondance cohomologique, encore notée $P_{\bar{\eta}}$, ou encore un homomorphisme

(4.4.6) $P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell((i+m-1)))$.

Considérons de même la correspondance algébrique $V_{\bar{\eta}}$ (3.3.2) sur $(X_{\bar{\eta}}, X \otimes_k k(\bar{\eta}))$ donnée par l'hypothèse (3) de (4.1.3), définissant

(4.4.7) $V_{\bar{\eta}} : H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i+m-1)) \longrightarrow H^*(X \otimes_k k(\bar{\eta}), \mathbb{Q}_\ell(i+m-1))$,

d'où une correspondance algébrique composée $Q_{\bar{\eta}} = V_{\bar{\eta}} \circ P$ sur $(C_{\bar{\eta}}, X \otimes_k k(\bar{\eta}))$, définissant

(4.4.8) $Q_{\bar{\eta}} = V_{\bar{\eta}} \circ P_{\bar{\eta}} : H^*(C_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X \otimes_k k(\bar{\eta}), \mathbb{Q}_\ell(i+m-1))$

Considérons l'inclusion

$$m : X_{\bar{\eta}} \longrightarrow X \otimes_k k(\bar{\eta}) ,$$

donnant la correspondance algébrique m^* sur $(X \otimes_k k(\bar{\eta}), X_{\bar{\eta}})$, d'où la correspondance composée $m^* Q_{\bar{\eta}}$ sur $(C_{\bar{\eta}}, X_{\bar{\eta}})$, définissant

(4.4 9) $m^* Q_{\bar\eta} = m^* V_{\bar\eta} P_{\bar\eta} : H^*(C_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i+m-1))$.

Considérons la correspondance algébrique

(4.4.10) $R_{\bar\eta} = P_{\bar\eta} m^* Q_{\bar\eta} = (id - m^* V_{\bar\eta}) P_{\bar\eta} : H^*(C_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{*+2(m-1)}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i+m-1))$.

Comme $V_{\bar\eta}$ est inverse à gauche de m^* , $(id - m^* V_{\bar\eta})$ est un projecteur dans $H^*(X_{\bar\eta}, -)$, dont l'image est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(m^* : H^*(X \otimes_k k(\bar\eta), -) \longrightarrow H^*(X_{\bar\eta}, -))$. Comme en vertu de l'hypothèse (4.1.2) l'homomorphisme

(4.4.11) $R_{\bar\eta} : H^1(C_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \longrightarrow H^{2m-1}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(i+m-1))$

a son image dans $\mathrm{Im}\, m^*$, on trouve que

(4 4.12) l'homomorphisme (4.4.11) est nul

Choissisons maintenant une extension finie

$$L/k(\eta)$$

au-dessus de laquelle les objets

$$C_{\bar\eta},\ t_1(\bar\eta),\ t_2(\bar\eta),\ Q_{\bar\eta}\ ,\ R_{\bar\eta}$$

soient déjà définis, et

U un ouvert $\neq \emptyset$ dans le normalisé de $\mathbb{P}^1$ dans L.

Prenant U assez petit, il existe une courbe relative propre et lisse, à fibres géométriquement connexes

$$C \longrightarrow U \ ,$$

dont la fibre générique géométrique soit $C_{\bar{\eta}}$, et deux sections

$$t_i : U \longrightarrow C \quad i = 1, 2$$

dont les valeurs en $\bar{\eta}$ sont $t_i(\bar{\eta})$.

Soient

$$\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

la projection (XVIII 3.1 4) dont les fibres sont les sections du pinceau,

$$\tilde{X}_U = \tilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} U \ ,$$

et

$$M : \tilde{X}_U \hookrightarrow X \times U$$

l'immersion canonique de $\tilde{X}_U$ dans $X \times U$ (considéré comme la famille constante sur U de valeur X) ,

$$z_U = M^* \, pr_i^*(z) \ ,$$

le cycle algébrique sur $\tilde{X}_U$, induit par z . Prenant U assez petit, il existe un cycle algébrique R sur $C \times_U \tilde{X}_U$ dont la valeur en $C_{\bar{\eta}} \times X_{\bar{\eta}}$ est $R_{\bar{\eta}}$, et un cycle algébrique Q sur $C \times X \times U$ dont la valeur en $C_{\bar{\eta}} \times (X \otimes_k k(\bar{\eta}))$ est $Q_{\bar{\eta}}$, tels que l'on ait

$$(4.4.13) \qquad z_U = R(t_1) - R(t_2) + (id \times M)^* [Q(t_1) - Q(t_2)] \ .$$

Pour démontrer le théorème, il suffira, grâce à l'injectivité de

l'homomorphisme de Griffiths "modulo partie fixe" (XVIII 5.8.7)

$$\mathrm{Prim}^{2m}(X,\mathbb{Q}_\ell(n)) \xrightarrow{\text{grif}} \frac{H^1(U,R^{2m-1}\rho_{U*}\mathbb{Q}_\ell(m))}{M^*H^1(U,H^{2m-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(m))} \quad ,$$

de démontrer que l'image de z_U par

$$u_\rho : \mathrm{Prim}^{2m}(\widetilde{X}_{U/U},\mathbb{Q}_\ell(m)) \longrightarrow H^1(U,R^{2m-1}\rho_{U_*}\mathbb{Q}_\ell(m))$$

se trouve dans $M^*(H^1(U,H^{2m-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(m))$.

Or, compte tenu de la décomposition (4.4.13), et de la commutativité de (1 4.2)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Prim}^2(C/U,\mathbb{Q}_\ell(1)) & \xrightarrow{Q} & \mathrm{Prim}^{2m}(X\times U/U,\mathbb{Q}_\ell(n)) & \xrightarrow{M^*} & \mathrm{Prim}^{2m}(\widetilde{X}_{U/U},\mathbb{Q}_\ell(m)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle u_{pr_2}} & & \downarrow{\scriptstyle u_\rho} \\ & & H^1(U,H^{2m-1}(X,\mathbb{Q}_\ell(m)) & \xrightarrow{M^*} & H^1(U,R^{2m-1}\rho_{U_*}\mathbb{Q}_\ell(m)) \end{array} ,$$

il suffit de démontrer

$$u_\rho(R(t_1) - R(t_2)) = 0 \quad \text{dans} \quad H^1(U,R^{2n-1}\rho_{U_*}\mathbb{Q}_\ell(n)) \quad ,$$

qui est conséquence de (4.3.12), grâce à 1.7.

5. Le Groupe de Griffiths

5.0. Soit S propre et lisse sur un corps k algébriquement clos Désignons par

(5.0.1) $Z^i(S)$ le groupe des cycles algébriques de codimension i sur S

(5.0.2) $Z^i_{alg}(S)$ le sous-groupe de $Z^i(S)$ formé des cycles algébriquement équivalent à zéro,

et, pour tout nombre premier $\ell \neq$ car (k)

(5.0.3) $Z^i_{\ell\text{-coh}}(S)$ le sous-groupe de $Z^i(S)$ formé des cycles dont la classe de cohomologie dans $H^{2i}(S,\mathbb{Q}_\ell(i))$ est nulle.

(On conjecture [4] que ce groupe est indépendant de ℓ , ce qui est vrai du moins si car.k=0 .)

On pose

(5.0 4) $Grif^i_\ell(S) = Z^i_{\ell\text{-coh}}(S)/\ Z^i_{alg}(S)$.

Si de plus S est projectif, et muni d'une immersion projective, on pose

(5.0.5) $Z^{i,prim}(S)$ = le sous-groupe de $Z^i(S)$ formé des cycles qui sont primitifs (i.e. dont la classe de cohomologie l'est),

(5.0.6) $Prim^{2i}_{alg}(S,\mathbb{Q}_\ell(i))$ = le sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel de $H^{2i}(S,\mathbb{Q}_\ell(i))$ engendré par des classes de cohomologie des cycles algébriques primitifs.

Corollaire 5.1 Sous les hypothèses de 4.1, on a

5.1.1. $\dim_{\mathbb{Q}}(Grif^n(X_{\bar\eta})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(Prim^{2n}_{alg}(X,\mathbb{Q}_\ell(n)))$

En effet, d'après 4.1 5, le noyau de la flèche composée

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} Z^{n,prim}(X) \xrightarrow{\text{rest. à } X_{\bar\eta}} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} Z^n_{\ell\text{-coh}}(X_{\bar\eta}) \longrightarrow Grif^n(X_{\bar\eta})$$

est contenu dans $Z^n_{\ell\text{-coh}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, de sorte que $\mathrm{Prim}^{2n}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q}_\ell(n))$ est un quotient d'un sous-groupe de $\mathrm{Grif}^n(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ce qui achève la démonstration

Remarque 5.2. Pour X une hypersurface quadrique dans $\mathbb{P}^{2m+1}$ on a

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Prim}^{2m}_{\mathrm{alg}}(X,\mathbb{Q}_\ell(n)) = 1$$

En particulier (4.2), pour X une quadrique dans $\mathbb{P}^5$, la section de X par une hypersurface générique de degré > 5 contient une courbe, $\mathbb{Q}_\ell$-cohomologie à zéro, dont aucun multiple n'est algébriquement équivalent à zéro.

REFERENCES

[1] Griffiths, P. On the Periods of Certain Rational Integrals III, à paraître dans Annals of Mathematics.

[2] Grothendieck, A. Le Groupe de Brauer III (esp §§ 9, 10) dans Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland, 1968.

[3] Jouanolou, J.P. Cohomologie ℓ-adique, Thèse, Paris 1969.

[4] Kleiman, S. Algebraic Cycles and the Weil Conjectures, in Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland, 1968.

[5] Manin, J. Rational Points of Algebraic Curves over Function Fields, Translations Amer. Math. Soc.

S G A 7

E X P O S E XXI

LE NIVEAU DE LA COHOMOLOGIE DES INTERSECTIONS COMPLETES

par N. Katz

avec un Appendice par P. Deligne (§ 5)

SOMMAIRE

0. Introduction. 1

1. La matrice de Hasse-Witt d'une intersection complète. 2

2. Le coniveau dans le cas d'un corps de définition fini. 14

3. Application aux intersections complètes. 16

4. Les conclusions. 19

5. Théorèmes d'intégralité. 21

0. Introduction

Soient X une variété projective et lisse de dimension $n \geq 3$, $Y(d)$ une section par une hypersurface de degré d, et $E^{n-1}(Y(d),\mathbb{Q}_\ell)$ la cohomologie "évanescente" de $Y(d)$ (XVIII 5.4.4). Le but du présent exposé et de démontrer que pour d suffisamment grand, et $Y(d)$ suffisament générale, il n'est pas vrai que tout $E^{n-1}(Y(d),\mathbb{Q}_\ell)$ "provienne" du $H^i (i < n-1)$ de variétés algébriques propres et lisses, par des correspondances algébriques. En caractéristique nulle, c'est une conséquence triviale de la bigraduation de Hodge sur la cohomologie complexe, et de ce que, pour la cohomologie cohérente, on a

$$\dim H^{n-1}(Y(d), \mathcal{O}_{Y(d)}) \longrightarrow \infty \text{ pour } d \longrightarrow \infty \quad .$$

La méthode employée en caractéristique p est encore de relier la cohomologie cohérente $H^{n-1}(Y(d), \mathcal{O}_{Y(d)})$ (un vectoriel en car. p) à la cohomologie étale $H^{n-1}_{et}(Y(d),\mathbb{Q}_\ell)$. Pour ceci, on se place sur un corps

de base fini, où les deux sont liés par la fonction ζ de la variété Y(d), fonction qui s'exprime en termes de la cohomologie ℓ-adique, et dont la "réduction modulo p" s'exprime en termes de la cohomologie cohérente (cf. XXII 3.9). Cette méthode marche sans problème pour les intersections complètes, grâce à la connaissance détaillée des deux espèces de cohomologie (étale et cohérente) dans ce cas, et donne le résultat principal 4.2 comme conséquence d'un résultat (1.4) sur les opérations de Hasse-Witt (1.0).

Il existe des arguments heuristiques dûs à A. GROTHENDIECK et s'appuyant sur le yoga de la cohomologie cristalline, qui rendent plausible l'énoncé général pour toute X projective et lisse, par essentiellement la même méthode.

Même dans le cas particulier des intersections complètes, la démonstration utilise de façon essentielle (2.2) le théorème d'intégralité des valeurs propres de Frobenius 2.1, démontré récemment par P. DELIGNE, et qui est prouvé dans l'Appendice I.

1. La matrice de Hasse-Witt d'une intersection complète

Définition 1.0. Un schéma propre sur un corps k d'exposant caractéristique p s'appelle spécial si l'opération additive p-linéaire

$$\mathfrak{F}_p : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad , \quad g \longmapsto g^p \tag{1.0.1}$$

induit une opération

$$\mathfrak{F}_p : H^{\dim X}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^{\dim X}(X, \mathcal{O}_X) \tag{1.0.2}$$

qui est nilpotente (ou, ce qui revient au même, posant $M = \dim_k(H^{\dim X}(X,\mathcal{O}_X))$, si l'opération p^M-linéaire

$$(1.0.3) \qquad \mathfrak{F}_p^M = \mathfrak{F}_{p^M} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad , \quad g \longmapsto g^{p^M}$$

tue $H^{\dim X}(X,\mathcal{O}_X)$.

Rappelons [2] que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'homomorphisme

$$H^i(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathfrak{F}_p} H^i(X,\mathcal{O}_X)$$

induit par (1.0.1) s'appelle classiquement l'homomorphisme de Hasse-Witt dans $H^i(X,\mathcal{O}_X)$. On notera que si $p = 1$, dire que X est non-spécial signifie simplement que $H^{\dim X}(X,\mathcal{O}_X) \neq 0$.

Théorème 1.1. **Fixons** un exposant caractéristique p, une dimension $n \geq 1$, un entier $r \geq 1$ et un multidegré $(d_1,\ldots,d_r)$. Si on a

$$(1.1.0) \qquad \sum_{i=1}^{r} d_i \geq (n+r)+1$$

alors, parmi toute les intersections complètes (de dimension n) dans $\mathbb{P}^{n+r}$ de multidegré $(d_1,\ldots,d_r)$ en caractéristique p, un élément "assez général" est non-spécial (1.0).

Démonstration. Désignons par

$$(1.1.1) \qquad f : X_U \longrightarrow U$$

la"famille universelle" des intersections complètes dans $\mathbb{P}^{n+r}$ de

multidegré $(d_1,\dots,d_r)$ en caractéristique p (muni des équations de définition), de sorte que U est un ouvert dans un produit de r espaces projectifs sur $\mathbb{F}_p$, d'une dimension impressionnante.

On sait que le $\mathcal{O}_U$-module

(1.1.2) $\qquad R^n f_* \mathcal{O}_{X_{\cdot U}}$

est localement libre, et sa formation commute à tout changement de base (XI 1.5 (i)) et, par l'hypothèse (1.1.0), que son rang M est non nul (XI 2.5). Cela donne le théroème si p = 1, pour toute intersection complète vérifiante (1.1.0).

Supposons $p \geq 2$. L'opération de Hasse-Witt itérée

(1.1.3) $\qquad \mathfrak{H}_p^M = \mathfrak{H}_{p^M} : R^n f_* \mathcal{O}_{X_U} \longrightarrow R^n f_* \mathcal{O}_{X_U}$

étant p^M-linéaire sur $\mathcal{O}_U$, et $R^n f_* \mathcal{O}_{X_U}$ étant localement libre, l'action (1.1.3) s'exprime localement sur U par une matrice H de type (M,M) à valeurs dans $\mathcal{O}_U$, de sorte que

(1.1.4) $\qquad \{ u \in U \mid X_u$ est non-spéciale$\}$ est ouvert dans U

(car c'est l'ensemble des u tels que $H(u) \neq 0$), et, U étant irréductible, il suffit de trouver une valeur de u telle que X_u soit non spéciale, ce qu'on va faire sur un corps fini.

Proposition 1.1.5. Soit X une intersection complète sur $\mathbb{F}_q$. Si X n'a pas des points $\mathbb{F}_q$-rationnels, alors X est non spéciale.

Démonstration. En effet, il suffit évidemment de prouver que pour X une intersection complète, on a l'implication

(1.1.5.1) X spéciale $\Longrightarrow$ $\mathrm{card}(X(\mathbb{F}_q)) \equiv 1 \bmod p$.

Or, d'après la formule de la trace (prouvée dans l'exposé suivant XXII, 3.2), on a

$$\mathrm{card}(X(\mathbb{F}_q)) \equiv \sum_{i\geq 0} (-1)^i \mathrm{tr}(\mathfrak{F}_q | H^i(X, \mathcal{O}_X)) \quad .$$

Compte tenu de ce que $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$ si $i\neq 0, n=\dim(X)$ et $H^0(X,\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{F}_q$ (XI, 1.5 (iii)), ceci se récrit

$$\mathrm{card}(X(\mathbb{F}_q)) \equiv 1 + (-1)^n \mathrm{tr}(\mathfrak{F}_q | H^n(X, \mathcal{O}_X)) \quad .$$

Si X est spéciale, alors par définition l'opération de $\mathfrak{F}_q$ sur $H^n(X,\mathcal{O}_X)$ est nilpotente, donc a une trace nulle, d'où l'implication (1.1.5.1) et la proposition.

Proposition 1.2. Quelle que soit la puissance q de p, si

$$\sum_1^r d_i \geq n+r+1 \quad ,$$

il existe une intersection complète dans $\mathbb{P}^{n+r}_{\mathbb{F}_q}$ de multidegré $(d_1,\ldots,d_r)$ qui est sans point $\mathbb{F}_q$-rationnel.

Démonstration.

Commençons par le cas r=1. Pour tout $d \geq n+2$, il faut trouver une forme homogène de degré d

(1.2.1) $\quad H(X_1,\ldots,X_{n+2}) \in \mathbb{F}_q[X_1,\ldots,X_{n+2}]$

telle que

(1.2.2) $\quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+2}) \in (\mathbb{F}_q)^{n+2}$, $H(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+2}) = 0 \Longrightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_{n+2}=0$.

Pour ceci, posons $\mathbb{E} = \mathbb{F}_q{}^d$, et soient $\beta_1,\ldots,\beta_{n+2}$ des éléments de $\mathbb{E}$ qui sont linéairement indépendant sur $\mathbb{F}_q$. On prend

(1.2.3) $\quad H(X_1,\ldots,X_{n+2}) = N_{\mathbb{E}/\mathbb{F}_q}\left(\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i X_i\right)$.

Dans le cas général, compte tenu de ce que

(1.2.4) $\quad \sum_{i}^{r} d_i \geq n+r+1$,

on peut trouver r entiers

(1.2.5) $\quad 1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_r = n+r+1$

vérifiant

(1.2.6)
$$\begin{cases} d_1 \geq a_o \\ d_2 \geq a_2 - a_1 \\ d_r \geq a_r - a_{r-1} \end{cases}$$

On prend, pour i = 1,...,r, une forme homogène de degré d_i

$$H_i\ (X_{(a_{i-1}+1)},\ldots,X_{a_i}) \in \mathbb{F}_q[X_{a_{i-1}+1},\ldots,X_{a_i}]$$

en $a_i - a_{i-1}$ variable qui a la propriété (1.2.2). L'intersection complète voulue est celle définie par les formes homogènes

$$H_1(X_1,\ldots,X_{a_1}),\ \ldots\ ,\ H_r(X_{a_{r-1}},\ldots,X_{a_r}) \quad .$$

Théorème 1.3. Soit X une intersection complète, irréductible, de dimension $n \geq 1$ sur un corps k d'exposant caractéristique p. Pour tout entier $d \geq 1 + n$, une section assez générale de X par une hypersurface de degré d est non-spéciale (1.0).

Démonstration. Les sections $X.H_u$ de X (par des hypersurfaces) de degré d sont (paramétérisées par) les droites dans $H^0(X,\mathcal{O}_X(d))$, i.e. par

(1.3.1) $$\mathbb{P}(H^0(X,\mathcal{O}_X(d))) = U$$

et au-dessus de U, nous avons la "section universelle de X par une hypersurface de degré d "

(1.3.2) $$f : X.H_u \longrightarrow U \quad ,$$

soit U' l'ouvert des $u \in U$ tels que $\dim(X_u) = n-1$. Nous savons par (XI 1.5 (i) et 2.5) que le $\mathcal{O}_U$-module

(1.3.3) $$R^{n-1}f_*(\mathcal{O}_{X.H_u}) \mid U'$$

est un faisceau localement libre dont la formation commute à tout changement de base, et est de rang $M \geq 1$. Cela donne le théorème si $p = 1$, pour toute section par une hypersurface de degré $\geq 1+n$. On suppose donc que $p > 0$; l'opération ϑ_{p}^{n} s'exprime encore localement en termes d'une matrice $M \times M$ à valeurs dans $\mathcal{O}_u$, de sorte que

(1.3.4) $\{ u \in U' \mid X.H_u$ est non-spéciale$\}$ est ouvert dans U' .

Il suffit donc de démontrer que l'ensemble (1.3.4) est non-vide.

Traitons d'abord le cas

(1.3.5) $k = \mathbb{F}_q$.

Quitte à remplacer $\mathbb{F}_q$ par une extension finie, on peut supposer

(1.3.6) $\mathrm{card}(X(\mathbb{F}_q)) > 0$

(1.3.7) il existe des coordonnées homogènes $X_1,\ldots,X_{n+r+1}$ dans l'espace ambiant $\mathbb{P}_k^{n+r}$, telles que X ne rencontre pas la variété linéaire $X_1=\ldots=X_{n+1} = 0$.

On prend alors une forme homogène de degré d

(1.3.8) $H(X_1,\ldots,X_{n+1}) \in \mathbb{F}_q[X_1,\ldots, X_{n+1}]$

qui a la propriété (1.2.2) (ceci est possible car $d \geq 1+n$). On prend pour H l'hypersurface dans $\mathbb{P}^{n+r}$ d'équation $H(X_1,\ldots,X_{n+1}) = 0$. Alors

l'intersection X.H est sans point $\mathbb{F}_q$-rationnel par construction, ce qui montre à la fois, grâce à (1.3.6), que $X \not\subset H$, donc X.H est de dimension n-1 (X étant irréductible) i.e. $H \in U'$, et que X.H est non-spécial (1.5).

Passons au cas général. Regardant les équations qui définissent X, on voit qu'on peut supposer que k est de type fini sur $\mathbb{F}_p$, et qu'il existe un sous-anneau B de k, de type fini (comme anneau) sur $\mathbb{F}_p$ dont le corps des fractions est k, tel que (1.3.9) $X \subset \mathbb{P}^{n+r}_k$ est la fibre générique d'une intersection complète relative $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}^{n+r}_B$ qui est, fibre par fibre, de même multidegré que X, et géométriquement irréductible.

Désignons par

(1.3.10) $\qquad p : \widetilde{X} \longrightarrow S = \mathrm{Spec}(B)$

la projection, par

(1.3.11) $\qquad$ E, le $\mathcal{O}_S$-module localement libre $p_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(d)$,

et par

(1.3.12) $\qquad \pi : T = \overset{\vee}{\mathbb{P}}(E) \longrightarrow S$

le fibré associé des droites dans $\mathbb{E}$. Notons que la fibre générique de (1.3.12) n'est autre que $U = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$. Au-dessus de T nous avons la section universelle de $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}^{n+r}_B$ par des hypersurfaces de degré d, notée

(1.3.13) $$\alpha : \widetilde{X}.H_T \longrightarrow T \quad .$$

Ces constructions s'insèrent dans le diagramme à carrés cartésiens

(1.3.14)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}.H_T & \longleftarrow & X.H_u = (\widetilde{X}.H_T) \times_U T \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \\ T & \longleftarrow & U = T \times_S Sp(k) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & Sp(k) \end{array} ,$$

et nous avons encore que le $\mathcal{O}_T$-module

(1.3.15) $$R^{n-1}\alpha_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}.H_T})$$

au-dessus de l'ouvert $T' \subset T$ formé des t tels que $\dim \alpha^{-1}(t) = n-1$, est localement libre, et se formation y commute à tout changement de base. Compte tenu de ce que les schémas T et U ont le même point générique, pour démontrer que (1.3.4) est non vide, il suffit de vérifier que l'ouvert de T'

(1.3.16) $$\{ t \in T' \mid \widetilde{X}_{\pi(t)}.H_t \text{ est non-spéciale} \}$$

est non vide. Or, le cas (1.3.5) déjà traité démontre que pour tout point

fermé $s \in S$, la fibre $\pi^{-1}(s)$ a une intersection non vide avec l'ouvert (1.3.16), Q.E.D.

Des raisonnements tout à fait semblables permettent de démontrer:

Théorème 1.4. Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ un schéma projectif de Cohen-Macaulay, équidimensionnel de dimension $n \geq 1$, sur un corps k, alors il existe un entier d_o tel que pour $d \geq d_o$, désignant par $X.H \xrightarrow{i} X$ l'inclusion d'une section par une hypersurface générale de degré d, l'action de

(1.4.0) $\quad \mathfrak{S}_p$ sur $H^{n-1}(X.H, \mathcal{O}_{X.H}) \;/\; i^*H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X)$

soit non nilpotente.

Démonstration. On se ramène, tout comme ci-dessus, au cas $k = \mathbb{F}_q$, et au problème de trouver un seul H (pour un degré donné assez grand et tel que $\dim(H^{n-1}(X.H, \mathcal{O}_{X.H}))$ soit indépendant de H ; cf. 1.4.4) qui rend vrai (1.4.0). Quitte à faire agrandir q, on peut supposer que les composantes irréductibles X_i de X sont géométriquement irréductibles, satisfont

(1.4.1) $\quad \operatorname{Card} X_i(\mathbb{F}_q) \geq 2$,

et qu'on ait

(1.4.2) il y a des coordonnés projectives $X_o, \ldots, X_N$ telles que X ne coupe pas la variété linéaire $X_o = \ldots = X_n = 0$.

Par un théorème d'évanescence de Serre, ([1] ou SGA 2 XII 1.4), il existe un entier d_1 tel que pour tout entier $d \geq d_1$, on ait :

(1.4.3) $H^i(X,\mathcal{O}_X(-d)) = 0$ si $i \neq n = \dim X$.

Désignant par H une hypersurface de degré $d \geq d_1$, on a (par 1.4.3) :

$$H^i(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^i(X.H,\mathcal{O}_{X.H}) \quad \text{si} \quad i \leq n-2$$

(1.4.4)

$$H^{n-1}(X,\mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^{n-1}(X.H,\mathcal{O}_{X.H}) \text{ injectif .}$$

Nous allons démontrer le théorème en prenant $d_o = \max(1+N,d_1)$. Pour tout entier $d \geq d_o$, il faut trouver une hypersurface H de degré d, définie sur $\mathbb{F}_q$, qui ne contienne aucun X_i, et telle que

(1.4.5) $\quad \text{trace}(\mathfrak{F}_q \text{ sur } H^{n-1}(X.H,\mathcal{O}_{X.H}) \;/\; H^{n-1}(X,\mathcal{O}_X)) \neq 0$.

D'après la formule de la trace (XX, 3.2.1), on a

(1.4.6) $\quad \text{card}(X.H\,(\mathbb{F}_q)) \bmod p = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{tr}(\mathfrak{F}_q \text{ sur } H^i(X.H,\mathcal{O}_{X.H}))$

$$\overset{(1.4.4)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{tr}(\mathfrak{F}_q \text{ sur } H^i(X,\mathcal{O}_X)) + (1)^{n-1} \text{tr}\left(\mathfrak{F}_q \text{ sur } \left(\frac{H^{n-1}(X.H,\mathcal{O}_{X.H})}{H^{n-1}(X,\mathcal{O}_X)}\right)\right.$$

Désignons par $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la quantité

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{tr}(\mathfrak{F}_q \text{ sur } H^i(X,\mathcal{O}_X)) \quad .$$

Il suffit alors, pour tout $d \geq d_o$, de trouver une H défini sur $\mathbb{F}_q$, de degré d, qui ne contient pas X, et tel que

(1.4.7) $$\mathrm{Card}(X.H\,(\mathbb{F}_q)) \not\equiv a \mod p \ .$$

Il y a lieu de distinguer deux cas. Si $a \neq 0$, il suffit de prendre un H sur $\mathbb{F}_q$ tel que $(X.H)\,(\mathbb{F}_q)$ soit vide, tout comme dans (1.3.8). Un tel H vérifie (1.4.7), et ne contient aucun X_i (par hypothèse on sait que $\mathrm{Card}(X_i(\mathbb{F}_q)) \geq 2$).

Si $a = 0$, il suffira de trouver un H tel que $\mathrm{Card}(X.H)(\mathbb{F}_q)=1$ (1.4.7 sera vérifié, et $X_i \not\subset H$, car $\mathrm{Card}(X_i)(\mathbb{F}_q) \geq 2$). Pour ceci, on choisit des coordonnées projectives $X_o,\ldots,X_N$ telles que $(1,0,\ldots,0)$ soit un point de X. On prend H d'équation $H(X_1,\ldots,X_N) = 0$, où H est une forme homogène telle que (cf. (1.2.2))

(1.4.8) $$\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{F}_q,\ H(\alpha_1,..,\alpha_N) = 0 \Longrightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_N = 0 \ .$$

Alors, l'hypersurface définie par H dans $\mathbb{P}^N$ n'a que le point $(1,0,\ldots,0)$ comme point à valeurs dans $\mathbb{F}_q$, donc a fortiori, X.H n'a que ce point comme $\mathbb{F}_q$-point. cqfd.

2. Le coniveau dans le cas d'un corps de définition fini

2.0. Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout nombre premier $\ell \neq \mathrm{car}(\mathbb{F}_q)$, on désigne par

(2.0.1) $$H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

les groupes de cohomologie à supports propres de $\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$, qui sont des $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels de rang fini sur lesquels opère le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ de $\mathbb{F}_q$. Désignons par

(2.0.2) $$\varphi_q \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q)$$ l'automorphisme de Frobenius .

On sait (SGA 5 XIII 3.2.1) que la fonction zêta de X (XXII 3.0.1) est donné par la formule

(2.0.3) $$Z(t, X/\mathbb{F}_q) = \prod_{i \geq 0} \det\left(1 - t\, \varphi_q^{-1} \mid H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)\right)^{(-1)^{i+1}} .$$

DELIGNE a démontré récemment, en généralisant un résultat dû à WASHNITZER dans le cas X projectif et lisse, le théorème suivant, qui est prouvé dans l'appendice plus bas (5.5.3) :

Théorème 2.1. *Les valeurs propres de* φ_q^{-1} *dans* $H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ *sont des entiers algébriques, et, si* $i > \dim X$, *elles sont divisibles (en tant qu'entiers algébriques) par* $q^{i-\dim X}$.

En particulier, on obtient (tautologiquement),

(2.1 bis) les valeurs propres de φ_q^{-1} dans $H_c^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(-j))$ sont des entiers algébriques divisibles par q^j .

Corollaire 2.2. Soit X propre lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$. Alors les valeurs propres de φ_q^{-1} dans $N^jH^q(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ (notations de XX 2.0.6) sont des entiers algébriques divisibles par q^j .

Démonstration. L'énoncé est invariant par extension finie $\mathbb{F}_{q^N}/\mathbb{F}_q$ (qui revient à prendre les puissances. $N^{ièmes}$ des valeurs propres envisagées). Quitte à faire un tel changement de base, on a, par définition un nombre fini de schémas T_i projectifs, lisses, et géométriquement connexes sur $\mathbb{F}_q$, des dimensions d_i, et de cycles algébriques

$$Z_i \text{ sur } T_i \times_{\mathbb{F}_q} X \text{ de codimension } j + d_i$$

tels que l'homomorphisme de $Gal(\mathbb{F}_q)$-modules

$$H^{q-2j}(\overline{T}_i, \mathbb{Q}_\ell(-j)) \xrightarrow{\oplus cl(Z_i)} N^jH^q(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

soit surjectif, et on conclut par 2.1 bis.

3. Application aux intersections complètes

3.0. Soit X une intersection complète dans $\mathbb{P}^N$ lisse de dimension $n \geq 1$ sur un corps k. Pour $\ell \neq car(k)$, on sait par "Lefschetz faible" et la dualité que (XI 1.6)

$$(3.0.1) \qquad H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ impair et } i \neq n \\ \mathbb{Q}_\ell\left(\frac{-i}{2}\right) \text{ si } i \text{ pair} \leq 2n \text{ et } i \neq n \\ H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) \text{ si } i = n \ . \end{cases}$$

Pour $k = \mathbb{F}_q$, on obtient donc une formule pour la fonction zêta :

$$(3.0.2) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n} (1-q^i t) = \det(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid Prim^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{n+1}} \ ,$$

(on a employé la décomposition primitive, et (3.0.1).)

Corollaire 3.0.3. Sous les hypothèses 3.0, avec $k = \mathbb{F}_q$, on a une congruence modulo p

$$\det(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)) \equiv \det(1-t\,\mathfrak{F}_q \mid H^n(X,\mathcal{O}_X)) \ .$$

Démonstration. D'après la formule de congruence (XXII, 3.2.1), et compte tenu de ce que

$$(3.0.4) \qquad H^i(X,\mathcal{O}_X) \simeq \begin{cases} \mathbb{F}_q & i = 0 \\ 0 & 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & i \geq n+1 \end{cases}$$

on a

$$(3.0.5) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv (1-t)^{-1} \det(1-t\mathfrak{F}_q \mid H^n(X,\mathcal{O}_X))^{(-1)^{n+1}} \mod p$$

de sorte que (3.0.5) et (3.0.2) donnent la congruence

$$(3.0.6) \qquad \det(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid \mathrm{Prim}^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)) \equiv \det(1-t\,\mathfrak{F}_q \mid H^n(X,\mathcal{O}_X)) \mod p \ .$$

La conclusion voulue s'en déduit, compte tenu de ce que

$$(3.0.7) \qquad H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) \simeq \begin{cases} \mathrm{Prim}^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) \text{ si } n \text{ est impair} \\ \mathrm{Prim}^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell\left(\frac{-n}{2}\right) \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} .$$

Corollaire 3.1. Soit X une intersection complète, lisse de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{F}_q$. Si

$$(3.1.0) \qquad H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) = N^1 H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)$$

alors

$$(3.1.1) \qquad \mathfrak{F}_p \text{ est nilpotent sur } H^n(X,\mathcal{O}_X) \ .$$

Démonstration. D'après (2.2), (3.1.0) implique qu'on a

$$(3.1.2) \qquad \det(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)) \equiv 1 \mod p \text{ (et même mod } q) \ ,$$

et ceci, avec (3.0.3), implique qu'on a

$$(3.1.3) \qquad \det(1-t\,\mathfrak{F}_q \mid H^n(X,\mathcal{O}_X)) = 1 \ ,$$

ce qui implique que $\mathfrak{I}_q$ est nilpotent sur $H^n(X,\mathcal{O}_X)$, et donc que $\mathfrak{I}_p$ l'est, cqfd.

Proposition 3.2. Soit X une intersection complète, lisse de dimension $n \geq 1$ sur un corps k. Si

$$H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) = N^1H^n(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) \tag{3.2.1}$$

alors X est spéciale, i.e.

$$\mathfrak{I}_p \text{ est nilpotente sur } H^n(X,\mathcal{O}_X) \quad . \tag{3.2.2}$$

Démonstration. On peut supposer k de type fini sur $\mathbb{F}_p$ (le cas p = 0 étant trivial), et qu'il existe une sous-$\mathbb{F}_p$-algèbre B de type fini de k, telle que X/k soit la fibre générique d'une intersection complète lisse relative $\widetilde{X}$:

(3.2.3)
$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longleftarrow & X = \widetilde{X}/_\eta \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(B) = S & \longleftarrow & \eta = \mathrm{Sp}(k) \end{array} \quad .$$

On sait que le B-module $R^n\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ est localement libre, et sa formation commute à tout changement de base, donc l'ensemble des points

(3.2.4) $\{ s \in S \mid X_s \text{ est spéciale} \}$

est un fermé de S.

Par (XX, 2.3), quitte à rapetisser S, nous pouvons supposer que

(3.2.5) $\forall\, s \in S,\ H^n(\bar{X}_s, \mathbb{Q}_\ell) = N^1H^n(\bar{X}_s, \mathbb{Q}_\ell)$.

Par (3.1), pour tout point fermé s de S, X_s est spécial. Il s'ensuit que le fermé (3.2.4) de S est S tout entier, donc, en particulier, que $X = \tilde{X}_\eta$ est spécial.

4. Les conclusions

Mettant ensemble 1.1 et 3.2, on trouve :

Théorème 4.1. Fixons une caractéristique p, une dimension n, et un multidegré $(d_1,\dots,d_r)$. Désignons par

(4.1.0) $X_V \longrightarrow V$

l'intersection complète lisse de dimension n et multidegré $(d_1,\dots,d_r)$ universelle en caractéristique p.

Si

(4.1.1) $\sum_1^r d_i \geq n + r + 1$,

alors il existe un ouvert dense $U \subset V$ tel que

(4.1.2) pour $u \in U$, on a $H^n(\bar{X}_u, \mathbb{Q}_\ell) \neq N^1H^n(\bar{X}_u, \mathbb{Q}_\ell)$.

Mettant ensemble 1.3 et 3.2, on trouve de même .

Théorème 4.2. Soit X une intersection complète, lisse de dimension $n \geq 1$ sur un corps k . Fixons un entier

(4.2.1) $$d \geq 1 + n \quad .$$

Désignons par

(4.2.2) $$X.H_u \longrightarrow U$$

la famille universelle des sections de X par des hypersurfaces de degré d, qui sont lisses de dimension n - 1. Il existe un ouvert dense $T \subset U$ tel que

(4.2.3) pour $t \in T$, on a $H^{n-1}(X.H_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell) \neq N^1H^{n-1}(X.H_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. SERRE. Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math, 61, 1955, pp.197-278.

[2] J.P. SERRE. Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, dans Symposium Internacional de topologia algebraica, Mexico 1958.

§ 5. Appendice . Théorèmes d'intégralité. Par P. Deligne

5.0. Soient p un nombre premier, q une puissance de p, $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments, E le complété d'un corps de nombres en une place divisant un nombre premier ℓ distinct de p, et T un ensemble de nombres premiers (par exemple $T = \emptyset$).

Un élément α d'une clôture algébrique de E est dit T-entier s'il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et entier sur $\mathbb{Z}[(1/r)_{r\in T}]$. Un endomorphisme F d'un vectoriel de dimension finie sur E est dit T-entier si ses valeurs propres sont T-entières.

Soient k un corps fini à q' éléments, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $\mathcal{G} = \mathcal{G}al(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de k. On désigne par $f \in \mathcal{G}$ la substitution de Frobenius, donnée par

$$f(x) = x^{q'} \quad ,$$

et par F le Frobenius "géométrique", inverse de f dans $\mathcal{G}$. Une représentation ρ de $\mathcal{G}$ dans un vectoriel de dimension finie sur E est dite T-entière si $\rho(F)$ est T-entier. Si X est un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et x un point fermé de X, on désigne par F_x l'élément de Frobenius géométrique du groupe de Galois de k(x) ; si $\bar{x}$ est un point géométrique de X localisé en x et G un E-faisceau sur X, F_x agit par transport de structure sur la fibre $G_{\bar{x}}$.

Définition 5.1. Un E-faisceau constructible G sur un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$ est dit T-entier si, pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X localisé en un point fermé x de X, F_x est un automorphisme T-entier de $G_{\bar{x}}$.

Si $a : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $\underline{G}$ un E-faisceau constructible sur X, on désignera par $\underline{H}^*(X,\underline{G})$ les E-faisceaux $R^*a_*(\underline{G})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)_{ét}$; si $\overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et si $\overline{X}$ est le schéma déduit de X par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\overline{\mathbb{F}}_q$, les $\underline{H}^*(X,\underline{G})$ s'identifient aux groupes de cohomologie $H^*(\overline{X},\underline{G})$, considérés comme modules galoisiens, i.e. munis d'une action du Frobenius géométrique F. De même en cohomologie à support propre.

Lemme 5.2.1. *Soit $\underline{G}$ un E-faisceau constructible sur un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et de dimension $\leq n$.*

(i) Il existe une partie fermée Y de dimension 0 de X telle que la flèche évidente de $\underline{H}^0(X,\underline{G})$ dans $\underline{H}^0(Y,\underline{G})$ soit injective.

(ii) Si X est séparé, et si U est un ouvert de X dont le complémentaire Z est de dimension $< n$, il existe une partie fermée Y de dimension 0 de U et une flèche surjective de $\underline{H}^0(Y,\underline{G})(-n)$ dans $\underline{H}^{2n}_c(X,\underline{G})$.

L'assertion (i) est évidente. Prouvons (ii). Quitte à remplacer X par X_{red} et à rétrécir U, on peut supposer que U est lisse et que $\underline{G}|U$ est constant tordu. On a, puisque $\dim(Z) < n$,

$$0 = \underline{H}^{2n-1}_c(Z,\underline{G}) \longrightarrow \underline{H}^{2n}_c(U,\underline{G}) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^{2n}_c(X,\underline{G}) \longrightarrow \underline{H}^{2n}_c(Z,\underline{G}) = 0$$

et, par dualité de Poincaré (SGA 4 XVIII et [2])

$$\underline{H}^{2n}_c(U,\underline{G}) \simeq \underline{H}^0(U,\underline{G}^\vee(n))^\vee .$$

On conclut par (i).

Théorème 5.2.2. Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et de dimension $\leq n$, et $\underline{G}$ un E-faisceau constructible T-entier. Alors, les endomorphismes F et q^{n-i} F de $H_c^i(X,\underline{G})$ sont T-entiers.

Le cas où dim X ≤ 0 est trivial, et les cas i = 0 et i = 2n du théorème résultent de 5.2.1. Soit Z(X,$\underline{G}$,t) la série formelle

$$Z(X,\underline{G},t) = \prod_{x\in X} \det(1-F_x\, t^{\deg(x)} ; \underline{G}_x)^{-1} \in F[[t]] .$$

D'après (SGA 5 XV 3.2), on a

$$(5.2.3) \qquad Z(X,\underline{G},t) = \prod_i \det(1-Ft ; H_c^i(X,\underline{G}))^{(-1)^{i+1}} .$$

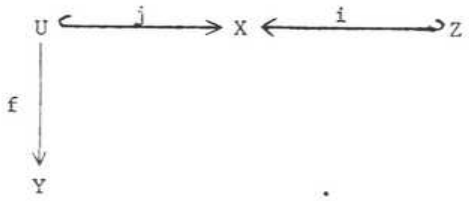
Prouvons 5.2.2 pour n = 1. On a alors $H_c^i(X,\underline{G}) = 0$ pour $i > 2$ (SGA 4 X 4.3 ou XVII 5.2.3.1). Par hypothèse, la série formelle Z(X,$\underline{G}$,t) est à coefficients T-entiers. D'après les cas i = 0 et i = 2n = 2 de 5.2.2, le produit de Z(X,$\underline{G}$,t) par

$$\det(1-Ft ; H_c^0(X,\underline{G})).\ \det(1-Ft ; H_c^2(X,\underline{G}))$$

est encore à coefficients T-entiers. Ce produit n'est autre que $\det(1-Ft ; H_c^1(X,\underline{G}))$, et le théorème en résulte pour n = 1.

Procédons maintenant par récurrence sur n = dim(X).

Soit U un ouvert de Zariski de X, dont le complément Z soit de dimension < n, et tel qu'il existe un morphisme f : U ⟶ Y, de but une courbe et à fibres de dimension ≤ n-1.



La suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^* \underline{G} \longrightarrow \underline{G} \longrightarrow i_! i^* \underline{G} \longrightarrow 0$$

induit des suites exactes

$$\underline{H}^i_c(U,\underline{G}) \longrightarrow \underline{H}^i_c(X,\underline{G}) \longrightarrow \underline{H}^i_c(Z,\underline{G})$$

de sorte que par récurrence, il suffit de vérifier le théorème pour le faisceau $\underline{G}$ sur U. Grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée aux fibres de f, et au théorème de changement de base pour un morphisme propre, on sait que les faisceaux $R^i f_! \underline{G}$ sur Y sont T-entiers, et que les faisceaux $R^i f_! \underline{G}(i-(n-1))$ sont T-entiers. La suite spectrale de Leray pour f s'écrit

$$E_2^{pq} = \underline{H}^p_c(Y, R^q f_! \underline{G}) \Longrightarrow \underline{H}^{p+q}_c(U,\underline{G}) \quad .$$

En vertu de ce qui précède, et du théorème déjà connu pour Y, les E_2^{pq} sont T-entiers, et les $E_2^{pq}(p+q-n)$ le sont aussi. Le théorème en résulte.

Corollaire 5.3. Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, de dimension ≤ 1, U un ouvert de X, $j : U \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion et $\underline{G}$ un E-faisceau constructible sur U. Alors

(a) *Si G est T-entier, alors j_*G est T-entier.*

(b) *Si pour tout $x \in U$, $G_x^\vee$ est T-entier, alors, pour tout $x \in X$, $(j_*G)_x^\vee$ est T-entier.*

On se ramène au cas X affine, puis X projectif.

Définissons H par la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!G \longrightarrow j_*G \longrightarrow H \longrightarrow 0 \quad .$$

La suite exacte de cohomologie correspondante fournit, si Y est le support (fini) de H, une suite exacte

$$H^0(U,G) \longrightarrow H^0(Y,H) \longrightarrow H_c^1(U,G) \quad .$$

On sait, par 5.2.1 et par le théorème 5.2 que $H^0(U,G)$ et $H_c^1(U,G)$ sont T-entiers ; il en résulte que $H^0(Y,H)$ est T-entier, ce qui prouve (a).

Si X' est le normalisé de la partie purement de dimension un de X_{red} et U' un ouvert de U, dense dans le lieu lisse de dimension 1 de U_{red}, et tel que G restreint à U soit constant tordu :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \hookrightarrow & X' & & \\ \downarrow & \overset{j'}{\nearrow} & \downarrow & & \\ U & \overset{j}{\hookrightarrow} & X & \hookleftarrow & Y \end{array} \quad ,$$

alors $p_*j'_*\,G \mid Y \xrightarrow{\sim} j_*G|Y$. Il suffit donc d'étudier le cas où X est lisse de dimension un et où $G|U$ est constant tordu. Le faisceau $G^\vee$ est alors T-entier, de sorte qu'on sait déjà que pour tout $x \in X$ $(j_*\,G^\vee)_x$

est T-entier. Désignnons par $\mathcal{G}_x$ le groupe de Galois du corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ pour $x \in X$, et par $\mathcal{I}_x$ le groupe d'inertie. Le faisceau $\underline{G}$ définit alors une représentation, encore notée $\underline{G}$, de $\mathcal{G}_x$, et le $\mathcal{G}_x/\mathcal{I}_x = \mathcal{G}al(\overline{k(x)}/k(x))$-module $(j_x\underline{G}^\vee)_x$ (resp $(j_*\underline{G})_x^\vee$) s'identifie alors au $\mathcal{G}_x/\mathcal{I}_x$-module des invariants (resp. des coinvariants) dans $\underline{G}^\vee$. Il reste à prouver :

Lemme 5.3.1. Soient K un corps local de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, G son groupe de Galois, I le groupe d'inertie, et ρ une représentation continue de G dans un vectoriel V de dimension n sur E (cf. 5.0), V^I l'espace des invariants sous I, et V_I l'espace des coinvariants sous I, considérés comme G/I-modules. Soient $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ les valeurs propres de F agissant sur V^I. Alors, il existe des entiers $m_i \geq 0$ tels que les valeurs propres de F agissant sur V_I soient les $\alpha_i q^{m_i}$.

Soit I' le plus grand sous-groupe de I d'ordre premier à ℓ. Le groupe $\rho(I')$ est fini, étant un sous-groupe compact d'ordre premier à ℓ de GL(V). On a donc

$$V_I \xrightarrow{\sim} (V^{\rho(I')})_I$$

et, remplaçant V par $V^{I'}$, on peut supposer que I' agit trivialement sur V. On a $I/I' \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell(1)$ (en tant que G/I-modules) ; soit T un générateur topologique de I/I', et, pour chaque α, soit V^α le sous-espace propre généralisé de T dans V de valeur propre α : on a $V = \oplus V^{(\alpha)}$; et la décomposition $V = V^{(1)} \oplus \sum_{\alpha \neq 1} V^{(\alpha)}$ est stable par G, et compatible

au passage au dual ; on peut donc remplacer V par $V^{(1)}$, ce qui permet de supposer que I agit de façon unipotente.

Lemme 5.3.2. Soient V un vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0, I un groupe additif à un paramètre, $\rho : I \longrightarrow Gl(V)$ une représentation de I dans V, N un générateur infinitésimal de I et posons

$$V^{I,k} = V^I \cap \mathrm{Im}(N^k)$$

$$V_{I,k} = \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(N^{k+1}) \longrightarrow V_I) \quad .$$

Alors, la flèche N^k induit un isomorphisme

$$N^k : V_{I,k}/V_{I,k-1} \xrightarrow{\sim} V^{I,k}/V^{I,k+1}$$

et définit des isomorphismes canoniques

$$V_{I,k}/V_{I,k-1} \otimes I^{\otimes k} \simeq V^{I,k}/V^{I,k+1}$$

Les représentations V de I s'identifient, via N, aux k[T]-modules tués par une puissance de T. Il suffit de vérifier 3.2 lorsque V correspond à un k[T]-module irréductible $k[T]/T^k$, ce qui est trivial.

Achevons la démonstration de 5.3.1. Le sorite 5.3.2 fournit des filtrations croissantes et décroissantes $V_{I,k}$ et $V^{I,k}$ de V_I et V^I, et des isomorphismes de G/I-modules

$$V^{I,k}/V^{I,k+1} \simeq V_{I,k}/V_{I,k-1}(k) \quad ,$$

d'où les assertions.

Théorème 5.4. Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, séparé et de dimension n, et G un E-faisceau constructible sur X. On suppose que pour tout $x \in X$, l'endomorphisme F_x de $G_x^\vee$ est T-entier. Alors l'endomorphisme $q^i F^\vee$ de $H_c^i(X,G)^\vee$ est T-entier, ainsi que l'endomorphisme $q^n F^\vee$ de $H_c^i(X,G)^\vee$.

On procède comme dans le théorème 5.2 pour se ramener au cas où X est une courbe lisse et où G est constant tordu sur X. Soit j l'inclusion de X dans la courbe projective et lisse X' qui compactifie X.

On sait (dualité de Poincaré) que $\underline{H}^i(X', j_* G)$ est dual de $\underline{H}^{2-i}(X', j_* G^\vee(1))$. En vertu du corollaire 5.3 (a), le théorème 5.2 s'applique à $j_* G^\vee$:

$$\underline{H}^0(X', j_* G^\vee) \simeq \underline{H}^2(X', j_* G)^\vee(-1) \quad \text{est T-entier,}$$

$$\underline{H}^1(X', j_* G^\vee) \simeq \underline{H}^1(X', j_* G)^\vee(-1) \quad \text{est T-entier,}$$

$$\underline{H}^2(X', j_* G^\vee)(1) \simeq \underline{H}^0(X', j_* G)^\vee \quad \text{est T-entier,}$$

ce qui prouve le théorème pour $j_* G$. Définissons H par la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! G \longrightarrow j_* G \longrightarrow H \longrightarrow 0 \ .$$

La suite exacte de cohomologie fournit, si Y est le support de H,

$$\underline{H}_c^0(X,G) \hookrightarrow \underline{H}^0(X', j_* G) \ ,$$

$$\underline{H}^0(Y,H) \longrightarrow \underline{H}_c^1(X,G) \longrightarrow \underline{H}^1(X', j_* G) \ ,$$

$$\underline{H}_c^2(X,G) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^2(X', j_* G) \ ,$$

de sorte que le théorème pour (X,G) résulte du théorème pour (X', j_*G).

5.5. La méthode précédente de fibration en courbes permet aussi d'obtenir des majorations à la Lang-Weil [3] sur les valeurs absolues complexes des valeurs propres de Frobenius.

Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $\underline{G}$ un E-faisceau constructible sur X, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si, pour tout point $x \in X$, avec $\# k(x) = q_x$, les valeurs propres de F_x agissant sur $\underline{G}_{\bar{x}}$ sont des nombres algébriques α dont toutes les valeurs absolues complexes vérifient

$$|\alpha| \leq q_x^{\lambda} \quad ,$$

on écrira

$$\log |\underline{G}| \leq \lambda \quad .$$

Lemme 5.5.1. Soit X une courbe sur $\mathbb{F}_q$, par quoi on entend ici un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$, séparé et de dimension ≤ 1. Soit $\underline{G}$ un E-faisceau constructible sur X tel que $\log |\underline{G}| \leq \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les valeurs absolues complexes des valeurs propres α de F agissant sur $H_c^1(X,G)$ vérifient $|\alpha| \leq q^{\lambda+1}$.

Soit σ un plongement complexe de E, ou simplement un plongement complexe de la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans E.

Il suffit de vérifier que, quel que soit σ, les zéros β de la fraction rationnelle $\sigma\, Z(X,\underline{G},t)$ vérifient $|\beta^{-1}| \leq q^{\lambda+1}$. On sait déjà en

effet par 5.2.1 si α est une valeur propre de Frobenius agissant sur $\underline{H}^0_c(X,\underline{G})$ ou sur $\underline{H}^2_c(X,\underline{G})$, on a $|\sigma\,\alpha| \leq q^{\lambda+1}$.

Vérifions que la série

$\log \sigma\, Z(X,\underline{G},t) = \sum_k \frac{t^k}{k} \cdot \sum_{x\in X(\mathbb{F}_{q^k})} \sigma\ \mathrm{Tr}(F,x^*\underline{G})$ est convergente pour $|t| < q^{-\lambda-1}$. Représentant X comme revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$, on obtient trivialement une majoration

$$\# X(\mathbb{F}_{q^k}) \leq A.q^k \quad .$$

Par hypothèse, on a d'autre part

$$|\sigma\ \mathrm{Tr}(F,x^*G)| \leq B.(q^k)^\lambda \quad .$$

Le coefficient c_k de t^k dans $\sigma\, Z(X,\underline{G},t)$ vérifie donc

$$|c_k| \leq \frac{1}{k} \cdot C.(q^{1+\lambda})^k$$

et l'assertion en résulte.

Théorème 5.5.2. *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, séparé et de dimension $\leq n$, et G un E-faisceau constructible sur X tel que $\log|G| \leq \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Alors, les valeurs absolues complexes des valeurs propres α de Frobenius agissant sur $H^i_c(X,\underline{G})$ vérifient

$$|\alpha| \leq q^{\lambda+i} \quad \text{et}$$

$$|\alpha| \leq q^{\lambda+n} \quad .$$

Si $n \leq 0$, 5.5.2 est trivial. Si $n = 1$, les cas $i = 0$ et $i = 2$ de 5.5.2 résultent de 5.2.1, tandis que le cas $i = 1$ résulte de 5.5.1. On procède alors par récurrence sur n, comme dans la démonstration de 5.5.2.

Corollaire 5.5.3. Soit X un schéma séparé de type fini de dimension n sur $\mathbb{F}_q$. Alors, les valeurs propres α de l'endomorphisme de Frobenius géométrique F de $H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques. De plus

(i) Pour $\ell' \neq p$, α est une unité ℓ'-adique.

(ii) Pour $i > n$, α est divisible par q^{i-n}.

(iii) Pour $i \leq n$, (resp. pour $i \geq n$), $q^i \alpha^{-1}$ (resp. $q^n \alpha^{-1}$) est un entier algébrique.

(iv) Pour $0 < i$, les valeurs absolues complexes de α vérifient

$$|\alpha| \leq q^{\frac{i-1}{2}} \quad \text{et} \quad |\alpha| \leq q^n .$$

D'après 5.2.2, α et $q^{n-i}\alpha$ sont des entiers algébriques. Les assertions (i) à (iii) résultent alors de 5.4. Pour $i > n$, (iv) résulte de 5.5.2. Pour obtenir (iv) quand $i \leq n$, il va falloir conjuguer 5.5.2 à l'hypothèse de Riemann pour les courbes. Procédons par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Si U est un ouvert de X, de complémentaire Z de dimension $< n$, la suite exacte

$$H_c^i(U, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)$$

montre qu'il suffit de prouver 5.2.2 pour U. Quitte à remplacer au préalable X par X_{red}, ceci nous ramène au cas où X est lisse affine,

et tel qu'il existe un morphisme lisse $f : X \longrightarrow S$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) $\dim(S) \leq n-1$

(b) les fibres de f sont purement de dimension 1.

Puisque les fibres de f sont des courbes affines, on a

$$R^0 f_! \, \mathbb{Q}_\ell = 0 \quad .$$

D'après Weil [4], on a

(5.5.3.1) $$\log |R^1 f_! \, \mathbb{Q}_\ell| \leq 1/2 \quad ,$$

et d'après 5.2.1 appliqué aux fibres de f, on a

(5.5.3.2) $$\log |R^2 f_! \, \mathbb{Q}_\ell| \leq 1 \quad .$$

La suite spectrale de Leray pour f se réduit ici à une suite exacte longue

$$\underline{H}_c^{i-2}(S, R^2 f_! \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \underline{H}_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \underline{H}_c^{i-1}(S, R^1 f_! \mathbb{Q}_\ell) \quad .$$

D'après (5.5.3.1) (resp. 5.5.3.2) et 5.5.2, les valeurs absolues complexes des valeurs propres α de Frobenius agissant sur $\underline{H}_c^{i-1}(S, R^1 f_! \mathbb{Q}_\ell)$ (resp. sur $\underline{H}_c^{i-2}(S, R^2 f_! \mathbb{Q}_\ell)$) vérifient

$$|\alpha| \leq q^{i-1+\frac{1}{2}} = q^{i-\frac{1}{2}}$$

$$\text{(resp. } |\alpha| \leq q^{i-2+1} = q^{i-1} \leq q^{i-\frac{1}{2}} \quad .$$

Le corollaire en résulte.

Pour obtenir quelques résultats analogues aux précédents, en cohomologie sans supports, il semble nécessaire de disposer de la résolution des singularités. En dimension ≤ 1, la solution du problème est fournie par le corollaire 5.3.

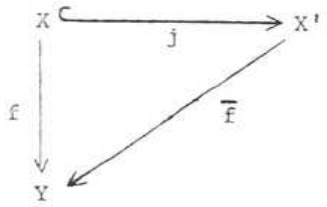
Théorème 5.6. Soit N un entier, et supposons que l'on dispose de la résolution des singularités, sous la forme forte de Hironaka, pour les schémas de dimension ≤ N de type fini sur $\mathbb{F}_q$ (jusqu'ici, on peut donc prendre N = 2 [1]). Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et G un E-faisceau constructible T-entier sur X. Alors, si dim(X) ≤ N, les E-faisceaux $R^i f_* G$ sur Y sont T-entiers.

La démonstration procède par récurrence sur la dimension n≤N de X. Soit $j : U \longrightarrow X$ un ouvert de X, lisse, affine, tel que G restreint à U soit constant tordu et tel que la dimension de son complément Z soit <n. Utilisant l'hypothèse de résolution, on sait que les $R^i j_*(j^*G)$ sont constructibles (SGA 5 I , [2]); pour i > 0, ils sont concentrés sur Z et, pour i = 0, $j_*(j^*G)$ ne diffère de G que sur Z. Il en résulte, d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il suffit de vérifier le théorème pour le faisceau j*G et les morphisme j et f j. Il suffit de vérifier le théorème sous l'hypothèse additionnelle que X soit affine lisse et G constant tordu (i.e. fourni par une représentation continue du groupe fondamental de X dans un E-vectoriel de dimension finie).

Soient R l'anneau des entiers de E, λ une uniformisante, e l'indice de ramification absolu et b un entier $> \frac{e}{\ell-1}$. Puisque X est lisse, donc normal et à groupe fondamental profini, il existe un R-faisceau $\underline{G}^0$ constant tordu tel que $\underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{G}^0 \otimes_R E$. Soit $p : X' \longrightarrow X$ le revêtement étale de X qui trivialise le faisceau localement constant $\underline{G}^0 \otimes_R R/\lambda^b$. Le faisceau $\underline{G}$ est facteur direct de $p_* p^* \underline{G}$, de sorte qu'il suffit de vérifier le théorème pour $p^*\underline{G}$ et $f \circ p$. Il reste donc à traiter le cas où les hypothèses suivantes sont vérifiées. :

(*) X est affine et lisse, et il existe un R-faisceau $\underline{G}^0$, constant tordu, tel que $\underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{G}^0 \otimes_R E$ et que le faisceau $\underline{G}^0 \otimes_R R/\lambda^b$ soit constant .

Factorisons le morphisme f en un morphisme propre et une immersion ouverte $f = \overline{f}\, j$:



Le théorème a déjà été établi pour $\overline{f}$ (5.2), de sorte qu'il suffit de l'établir pour j. D'après la résolution des singularités, appliquée à X', on pouvait supposer que X' soit lisse et que X soit le complément d'un diviseur à croisements normaux de X', réunion de diviseurs lisses. L'hypothèse (*) implique que le faisceau $\underline{G}$ est modérément ramifié le long de ce diviseur. On a alors :

Lemme 5.6.1. Soient X un schéma lisse de type fini sur $\mathbb{F}_q$, D un diviseur à croisements normaux dans X, réunion de diviseurs lisses D_i, $j : U \hookrightarrow X$ le complément de D dans X et G un E-faisceau constant tordu sur U, modérément ramifié le long de D. Alors, si G est T-entier, les faisceaux $R^i j_* G$ sont T-entiers.

On admettra (cf. SGA 1 XIII) :

Lemme 5.6.2. (i) Sous les hypothèses 5.6.1, soient D' une composante de D, D'' la réunion des autres composantes, $U' = X - D''$ et $D'^{\circ} = D' \cap U'$:

$$\begin{array}{ccccc} D'^{\circ} & \xrightarrow{j'_D} & D' & & \\ \downarrow{\scriptstyle i^{\circ}} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ U & \xrightarrow[j_1]{} & U' & \xrightarrow[j']{} & X \end{array} .$$

Alors, la flèche de changement de base

$$i^* R j'_* (R j_{1*} G) \longrightarrow R j'_{D*} i^{\circ *} (R j_{1*} G)$$

est un isomorphisme, et les faisceaux $i^{\circ *} R j_{1*} G$ sont constant tordus, modérement ramifiés le long de $D' - D'^{\circ}$.

(ii) Si C est une courbe lisse sur X, transversale à D en un point lisse x de D,

$$\begin{array}{ccc} C \cap U & \xrightarrow{j_c} & C \\ \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ U & \xrightarrow[j]{} & X \end{array} ,$$

alors, la flèche de changement de base

$$k^* Rj_{*}\underline{G} \longrightarrow Rj_{c*}\, k'^{*}\underline{G}$$

est un isomorphisme en x.

Déduisons 5.6.1 de 5.6.2 en raisonnant par récurrence sur la dimension, et en admettant provisoirement 5.6.1 dans le cas des courbes. Il résulte de 5.6.2 (ii) et de cette hypothèse, que les faisceaux $R^i j_{*}\underline{G}$ sont T-entiers en tout point lisse de D. En particulier, avec les notations de 5.6.2 (i), les faisceaux $R^i j_{1*}\underline{G}$ sont T-entiers, de sorte que, d'après 6.2 (i) et l'hypothèse de récurrence appliquée à $i^{O}* Rj_{1*}\underline{G}$ et à j'_D , les faisceaux $i^* R^i j_{*}\underline{G}$ sont T-entiers, quelle que soit la composante choisie D' de D. Ceci prouve la conclusion de 5.6.1.

Reste le cas des courbes. Pour une courbe, sous les hypothèses 5.6.1, si x est un point de X - U, si $\mathfrak{G}$ est le groupe de Galois du corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ et $\mathfrak{I}$ le groupe d'inertie, si on désigne encore par $\underline{G}$ la représentation de $\mathfrak{G}$ définie par $\underline{G}$ et si $\bar{x}$ est un point géométrique de X localisé en x, on a des isomorphismes de $\mathfrak{G}/\mathfrak{I}$-modules galoisiens :

$$(j_{*}\underline{G})_{\bar{x}} \simeq \underline{G}^{\mathfrak{I}}$$

$$(R^1 j_{*}\underline{G})_{\bar{x}} \simeq \underline{G}_{\mathfrak{I}}(-1)$$

$$(R^i j_{*}\underline{G})_{\bar{x}} = 0 \text{ si } i \geq 2$$

et l'assertion résulte de 5.3 (a) et 5.3.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.S. ABHYANKAR. Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces. Acad. Press. New York 1966.

[2] J.P. JOUANOLOU. Cohomologie ℓ-adique des schémas. A paraître dans Lecture Notes of Math.

[3] S. LANG and A. WEIL. Number of points of varieties in finite fields. Am. J. Math. 76 (1954) 819-827.

[4] A. WEIL. Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Act. Sci. Ind 1041. Hermann 1948.

S G A 7

E X P O S E XXII

UNE FORMULE DE CONGRUENCE POUR LA FONCTION ζ

par N. KATZ

0. Introduction

Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Sa fonction zêta, considérée comme élément de $\mathbb{Z}[[T]]$, peut-être réduite modulo p ; on veut la calculer modulo p. On trouve une expression du type auquel on pouvait s'attendre depuis les formules de points fixes du type "Woods Hole", comme produit alterné de polynômes caractéristiques d'un "Frobenius" convenable agissant sur l'un quelconque des trois espaces de cohomologie suivants :

1) la cohomologie cohérente $H^i(X,\mathcal{O}_X)$ (3.1.1)

2) la cohomologie de De Rham $H^i_{DR}(X) = \mathbb{H}^i(X,\Omega^\cdot_X)$ (3.1.1)

3) la cohomologie étale $H^i_{et}(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (3.1.2).

Cette expression doit être vue comme une amélioration d'un cas spécial de la formule des traces de Woods Hole : celui du faisceau structurel et de l'endomorphisme de Frobenius. Ce cas est, en effet, un corollaire de la formule de congruence (cf. 3.2.1).

La méthode de cet exposé est complètement naïve ; elle consiste à se ramener au cas d'une hypersurface, ensuite à "réduire modulo p"

le calcul de DWORK pour la vraie fonction zêta d'une hypersurface. En "réduisant" soigneusement, on trouve l'amélioration 5.C.6 due à AX [1] (et également à DWORK dans le cas lisse [4, § 7])du théorème bien connu de WARNING-CHEVALLEY [8].

Une autre méthode, entièrement cohomologique et dans l'esprit de SGA 5, s'appliquant également à des "coefficient tordus", vient d'être trouvée par DELIGNE, et devrait figurer dans la réédition de SGA 5 ; elle repose sur la formule des traces type "Woods Hole", et la"formule de Künneth symétrique" de DELIGNE (SGA 4 XVII 5.5.21).

1. Un rappel sur les opérations "p-linéaires"

1.0. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Désignons par q une puissance de p. Una application

(1.0.1) $$\varphi : V \longrightarrow V$$

s'appelle q-linéaire si elle additive et si elle vérifie

(1.0.2) $$\varphi(\lambda v) = \lambda^q \varphi(v) \qquad \forall\ \lambda \in k,\ v \in V\ .$$

1.0.3. On fera attention au fait que l'itéré n'ième φ^n d'un endomorphisme q-linéaire est q^n-linéaire, et que, si k n'est pas parfait, l'image $\varphi(V)$ d'un endomorphisme q-linéaire n'est pas nécessairement un k-sous-espace vectoriel.

1.0.4. Pour chaque extension K/k, un endomorphisme q-linéaire φ de V donne lieu à un unique endomorphisme q-linéaire φ_K de $V_K = V \otimes_k K$, satisfaisant à la formule

(1.0.5) $$\varphi_K(\mu \otimes v) = \mu^q \varphi(v) \qquad \text{pour } \mu \in K,\ v \in V.$$

1.0.6. On dit qu'un endomorphisme q-linéaire φ de V est semi-simple si son image engendre V comme k-vectoriel, et qu'il est nilpotent s'il admet un itéré nul.

On définit des k-sous-espace stables par φ

$$V_{ss} = \bigcap_{n \geq 1} (\text{le k-sous-espace engendré par } \varphi^n(V)) \tag{1.0.7}$$

$$V_{nilp} = \bigcup_{n \geq 1} (\text{le noyau de } \varphi^n : V \longrightarrow V) \quad . \tag{1.0.8}$$

Evidemment, φ restreint à V_{ss} est semi-simple, et φ restreint à V_{nilp} est nilpotent. Si k est parfait, on a

$$V = V_{ss} \oplus V_{nilp} \quad , \tag{1.0.9}$$

mais, si k n'est pas parfait, (1.0.9) devient inexact, car il y a des endomorphismes q-linéaires qui sont injectifs sans être semi-simples.

Pour une extension K/k quelconque, on a

$$(V_K)_{ss} = V_{ss} \otimes_k K \quad . \tag{1.0.10}$$

Proposition 1.1. Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Si φ est semi-simple alors, posant

$$V^{1-\varphi} = \text{les } \mathbb{F}_q\text{-vectoriel formé des points fixes de } \varphi = \mathrm{Ker}(1-\varphi),$$

on a

$$V \xleftarrow{\sim} (V^{1-\varphi}) \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad . \tag{1.1.1}$$

Corollaire 1.1.2. $V^{1-\varphi^n} \xleftarrow{\sim} (V^{1-\varphi}) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$.

Démonstration. (LANG, cf. [6], p. 119).

Soit $\underline{e}$ une k-base de V, et écrivons

$$\varphi(\underline{e}) = A\underline{e} \quad , \quad A \in GL(n,k) \tag{1.1.3}$$

Désignons par

$$F : GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k) \tag{1.1.4}$$

la flèche "élévation des coordonnées à la q'ième puissance". Alors pour $g \in GL(n,k)$, $g\underline{e}$ est une base de V formée de points fixes de φ si et seulement si

$$F(g)\, A\, g^{-1} = 1 \quad . \tag{1.1.5}$$

Désignons par $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le groupe $GL(n,\overline{k})$ agit sur la variété $GL(n,\overline{k})$ par

$$\begin{cases} GL(n,\overline{k}) \times GL(n,\overline{k}) \longrightarrow GL(n,\overline{k}) \\ (g,A) \longmapsto F(g)Ag^{-1} \end{cases} \quad . \tag{1.1.6}$$

Pour A fixé, la flèche

$$g \longmapsto F(g)\, A\, g^{-1} \tag{1.1.7}$$

est étale comme on voit en calculant son application tangente, donc les orbites sont ouvertes. Comme $GL(n,\overline{k})$ est irréductible, il n'y a qu'une orbite ; autrement dit, la flèche

$$Gl(n,\overline{k}) \longrightarrow Gl(n,\overline{k}) \tag{1.1.8}$$

$$g \longrightarrow F(g^{-1}).g$$

est surjective. Parce qu'elle est aussi étale, il s'ensuit, k étant séparablement clos que la flèche

$$GL(n,k) \longrightarrow GL(n,k) \tag{1.1.9}$$

$$g \longrightarrow F(g^{-1}).g$$

est surjective, ce qui veut dire que V admet une k-base formée des points fixes de φ. Il est alors clair, φ étant q-linéaire, que tout point fixe de φ se trouve dans le $\mathbb{F}_q$-vectoriel engendré par une k-base formée des points fixes de φ, ce qui prouve 1.1.

Corollaire 1.1.10. Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Alors on a un isomorphisme canonique

$$V_{ss} \xleftarrow{\sim} V^{1-\varphi} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad . \tag{1.1.11}$$

Il suffit en effet d'appliquer 1.1 à V_{ss}.

Proposition 1.2. Soit φ un endomorphisme q-linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps séparablement clos k. Alors l'application additive

$$1 - \varphi : V \longrightarrow V$$

est surjective.

Démonstration. On a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow V_{ss} \longrightarrow V \longrightarrow V/V_{ss} \longrightarrow C,$$

sur laquelle agit $1 - \varphi$. Par le "lemme du serpent", il suffit de traiter V_{ss}, évident par 1.1 en employant une base formée des points fixes, et V/V_{ss}, sur lequel φ est nilpotente, donc sur lequel $1 - \varphi$ est inversible.

2. Cohomologie cohérente et cohomologie étale

Proposition 2.0. *Soit $\overline{X}$ un schéma propre sur un corps k séparablement clos, et désignons par*

$$\overline{\mathfrak{F}}_p : H^*(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^*(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \tag{2.0.1}$$

l'application p-linéaire induite par

$$\overline{\mathfrak{F}}_p : \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}} \quad , \quad \overline{\mathfrak{F}}_p(f) = f^p \quad . \tag{2.0.2}$$

Désignons par

$$H^*_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

les groupes de cohomologie étales à coefficients dans le faisceau constant $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors on a des isomorphismes canoniques :

$$H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq (H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}))^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p} \quad . \tag{2.0.3}$$

Démonstration. On a une suite exacte de faisceaux sur $\overline{X}_{et}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{1-\mathfrak{F}_p} \mathcal{O}_{\overline{X}} \longrightarrow 0 \tag{2.0.4}$$

qui donne une suite exacte de cohomologie

$$\ldots \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \xrightarrow{1-\mathfrak{F}_p} H^i_{et}(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow \ldots \quad . \tag{2.0.5}$$

On a $H^i_{et}(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \simeq H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$; c'est un k-vectoriel de dimension finie $\overline{X}$ étant propre. En appliquant 1.2, on trouve des suites exactes

(2.0.6) $$0 \longrightarrow H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \xrightarrow{1-\mathfrak{F}_p} H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow C \quad ,$$

cqfd. Utilisant 1.1.10, on conclut de (2.0) :

Corollaire 2.1. Pour $\overline{X}$ propre sur un corps séparablement clos k,

(2.1.1) $$H^i(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \xleftarrow{\sim} H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \quad .$$

2.2. Soit maintenant $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Désignons par k une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et posons

(2.2.1) $$\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

Le faisceau étale $R^i f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Sp}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, vu comme $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_q)$ module. Désignons par

(2.2.2) $$\mathfrak{F}_q : H^i(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

l'opération linéaire (elle est q-linéaire, mais on est sur $\mathbb{F}_q$!) induite par

(2.2.3) $$\mathfrak{F}_q : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad , \quad \mathfrak{F}_q(f) = f^q \quad .$$

Proposition 2.2.4. Désignons par $\varphi_q \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_q)$ l'élément de "Frobenius", $\varphi_q(\lambda) = \lambda^q$ et soit $i \in \mathbb{Z}$. On a une identité de polynômes caractéristiques

(2.2.4.1) $$\det_{\mathbb{F}_p}(1 - t\varphi_q^{-1} \mid H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = \det_{\mathbb{F}_q}(1 - t\,\mathfrak{F}_q \mid H^i(X, \mathcal{O}_X)) \quad .$$

où le premier membre est le polynôme caractéristique de l'élément φ_q^{-1} dans $\pi_1(\mathrm{Sp}(\mathbb{F}_q))$ agissant sur le module galoisien $H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

En effet, 2.2.4 est un corollaire de la

Proposition 2.2.5. Soit X propre sur Spec($\mathbb{F}_q$) . Il y a un isomorphisme canonique

$$(2.2.6) \qquad H^i(X,\mathcal{O}_X)_{ss}\otimes_{\mathbb{F}_q} k \xrightarrow{\sim} H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{F}_p} k$$

qui transforme l'automorphisme $\mathfrak{F}_q\otimes_{\mathbb{F}_q} k$ du premier membre en l'automorphisme $\varphi_q^{-1}\otimes_{\mathbb{F}_q} k$ du second (qu'on peut aussi interpréter comme l'endomorphisme $fr_q^{X*}\otimes_{\mathbb{F}_p} k$, où $fr_q^X : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ est le k-endomorphisme de Frobenius. cf. SGA 5, XVIII, 2.3.4).

Démonstration. Compte tenu de ce que

$$(2.2.7) \qquad H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X,\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad ,$$

on a, par 1.C.10,

$$(2.2.8) \qquad H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \xrightarrow{\sim} H^i(X,\mathcal{O}_X)_{ss}\otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad ,$$

de sorte qu'on obtient l'isomorphisme 2.2.6 en composant les isomorphismes 2.2.8 et 2.1.1.

Compte tenu de 2.2.7 l'opération q-linéaire

$$(2.2.9) \qquad \mathfrak{F}_q : H^i(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}_X)$$

admet une extension q-linéaire (cf. 1.C.5))

$$(2.2.10) \qquad \overline{\mathfrak{F}}_q : H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \quad ,$$

et admet aussi une extension k-linéaire, notée encore $\mathfrak{F}_q$

$$(2.2.11) \qquad \mathfrak{F}_q : H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \quad .$$

On désigne par

$$\varphi_q : H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \longrightarrow H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}) \tag{2.2.12}$$

l'opération q-linéaire dont les pointes fixes sont $H^i(X,\mathcal{O}_X)$. Les opérateurs $\mathfrak{F}_q$, φ_q et $\overline{\mathfrak{F}}_q$, moyennant (2.2.7), s'écrivent aussi $\mathfrak{F}_q \otimes id_k$, $id \otimes \varphi_q$, $\mathfrak{F}_k \otimes \varphi_k$, donc commutent entre eux, et on a

$$\overline{\mathfrak{F}}_q = \varphi_q \mathfrak{F}_q = \mathfrak{F}_q \circ \varphi_q \quad , \tag{2.2.13}$$

et ils commutent tous à $\overline{\mathfrak{F}}_p$, de sorte que $\mathfrak{F}_q$ et φ_q agissent sur $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q}$ et sur $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p}$. Or, $\mathfrak{F}_q$ et φ_q sont des inverses l'une à l'autre sur $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q}$, par (2.2.13). Donc l'opération de $\mathfrak{F}_q$ sur

$$H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss} \simeq H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \qquad \text{(cf. 1.1.11)}$$

est l'inverse de l'opération de $\varphi_q \otimes k$ sur

$$H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} k \quad .$$

Ecrivant

$$H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\mathfrak{F}_q} \simeq H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\mathfrak{F}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \quad , \tag{2.2.14}$$

l'automorphisme φ_q de $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\mathfrak{F}_q}$ devient, via 2.2.14, l'automorphisme $\varphi_q \otimes \mathbb{F}_q$ de $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})^{1-\overline{\mathfrak{F}}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q$, de sorte que l'automorphisme $\varphi_q \otimes k$ de $H^i(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}})_{ss}$ devient, via 2.1.1, l'automorphisme $\varphi_q \otimes k$ de $H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$, ce qui achève la démonstration (2.2.5).

3. La formule de congruence: énoncés et équivalences élémentaires

Je tiens à remercier Grothendieck et Deligne pour m'avoir expliqué les variantes (6.1.2), (3.1.1.2) et (3.1.3) de (3.1.1).

3.0. Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On définit le degré d'un point fermé $y \in X$ comme le degré de son corps résiduel $\mathbb{F}_q(y)/\mathbb{F}_q$. On définit la fonction zêta de $X/\mathbb{F}_q$ comme élément de $\mathbb{Z}[[t]]$, par la formule (cf. aussi SGA 5 XIII 3.1)

$$(3.0.1) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) = \prod_y (1 - t^{\deg(y)})^{-1} \quad .$$

Par la "fonction zêta modulo p" on veut dire toujours l'image de $Z(t,X/\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{F}_q[[t]]$ par la flèche de "réduction modulo p $\mathbb{Z}[[t]]$"

$$\mathbb{Z}[[t]] \longrightarrow \mathbb{F}_q[[t]] \quad .$$

Théorème 3.1. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$. Alors

$$(3.1.1) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1-t\,\mathfrak{F}_q \mid H^i(X,\mathcal{O}_X))^{(-1)^{i+1}} \mod p$$

ou, ce qui est équivalent par (2.2.4).

$$(3.1.2) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid H^i_{et}(\overline{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^{(-1)^{i+1}} \mod p$$

Corollaire 3.2. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$.

Alors

$$(3.2.1) \qquad \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{trace}(\mathfrak{F}_q \mid H^i(X,\mathcal{O}_X) \equiv \#X(\mathbb{F}_q) \mod p$$

ou, ce qui est équivalent par (2.2.4)

(3.2.2) $$\sum_{i\geq 0} (-1)^i \mathrm{tr}(\varphi_q^{-1} | H^i_{et}(\bar{X}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \equiv \#X(\mathbb{F}_q) \bmod p \ .$$

On prend les coefficients de t dans les congruences (3.1.1) et (3.1.2).

Théorème 3.3. Soit X un schéma propre sur $\mathbb{F}_q$ on désigne par $H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)$ les $\mathbb{F}_q$-vectoriels $\mathbb{H}^i(X, \Omega^\cdot_{X/\mathbb{F}_q})$, sur lesquels $\mathfrak{F}_q$ agit. On a

(3.3.1) $$Z(t, X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q))^{(-1)^{i+1}} \bmod p.$$

En effet, utilisant la suite spectrale

(3.3.2) $$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/\mathbb{F}_q}) \Longrightarrow H^{p+q}_{DR}(X/\mathbb{F}_q)$$

sur laquelle $\mathfrak{F}_q$ agit (via l'endomorphisme $\mathfrak{F}_q = \mathrm{fr}_p^{X*}$ déduit de $\mathrm{fr}_q^X : X \longrightarrow X$) en tuant $E_1^{p,q}$ pour $q \neq 0$, on voit que (3.3.1) équivaut à (3.1.1).

Donnons un petit complément.

Le formation de la "partie semi-simple" (cf. 1.0.7) étant un foncteur exact, on déduit de (3.3.2) une suite spectrale

(3.3.3) $$(E_1^{p,q})_{ss} \Longrightarrow H^{p+q}_{DR}(X/\mathbb{F}_q)_{ss} \ .$$

Comme $(E_1^{p,q})_{ss} = 0$ pour $q \neq 0$, on en déduit pour tout i un isomorphisme

(3.3.4) $$H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)_{ss} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i(X, \mathfrak{S}_X)_{ss} \ ,$$

commutant à $\mathfrak{F}_q$, d'où

(3.3.5) $$\det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | H^i_{DR}(X/\mathbb{F}_q)) = \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q | \mathbb{H}^i(X, \mathfrak{S}_X)) \ .$$

Théorème 3.4. Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Alors désignant par H_c^i la cohomologie étale à supports propres (SGA 4 XVII 5.1.9 (iii)), on a

$$(3.4.1) \qquad Z(t,X/\mathbb{F}_q) \equiv \prod_{i\geq 0} \det\left(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid H_c^i(\bar{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)^{(-1)^{i+1}} \bmod p.$$

Commençons par démontrer l'équivalence de (3.4.1) et (3.1.1).

Ecrivons, pour le moment

$$(3.4.2) \qquad Z(X) \text{ au lieu de } Z(t,X/\mathbb{F}_q)$$

$$(3.4.3) \qquad Z'(X) \text{ au lieu de } \prod \det\left(1-t\,\varphi_q^{-1} \mid H_c^i(\bar{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)^{(-1)^{i+1}}.$$

Lemme 3.5. Si $\{U_i\}$ est un recouvrement fini de X par des sous-schémas ouverts on a

$$(3.5.1) \qquad Z'(X) = \prod_{j\geq 0} \prod_{1\leq i_0<\ldots<i_j\leq n} Z'(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_j})^{(-1)^j}.$$

Démonstration. Résulte facilement de la suite spectrale de localisation (SGA 4 XVII 6.2.10)

$$E_1^{-a,b} = \bigoplus_{i_0<\ldots<i_b} H_c^a(\bar{U}_{i_0}\cap\ldots\cap\bar{U}_{i_b},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \Longrightarrow H_c^{-a+b}(\bar{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

On peut aussi l'obtenir par récurrence sur n, en appliquant 3.6 ci-dessous.

Lemme 3.6. Si U est un ouvert de X, Y le fermé X-U,

$$(3.6.1) \qquad Z'(X) = Z'(U)\,Z'(Y)$$

Démonstration. Résulte de la suite exacte de cohomologie

$$(3.6.2) \longrightarrow H_c^i(\bar{U},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^i(\bar{X},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^i(\bar{Y},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow .$$

Lemme 3.7 (Moebius). Soit B un ensemble fini, $\{A_i\}$ un recouvrement fini par des sous-ensembles. Alors

$$(3.7.1) \qquad \mathrm{card}(B) = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \sum_{i_o<\ldots<i_j} \mathrm{card}(A_{i_o}\cap\ldots\cap A_{i_j}) \ .$$

Démonstration. On a la suite spectrale de Leray pour la cohomologie rationnelle de l'espace discret B et le recouvrement ouvert $\{A_i\}$

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_q H^p(A_{i_o}\cap\ldots\cap A_{i_q},\mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(B,\mathbb{Q})$$

et on calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de B.

ts

Lemme 3.8. Si $\{U_i\}$ est un recouvrement fini de X par des sous-schémas, alors

$$(3.8.1) \qquad Z(X) = \prod_{j\geq 0} \prod_{i_o<\ldots<i_j} Z(U_{i_o}\cap\ldots\cap U_{i_j})^{(-1)^j} \ .$$

Démonstration. On a la formule

$$(3.8.2) \qquad \mathrm{card}(X(\mathbb{F}_{q^n})) = \sum_{r|n} r.\mathrm{card}\{y\in X \mid \deg(y) = r\}$$

qui entraîne

$$(3.8.3) \qquad Z(X) = \exp\Big(\sum_{n\geq 1} \mathrm{card}(X(\mathbb{F}_{q^n}))\,\frac{t^n}{n}\Big) \ ,$$

et on conclut par 3.7.1.

Lemme 3.9. Supposons que la formule (3.4.1) (ou ce qui revient au même, (3.1.2) i.e. (3.1.1)) soit vraie pour X une hypersurface projective. Alors elle est vraie pour tout X séparé de type fini.

Démonstration. Par 3.8 et 3.6, (3.4.1) est vraie pour le complémentaire d'une hypersurface, $\mathbb{P}^n - H$. Compte tenu de ce que $\cap(\mathbb{P}^n - H_i) = \mathbb{P}^n - \bigcup_i H_i$ est encore le complément d'une hypersurface, le recouvrement ouvert $\{\mathbb{P}^n - H_i\}$ de $\mathbb{P}^n - \cap H_i$ permet d'appliquer 3.8 et 3.5 pour déduire (3.1.3) pour $\mathbb{P}^n - \cap H_i$. Par 3.8 et 3.6, (3.4.1) est vrai pour $\cap H_i$, i.e. pour tout X projectif. Une nouvelle application de 3.8 et 3.5 donne 3.1.3 pour tout X quasi-projectif, en particulier pour tout X affine. Finalement, pour X séparé de type fini, on prend un recouvrement fini par des ouverts affines, et on applique 3.8 et 3.5.

4. Le calcul de la fonction zêta d'une hypersurface à la Dwork

4.0. Soit

(4.0.1) $\qquad f(X) = f(X_1,\dots,X_{n+2}) \in \mathbb{F}_q[X]$ homogène de degré d,

dont l'annulation définit l'hypersurface $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$, et désignons par V^* l'ouvert de V où $\prod_{i=1}^{n+2} X_i$ est inversible, V^*_{aff} le cône affine de V^*.

Choisissons un caractère additif non-trivial

(4.0.2) $$\chi : \mathbb{F}_{q^\nu} \longrightarrow \mu_p(C),$$

C étant un corps alg. clos fixé de car. nulle (p.ex. $C = \mathbb{C}$), de sorte qu'on a

(4.0.3) $$\text{pour } x \in \mathbb{F}_{q^\nu} \quad \sum_{y \in \mathbb{F}_{q^\nu}} \chi(xy) = \begin{cases} q^\nu & \text{si } \chi = 0 \\ 0 & \text{si } \chi \neq 0 \end{cases}.$$

Pour $\chi = (\chi_1,\dots,\chi_{n+2}) \in (\mathbb{F}^*_{q^\nu})^{n+2}$, on a donc

$$(4.0.4)\qquad 1 + \sum_{x_o \in \mathbb{F}_{q^\nu}^*} \chi(x_o f(x)) = \sum_{x_o \in \mathbb{F}_{q^\nu}} \chi(x_o f(x)) = \begin{cases} q^\nu \text{ si } f(x)=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

En sommant (4.0.4) sur $\mathbf{x} \in (\mathbb{F}_{q^\nu}^*)^{n+2}$, on obtient

$$(4.0.5)\qquad \operatorname{card} V^*_{\mathrm{aff}}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{1}{q^\nu} \sum_{\mathbf{x} \in (\mathbb{F}_{q^\nu}^*)^{n+2}} \{1 + \sum_{x_o \in \mathbb{F}_{q^\nu}^*} \chi(x_o f(x))\}$$

et, compte tenu de ce que

$$(4.0.6)\qquad \operatorname{card} V^*_{\mathrm{aff}}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu - 1) \operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu})$$

(4.0.5) se récrit

$$(4.0.7)\qquad (q^\nu - 1) \operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} + \frac{1}{q^\nu} \sum_{(x_o,x) \in (\mathbb{F}_{q^\nu}^*)^{n+3}} \chi(x_o f(x)).$$

Ecrivons explicitement la forme f(X) comme somme de monômes

$$(4.0.8)\qquad f(X) = \sum a_w X^w ,$$

où

$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{n+2})$ avec $\sum w_i = d$, $X^w \overset{\text{dfn}}{=\!=} X_1^{w_1} \ldots X_{n+2}^{w_{n+2}}$,

de sorte que (4.0.7) se récrit

$$(4.0.9)\qquad (q^\nu - 1) \operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} + \frac{1}{q^\nu} \sum_{(x_o,x) \in (\mathbb{F}_{q^\nu}^*)^{n+3}} \prod_w \chi(a_w x_o x^w).$$

4.1. Il faut maintenant expliciter notre "caractère additif à valeurs en caractéristique zéro". On a envie de prendre simplement

$$(4.1.0)\qquad \chi : \mathbf{x} \longmapsto \exp(2\pi i \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{F}_p}(\mathbf{x})) = \xi_p^{\operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{H}_p}(x)} .$$

Désignons par

(4.1.1) Ω la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

(4.1.2) $\mathrm{ord} : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'ordinal, normalisé par $\mathrm{ord}(p) = 1$

(4.1.3) $\xi_p \in \Omega$ une racine p-ième primitive de l'unité.

On constate (cf. [2]) qu'il existe

(4.1.4) $$\pi \in \mathbb{Q}_p(\xi_p) \ , \ \mathrm{ord}(\pi) = \frac{1}{p-1}$$

(4.1.5) tel que $$\sum_{n\geq 0} \frac{\pi^{p^n}}{p^n} = 0 \ ,$$

(NB. On constate aussitôt que le premier membre converge dans $Q_p(\xi_p)$.)

On définit l'exponentielle d'Artin-Hasse

(4.1.6) $$E(X) = \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{X^{p^n}}{p^n}\right) \in Q_p[[X]]$$

qui, on miracle, se trouve dans $\mathbb{Z}_p[[X]]$. On définit

(4.1.7) $$\Theta(X) = E(\pi X) \ ,$$

dont les propriétés fondamentales sont résumées dans le lemme suivant :

Lemme 4.2.

(4.2.1) $$\Theta(X) = \sum B_n X^n \ , \ B_o = 1 \ \ A_1 = \pi \ , \ \mathrm{ord}(B_n) \geq \frac{n}{p-1} \ .$$

(4.2.2) $\Theta(1) = \xi_p$, une racine p'ième primitive de l'unité.

(4.2.3) Soit $t \in \Omega$, et supposons que, pour un entier $a > 0$ donné, $t = t^{p^a}$ (i.e. t est un "représentant de Teichmüller" dans $W(\mathbb{F}_{q^a}) \subset \Omega$). Alors $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} \in \mathbb{Z}_p$, de sorte qu'on peut définir la série formelle

$(\Theta(X))^{\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j}}$, et on a une identité de séries formelles

$$\prod_{j=0}^{a-1} \Theta(t^{p^j} X) = (\Theta(X))^{\sum_{j=0}^{a-1} t^j} \qquad (4.2.3.1)$$

Démonstration. Compte tenu de ce qui $E(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$, (4.2.1) se déduit de la définition. Quant à (4.2.2), on a

$$\log(\Theta(1)) = 0 \qquad \text{par le choix de } \pi \ (4.1.5) \qquad (4.2.4)$$

et

$$\operatorname{ord}(\Theta(1) - 1) = \frac{1}{p-1} \quad \text{par (4.2.1).} \qquad (4.2.5)$$

Par (4.2.4), il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\Theta(1)^{p^n} = 1$, (c'est la caractérisation du noyau du logarithme) et (4.2.5) entraîne que $n = 1$. Quant à (4.2.3.1), en prenant les logarithmes, il résulte d'un calcul évident, une fois prouvé que l'on a bien $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} \in \mathbb{Z}_p$. Or on voit aussitôt que les t^{p^j} $(0 \leq j \leq a-1)$ sont les conjugués de $t \in \mathcal{U}(\mathbb{F}_{q^a})$ sur $\mathbb{Z}_p$, donc $\sum_{j=0}^{a-1} t^{p^j} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}(\mathbb{F}_{q^a})/\mathbb{Z}_p}(t) \in \mathbb{Z}_p$.

En prenant la valeur en $X = 1$ des deux membres de (4.2.3.1) nous trouvons le

Corollaire 4.3. Soit $t \in \Omega$ vérifiant $t^{p^a} = t$. Désignons par $\bar{t} \in \mathbb{F}_{p^a}$ sa classe résiduelle. Alors on a

$$\prod_{j=0}^{a-1} \Theta(t^{p^j}) = \xi_p^{\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{p^a}/\mathbb{F}_p}(\bar{t})} \qquad (4.3.1)$$

4.4. Rappelons que le corps résiduel de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p(\xi_p)$ est $\mathbb{F}_p$. Soient

(4.4.0) K = l'extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p(\xi_p)$ à corps résiduel $\mathbb{F}_q$,

(4.4.1) $\tau \in \mathrm{Gal}\left(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p)\right)$ le "Frobenius", i.e. l'automorphisme se réduisant suivant l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$, $x \longmapsto x^p$,

(4.4.2) Soit $F(X) = \sum A_W X^W$ le relèvement en $K[X_1,\ldots,X_{n+2}]$ de $f(X)$ dont les coefficients vérifient $A_W^q = A_W$. Mettant ensemble (4.3.1) et (4.0.9), on trouve (compte tenu de la définition (4.1.0) de X) :

$$(4.4.3)\quad \begin{cases} (q^\nu - 1)\ \mathrm{card}\ V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) - \dfrac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} \\ \qquad = \dfrac{1}{q^\nu} \displaystyle\sum_{(X_o,X) \in (\mu_{q^\nu-1}(\Omega))^{n+3}} \prod_W \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^\nu)-1} \Theta(A_W^{p^j} X_o^{p^j} X^{p^j W}) \ . \end{cases}$$

Définissons

$$H(X) = H(X_o,\ldots,X_{n+2}) \in K\,[[X_o,\ldots,X_{n+2}]]$$

par

$$(4.4.4)\qquad H(X) = \prod_W \Theta\,(A_W X_o X_1^{W_1} \ldots X_{n+2}^{W_{n+2}}) \ .$$

Nous faisons agir $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p))$ sur $K[[X_o,\ldots,X_{n+2}]]$ à travers son action sur les coefficients ; l'action composante de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p(\xi_p))$ sera notée

$$(4.4.5)\qquad G(X) \longmapsto G^\sigma(X) \ .$$

On a en particulier

$$H^{\tau^j}(X) = \prod_{W_j} \Theta\,(A_W^{\tau^j} X_o X_1^W \dots X_{n+2}^W) \quad .$$

Compte tenu de ce que $A_W^{\tau^j} = A_W^{p^j}$, (4.4.3) se récrit alors

(4.4.6) $(q^\nu-1)\mathrm{Card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) =$

$$\frac{(q^\nu-1)^{n+2}}{q^\nu} + \frac{1}{q^\nu} \sum_{(X_o,X)\in(\mu_{q^\nu-1}(\Omega))^{n+3}} \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^\nu)-1} H^{\tau^j}(X^{p^j})$$

4.5. Nous allons maintenant exprimer la somme dans (4.4.6) comme une trace.

Pour chaque $b \in \mathbb{Q}$, on définit une K-algèbre de Banach p-adique

(4.5.1) $L(b)$ = le sous-anneau de $K[[X_o,\dots,X_{n+2}]]$ formé des séries qui s'écrivent

(4.5.2) $$\sum_{d\,U_o = \sum_{i\geq 1} U_i} B_U\, X_o^{U_o} X_1^{U_1} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}} \qquad (U = (U_o,\dots,U_{n+2}))$$

et qui vérifient

(4.5.3) $$\inf_U (\mathrm{ord}(B_U) - b\,U_o) > -\infty \quad .$$

C'est une algèbre de Banach p-adique pour la fonction d'ordinal (l'opposé du logarithme de la norme)

(4.5.4) $$\inf_U (\mathrm{ord}\,(B_U) - bU_o) = \mathrm{ord}\,(\Sigma\, B_U\, X^U) \quad .$$

On vérifie sur 4.4.4 et (4.2.1) que l'on a

$$H(X) \in L\left(\frac{1}{p-1}\right) \quad .$$

Introduisons des opérateurs.

Pour chaque entier $k > 0$, on introduit un opérateur continu d'espaces de Banach sur K

$$(4.5.5) \qquad \begin{cases} \Psi_k : L(b) \longrightarrow L(k\,b) \\ \Psi_k \left(\Sigma\, B_U X^U\right) = \Sigma\, B_{kU} X^U \quad . \end{cases}$$

Pour chaque couple (b,b'), $b' < b$, il y a un <u>opérateur de "restriction"</u> qui est complètement continu (i.e. une limite uniforme des opérateurs de rang fini)

$$(4.5.6) \qquad \begin{cases} L(b) \xrightarrow{\text{"restriction"}} L(b') \\ \Sigma\, B_U X^U \longmapsto \Sigma\, B_U X^U \quad . \end{cases}$$

Chaque élément G de l'algèbre L(b) donne l'endomorphisme continu de la multiplication par G

$$(4.5.7) \qquad \begin{aligned} G &: L(b) \longrightarrow L(b) \\ \eta &\longmapsto \eta\, G \quad . \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont liés par le lemme suivant, dont la démonstration se trouve dans [2] (cf. aussi [4]).

Lemme 4.5.8 (ou lemme de la trace (DWORK)). Soient $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, et $G \in L(b/k)$. Alors le composé

$$L(b) \xrightarrow{\text{"restriction"}} L(b/k) \xrightarrow{xG} L(b/k) \xrightarrow{\Psi_k} L(b) \quad ,$$

noté $\Psi_k \circ G$, est complètement continu, et sa trace [cf. [4]] est donnée par la formule

$$(4.5.9) \qquad \mathrm{tr}(\Psi_k \circ G) = \frac{1}{(k-1)^{n+2}} \sum_{X \in (\mu_{k-1}(\Omega))^{n+3}} G(X) \quad .$$

Appliquant ce lemme au cas

$$\begin{cases} k = q^{\nu} \\ G(X) = \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \in L\left(\frac{n}{(p-1)q^{\nu}}\right) \\ b = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

(4.4.6) se récrit

$$(4.5.10) \quad (q-1)\mathrm{card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^{\nu}}) = \frac{(q^{\nu}-1)^{n+2}}{q^{\nu}} + \frac{(q^{\nu}-1)^{n+3}}{q^{\nu}} \mathrm{tr}\left(\Psi_q \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \,|\, L\left(\frac{1}{p-1}\right)\right).$$

Soit $L^0(b)$ l'idéal des éléments de $L(b)$ qui "s'annulent en 0", i.e. "sans terme constant". Il est stable sous $\Psi_q \circ G$, et on a évidemment

$$(4.5.11) \qquad \mathrm{tr}(\Psi_k \circ G) = G(0) + \mathrm{tr}\,(\Psi_k \circ G \,|\, L^0) \quad .$$

Compte tenu de ce que $H(0) = 1$, (4.5.10) se récrit

$$(4.5.12) \quad \mathrm{card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^{\nu}}) = (q^{\nu}-1)^{n+1} + \frac{(q^{\nu}-1)^{n+2}}{q} \mathrm{tr}\left(\Psi_q \circ \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q^{\nu})-1} H^{\tau^j}(X^{p^j}) \,|\, L^0\left(\frac{1}{p-1}\right)\right).$$

Considérons maintenant l'opérateur τ^{-1}-linéaire

(4.5.13) $$\tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X) : L(b) \longrightarrow L(b) \quad .$$

On constate que ses itérés sont donnés par

(5.4.14) $$(\tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X))^a = \tau^{-a} \circ \Psi_{p^a} \circ H(X) H^{\tau}(X^p) \ldots H^{\tau^{a-1}}(X^{p^{a-1}}) ,$$

et on note que, si $\mathrm{ord}(q) \mid a$, on a $\tau^{-a} = \mathrm{id}$. Ceci posé, on définit une opération τ^{-1}-linéaire

(4.5.15) $$\begin{cases} \alpha : L^{\circ}\left(\frac{1}{p-1}\right) \longrightarrow L^{\circ}\left(\frac{1}{p-1}\right) \\ \alpha = \frac{1}{p} \tau^{-1} \circ \Psi_p \circ H(X) \quad , \end{cases}$$

de sorte que (4.5.12) se récrit

(4.5.16) $$\mathrm{card}\, V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu - 1)^{n+1} + (q^\nu - 1)^{n+2} \mathrm{tr}((\alpha)^{\mathrm{ord}(q^\nu)} \mid L^{\circ}\left(\frac{1}{p-1}\right) .$$

Désignons par

(4.5.17) $$S = \text{l'ensemble } \{1, \ldots, n+2\} \quad .$$

Pour tout sous-ensemble $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, on définit un sous-espace de $L(b)$:

(4.5.18) $L^A(b)$ = ensemble des séries $\Sigma B_U X^U \in L(b)$ telles que, pour chaque monôme X^U avec $B_U \neq 0$, les $U_i > 0$ sont exactement U_o et les U_j , $j \in A$.

On a

(4.5.19) $$L^{\circ}(b) = \bigoplus_{\substack{A \subset S \\ A \neq \emptyset}} L^A(b)$$

et, pour chaque sous-ensemble

$$B \subset S, \quad B \neq \emptyset ,$$

on a

(4.5.20) $\bigoplus_{A \supset B} L^A(b) = L(b) \cap$ l'idéal $(\prod_{i \in B} X_i)\, K[[X]]$.

Evidemment chaque sous-espace $\bigoplus_{A \subseteq B} L^A(b)$ est stable par α ; il en résulte qu'il en est de même pour $\bigoplus_{A \supsetneq B} L^A(b)$, qui est somme de sous-espaces du type précédent.

On définit

(4.5.21) α_B = l'endomorphisme τ^{-1}-linéaire induit par α sur

$$\bigoplus_{A \supset B} L^A\left(\frac{1}{p-1}\right) \Big/ \bigoplus_{A \supsetneq B} L^A\left(\frac{1}{p-1}\right) \simeq L^B\left(\frac{1}{p-1}\right) .$$

Explicitement, on obtient α_B par la formule

(4.5.22) $\alpha_B = \frac{\tau^{-1}}{p} \Psi_p H_B(X)$, opération sous laquelle L^B est stable,

où $H_B(X)$ se déduit de $H(X)$ en y faisant la substitution $X_i = C$ pour $i \notin \{C\} \cup B$.

Récrivons encore (4.5.16)

(4.5.2.3) $\operatorname{card} V^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) = (q^\nu - 1)^{n+1} + (q^\nu - 1)^{n+2} \sum_{\substack{A \subset S \\ A \neq \emptyset}} \operatorname{tr}((\alpha_A)^{\operatorname{ord}(q^\nu)})$.

Définissons, pour $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, l'hypersurface

(4.5.24) $V_A \subset \mathbb{P}^{\operatorname{card}(A)-1} \simeq \mathbb{P}^{n+1} \cap \{X_i = 0 \ \forall i \notin A\}$

définie par $f_A(X)$, le polynôme déduit de $f(X)$ y faisant la substitution en $X_i = 0$ pour $i \notin A$.

Compte tenu de la compatibilité de la formation de la série H à partir de $f(X)$ à l'opération de substitution de 0 pour certaines des variables (4.5.23) donne, pour chaque $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$

$$(4.5.25)\quad \operatorname{card}\,(V_A^*(\mathbb{F}_{q^\nu})) = (q^\nu-1)^{\operatorname{car}(A)-1}+(q^\nu-1)^{\operatorname{card}(A)} \sum_{B\subset A} \operatorname{tr}((\alpha_B))^{\operatorname{ord}(q^\nu)}) \ .$$

D'autre part, on a

$$(4.5.26)\qquad \operatorname{card}\, V(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \sum_{\substack{A\subset S\\ A\neq\emptyset}} \operatorname{card}\, V_A^*(\mathbb{F}_{q^\nu}) \ .$$

Après une sommation facile, (4.5.25) donne alors

$$(4.5.27)\quad \operatorname{card}\, V(\mathbb{F}_{q^\nu}) = 1 + q^\nu + q^{2\nu} + \ldots + q^{\nu(\operatorname{card}(S)-1)}$$

$$+ \sum_{\substack{B\subset S\\ B\neq\emptyset}} (q^\nu-1)^{\operatorname{card}(B)} q^{\nu\operatorname{card}(S-B)} \operatorname{tr}\left((\alpha_B)^{\operatorname{ord}(q^\nu)} \right) .$$

Notons que α donc les α_B étant τ^{-1} linéaire, les $\alpha_B^{\operatorname{ord}(q)}$ sont K-linéaires. Définissons alors les séries caractéristiques

$$\Delta_B(t) \in 1 + t\,K[[t]]$$

$$(4.5.28)\qquad \Delta_B(t) = \det\left(1 - t\,\alpha_B^{\operatorname{ord}(q)} \mid L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)\right) \ .$$

Introduisons des endomorphismes de $1 + tK[[t]]$

$$(4.5.29)\qquad \varphi : g(t) \longmapsto g^{\varphi}(t) = g(qt)$$

et

$$(4.5.30)\qquad \delta = 1 - \varphi : g(t) \longmapsto g^{\delta}(t) = g(t)/g(qt)$$

Compte tenu de ce que

$$(4.5.31)\qquad Z(t, V/\mathbb{F}_q) = \exp\Big(\sum_{\nu\geq 1} \operatorname{card}(V(\mathbb{F}_{q^\nu}))\,\frac{t^\nu}{\nu}\Big)$$

et

$$(4.5.32)\qquad \det(1-t\,\alpha_B^{\operatorname{ord}(q)}) = \exp\Big(-\sum_{\nu\geq 1} \operatorname{tr}((\alpha_B)^{\nu \operatorname{ord} q})\,\frac{t^\nu}{\nu}\Big)$$

(4.5.27) se récrit

$$(4.5.23)\qquad Z(t,V/\mathbb{F}_q)\prod_{i=0}^{n+1}(1-q^i t) = \prod_{j=1}^{n+2}\Big(\prod_{\substack{B\subset S\\ \operatorname{card}(B)=j}} \Delta_B(t)\Big)^{-(-\delta)^j \varphi^{n+2-j}} .$$

4.6. Nous allons étudier maintenant l'intégralité des séries Δ_B . Posons

(4.6.1) $\mathbb{G}$ = l'anneau des entiers de K

et définissons une <u>filtration</u> sur $1 + t\,\mathbb{G}[[t]]$ par

$$(4.6.2)\qquad F^i(1 + t\,\mathbb{G}[[t]]) = 1 + q^i t\,\mathbb{G}[[q^i t]]$$

$$= \varphi^i(1+t\,\mathbb{G}[[t]]) .$$

On a

$$(4.6.3)\qquad \varphi(F^i) \subset F^{i+1}$$

$$(4.6.4)\qquad \delta(F^i) \subset F^i$$

(4.6.5) δ induit l'identité sur F^i/F^{i+1} .

<u>Lemme</u> 4.6.6. $\Delta_B(t) \in 1 + t\,\mathbb{G}[[t]]$, <u>et si un entier</u> j <u>vérifie</u>

$$(4.6.7)\qquad jd < \operatorname{card}(B)$$

<u>alors on a</u>

$$(4.6.8)\qquad \Delta_B(t) \in F^j(1 + t\,\mathbb{G}[[t]]) .$$

Démonstration. Les espaces de Banach $L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)$ sont tous "du type B(I)" au sens de Serre [7], i.e. ils admettent des "bases orthonormales", à savoir, les monômes

$$\pi^{U_o} X_o^{U_o} X_1^{U_1} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}} \tag{4.6.9}$$

qui y appartiennent. Que c' une base "orthonormale" veut dire par définition qu'on a

$$\mathrm{ord}(\Sigma C_U \pi^{U_o} X_o^{U_o} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}}) = \min_U \mathrm{ord}(C_U) \quad . \tag{4.6.10}$$

Soit

(4.6.11) R_B = le $\mathfrak{S}$-sous-module de $L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)$ formé des éléments d'ordinal ≥ 0. Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer

(4.6.12) si $jd < \mathrm{card}(B)$, alors $(\alpha_B)^{\mathrm{ord}(q)} R_B \subset q^j R_B$

ou, a fortiori, de démontrer

(4.6.13) si $jd < \mathrm{card}(B)$, alors $\alpha_B(R_B) \subset p^j R_B$.

Or, on a (4.5.22)

$$\alpha_B = \frac{\tau^{-1}}{p} \Psi_p \circ H_B(X) \quad . \tag{4.6.14}$$

Compte tenu de ce que

$$H(X) \in L\left(\frac{1}{p-1}\right), \ \mathrm{ord}(H(X)) \geq 0 \tag{4.6.15}$$

on a

$$H_B(X) \cdot R_B \subset R_B \tag{4.6.16}$$

et évidemment

$$\tau^{-1}(R_B) = R_B \quad , \tag{4.6.17}$$

de sorte que (4.6.13) sera conséquence de

(4.6.18) si $jd < \mathrm{card}(B)$, alors $\Psi_p(R_B) \subset p^{j+1}R_B$.

Vérifions (4.6.18) monôme par monôme. On a

$$(4.6.19)\quad \begin{cases} \Psi_p(\pi^{U_o} X_o^{U_o} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}}) = 0, \text{ sauf si } \forall i \quad p \mid U_i \\ \text{et} \\ \Psi_p(\pi^{pU_o} X_o^{pU_o} \dots X_{n+2}^{pU_{n+2}}) = \pi^{(p-1)U_o} \cdot \underbrace{\pi^{U_o} X_o^{U_o} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}}}_{\in R_B} . \end{cases}$$

Or, les conditions pour que l'on ait $X_o^{U_o} \dots X_{n+2}^{U_{n+2}} \in L^B\left(\frac{1}{p-1}\right)$ sont

$$(4.6.20)\quad \begin{cases} dU_o = \sum_{i \geq 1} U_i , \\ \text{pour } i \geq 1, \text{ on a } U_i > 0 \iff i \in B \end{cases}$$

d'où, en particulier,

$$(4.6.21)\qquad dU_o \geq \mathrm{card}(B) .$$

On a donc

$$(4.6.22)\qquad \mathrm{ord}(\pi^{(p-1)U_o}) = U_o \geq \frac{\mathrm{card}(B)}{d} > j$$

et, comme $U_o \in \mathbb{Z}$,

$$(4.6.23)\qquad \mathrm{ord}(\pi^{(p-1)U_o}) = U_o \geq j + 1.$$

Mettant ceci ensemble avec (4.6.19), on trouve (4.6.18).

5. Un théorème d'AX [1], (cf. aussi [4], section 7).

Théorème 5.0. Soient V une hypersurface dans $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré $d > 0$, définie sur $\mathbb{F}_q$, et j un entier : si on a

(5.0.1) $$j\,d < n + 2 \quad ,$$

alors

(5.0.2) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n+1} (1-q^i t) \in 1 + q^j t\, \mathbb{Z}[[q^j t]] \quad .$$

et l'inverse de tout zéro ou pôle de

(5.0.3) $$Z(t,V/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n+1} (1 - q^i t)$$

est de la forme q^j. (un entier algébrique).

Théorème 5.0.bis. Soit V_{aff} une hypersurface dans $\mathbb{A}^{n+2}$ définie par une forme homogène de degré d, définie sur $\mathbb{F}_q$. Si on a

(5.0.7) $$j\,d < n + 2$$

alors

(5.0.5) $$Z(t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) \in 1 + q^j t\, \mathbb{Z}[[q^j t]] \quad .$$

En particulier,

(5.0.6) $$\mathrm{card}(V_{aff}(\mathbb{F}_q)) \equiv 0 \mod q^j \quad ,$$

et par suite

(5.0.6 bis) $$\mathrm{card}(V(\mathbb{F}_q)) \geq \frac{q^j-1}{q-1} > 0$$

(ce qui améliore le th. de CHEVALLEY-WARNING [8]).

Démonstration. L'implication (5.0.5) $\Longrightarrow$ (5.0.6) est claire, en prenant le coefficient de t dans la fonction zêta. Les assertions (5.0.4) et (5.0.2) sont équivalentes, compte tenu de ce que

$$\text{(5.0.7)} \qquad \operatorname{card} V_{aff}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = 1 + (q^\nu - 1) \operatorname{card} V(\mathbb{F}_{q^\nu}) \quad ,$$

d'où

$$\text{(5.0.8)} \qquad Z(t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) = \frac{Z(t, V/\mathbb{F}_q)}{Z(qt, V/\mathbb{F}_q)(1-t)}$$

et

$$\text{(5.0.9)} \quad Z(t, V/\mathbb{F}_q) = \prod_{i \geq 0} \left[(1-q^i f)\, Z(q^i t, V_{aff}/\mathbb{F}_q) \right] \quad .$$

Les énoncés (5.0.2) et (5.0.3) sont équivalents encore, par le théorème de Fatou [3], grâce à la rationalité de la fonction zêta. Comme on a

$$\text{(5.0.10)} \qquad Z(t, V/\mathbb{F}_q) \in \mathbb{Z}[[t]] \quad ,$$

il suffira de démontrer

$$\text{(5.0.11)} \quad Z(t, V/\mathbb{F}_q) \prod_{i=0}^{n+1} (1-q^i t) \in F^j(1+t\,\mathcal{O}[[t]]) \quad .$$

Compte tenu de (4.5.33) et (4.6.4) - (4.6.5), il suffit de démontrer, pour $B \subset \{1, \ldots, n+2\}$, $B \neq \emptyset$, qu'on a

$$\text{(5.0.12)} \qquad \wedge_B(t) \in F^{j+\operatorname{card}(B)-(n+2)} \quad .$$

Nous pourrons terminer la démonstration en appliquant le lemme (4.4.6), une fois démontrée l'assertion :

(5.0.13) si $jd < n+2$, alors $(j+\operatorname{card}(B)-(n+2))\, d < \operatorname{card}(B)$,

qui se récrit

(5.0.14) si $jd < n+2$, alors $(j-(n+2))\, d < \mathrm{card}(B)\,(1-d)$.

Mais

$$\inf_{\substack{B \subset \{1,\ldots,n+2\} \\ B \neq \emptyset}} \mathrm{card}(B)\,(1-d) = (n+2)\,(1-d) \quad ,$$

de sorte qu'il suffit de démontrer

(5.0.15) si $jd < n+2$, alors $(j-(n+2))\, d < (n+2)(1-d)$,

ce qui est vrai.

Remarque 5.1. La condition

(5.1.1) $$jd < n+2$$

admet une interprétation cohomologique. Soit V une hypersurface lisse de degré d et de dimension n. Posons, comme dans XI 2.1, pour $a+b = n$

(5.1.2) $$h_0^{a,b} = \dim H^b(V, \underline{\Omega}_V^a) - \delta_{a,b} = \dim E^{a,b}(V)$$

où $E^{a,b}(V)$ est la composante de bidegré (a,b) de la "cohomologie évanescente de Hodge" (comparer XVII 5.4.4)

(5.1.3) $$E^{a,b}(V) = \mathrm{Coker}\,(H^b(\mathbb{P}^{n+1}, \underline{\Omega}^a_{\mathbb{P}^{n+1}}) \hookrightarrow H^b(V, \underline{\Omega}_V^a)) \quad .$$

Alors, par XI, 2.8,

(5.1.4) $$jd < n+2 \iff \left[\, h_0^{a,n-a} = 0 \text{ pour } a < j \text{ et } a > n-j \,\right] \quad ,$$

i.e. la condition signifie que le "niveau de Hodge" (XI 2.7) de la "cohomologie de Hodge évanescente" de V :

$$E^n_{DR}(V) = \mathrm{Coker}\,(H^n_{Hdg}(\mathbb{P}^{n+1}) \hookrightarrow H^n_{Hdg}(V)) \quad ,$$

est $\leq n-2j$, i.e. son co-niveau est $\geq j$. D'autre part, la conclusion signifie aussi que les valeurs propres du Frobenius $\mathfrak{T}_q$ opérant sur la cohomologie évanescente ℓ-adique ($\ell \neq p$) sont des entiers algébriques (XXI A.2) divisibles par q^j. Le résultat de AX 5.0. vient donc à l'appui de la conjecture suivante, suggérée par le yoga du niveau des motifs, et qui met en relations les classiques conjectures de HODGE [5] et de TATE [5] :

Conjecture 5.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse, avec S intègre, de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et dominant $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, i,j des entiers. Supposons que le co-niveau de Hodge du H^i de la fibre générique de f soit $\geq j$. Alors pour tout point $s \in S$, le coniveau (XX 2.0.6) de $H^i(X_s, \mathbb{Q}_\ell)$ est $\geq j$, donc (XX 2.2) si s est un point fermé de S, les valeurs propres de Frobenius opérant sur $H^i(X_s, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques divisibles par q^j, où $q = \mathrm{card}(k(s))$.

6. Fin de la démonstration de la formule de congruence.

Compte tenu de (4.6.6) et (4.6.3)-(4.6.4), (4.5.24) donne une formule de congruence

$$(6.0.1) \qquad Z(t, V/\mathbb{F}_q)(1-t) \equiv \Delta_S(t)^{(-1)^{n+1}} \mod 1 + qt\,\mathfrak{S}[[t]] \quad .$$

Passons au calcul de $\Delta_S(t)$ modulo $\pi\,\mathfrak{S}[[t]]$. Définissons (cf. (4.6.11) :

$$(6.0.2) \qquad W_S = R_B \otimes_{\mathfrak{S}} \mathbb{F}_q \quad ,$$

(6.0.3) $\bar{\alpha}_S : W_S \longrightarrow W_S$ l'opération τ^{-1}-linéaire induite par α_S ,

(6.0.4) $R_S(t)$ le sous-module de R_S forme des éléments de degré i en X_o ,

(6.0.5) $$W_S(i) = R_S(i) \otimes_{\mathbb{G}} \mathbb{F}_q \quad .$$

Proposition 6.0.6. On a l'inclusion

$$\alpha_S(R_S) \subset R_S(1) + p R_S \quad .$$

Démonstration. On a la factorisation (4.6.14)

(6.0.7) $$\alpha_S = \tau^{-1} \circ \frac{1}{p} \Psi_p \circ H(X) \quad .$$

On sait (cf. (4.6.15))

(6.0.8) $$H(X) . R_S \subset R_S \ ,$$

et évidemment

(6.0.9) $$\tau^{-1}(R_S(1) + p R_S) = R_S(1) + p R_S \ ,$$

de sorte qu'il suffit de vérifier

(6.0.10) $$\frac{1}{p} \Psi_p R_S \subset R_S(1) + p R_S \ ,$$

ce qui est clair par (4.6.19).

Corollaire 6.0.11. On a l'inclusion

$$\bar{\alpha}_S W_S \subset W_S(1) \quad .$$

Corollaire 6.0.12. On a la congruence

$$\Delta_S(t) \equiv \det(1-t(\bar{\alpha}_S)^{\mathrm{ord}(q)} \mid W_S(1)) \bmod \pi\, \mathcal{O}[[t]] \quad .$$

Proposition 6.1. L'opération τ^{-1}-linéaire $\bar{\alpha}_S : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$ est égale à l'opération

$$\tau^{-1}\Psi_p \circ (X \circ f(X))^{p-1} \qquad (6.1.1)$$

Démonstration. Ecrivons

$$H(X) = 1 + \sum_{i \geq 1} H_i(X) \qquad (6.1.2)$$

où

$$H_i(X) \text{ est de degré } i \text{ en } X_o \quad . \qquad (6.1.3)$$

D'après (4.6.19) encore, on a

$$\frac{1}{p}\Psi_p R_S(i) \subset p R_S \text{ si } i \neq p \quad . \qquad (6.1.4)$$

Compte tenu de ce que

$$H_i(X) . R_S(j) \subset R_S(i+j) \quad , \qquad (6.1.5)$$

on a

$$(\alpha_S - \frac{\tau^{-1}}{p}\Psi_p H_{p-1}(X))(R_S(1)) \subset p R_S \quad . \qquad (6.1.6)$$

On a donc

$$\left[(\alpha_S)^{\mathrm{ord}(q)} - (\frac{\tau^{-1}}{p}\Psi_p . H_{p-1}(X))^{\mathrm{ord}(q)}\right] R_S(1) \subset p R_S \quad . \qquad (6.1.7)$$

Calculons maintenant $H_{p-1}(X)$. On a (cf. (4.4.4))

$$(6.1.8) \qquad H(X) = \prod_W \Theta(A_W X_o X^W)$$

$$= \prod_W \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\pi A_W X_o X^W)^{p^n}}{p^n} \right)$$

$$= \prod_W \prod_{n\geq 0} \exp\left(\frac{(\pi A_W X_o X^W)^{p^n}}{p^n} \right)$$

$$\equiv \prod_W \exp(\pi A_W X_o X^W) \mod \text{degré } p$$

$$\equiv \exp(\pi \sum A_W X_o X^W) \mod \text{degré } p$$

$$\equiv \exp(\pi X_o F(X)) \mod \text{degré } p,$$

d'où

$$(6.1.9) \qquad H_{p-1}(X) \equiv \frac{\pi^{p-1} X_o^{p-1}}{(p-1)!} F(X)^{p-1} .$$

On constate facilement que

$$(6.1.10) \qquad \frac{\pi^{p-1}}{p} \equiv -1 \mod p$$

donc

$$(6.1.11) \qquad \frac{1}{p} H_{p-1}(X) \equiv (X_o f(X)^{p-1} \mod p ,$$

ce qui achève la démonstration de 6.1.

Corollaire 6.1.12. L'opérateur linéaire

$$(\bar{\alpha}_S)^{ord(q)} : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$$

n'est autre que $\Psi_q \circ (X_o f(X))^{q-1}$.

Démonstration. D'après (6.1.1)

$$(\bar{\alpha}_S)^{\mathrm{ord}(q)} = (\tau^{-1}\Psi_p \circ (X_o f(X))^{p-1})^{\mathrm{ord}(q)}$$

$$= \Psi_q \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(a)-1} (X_o^{p^j} f^{\tau^j}(X^{p^j}))^{p-1}$$

$$= \Psi_q \prod_{j=0}^{\mathrm{ord}(q)-1} (X_o f(X))^{p^j(p-1)}$$

$$= \Psi_q \circ (X_o f(X))^{q-1} \quad .$$

Mettant ensemble (6.1.12) (6.0.12), et (6.0.1), on trouve,

Corollaire 6.1.13. On a la congruence mod p :

$$Z(t,V/\mathbb{F}_q) \equiv \frac{\det(1-t\,\Psi_q(X\circ f(X))^{q-1} \mid W_S(1))^{(-1)^{n+1}}}{1-t} \quad .$$

6.2. Il reste à calculer les groupes de cohomologie de $\mathcal{O}_V$.

Posons

(6.2.1) $\mathfrak{F}_q$ = l'opération "élévation à la puissance q'ième " dans $\mathcal{O}_V$.

Nous avons une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}$:

$$(6.2.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le diagramme suivant est commutatif

$$(6.2.3) \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{q-1}\mathfrak{F}_q} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}_q} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}_q} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_V \longrightarrow 0 \end{array} \quad .$$

Compte tenu de ce que

$$(6.2.4)\qquad \begin{cases} H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \mathbb{F}_q \\ H^i(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0 \quad i \neq 0 \\ H^i(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) = 0 \quad i \neq 0, n+1 \end{cases},$$

la suite exacte longue de cohomologie associé à (6.2.2), donne

$$(6.2.5)\qquad \begin{cases} H^0(V, \mathcal{O}_V) \simeq \mathbb{F}_q \\ H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0, n \\ H^n(V, \mathcal{O}_V) \simeq H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \end{cases}.$$

Le diagramme commutatif (6.2.3) donne alors

$$(6.2.6)\qquad \det(1 - t\,\mathfrak{F}_q \,|\, H^0(V, \mathcal{O}_V)) = 1 - t$$

et

$$(6.2.7)\qquad \det(1-t\,\mathfrak{F}_q \,|\, H^n(V,\mathcal{O}_V)) = \det(1-t(f^{q-1}\mathfrak{F}_q) \,|\, H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) .$$

Il ne reste qu'à établir

$$(6.2.8)\qquad \det(1-t(f^{q-1}\mathfrak{F}_q) \,|\, H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) = \det(1-t(\Psi_q\cdot(X_0 f(X))^{q-1} \,|\, W_S(1))$$

ce qui est une conséquence de la

Proposition 6.3. Il y a un isomorphisme

$$(6.3.1)\qquad W_S(1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d), \mathbb{F}_q)$$

par rapport auquel l'opérateur

$$(6.3.2)\qquad \Psi_q \circ (X_0 f(X))^{q-1} : W_S(1) \longrightarrow W_S(1)$$

est le transposé de

(6.3.3) $f(X)^{q-1}\Im_q : H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \longrightarrow H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d))$.

Démonstration. En calculant le groupe $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d))$ à l'aide du recouvrement standard de $\mathbb{P}^{n+1}$, on trouve

(6.3.4) $H^{i+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d))$ = le $\mathbb{F}_q$-vectoriel de base des monômes $X_1^{W_1}\dots X_{n+2}^{W_{n+2}}$ les $W_i \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\Sigma W_i = -d$

= le $\mathbb{F}_q$-sous-vectoriel de base des monômes $X_1^{W_1}\dots X_{n+2}^{W_{n+2}}$ qui vérifient en plus :

$\exists$ i tel que $W_i \geq 0$.

D'autre part, $W_S(1) = R_S(1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}_q$, et on a

(6.3.5) $R_S(1)$ = le $\mathcal{O}$-module libre de base les monômes

$$(\pi X_o)\, X_1^{U_1}\dots X_{n+2}^{U_{n+2}} \text{ vérifiant } \Sigma U_i = d,\quad U_i > 0\ \forall_i .$$

L'accouplement

(6.3.6) $(,) : W_S(1) \times H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)) \longrightarrow \mathbb{F}_q$

défini par

(6.3.7) $$(\text{classe de } \pi X_o X_1^{U_1}\dots X_{n+2}^{U_{n+2}},\ X_1^{W_1}\dots X_{n+2}^{W_{n+2}}) = \begin{cases} 1 \text{ si } U_1 = -W_i \text{ pour tout } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est évidemment une dualité parfaite de $\mathbb{F}_q$-vectoriels, et on constate facilement que $\Psi_q.(X\circ f(X))^{q-1}$ est la transposée de $f(X)^{q-1}\cdot f_q$, ce qui prouve 6.3.

Bibliographie

[1] AX, J. Zeroes of Polynomials Over Finite Fields, Amer. J. Math. 86, 1964, 255-261.

[2] DWORK, B. On the Rationality of the Zeta Function of an Algebraic Variety, Amer. J. Math. 82, 1960, 631-648.

[3] DWORK, B. An Algebraic Variety, in Proc. of the Woods-Hole Summer Institute 1964 (miméo).

[4] DWORK, B. On the Zeta Function of Hypersurface II, Ann. Math. (2), 80, 1964, 227-299.

[5] GROTHENDIECK, A., Le Groupe de Brauer III, dans Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North Holland Pub. Co, 1968.

[6] SERRE, J.P. Groupes Algébriques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959.

[7] SERRE, J.P. Endomorphismes Complétement, Continus des Espaces de Banach p-Adiques, Pub. Math. I.H.E.S. n° 12, 1962.

[8] CHEVALLEY, C. Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abhandlungen Math. Sem. Hamburg, 11, 1936, 73-75.