Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

569

Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$

par P. Deligne
avec la collaboration de J. F. Boutot,
A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier

Cohomologie Etale

Introduction.

Ce volume a pour but de faciliter au non-expert l'usage de la cohomologie ℓ-adique. J'espère qu'il lui permettra souvent d'éviter le recours aux exposés touffus de SGA 4 et SGA 5. Il contient aussi quelques résultats nouveaux.

Le premier exposé, rédigé par J.F. Boutot, survole SGA 4. Il donne les principaux résultats - avec une généralité minimale, souvent insuffisante pour les applications - et une idée de leur démonstration. Pour des résultats complets, ou des démonstrations détaillées, SGA 4 reste indispensable.

Le "Rapport sur la formule des traces" contient une démonstration complète de la formule des traces pour l'endomorphisme de Frobenius. La démonstration est celle donnée par Grothendieck dans SGA 5, élaguée de tout détail inutile. Ce Rapport devrait permettre à l'utilisateur d'oublier SGA 5, qu'on pourra considérer comme une série de digression , certaines très intéressantes. Son existence permettra de publier prochainement SGA 5 tel quel. Il est complété par l'exposé "Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques" qui explique comment la formule des traces permet l'étude de sommes trigonométriques, et donne des exemples.

Le public visé par les autres exposés est plus limité, et leur style s'en ressent. L'exposé "Fonctions L modulo ℓ^n et modulo p " est une généralisation "modulaire" du Rapport, basée sur l'étude SGA 4 XVII 5.5 des puissances symétriques. L'exposé "La classe de cohomologie associée à un cycle" définit cette classe dans divers contextes, et donne la compatibilité entre intersections et cup-produits. Dans "Dualité" sont rassemblés quelques résultats connus, pour lesquels manquait une référence, et quelques compatibilités. L'exposé "Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique" est nouveau. Il donne notamment, en cohomologie sans supports, des théorèmes de finitude analogues à ceux connus en cohomologie à supports compacts.

Pour plus de détails sur les exposés, je renvoie à leur introduction respective.

Je remercie enfin J.L. Verdier de m'avoir permis de reproduire ici ses notes "Catégories dérivées (Etat 0)". Elles restent je crois très utiles, et étaient devenues introuvables.

Dans les références internes à ce volume, les exposés sont cités par un titre abrégé, indiqué entre [ ] dans la table des matières.

Bures-sur-Yvette, le 20 Septembre 1976

Pierre Deligne

Table des Matières.

Un fil d'Ariane pour SGA 4, SGA $4\frac{1}{2}$ et SGA 5		1
Cohomologie étale : les points de départ rédigé par J.F. Boutot	[Arcata]	4
Rapport sur la formule des traces	[Rapport]	76
Fonctions L modulo ℓ^n et modulo p	[Fonction L mod.ℓ^n]	110
La classe de cohomologie associée à un cycle par A. Grothendieck, rédigé par P. Deligne	[Cycle]	129
Dualité	[Dualité]	154
Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques	[Sommes trig.]	168
Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique avec un appendice par L. Illusie.	[Th. finitude]	233
Catégories dérivées, état 0 par J.L. Verdier	[C.D.]	262
Erratum pour SGA 4		312

Un fil d'Ariane pour SGA 4, SGA $4\frac{1}{2}$ et SGA 5.

Les exposés I à VI de SGA 4 donnent la théorie générale des topologies de Grothendieck. Très détaillés, ils peuvent être précieux lors de l'étude de topologies exotiques, telle celle qui donne naissance à la cohomologie cristalline. Pour la topologie étale, si proche de l'intuition classique, un garde-fou si imposant n'est pas nécessaire : il suffit de connaître (par exemple) le livre de Godement [4], et d'avoir un peu de foi. Autres références possibles : les chapitres I à III des notes d'Artin [1], l'exposé Bourbaki de Giraud [3] ou [Arcata] I. Les exposés VII et VIII commencent l'étude de la topologie étale. Ils sont plus détaillés que le chapitre III d'Artin et que [Arcata] II.

L'étude des courbes est la clef de la cohomologie étale. Elle est commencée par Artin dans l'exposé IX de SGA 4 ; des conséquences, quant à la dimension cohomologiques, sont données dans X. Les points essentiels sont repris dans [Arcata] III. L'exposé XI n'est pas nécessaire pour la suite ; il contient une élégante démonstration du théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique dans le cas particulier des variétés algébriques complexes lisses.

Les exposés XII et XIII prouvent le fondamental théorème de changement de base pour un morphisme propre. Ainsi que l'a remarqué Artin dans (algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES 36 (1969) p. 23-58-§3), son théorème d'approximation permet de simplifier la démonstration. Cette voie est suivie dans [Arcata] IV où les multiples dévissages de la démonstration ne sont qu'esquissés, et où les applications de l'exposé XIV ne sont que très brièvement indiquées. Le théorème permet de définir la "cohomologie à supports compacts", et les foncteurs "images directes supérieures à supports propres" $R^i f_!$ (dont les propriétés se ramènent à celles des foncteurs images directes supérieures pour un morphisme propre). C'est le sujet du prolixe exposé XVII ; l'essentiel est dit dans [Arcata] IV, mais des morceaux de XVII peuvent avoir une utilité indépendante.

Les exposés XV et XVI sont centrés sur le fondamental théorème d'acyclicité locale pour les morphismes lisses. L'influence de SGA 7 transparaît dans l'exposé parallèle moins détaillé [Arcata] V, qui contient aussi la preuve des résultats requis de SGA 2.

L'exposé [Arcata] VI est consacré à la dualité de Poincaré ; il est plus clair que SGA 4 XVIII mais ne prétend pas donner une démonstration complète. Pour ceux qui tiennent à une démonstration purement algébrique, il est simplifié par une référence à [Dualité] §3 ; il ne contient pas la preuve du formalisme auquel obéit le morphisme trace (XVIII §2).

Il existe en cohomologie étale un formalisme de dualité analogue à celui de la cohomologie cohérente. Pour l'établir, Grothendieck utilisait la résolution des singularités et la conjecture de pureté (pour l'énoncé, voir [Cycle] 2.1.4), établie dans un cadre relatif dans SGA 4 XVI, et -modulo la résolution- en égale caractéristique dans SGA 4 XIX. Les points-clefs sont établis par une autre méthode, dans [Th. finitude], pour les schémas de type fini sur un schéma régulier de dimension 0 ou 1 . Divers développements sont donnés dans SGA 5 I. Dans SGA 5 III, on montre comment ce formalisme implique la très générale formule des traces de Lefschetz-Verdier.

On voit que dans la version originale de SGA 5, la formule de Lefschetz-Verdier n'était établie que conjecturalement. De plus, les termes locaux n'y étaient pas calculés. Pour l'application aux fonctions L , ce séminaire contient une autre démonstration, elle complète, dans le cas particulier du morphisme de Frobenius. C'est celle qui figure dans [Rapport]. Autres références : pour l'énoncé et le schéma des dévissages : l'exposé Bourbaki de Grothendieck [5] ; pour une brève description de la réduction (due à Grothendieck) du cas crucial à un cas déjà traité par Weil, [2] §10 ; pour un traitement ℓ-adique de ce dernier cas, [Cycle] §3 .

Dans SGA 5, on trouvera encore un traitement détaillé du passage de la $\mathbb{Z}/\ell^n$-cohomologie à la $\mathbb{Z}_\ell$-cohomologie (exposés V et VI, par J.P. Jouanolou), et du formalisme du morphisme de Frobenius (exposé XV, par C. Houzel). Les exposés X

et XII, rédigés par I. Bucur, donnent le calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau sur une courbe, et celui de la trace de l'endomorphisme de sa cohomologie défini par certaines correspondances. Dans VII, Jouanolou donne le calcul de la cohomologie de schémas classiques, et des applications. Par ailleurs, l'exposé de Serre "Introduction à la théorie de Brauer" a été repris dans son livre [6] (3ème partie).

Bibliographie.

[1] M. Artin, Grothendieck topologies, (Harvard University 1962).

[2] P. Deligne, les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. Dans Modular functions of one variable II, p. 501-597, Lecture Notes in Math.349, Springer Verlag.

[3] J. Giraud, Analysis situs, Séminaire Bourbaki 256, mai 1963 - Benjamin.

[4] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Act. Sci. et Ind. 1252, Hermann 1958.

[5] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Séminaire Bourbaki 279, Déc. 1964, Benjamin.

[6] J.P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Collection Méthodes, Hermann 1967.

SGA : Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie,

SGA 4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, (dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier). Lecture Notes 269, 270 et 305.

SGA 5 : Cohomologie ℓ-adique et fonctions L (dirigé par A. Grothendieck) à paraître aux Lecture Notes.

Cohomologie étale: les points de départ.

par P. Deligne, rédigé par J.F. Boutot.

Ce travail reprend 6 exposés donnés par P. Deligne à Arcata en août 1974 (AMS Summer School on algebraic geometry), sous le titre: "Inputs of etale cohomology". Un $7^{\underline{e}}$ exposé est devenu le "rapport sur la formule des traces", dans ce même volume. Le but des exposés était de donner les démonstrations des théorèmes fondamentaux en cohomologie étale, débarassées de la gangue de non-sense qui les entoure dans SGA 4. Nous n'avons pas cherché à énoncer les théorèmes sous leur forme la plus générale, ni à suivre les dévissages, parfois astucieux, que leur démonstration requiert. Nous avons au contraire mis l'accent sur les cas "irréductibles", qui, tous dévissages faits, restent à traiter.

Nous espérons que ce texte, qui ne prétend à aucune originalité, aidera le lecteur à consulter avec profit les 3 volumes de SGA 4.

Convention. Nous ne considérerons que des schémas quasi-compacts (= réunion finie d'ouverts affines) et quasi-séparés (= tels que l'intersection de deux ouverts affines est quasi-compacte), et les appellerons simplement schémas.

Table des matières

I. Topologies de Grothendieck		6
1. Cribles	I-1	
2. Faisceaux	I-2	
3. Champs	I-2	
4. Descente fidèlement plate.	I-4	
5. Un cas particulier: le théorème 90 de Hilbert.	I-8	
6. Topologies de Grothendieck	I-10	
II. Topologie étale		18
1. Topologie étale	II-1	
2. Exemples de faisceaux	II-2	
3. Fibres, images directes	II-5	
4. Cohomologie galoisienne	II-7	
III. Cohomologie des courbes.		27
1. Le groupe de Brauer	III-1	
2. Le théorème de Tsen	III-4	
3. Cohomologie des courbes lisses	III-6	
4. Dévissages	III-10	
IV. Théorème de changement de base pour un morphisme propre		39
1. Introduction	IV-1	
2. Démonstration pour q=0 ou 1 et F = $\mathbb{Z}/n$	IV-2	
3. Faisceaux constructibles	IV-5	
4. Fin de la démonstration	IV-7	
5. Cohomologie à support propre.	IV-9	
6. Applications	IV-12	
V. Acyclicité locale des morphismes lisses		52
1. Morphismes localement acycliques	V-3	
2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse	V-7	
3. Applications	V-11	
VI. Dualité de Poincaré		66
1. Introduction	VI-1	
2. Le cas de courbes	VI-3	
3. Le cas général	VI-5	
4. Variantes et applications	VI-7	
Bibliographie		74

I. Topologies de Grothendieck.

A l'origine, les topologies de Grothendieck sont apparues comme sous-jacentes à sa théorie de la descente (cf SGA 1 VI, VIII); l'usage des théories de cohomologie correspondantes est plus tardif. La même démarche est suivie ici: en formalisant les notions classiques de localisation, de propriété locale et de recollement (§ 1, 2, 3), on dégage le concept général de topologie de Grothendieck (§ 6); pour en justifier l'introduction en géométrie algébrique, on démontre un théorème de descente fidèlement plate (§ 4), généralisation du classique théorème 90 de Hilbert (§ 5).

Le lecteur trouvera une exposition plus complète, mais concise, du formalisme dans Giraud [5]. Les notes de M. Artin: "Grothendieck topologies" [1] (chapitres I à III) restent également utiles. Les 866 pages des exposés I à VI de SGA 4 sont précieuses lorsqu'on considère des topologies exotiques, telle celle qui donne naissance à la cohomologie cristalline; pour utiliser la topologie étale, si proche de l'intuition classique, il n'est pas indispensable de les lire.

1. Cribles. Soient X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles sur X. La continuité de f est une propriété de nature locale; autrement dit, si f est continue sur tout ouvert suffisamment petit de X, f est continue sur X tout entier. Pour formaliser la notion de "propriété de nature locale", nous introduirons quelques définitions.

On dit qu'un ensemble $\mathcal{U}$ d'ouverts de X est un crible si pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $V \subset U$, on a $V \in \mathcal{U}$. On dit qu'un crible est couvrant si la réunion de tous les ouverts appartenant à ce crible est égale à X.

Etant donnée une famille $\{U_i\}$ d'ouverts de X, le crible engendré par $\{U_i\}$ est par définition l'ensemble des ouverts U de X tels que U soit contenu dans l'un des U_i.

On dit qu'une propriété $P(U)$, définie pour tout ouvert U de X, est **locale** si, pour tout crible couvrant $\underline{u}$ de tout ouvert U de X, $P(U)$ est vraie si et seulement si $P(V)$ est vraie pour tout $V \in \underline{u}$. Par exemple, étant donné $f : X \to \mathbb{R}$, la propriété "f est continue sur U" est locale.

2. Faisceaux. Précisons la notion de fonction donnée localement sur X.

(2.1) Point de vue des cribles: Soit $\underline{u}$ un crible d'ouverts de X. On appelle fonction donnée $\underline{u}$-localement sur X la donnée pour tout $U \in \underline{u}$ d'une fonction f_U sur U telle que, si $V \subset U$, on ait $f_V = f_U|V$.

(2.2) Point de vue de Čech: Si le crible $\underline{u}$ est engendré par une famille d'ouverts U_i de X, se donner une fonction $\underline{u}$-localement revient à se donner une fonction f_i sur chaque U_i telle que $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$.

Autrement dit, si $Z = \coprod U_i$, se donner une fonction $\underline{u}$-localement revient à se donner une fonction sur Z qui soit constante sur les fibres de la projection naturelle $Z \to X$.

(2.3) Les fonctions continues forment un faisceau; cela signifie que pour tout crible couvrant $\underline{u}$ d'un ouvert V de X et toute fonction donnée $\underline{u}$-localement $\{f_U\}$ telle que chaque f_U soit continue sur U, il existe une unique fonction continue f sur V telle que $f|U = f_U$ pour tout $U \in \underline{u}$.

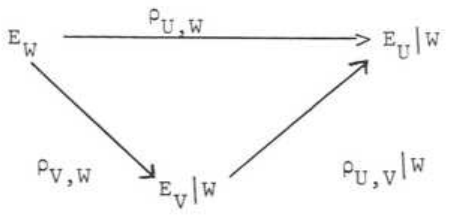
3. Champs. Précisons maintenant la notion de fibré vectoriel donné localement sur X.

(3.1) Point de vue des cribles: Soit $\underline{u}$ un crible d'ouverts de X. On appelle fibré vectoriel donné $\underline{u}$-localement sur X les données de

a) un fibré vectoriel E_U sur chaque $U \in \underline{u}$,

b) si $V \subset U$, un isomorphisme $\rho_{U,V} : E_V \xrightarrow{\sim} E_U|V$, vérifiant

c) si $W \subset V \subset U$, le diagramme



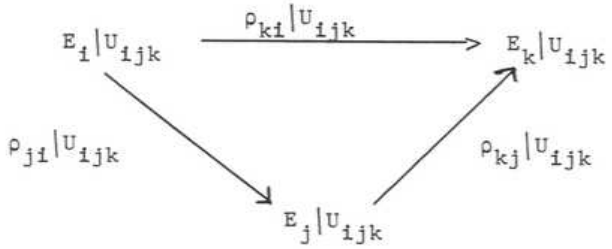
commute, c'est-à-dire $\rho_{U,W} = (\rho_{U,V}$ restreint à W) $\circ$ $\rho_{V,W}$.

(3.2) Point de vue de Čech: Si le crible $\underline{u}$ est engendré par une famille d'ouverts U_i de X , se donner un fibré vectoriel $\underline{u}$-localement revient à se donner:

a) un fibré vectoriel E_i sur chaque U_i ,

b) si $U_{ij}=U_i \cap U_j = U_i \times_X U_j$, un isomorphisme $\rho_{ji} : E_i|U_{ij} \xrightarrow{\sim} E_j|U_{ij}$, de sorte que

c) si $U_{ijk} = U_i \times_X U_j \times_X U_k$, le diagramme



commute, c'est-à-dire $\rho_{ki} = \rho_{kj} \circ \rho_{ji}$ sur U_{ijk} .

Autrement dit, si $Z = \coprod U_i$ et si $\pi : Z \to X$ est la projection naturelle, se donner un fibré vectoriel $\underline{u}$-localement revient à se donner:

a) un fibré vectoriel E sur Z ,

b) si x et y sont deux points de Z tels que $\pi(x) = \pi(y)$, un

isomorphisme $\rho_{yx} : E_x \xrightarrow{\sim} E_y$ entre les fibres de E en x et en y, dépendant continûment de (x, y) et tel que,

c) si x, y et z sont trois points de Z tels que $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z)$, on ait $\rho_{zx} = \rho_{zy} \circ \rho_{yx}$.

(3.3) Un fibré vectoriel E sur X définit un fibré vectoriel donné $\underline{u}$-localement $E_{\underline{u}}$: le système des restrictions E_U de E aux objets de $\underline{u}$. Le fait que la notion de fibré vectoriel est de nature locale peut s'exprimer ainsi: pour tout crible couvrant $\underline{u}$ de X, le foncteur $E \mapsto E_{\underline{u}}$, des fibrés vectoriels sur X dans les fibrés vectoriels donnés $\underline{u}$-localement, est une équivalence de catégories.

(3.4) Si dans 1. on remplace "ouvert de X" par "partie de X", on obtient la notion de crible de sous-espaces de X. Dans ce cadre aussi on dispose de théorèmes de recollement. Par exemple: soient X un espace normal et $\underline{C}$ un crible de sous-espaces de X engendré par un recouvrement fermé localement fini de X, alors le foncteur $E \mapsto E_{\underline{C}}$, des fibrés vectoriels sur X dans les fibrés vectoriels donnés $\underline{C}$-localement est une équivalence de catégories.

En géométrie algébrique, il est utile de considérer aussi des "cribles d'espaces au-dessus de X" ; c'est ce que nous verrons au paragraphe suivant.

4. Descente fidèlement plate.

(4.1) Dans le cadre des schémas, la topologie de Zariski n'est pas assez fine pour l'étude des problèmes non linéaires et on est amené à remplacer dans les définitions précédentes les immersions ouvertes par des morphismes plus généraux.

De ce point de vue, les techniques de descente apparaissent comme des techniques de localisation. Ainsi l'énoncé de descente suivant peut s'exprimer en disant que les propriétés considérées sont de nature locale pour la topologie fidèlement plate [On dit qu'un morphisme de schémas est fidèlement plat s'il est plat est surjectif].

Proposition (4.2). Soient A un anneau et B une A-algèbre fidèlement plate. Alors:

(i) Une suite $\Sigma = (M' \to M \to M'')$ de A-modules est exacte dès que la suite $\Sigma_{(B)}$ qui s'en déduit par extension des scalaires à B est exacte.

(ii) Un A-module M est de type fini (resp. de présentation finie, plat, localement libre de rang fini, inversible (i.e. localement libre de rang un)) dès que le B-module $M_{(B)}$ l'est.

Démonstration: (i) Le foncteur $M \mapsto M_{(B)}$ étant exact (platitude de B), il suffit de montrer que, si un A-module N est non nul, $N_{(B)}$ est non nul. Si N est non nul, N contient un sous-module monogène non nul $A/\underline{a}$; alors $N_{(B)}$ contient un sous-module monogène $(A/\underline{a})_{(B)} = B/\underline{a}\,B$, non nul par surjectivité du morphisme structural φ : Spec (B) → Spec (A) [si $V(\underline{a})$ est non vide, $\varphi^{-1}(V(\underline{a})) = V(\underline{a}\,B)$ est non vide].

(ii) Pour toute famille (x_i) d'éléments de $M_{(B)}$, il existe un sous-module de type fini M' de M tel que $M'_{(B)}$ contienne les x_i . Si $M_{(B)}$ est de type fini et si les x_i engendrent $M_{(B)}$, on a $M'_{(B)} = M_{(B)}$, donc $M' = M$ et M est de type fini.

Si $M_{(B)}$ est de présentation finie, on peut, d'après ce qui précède, trouver une surjection $A^n \to M$. Si N est le noyau de cette surjection, le B-module $N_{(B)}$ est de type fini, donc N l'est, et M est de présentation finie. L'assertion pour "plat" résulte aussitôt de (i); "localement libre de rang fini" signifie "plat et de présentation finie" et le rang se teste par extension des scalaires à des corps.

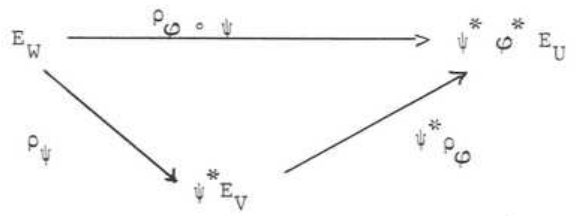
(4.3) Soient X un schéma et $\underline{S}$ une classe de X-schémas stable par produit fibré sur X. Une classe $\underline{u} \subset \underline{S}$ est un <u>crible</u> sur X (relativement à $\underline{S}$) si, pour tout morphisme $\varphi : V \to U$ de X-schémas, avec $U, V \in \underline{S}$ et $U \in \underline{u}$, on a $V \in \underline{u}$. Le crible <u>engendré</u> par une famille $\{U_i\}$ de X-schémas dans $\underline{S}$ est la classe des $V \in \underline{S}$ tels qu'il existe un morphisme de X-schémas de V dans l'un des U_i.

(4.4) Soit $\underline{u}$ un crible sur X. On appelle module quasi-cohérent donné $\underline{u}$-localement sur X la donnée de

a) un module quasi-cohérent E_U sur chaque $U \in \underline{u}$,

b) pour tout $U \in \underline{u}$ et pour tout morphisme $\varphi : V \to U$ de X-schémas dans $\underline{S}$, un isomorphisme $\rho_\varphi : E_V \xrightarrow{\sim} \varphi^* E_U$, ceux-ci étant tels que

c) si $\psi : W \to V$ est un morphisme de X-schémas dans $\underline{S}$, le diagramme



commute, c'est-à-dire $\rho_{\varphi \circ \psi} = (\psi^* \rho_\varphi) \circ \rho_\psi$.

Si E est un module quasi-cohérent sur X, on note $E_{\underline{u}}$ le module donné $\underline{u}$-localement valant $\varphi_U^* E$ sur $\varphi_U : U \to X$ et tel que, pour tout morphisme $\psi : V \to U$ l'isomorphisme de restriction ρ_ψ soit l'isomorphisme canonique $E_V = (\varphi_U \circ \psi)^* E \xrightarrow{\sim} \psi^* \varphi_U^* E = \psi^* E_U$.

<u>Théorème</u> (4.5) - <u>Soit $\{U_i\} \in \underline{S}$ une famille finie de X-schémas plats sur X telle que X soit la réunion des images des U_i, et soit $\underline{u}$ le crible engendré par $\{U_i\}$. Alors le foncteur $E \mapsto E_{\underline{u}}$ est une équivalence de la catégorie des modules quasi-cohérents sur X avec la catégorie des modules quasi-cohérents donnés $\underline{u}$-localement.</u>

Démonstration: Nous ne traiterons que le cas où X est affine et où $\mathcal{U}$ est engendré par un X-schéma affine U, fidèlement plat sur X. La réduction à ce cas est formelle. On pose $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $U = \mathrm{Spec}(B)$.

Si le morphisme $U \to X$ admet une section, X appartient au crible $\mathcal{U}$ et l'assertion est évidente. Nous nous réduirons à ce cas.

Un module quasi-cohérent donné $\mathcal{U}$-localement définit des modules M', M'' et M''' sur U, $U \times_X U$ et $U \times_X U \times_X U$, et des isomorphismes $\rho : p^* M^{\bullet} \simeq M^{\bullet}$ pour tout morphisme de projection p entre ces espaces; c'est là un diagramme cartésien

$$M^* : M' \rightrightarrows M'' \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; M'''$$

au-dessus de

$$U_* : U \leftleftarrows U \times_X U \;\substack{\leftarrow\\ \leftarrow}\; U \times_X U \times_X U \quad .$$

Réciproquement M^* détermine le module donné $\mathcal{U}$-localement: pour $V \in \mathcal{U}$, il existe $\varphi : V \to U$ et on pose $M_U = \varphi^* M'$; pour φ_1, $\varphi_2 : V \to U$, on a une identification naturelle $\varphi_1^* M' \simeq (\varphi_1 \times \varphi_2)^* M'' \simeq \varphi_2^* M'$, et on voit en utilisant M''' que ces identifications sont compatibles, de sorte que la définition est légitime. Bref, il revient au même de se donner un module $\mathcal{U}$-localement ou un diagramme M^* cartésien sur U_*.

Traduisons en termes algébriques: se donner M^* revient à se donner un diagramme cartésien de modules

$$M' \;\substack{\xrightarrow{\partial_0}\\ \xrightarrow{\partial_1}}\; M'' \;\substack{\xrightarrow{\partial_0}\\ \xrightarrow{\partial_1}\\ \xrightarrow{\partial_2}}\; M'''$$

au-dessus du diagramme d'anneaux

$$B \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} B \otimes_A B \underset{\partial_2}{\overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}}} B \otimes_A B \otimes_A B$$

[précisons: on a $\partial_i(bm) = \partial_i(b) \cdot \partial_i(m)$, les identités usuelles telles que $\partial_o\partial_1 = \partial_o\partial_o$ sont vraies, et "cartésien" signifie que les morphismes $\partial_i : M' \otimes_{B,\partial_i} (B \otimes_A B) \to M''$ et $M'' \otimes_{B\otimes_A B,\partial_i} (B \otimes_A B \otimes_A B) \to M'''$ sont des isomorphismes].

Le foncteur $E \mapsto E_{\mu}$ devient le foncteur qui, à un A-module M , associe

$$M^* = (M \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightrightarrows}} M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B) \quad .$$

Il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$(M' \rightrightarrows M'' \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightrightarrows}} M''') \mapsto \mathrm{Ker}(M' \rightrightarrows M'') \quad .$$

Il nous faut prouver que les flèches d'adjonction

$$M \to \mathrm{Ker}(M \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B)$$

et

$$\mathrm{Ker}(M' \rightrightarrows M'') \otimes_A B \to M'$$

sont des isomorphismes. D'après (4.2)(i), il suffit de le prouver après un changement de base fidèlement plat $A \to A'$ (B devenant $B' = B \otimes_A A'$) . Prenant $A' = B$, ceci nous ramène au cas où $U \to X$ admet une section.

5. Un cas particulier: le théorème 90 de Hilbert.

(5.1) Soient k un corps, k' une extension galoisienne de k et $G = \mathrm{Gal}(k'/k)$. Alors l'homomorphisme

$$k' \otimes_k k' \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in G} k'$$

$$x \otimes y \longmapsto \{x.\sigma(y)\}_{\sigma \in G}$$

est bijectif.

On en déduit qu'il revient au même de se donner un module localement pour le crible engendré par Spec(k') sur Spec(k) ou de se donner un k'-espace vectoriel muni d'une action semi-linéaire de G , c'est-à-dire:

a) un k'-espace vectoriel V' ,

b) pour tout $\sigma \in G$, un endomorphisme φ_σ de la structure de groupe de V' tel que $\varphi_\sigma(\lambda v) = \sigma(\lambda)\, \varphi_\sigma(v)$, pour tout $\lambda \in k'$ et $v \in V'$, vérifiant la condition

c) pour tout $\sigma, \tau \in G$, on a $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$.

Soit $V = V'^G$ le groupe des invariants par cette action de G ; c'est un k-espace vectoriel et, d'après le théorème (4.5), on a:

Proposition (5.2). - L'inclusion de V dans V' définit un isomorphisme $V \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} V'$.

En particulier, si V' est de dimension 1 et si $v' \in V$ est non nul, φ_σ est déterminé par la constante $c(\sigma) \in k'^*$ telle que $\varphi_\sigma(v') = c(\sigma)\, v'$ et la condition c) s'écrit

$$c(\tau\,\sigma) = c(\tau) \,.\, \tau(c(\sigma)) \quad .$$

D'après la proposition il existe un vecteur invariant non nul $v = \mu\, v'$, $\mu \in k'^*$. On a donc pour tout $\sigma \in G$,

$$c(\sigma) = \mu.\sigma(\mu^{-1}) \quad .$$

Autrement dit tout 1-cocycle de G à valeurs dans k'^* est un cobord:

Corollaire (5.3) - On a $H^1(G, k'^*) = 0$.

6. Topologies de Grothendieck. Nous transcrivons maintenant les définitions des paragraphes précédents dans un cadre abstrait englobant à la fois le cas des espaces topologiques et celui des schémas.

(6.1) Soient $\underline{S}$ une catégorie et U un objet de $\underline{S}$. On appelle crible sur U un sous-ensemble $\underline{u}$ de $Ob(\underline{S}/U)$ tel que si $\varphi : V \to U$ appartient à $\underline{u}$ et si $\psi : W \to V$ est un morphisme dans $\underline{S}$, alors $\varphi \circ \psi : W \to U$ appartient à $\underline{u}$.

Si $\{\varphi_i : U_i \to U\}$ est une famille de morphismes, le crible engendré par les U_i est par définition l'ensemble des morphismes $\varphi : V \to U$ qui se factorisent à travers l'un des φ_i.

Si $\underline{u}$ est un crible sur U et si $\varphi : V \to U$ est un morphisme, la restriction $\underline{u}_V$ de $\underline{u}$ à V est par définition le crible sur V constitué par les morphismes $\psi : W \to V$ tels que $\varphi \circ \psi : W \to U$ appartienne à $\underline{u}$.

(6.2) La donnée d'une topologie de Grothendieck sur $\underline{S}$ consiste en la donnée pour tout objet U de $\underline{S}$ d'un ensemble $C(U)$ de cribles sur U, dits cribles couvrants, de telle sorte que les axiomes suivants soient satisfaits:

a) Le crible engendré par l'identité de U est couvrant.

b) Si $\underline{u}$ est un crible couvrant sur U et si $V \to U$ est un morphisme, le crible $\underline{u}_V$ est couvrant.

c) Un crible localement couvrant est couvrant. Autrement dit, si $\underline{u}$ est un crible couvrant sur U et si $\underline{u}'$ est un crible sur U tel que, pour tout $V \to U$ appartenant à u, le crible $\underline{u}'_V$ est couvrant, alors $\underline{u}'$ est couvrant.

On appelle site la donnée d'une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.

(6.3) Etant donné un site $\underline{S}$, on appelle préfaisceau sur $\underline{S}$ un foncteur

contravariant $\mathcal{F}$ de $\underline{S}$ dans la catégorie des ensembles. Pour tout objet U de $\underline{S}$, on appelle section de $\mathcal{F}$ au-dessus de U les éléments de $\mathcal{F}(U)$. Pour tout morphisme $V \to U$ et pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$, on note $s|V$ (s restreint à V) l'image de s dans $\mathcal{F}(V)$.

Si $\underline{u}$ est un crible sur U, on appelle section donnée $\underline{u}$-localement la donnée, pour tout $V \to U$ appartenant à $\underline{u}$, d'une section $s_V \in \mathcal{F}(V)$ telle que, pour tout morphisme $W \to V$, on ait $s_V|W = s_W$. On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau si, pour tout objet U de $\underline{S}$, pour tout crible couvrant $\underline{u}$ sur U et pour toute section donnée $\underline{u}$-localement $\{s_V\}$, il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|V = s_V$, pour tout $V \to U$ appartenant à $\underline{u}$.

On définit de manière analogue les faisceaux abéliens en remplaçant la catégorie des ensembles par celle des groupes abéliens. On montre que la catégorie des faisceaux abéliens sur $\underline{S}$ est une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs. Une suite $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ de faisceaux est exacte si, pour tout objet U de $\underline{S}$ et pour tout $s \in \mathcal{G}(U)$ telle que $g(s) = 0$, il existe localement t tel que $f(t) = s$; i.e. s'il existe un crible couvrant $\underline{u}$ sur U et pour tout $V \in \underline{u}$, une section t_V de $\mathcal{F}$ sur V telle que $f(t_V) = s|V$.

(6.4) Exemples: Nous en avons vu deux plus haut.

a) Soient X un espace topologique et $\underline{S}$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les morphismes les inclusions naturelles. La topologie de Grothendieck sur $\underline{S}$ correspondant à la topologie usuelle de X est celle pour laquelle un crible $\underline{u}$ sur un ouvert U de X est couvrant si la réunion des ouverts appartenant à ce crible est égale à U. Il est clair que la catégorie des faisceaux sur $\underline{S}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux sur X au sens usuel.

b) Soient X un schéma et $\underline{S}$ la catégorie des schémas sur X. On appelle

topologie fpqc (fidèlement plate quasi-compacte) sur $\underline{S}$ la topologie de Grothendieck pour laquelle un crible sur un X-schéma U est couvrant s'il est engendré par une famille finie de morphismes plats dont les images recouvrent U .

(6.5) Cohomologie: On supposera toujours que la catégorie $\underline{S}$ a un objet final X . Alors on appelle sections globales d'un faisceau abélien $\mathcal{F}$, et on note $\Gamma\,\mathcal{F}$ ou $H^0(X, \mathcal{F})$, le groupe $\mathcal{F}(X)$. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma\,\mathcal{F}$ est un foncteur exact à gauche de la catégorie des faisceaux abéliens sur $\underline{S}$ dans la catégorie des groupes abéliens , on note $H^i(X,\cdot)$ ses dérivés (ou satellites). Ces groupes de cohomologie représentent les obstructions à passer du local au global. Par définition, si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ est une suite exacte de faisceaux abéliens, on a une suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

$$\dots \to H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{G}) \to H^n(X, \mathcal{H}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

(6.5) Etant donné un faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur $\underline{S}$, on appelle $\mathcal{F}$-torseur un faisceau $\mathcal{G}$ muni d'une action $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ telle que localement (après restriction à tous les objets d'un crible couvrant l'objet final X) $\mathcal{G}$ muni de l'action de $\mathcal{F}$ soit isomorphe à $\mathcal{F}$ muni de l'action canonique $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ par translations.

On peut montrer que $H^1(X, \mathcal{F})$ s'interprète comme l'ensemble des classes à isomorphisme près de $\mathcal{F}$-torseurs.

II. Topologie étale.

On spécialise les définitions du chapitre précédent au cas de la topologie étale d'un schéma X (§ 1, 2, 3). La cohomologie correspondante coïncide dans le cas où X est le spectre d'un corps K avec la cohomologie galoisienne de K (§ 4).

1. Topologie étale. Nous commencerons par quelques rappels sur la notion de morphisme étale.

Définition (1.1) - Soit A un anneau (commutatif). On dit qu'une A-algèbre B est étale si B est une A-algèbre de présentation finie et si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées:

a) Pour toute A-algèbre C et pour tout idéal de carré nul J de C, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B,C/J)$$

est une bijection.

b) B est un A-module plat et $\Omega_{B/A} = 0$ (on note $\Omega_{B/A}$ le module des différentielles relatives).

c) Soit $B = A[X_1,\ldots,X_n]/I$ une présentation de B. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{r}$ de $A[X_1,\ldots,X_n]$ contenant I, il existe des polynômes $P_1,\ldots,P_n \in I$ tels que $I_{\mathfrak{r}}$ soit engendré par les images de $P_1,\ldots,P_n$ et $\det(\partial P_i/\partial X_j) \notin \mathfrak{r}$.

[cf. SGA 1, exposé I ou M. RAYNAUD, Anneaux Locaux Henséliens, chapitre V].

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est étale si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $f(x)$ et un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de x dans $X \times_S U$ tel que B soit une A-algèbre étale.

(1.2) Exemples: a) Si A est un corps, une A-algèbre B est étale si et seulement si c'est un produit fini d'extensions séparables de A.

b) Si X et S sont des schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, un morphisme $f : X \to S$ est étale si et seulement si son analytisé $f^{an} : X^{an} \to S^{an}$ est un isomorphisme local.

Sorite (1.3) - a) (changement de base) Si $f : X \to S$ est un morphisme étale, il en est de même de $f_{S'} : X \times_S S' \to S'$ pour tout morphisme $S' \to S$.

b) (composition) Le composé de deux morphismes étales est un morphisme étale.

c) Si $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ sont deux morphismes étales, tout S-morphisme de X dans Y est étale.

d) (descente) Soit $f : X \to S$ un morphisme. S'il existe un morphisme fidèlement plat $S' \to S$, tel que $f_{S'} : X \times_S S' \to S'$ soit étale, alors f est étale.

(1.4) Soit X un schéma. Soit $\underline{S}$ la catégorie des X-schémas étales; d'après (1.3.c) tout morphisme de $\underline{S}$ est un morphisme étale. On appelle topologie étale sur $\underline{S}$ la topologie pour laquelle un crible sur U est couvrant s'il est engendré par une famille finie de morphismes $\varphi_i : U_i \to U$ tels que la réunion des images des φ_i recouvre U. On appelle site étale de X, et on note X_{et}, le site défini par $\underline{S}$ muni de la topologie étale.

2. Exemples de faisceaux.

(2.1) Faisceau constant: Soit C un groupe abélien et supposons pour simplifier X noethérien. On notera $\underline{C}_X$ (ou même C s'il n'y a pas d'ambiguïté) le faisceau défini par $U \mapsto C^{\pi_o(U)}$, où $\pi_o(U)$ est l'ensemble (fini) des composantes connexes de U. Le cas le plus important sera $C = \mathbb{Z}/n$. On a donc par définition

$$H^o(X, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n^{\pi_o(X)}.$$

De plus $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbb{Z}/n$-torseurs (I.6.5), autrement dit de revêtements étales galoisiens de X de groupe $\mathbb{Z}/n$. En particulier, si X est connexe et si $\pi_1(X)$ est son groupe fondamental pour un point base choisi, on a

$$H^1(X, \mathbb{Z}/n) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}/n) \quad .$$

(2.2) Groupe multiplicatif: On notera $\mathbb{G}_{m,X}$ (ou $\mathbb{G}_m$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le faisceau défini par $U \to \Gamma(U, \underline{O}_U^*)$; il s'agit bien d'un faisceau grâce au théorème de descente fidèlement plate (I.4.5). On a par définition

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = H^0(X, \underline{O}_X)^* \quad ;$$

en particulier si X est réduit, connexe et propre sur un corps algébriquement clos k, on a:

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^* \quad .$$

Proposition (2.3) - On a un isomorphisme:

$$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X) \quad ,$$

où $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur X.

Démonstration: Soit $*$ le foncteur qui, à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, associe le préfaisceau $\mathcal{L}^*$ suivant sur X_{et} : pour $\varphi : U \to X$ étale,

$$\mathcal{L}^*(U) = \mathrm{Isom}_U(\underline{O}_U, \varphi^* \mathcal{L}) \quad .$$

D'après (4.2) (i) et (4.5) (pleine fidélité), ce préfaisceau est un faisceau; c'est même un $\mathbb{G}_m$-torseur. On vérifie aussitôt que

a) le foncteur $*$ est compatible à la localisation (étale);

b) il induit une équivalence de la catégorie des faisceaux inversibles triviaux (i.e. isomorphes à $\underline{O}_X$) avec la catégorie des $\mathbb{G}_m$-torseurs triviaux: $\mathcal{L}$ est trivial si et seulement si $\mathcal{L}^*$ l'est.

De plus, d'après (4.2) (ii) et (4.5),

c) la notion de faisceau inversible est locale pour la topologie étale.

Il résulte formellement de a), b), c) que * est une équivalence entre la catégorie des faisceaux inversibles sur X et celle des $\mathbb{G}_m$-torseurs sur X_{et} ; elle induit l'isomorphisme cherché. On construit comme suit l'équivalence inverse: si T est un $\mathbb{G}_m$-torseur, il existe un recouvrement étale fini $\{U_i\}$ de X tel que les torseurs T/U_i soient triviaux; T est alors trivial sur chaque V étale sur X appartenant au crible $\underline{\mathcal{U}} \subset X_{et}$ engendré par $\{U_i\}$. Sur chaque $V \in \underline{\mathcal{U}}$, $T|V$ correspond à un faisceau inversible $\mathcal{L}_V$ (par b)) et les $\mathcal{L}_V$ constituent un faisceau inversible donné $\underline{\mathcal{U}}$-localement $\mathcal{L}_{\underline{\mathcal{U}}}$ (par a)). Par c), ce dernier provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}(T)$ sur X , et $T \mapsto \mathcal{L}(T)$ est l'inverse cherché de * .

(2.4) Racines de l'unité: Pour tout entier $n > 0$, on appelle faisceau des racines n-ièmes de l'unité, et on note μ_n , le noyau de l'élévation à la puissance n-ième dans $\mathbb{G}_m$. Si X est un schéma sur un corps séparablement clos k et si n est inversible dans k , le choix d'une racine primitive n-ième de l'unité $\xi \in k$ définit un isomorphisme $i \mapsto \xi^i$ de $\mathbb{Z}/n$ avec μ_n .

La relation entre cohomologie à coefficients dans μ_n et cohomologie à coefficients dans $\mathbb{G}_m$ est donnée par la suite exacte de cohomologie déduite de la

(2.5) Théorie de Kummer. - Si n est inversible sur X , l'élévation à la puissance n-ième dans $\mathbb{G}_m$ est un épimorphisme de faisceaux. On a donc une suite exacte

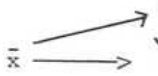
$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0 .$$

Démonstration: Soient $U \to X$ un morphisme étale et $a \in G_m(U) = \Gamma(U, \underline{O}_U^*)$. Puisque n est inversible sur U , l'équation $T^n - a = 0$ est séparable; autrement dit $U' = \operatorname{Spec} \underline{O}_U[T]/(T^n - a)$ est étale au-dessus de U . Par ailleurs $U' \to U$ est surjectif et a admet une racine n-ième sur U' , d'où le résultat.

3. Fibres, images directes.

(3.1) On appelle point géométrique de X un morphisme $\bar{x} \to X$, où $\bar{x}$ est le spectre d'un corps séparablement clos $k(\bar{x})$. On le notera abusivement $\bar{x}$, sous-entendant le morphisme $\bar{x} \to X$. Si x est l'image de $\bar{x}$ dans X, on dit que $\bar{x}$ est centré en x. Si le corps $k(\bar{x})$ est une extension algébrique du corps résiduel $k(x)$, on dit que $\bar{x}$ est un point géométrique algébrique de X.

On appelle voisinage étale de $\bar{x}$ un diagramme commutatif



, où $U \to X$ est un morphisme étale.

Le localisé strict de X en $\bar{x}$ est l'anneau $O_{X,\bar{x}} = \varinjlim \Gamma(U, O_U)$, la limite inductive étant prise sur les voisinages étales de $\bar{x}$. C'est un anneau local strictement hensélien dont le corps résiduel est la clôture séparable du corps résiduel $k(x)$ de X en x dans $k(\bar{x})$. Il joue le rôle d'anneau local pour la topologie étale.

(3.2) Etant donné un faisceau F sur X_{et}, on appelle fibre de F en $\bar{x}$ l'ensemble (resp. le groupe,...) $F_{\bar{x}} = \varinjlim F(U)$, la limite inductive étant toujours prise sur les voisinages étales de $\bar{x}$.

Pour qu'un homomorphisme de faisceaux $F \to G$ soit un mono-/épi-/iso-morphisme il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des homomorphismes $F_{\bar{x}} \to G_{\bar{x}}$ induit sur les fibres en tout point géométrique de X. Si X est de type fini sur un corps algébriquement clos, il suffit qu'il en soit ainsi en les points rationnels de X.

(3.3) Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas et F un faisceau sur X_{et}, l'image directe f_*F de F par f est le faisceau sur Y_{et} défini par $f_*F(V) = F(X \times_Y V)$ pour tout V étale sur Y.

Le foncteur $f_* : (\text{Faisc. Ab./}X_{et}) \to (\text{Faisc. Ab./}Y_{et})$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés à droite $R^q f_*$ s'appellent images directes supérieures. Si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y, on a

$$(R^q f_* F)_{\bar{y}} = \varinjlim H^q(V \times_Y X, F) ,$$

limite inductive prise sur les voisinages étales V de $\bar{y}$.

Soient $O_{Y,\bar{y}}$ le localisé strict de Y en $\bar{y}$, $\widetilde{Y} = \mathrm{Spec}(O_{Y,\bar{y}})$ et $\widetilde{X} = X \times_Y \widetilde{Y}$. On peut étendre F à $\widetilde{X}_{et}$ (c'est un cas particulier de la notion générale d'image réciproque) de la manière suivante: soit $\widetilde{U}$ un schéma étale sur $\widetilde{X}$, alors il existe un voisinage étale V de $\bar{y}$ et un schéma étale U sur $X \times_Y V$ tel que $\widetilde{U} = U \times_V \widetilde{Y}$; on posera

$$F(\widetilde{U}) = \varinjlim F(U \times_V V') ,$$

la limite inductive étant prise sur les voisinages étales V' de $\bar{y}$ qui dominent V. Avec cette définition, on a

$$(R^q f_* F)_{\bar{y}} = H^q(\widetilde{X}, F) .$$

Le foncteur f_* a un adjoint à gauche f^*, le foncteur "image réciproque". Si $\bar{x}$ est un point géométrique de X et $f(\bar{x})$ son image dans Y, on a $(f^* F)_{\bar{x}} = F_{f(\bar{x})}$. Cette formule montre que f^* est un foncteur exact. Le foncteur f_* transforme donc faisceau injectif en faisceau injectif, et la suite spectrale du foncteur composé $\Gamma \circ f_*$ (resp. $g_* f_*$) fournit la

Suite spectrale de Leray (3.4). - Soient F un faisceau abélien sur X_{et} et $f : X \to Y$ un morphisme de schémas (resp. des morphismes de schémas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$). On a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* F) \Rightarrow H^{p+q}(X, F)$$

(resp. $E_2^{pq} = R^p g_* R^q f_* F \Rightarrow R^{p+q}(gf)_* F$) .

Corollaire (3.5). - Si $R^q f_* F = 0$ pour tout $q > 0$, on a $H^p(Y, f_* F) = H^p(X, F)$ (resp. $R^p g_*(f_* F) = R^p(gf)_* F$) pour tout $p \geq 0$.

Cela s'applique en particulier dans le cas suivant:

Proposition (3.6). - Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini (voire, par passage à la limite, un morphisme entier) et F un faisceau abélien sur X. Alors $R^q f_* F = 0$, pour tout $q > 0$.

En effet soient $\bar{y}$ un point géométrique de Y, $\tilde{Y}$ le spectre du localisé strict de Y en y et $\tilde{X} = X \times_Y \tilde{Y}$; d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $H^q(\tilde{X}, F) = 0$ pour tout $q > 0$. Or $\tilde{X}$ est le spectre d'un produit d'anneaux locaux strictement henséliens [cf. Anneaux locaux henséliens, chapitre I], le foncteur $\Gamma(\tilde{X}, \cdot)$ est exact car tout $\tilde{X}$-schéma étale et surjectif admet une section, d'où l'assertion.

4. Cohomologie galoisienne.

Pour $X = \mathrm{Spec}(K)$ le spectre d'un corps, nous allons voir que la cohomologie étale s'identifie à la cohomologie galoisienne.

(4.1) Commençons par une analogie topologique. Si K est le corps des fonctions d'une variété algébrique affine intègre $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sur $\mathbb{C}$, on a $K = \varinjlim_{f \in A} A[1/f]$.

Autrement dit $X = \varprojlim U$, U parcourant l'ensemble des ouverts de Y. On sait qu'il existe des ouverts de Zariski arbitrairement petits qui pour la topologie classique sont des $K(\pi, 1)$. On ne sera donc pas surpris si l'on considère $\mathrm{Spec}(K)$ lui-même comme un $K(\pi, 1)$, π étant le groupe fondamental (au sens algébrique) de X, autrement dit le groupe de Galois de $\bar{K}/K$, où $\bar{K}$ est une clôture séparable de K.

(4.2) Plus précisément soient K un corps, $\bar{K}$ une clôture séparable de K et $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois topologique. A toute K-algèbre finie étale A (produit fini d'extensions séparables de K) , associons l'ensemble fini $\mathrm{Hom}_K(A, \bar{K})$. Le groupe de Galois G opère sur cet ensemble à travers un quotient discret (donc fini). Si $A = K[T]/(F)$, il s'identifie à l'ensemble des racines dans $\bar{K}$ du polynome F . La théorie de Galois, sous la forme que lui a donnée Grothendieck, dit que:

Proposition (4.3). - Le foncteur:
(K-algèbres finies étales) → (ensembles finis sur lesquels G opère continûment)
qui à une algèbre étale A associe $\mathrm{Hom}_K(A, \bar{K})$ est une anti-équivalence de catégories.

On en déduit une description analogue des faisceaux pour la topologie étale sur Spec(K) :

Proposition (4.4). - Le foncteur:
(Faisceaux étales sur Spec(K)) → (ensembles sur lesquels G opère continûment)
qui à un faisceau F associe sa fibre $F_{\bar{K}}$ au point géométrique $\mathrm{Spec}(\bar{K})$ est une équivalence de catégories.

On dit que G opère continûment sur un ensemble E si le fixateur de tout élément de E est un sous-groupe ouvert de G . Le foncteur en sens inverse est décrit de la manière évidente: soient A une K-algèbre finie étale, $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $U(\bar{K}) = \mathrm{Hom}_K(A, \bar{K})$ le G-ensemble correspondant à A ; alors on a $F(U) = \mathrm{Hom}_{G\text{-ens}}(U(\bar{K}), F_{\bar{K}})$.

En particulier, si $X = \mathrm{Spec}(K)$, on a $F(X) = F_{\bar{K}}^G$. Si l'on se restreint aux faisceaux abéliens, on obtient en passant aux foncteurs dérivés des isomorphismes canoniques

$$H^q(X_{et}, F) = H^q(G, F_{\bar{K}}) \quad .$$

Exemples (4.5). - a) Au faisceau constant $\mathbb{Z}/n$ correspond $\mathbb{Z}/n$ avec action triviale de G .

b) Au faisceau des racines n-ièmes de l'unité μ_n correspond le groupe $\mu_n(\bar{K})$ des racines n-ièmes de l'unité dans $\bar{K}$, avec l'action naturelle de G .

c) Au faisceau $\mathbb{G}_m$ correspond le groupe $\bar{K}^*$ avec l'action naturelle de G .

III. Cohomologie des courbes.

Dans le cas des espaces topologiques, des dévissages utilisant la formule de Künneth et des décompositions simpliciales permettent de se ramener pour calculer la cohomologie à l'intervalle $I = [0, 1]$ pour lequel on a $H^0(I, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^q(I, \mathbb{Z}) = 0$ pour $q > 0$.

Dans notre cas, les dévissages aboutiront à des objets plus compliqués, à savoir les courbes sur un corps algébriquement clos; nous allons calculer leur cohomologie dans ce chapitre. La situation est plus complexe que dans le cas topologique car les groupes de cohomologie sont nuls pour $q > 2$ seulement. L'ingrédient essentiel des calculs est la nullité du groupe de Brauer du corps des fonctions d'une telle courbe (théorème de Tsen, § 2).

1. Le groupe de Brauer.

Rappelons-en tout d'abord la définition classique:

Définition (1.1). - *Soit* K *un corps et* A *une* K*-algèbre de dimension finie. On dit que* A *est une* algèbre simple centrale *sur* K *si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées:*

a) A *n'a pas d'idéal bilatère non trivial et son centre est* K .

b) *Il existe une extension galoisienne finie* K'/K *telle que* $A_{K'} = A \otimes_K K'$ *soit isomorphe à une algèbre de matrices carrées sur* K' .

c) A *est* K*-isomorphe à une algèbre de matrices carrées sur un corps gauche de centre* K .

Deux telles algèbres sont dites équivalentes si les corps gauches qui leur sont associés par c) sont K-isomorphes. Si ces algèbres ont même dimension, cela revient à dire qu'elles sont K-isomorphes. Le produit tensoriel définit par passage au quotient une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes

d'équivalence. C'est ce groupe que l'on appelle classiquement le groupe de Brauer de K et que l'on note $Br(K)$.

(1.2) On notera $Br(n, K)$ l'ensemble des classes de K-isomorphisme de K-algèbres A telles qu'il existe une extension galoisienne finie K' de K pour laquelle A_K est isomorphe à l'algèbre $M_n(K')$ des matrices carrées $n \times n$ sur K' . Par définition $Br(K)$ est réunion des sous-ensembles $Br(n,K)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $G = Gal(\bar{K}/K)$. L'ensemble $Br(n,K)$ est l'ensemble des "formes" de $M_n(\bar{K})$, il est donc canoniquement isomorphe à $H^1(G, Aut(M_n(\bar{K})))$.

On sait que tout automorphisme de $M_n(\bar{K})$ est intérieur. Par conséquent le groupe $Aut(M_n(\bar{K}))$ s'identifie au groupe linéaire projectif $PGL(n, \bar{K})$ et on a une bijection canonique:

$$\theta_n : Br(n,K) \xrightarrow{\sim} H^1(G, PGL(n,\bar{K})) .$$

D'autre part la suite exacte:

$$(*) \quad 1 \to \bar{K}^* \to GL(n,\bar{K}) \to PGL(n,\bar{K}) \to 1 ,$$

permet de définir un opérateur cobord:

$$\Delta_n : H^1(G, PGL(n,\bar{K})) \longrightarrow H^2(G, \bar{K}^*) .$$

En composant θ_n et Δ_n , on obtient une application:

$$\delta_n : Br(n, K) \to H^2(G, \bar{K}^*) .$$

On vérifie facilement que les applications δ_n sont compatibles entre elles et définissent un homomorphisme de groupes:

$$\delta : Br(K) \to H^2(G, \bar{K}^*) .$$

Proposition (1.3) . - L'homomorphisme $\delta : Br(K) \to H^2(G, \bar{K}^*)$ est bijectif.

Cela résulte des deux lemmes suivants:

Lemme (1.4). - L'application $\Delta_n : H^1(G, PGL(n,\bar{K})) \to H^2(G, \bar{K}^*)$ est injective.

D'après [14], cor. à la prop. I-44, il suffit de vérifier que chaque fois qu'on tord la suite exacte (*) par un élément de $H^1(G,PGL(n,\bar{K}))$, le H^1 du groupe médian est trivial. Ce groupe médian est le groupe des $\bar{K}$-points du groupe multiplicatif d'une algèbre centrale simple A de rang n^2 sur K . Pour prouver que $H^1(G, A^*_{\bar{K}}) = 0$, on interprète A* comme le groupe des automorphismes du A-module libre L de rang 1, et H^1 comme l'ensemble des "formes" de L - des A-modules de rang n^2 sur K , automatiquement libres.

Lemme (1.5). Soient $\alpha \in H^2(G, \bar{K}^*)$, K' une extension finie de K contenue dans $\bar{K}$, $n=[K':K]$, et $G'=Gal(\bar{K}/K')$. Si l'image de α dans $H^2(G', \bar{K}^*)$ est nulle, alors, α appartient à l'image de Δ_n .

Remarquons tout d'abord qu'on a:

$$H^2(G', \bar{K}^*) \simeq H^2(G, (\bar{K} \otimes_K K')^*) .$$

[D'un point de vue géométrique si l'on note $x = Spec(K)$, $x' = Spec(K')$ et $\pi : x' \to x$ le morphisme canonique, on a $R^q \pi_*(\mathbb{G}_{m,x'}) = 0$ pour $q > 0$ et par suite $H^q(x', \mathbb{G}_{m,x'}) \simeq H^q(x, \pi_* \mathbb{G}_{m,x'})$ pour $q \geq 0$] .

Par ailleurs le choix d'une base de K' en tant qu'espace vectoriel sur K permet de définir un homomorphisme

$$(\bar{K} \otimes_K K')^* \to GL(n, \bar{K})$$

qui, à un élément x , fait correspondre l'endomorphisme de multiplication par x de $\bar{K} \otimes_K K'$. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \bar{K}^* & \to & (\bar{K} \otimes_K K')^* & \to & (\bar{K} \otimes_K K')^*/\bar{K}^* & \to & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \bar{K}^* & \to & GL(n, \bar{K}) & \to & PGL(n,\bar{K}) & \to & 1 \end{array}$$

Le lemme résulte du diagramme commutatif que l'on en déduit en passant à la cohomologie:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G,(\bar{K} \otimes_K K')^*/\bar{K}^*) & \to & H^2(G, \bar{K}^*) & \to & H^2(G, (\bar{K} \otimes_K K')^*) \\ \downarrow & & \| & & \\ H^1(G, PGL(n, \bar{K})) & \xrightarrow{\Delta_n} & H^2(G, \bar{K}^*) . & & \end{array}$$

La connaissance du groupe de Brauer, en particulier sa nullité, est extrêmement importante en cohomologie galoisienne comme le montre la proposition suivante:

Proposition (1.6). - Soient K un corps, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $G = Gal(\bar{K}/K)$. Supposons que, pour toute extension finie K' de K , on ait $Br(K') = 0$. Alors on a:

(i) $H^q(G, \bar{K}^*) = 0$ pour tout $q > 0$.

(ii) $H^q(G, F) = 0$ pour tout G-module de torsion F et pour tout $q \geq 2$.

[Pour la démonstration, cf. J.P. SERRE, Corps locaux ou Cohomologie galoisienne].

2. Le théorème de Tsen.

Définition (2.1). - On dit qu'un corps K est C_1 si tout polynôme homogène non constant $f(x_1,\ldots,x_n)$ de degré $d < n$ a un zéro non trivial.

Proposition (2.2). - *Si un corps* K *est* C_1 , *on a* Br(K) = 0 .

Il s'agit de montrer que tout corps gauche D de centre K et fini sur K est égal à K . Soient r^2 le degré de D sur K et Nrd : D → K la norme réduite.

[Localement pour la topologie étale sur K , D est isomorphe - non canoniquement - à une algèbre de matrices M_r et la norme réduite coïncide avec l'application déterminant. Celle-ci est bien définie, indépendamment de l'isomorphisme choisi entre D et M_r car tout automorphisme de M_r est intérieur et deux matrices semblables ont même déterminant. Cette application définie localement pour la topologie étale se descend, à cause de son unicité locale, en une application Nrd : D → K] .

Le seul zéro de Nrd est l'élément nul de D , car, si $x \neq 0$, on a $\mathrm{Nrd}(x).\ \mathrm{Nrd}(x^{-1}) = 1$. D'autre part, si $\{e_1,\dots,e_{r^2}\}$ est une base de D sur K et si $x = \Sigma\, x_i e_i$, la fonction Nrd(x) s'écrit comme un polynôme homogène $\mathrm{Nrd}(x_1,\dots,x_{r^2})$ de degré r [c'est clair localement pour la topologie étale] . Puisque K est C_1 , on a $r^2 \leq r$, c'est-à-dire r = 1 et D = K .

Théorème (2.3) (Tsen). - *Soient* k *un corps algébriquement clos et* K *une extension de degré de transcendance* 1 *de* k . *Alors* K *est* C_1 .

Supposons tout d'abord que K = k(X) . Soit

$$f(\underline{T}) = \Sigma\, a_{i_1\dots i_n}\, T_1^{i_1}\dots T_n^{i_n}$$

un polynôme homogène de degré $d < n$ à coefficients dans k(X) . Quitte à multiplier les coefficients par un dénominateur commun on peut supposer qu'ils sont dans k[X] . Soit alors $\delta = \sup \deg(a_{i_1\dots i_n})$. On cherche un zéro non trivial dans k[X] par la méthode des coefficients indéterminés en écrivant chaque T_i (i = 1,...,n) comme un polynôme de degré N en X . Alors l'équation

$f(\underline{T}) = 0$ devient un système d'équations homogènes en les $n \times (N + 1)$ coefficients des polynômes $T_i(X)$ exprimant la nullité des coefficients du polynôme en X obtenu en remplaçant T_i par $T_i(X)$. Ce polynôme est de degré $\delta + Nd$ au plus, il y a donc $\delta + Nd + 1$ équations en $n \times (N + 1)$ variables. Comme k est algébriquement clos ce système a une solution non triviale si $n(N+1) > Nd + \delta + 1$, ce qui sera le cas pour N assez grand si $d < n$.

Il est clair que, pour démontrer le théorème dans le cas général, il suffit de le démontrer lorsque K est une extension finie d'une extension transcendante pure $k(X)$ de k. Soit $f(\underline{T}) = f(T_1,\ldots,T_n)$ un polynôme homogène de degré $d < n$ à coefficients dans K. Soient $s = [K : k(X)]$ et $e_1,\ldots,e_s$ une base de K sur $k(X)$. Introduisons de nouvelles variables U_{ij}, en nombre sn, telles que $T_i = \Sigma\, U_{ij}\, e_j$. Pour que le polynôme $f(\underline{T})$ ait un zéro non trivial dans K, il suffit que le polynôme $g(X_{ij}) = N_{K/k}(f(\underline{T}))$ ait un zéro non trivial dans $k(X)$. Or g est un polynôme homogène de degré sd en sn variables, d'où le résultat.

Corollaire (2.4). - Soient k un corps algébriquement clos et K une extension de degré de transcendance 1 de k. Alors les groupes de cohomologie étale $H^q(\mathrm{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$ sont nuls pour tout $q > 0$.

3. Cohomologie des courbes lisses.

Dorénavant, et sauf mention expresse du contraire, les groupes de cohomologie considérés sont les groupes de cohomologie étale.

Proposition (3.1). - Soient k un corps algébriquement clos et X une courbe projective non singulière connexe sur k. Alors on a:

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^* \quad ,$$
$$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X) \quad ,$$
$$H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 2 \ .$$

Soient η le point générique de X , $j : \eta \to X$ le morphisme canonique et $\mathbb{G}_{m,\eta}$ le groupe multiplicatif du corps des fractions $K(X)$ de X . Pour tout point fermé x de X , soient $i_x : x \to X$ l'immersion canonique et $\mathbb{Z}_x$ le faisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$ sur x . Ainsi $j_* \mathbb{G}_{m,\eta}$ est le faisceau des fonctions méromorphes non nulles sur X et $\bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x$ le faisceau des diviseurs, on a donc une suite exacte de faisceaux:

$$(*) \qquad 0 \to \mathbb{G}_m \to j_* \mathbb{G}_{m,\eta} \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x \to 0 \ .$$

Lemme (3.2). - On a $R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta} = 0$ pour tout $q > 0$.

Il suffit de montrer que la fibre de ce faisceau en tout point fermé x de X est nulle. Si $\widetilde{O}_{X,x}$ est l'hensélisé de X en x et K le corps des fractions de $\widetilde{O}_{X,x}$, on a

$$\mathrm{Spec}(K) = \eta \times_X \mathrm{Spec}(\widetilde{O}_{X,x}) \quad ,$$

donc $(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_x = H^q(\mathrm{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$.

Or K est une extension algébrique de $k(X)$, donc une extension de degré de transcendance 1 de k : le lemme résulte de (2.4).

Lemme (3.3). - On a $H^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$ pour tout $q > 0$.

En effet de (3.2) et de la suite spectrale de Leray pour j , on déduit:

$$H^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = H^q(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta})$$

pour tout $q \geq 0$ et le deuxième membre est nul pour $q > 0$ d'après (2.4).

Lemme (3.4). - On a $H^q(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) = 0$ pour tout $q > 0$.

En effet pour tout point fermé x de X , on a $R^q i_{x*} \mathbb{Z}_x = 0$ pour $q > 0$, car i_x est un morphisme fini (II.3.6), et

$$H^q(X, i_{x*} \mathbb{Z}_x) = H^q(x, \mathbb{Z}_x) \ .$$

Le deuxième membre est nul pour tout $q > 0$, car x est le spectre d'un corps algébriquement clos [On voit que le lemme est vrai plus généralement pour tout faisceau "gratte-ciel" sur X].

On déduit des lemmes précédents et de la suite exacte (*) les égalités:

$$H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 2 \ ,$$

et une suite exacte de cohomologie en bas degré:

$$1 \to H^0(X, \mathbb{G}_m) \to H^0(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \to H^0(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) \to H^1(X, \mathbb{G}_m) \to 1$$

qui n'est autre que la suite exacte:

$$1 \to k^* \to k(X)^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 1 \ .$$

De la proposition (3.1) on déduit que les groupes de cohomologie de X à valeur dans $\mathbb{Z}/n$, n premier à la caractéristique de k , ont une valeur raisonnable:

Corollaire (3.5) - Si X est de genre g et si n est inversible dans k, les $H^q(X, \mathbb{Z}/n)$ sont nuls pour $q > 2$, et libres sur $\mathbb{Z}/n$ de rang $1, 2g, 1$ pour $q = 0, 1, 2$. Remplaçant $\mathbb{Z}/n$ par le groupe isomorphe μ_n, on a des isomorphismes canoniques

$$H^0(X, \mu_n) = \mu_n$$
$$H^1(X, \mu_n) = \mathrm{Pic}^0(X)_n$$
$$H^2(X, \mu_n) = \mathbb{Z}/n \quad .$$

Comme le corps k est algébriquement clos, $\mathbb{Z}/n$ est isomorphe (non canoniquement) à μ_n. De la suite exacte de Kummer:

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0 \ ,$$

et de la proposition (3.1), on déduit les égalités:

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 2 \ ,$$

et, en bas degré, des suites exactes:

$$0 \to H^0(X, \mu_n) \to k^* \xrightarrow{n} k^* \to 0$$
$$0 \to H^1(X, \mu_n) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mu_n) \to 0 \ .$$

De plus on a une suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0 \ ,$$

et $\mathrm{Pic}^0(X)$ s'identifie au groupe des points rationnels sur k d'une variété abélienne de dimension g, la jacobienne de X. Dans un tel groupe, la multiplication par n est surjective et son noyau est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module libre de rang $2g$ (car n est inversible dans k); d'où le corollaire.

Un dévissage astucieux, utilisant la "méthode de la trace", permet

d'obtenir en corollaire la

Proposition (3.6) (SGA4 IX 5.7). - Soient k un corps algébriquement clos, X une courbe algébrique sur k et F un faisceau de torsion sur X . Alors:

(i) On a $H^q(X, F) = 0$ pour $q > 2$.

(ii) Si X est affine, on a même $H^q(X, F) = 0$ pour $q > 1$.

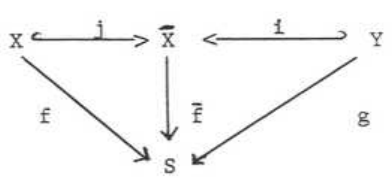
Pour la démonstration, ainsi que pour l'exposé de la "méthode de la trace" , nous renvoyons à SGA4 IX 5.

4. Dévissages.

Pour calculer la cohomologie des variétés de dimension > 1 on emploie des fibrations par des courbes,ce qui permet de se ramener à étudier les morphismes dont les fibres sont de dimension ≤ 1 . Ce principe possède plusieurs variantes, indiquons-en quelques-unes.

(4.1) Soient A une k-algèbre de type fini et $a_1,\ldots,a_n$ des générateurs de A . Si l'on pose $X_o = \mathrm{Spec}(k)$, $X_i = \mathrm{Spec}(k[a_1,\ldots,a_i])$, $X_n = \mathrm{Spec}(A)$, les inclusions canoniques $k[a_1,\ldots,a_i] \to k[a_1,\ldots,a_i, a_{i+1}]$ définissent des morphismes $X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_o$ dont les fibres sont de dimension ≤ 1 .

(4.2) Dans le cas d'un morphisme lisse, on peut être plus précis. On appelle fibration élémentaire un morphisme de schémas $f : X \to S$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif



satisfaisant aux conditions suivantes:

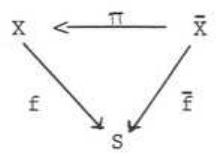
(i) j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre et $X = \bar{X} - Y$.

(ii) $\bar{f}$ est lisse et projectif, à fibres géométriques irréductibles et de dimension 1 .

(iii) g est un revêtement étale et aucune fibre de g n'est vide.

On appelle <u>bon voisinage</u> relatif à S un S-schéma X tel qu'il existe des S-schémas $X = X_n, \ldots, X_o = S$ et des fibrations élémentaires $f_i : X_i \to X_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. On peut montrer [SGA 4, XI, 3.3] que si X est un schéma lisse sur un corps algébriquement clos k tout point rationnel de X possède un voisinage ouvert qui est un bon voisinage (relatif à $\mathrm{Spec}(k)$).

(4.3) On peut dévisser un morphisme propre $f : X \to S$ de la façon suivante. D'après le lemme de Chow, il existe un diagramme commutatif



où π et $\bar{f}$ sont des morphismes projectifs, π étant de plus un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de X . Localement sur S , $\bar{X}$ est un sous-schéma fermé d'un espace projectif type $\mathbb{P}^n_S$.

On dévisse ce dernier en considérant la projection $\varphi : \mathbb{P}^n_S \to \mathbb{P}^1_S$ qui envoie le point de coordonnées homogènes $(x_o, x_1, \ldots, x_n)$ sur (x_o, x_1) . C'est une application rationnelle définie en dehors du fermé $Y \simeq \mathbb{P}^{n-2}_S$ de $\mathbb{P}^n_S$ d'équations homogènes $x_o = x_1 = 0$. Soit $u : P \to \mathbb{P}^n_S$ l'éclatement à centre Y ; les fibres de u sont de dimension ≤ 1 . De plus il existe un morphisme naturel $v : P \to \mathbb{P}^1_S$ qui prolonge l'application rationnelle φ et v fait

de P un $\mathbb{P}^1_S$-schéma localement isomorphe à l'espace projectif type $\mathbb{P}^{n-1}$ que l'on peut à son tour projeter sur un $\mathbb{P}^1$, etc.

(4.4) On peut balayer une variété projective et lisse X par un pinceau de Lefschetz . L'éclaté $\widetilde{X}$ de l'intersection de l'axe du pinceau avec X se projette sur $\mathbb{P}^1$ et les fibres de cette projection sont les sections hyperplanes de X par les hyperplans du pinceau.

IV. Théorème de changement de base pour un morphisme propre.

1. Introduction.

Ce chapitre est consacré à la démonstration et aux applications du

Théorème (1.1). - *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme propre de schémas et* F *un faisceau abélien de torsion sur* X . *Alors, quel que soit* $q \geq 0$, *la fibre de* $R^q f_* F$ *en un point géométrique* s *de* S *est isomorphe à la cohomologie* $H^q(X_s, F)$ *de la fibre* $X_s = X \otimes_S \operatorname{Spec} k(s)$ *de* f *en* s .

Pour $f : X \to S$ une application continue propre et séparée (séparée signifie que la diagonale de $X \times_S X$ est fermée) entre espaces topologiques, et F un faisceau abélien sur X , le résultat analogue est bien connu, et élémentaire: comme f est fermée, les $f^{-1}(V)$ pour V voisinage de s forment un système fondamental de voisinages de X_s , et on vérifie que $H^*(X_s, F) = \varinjlim_{U} H^*(U, F)$, pour U parcourant les voisinages de X_s . En pratique, X_s a même un système fondamental de voisinages U dont il est rétracte par déformation et, pour F constant, on a donc $H^*(X_s, F) = H^*(U, F)$. En termes imagés: la fibre spéciale avale la fibre générale.

Dans le cas des schémas la démonstration est plus délicate et il est indispensable de supposer que F est de torsion (SGA4 XII 2). Compte tenu de la description des fibres de $R^q f_* F$ (II.3.3), le théorème (1.1) est essentiellement équivalent au

Théorème (1.2). - *Soient* A *un anneau local strictement hensélien et* $S = \operatorname{Spec}(A)$. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme propre et* X_o *la fibre fermée de* f . *Alors, pour tout faisceau abélien de torsion* F *sur* X *et pour tout* $q \geq 0$, *on a* $H^q(X, F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_o, F)$.

Par passage à la limite on voit qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque A est l'hensélisé strict d'une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini en un idéal premier. On traite d'abord le cas $q = 0$ ou 1 et $F = \mathbb{Z}/n$ (§ 2). Un argument basé sur la notion de faisceau constructible (§ 3) montre d'ailleurs qu'il suffit de considérer le cas où F est constant. D'autre part le dévissage (III. 4.3) permet de supposer que X_o est une courbe; dans ce cas il ne reste plus qu'à démontrer le théorème pour $q = 2$ (§4).

Entre autres applications (§ 6), le théorème permet de définir la notion de cohomologie à support propre (§ 5).

2. Démonstration pour $q = 0$ ou 1 et $F = \mathbb{Z}/n$.

Le résultat pour $q = 0$ et F constant est équivalent à la proposition suivante [théorème de connexion de Zariski]:

Proposition (2.1). - *Soient A un anneau local hensélien noethérien et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et X_o la fibre fermée de f . Alors les ensembles de composantes connexes $\pi_o(X)$ et $\pi_o(X_o)$ sont en bijection.*

Il revient au même de montrer que les ensembles de parties à la fois ouvertes et fermées $\mathrm{Of}(X)$ et $\mathrm{Of}(X_o)$ sont en bijection. On sait que l'ensemble $\mathrm{Of}(X)$ correspond bijectivement à l'ensemble des idempotents de $\Gamma(X,\underline{O}_X)$, de même $\mathrm{Of}(X_o)$ correspond bijectivement à l'ensemble des idempotents de $\Gamma(X_o,\underline{O}_{X_o})$. Il s'agit donc de montrer que l'application canonique

$$\mathrm{Idem}\,\Gamma(X,\underline{O}_X) \to \mathrm{Idem}\,\Gamma(X_o,\underline{O}_{X_o})$$

est bijective.

On notera $\underline{m}$ l'idéal maximal de A , $\Gamma(X,\underline{O}_X)^{\wedge}$ le complété de

$\Gamma(X, \underline{O}_X)$ pour la topologie $\underline{m}$-adique et, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = X \otimes_A A/\underline{m}^{n+1}$. D'après le théorème de finitude pour les morphismes propres [EGA III, 3.2], $\Gamma(X, \underline{O}_X)$ est une A-algèbre finie; comme A est hensélien, il en résulte que l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X) \to \text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge$$

est bijective.

D'après le théorème de comparaison pour les morphismes propres [EGA III, 4.1], l'application canonique

$$\Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge \to \varprojlim \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n})$$

est bijective. En particulier l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X, \underline{O}_X)^\wedge \to \varprojlim \text{Idem } \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n})$$

est bijective. Mais, puisque X_n et X_o ont même espace topologique sous-jacent, l'application canonique

$$\text{Idem } \Gamma(X_n, \underline{O}_{X_n}) \to \text{Idem } \Gamma(X_o, \underline{O}_{X_o})$$

est bijective pour tout n, ce qui achève la démonstration.

Puisque $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements étales galoisiens de X de groupe $\mathbb{Z}/n$, le théorème pour $q=1$ et $F = \mathbb{Z}/n$ résulte de la proposition suivante.

Proposition (2.2). - Soient A un anneau local hensélien noethérien et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et X_o la fibre fermée de f. Alors le foncteur de restriction

$$\text{Rev.et.}(X) \to \text{Rev.et.}(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

[Si X_o est connexe et si l'on a choisi un point géométrique de X_o comme point base, cela revient à dire que l'application canonique $\pi_1(X_o) \to \pi_1(X)$ sur les groupes fondamentaux (profinis) est bijective].

La proposition (2.1) montre que ce foncteur est pleinement fidèle. En effet, si X' et X'' sont deux revêtements étales de X, un X-morphisme de X' dans X'' est déterminé par son graphe qui est une partie ouverte et fermée de $X' \times_X X''$.

Il s'agit donc de montrer que tout revêtement étale X'_o de X_o s'étend en un revêtement étale de X. On sait que les revêtements étales ne dépendent pas des éléments nilpotents [SGA 1, chap. I], par conséquent X'_o se relève de manière unique en un revêtement étale X'_n de X_n pour tout $n \geq 0$, autrement dit en un revêtement étale $\mathcal{X}'$ du schéma formel $\mathcal{X}$ complété de X le long de X_o. D'après le théorème d'algébrisation des faisceaux cohérents formels de Grothendieck [théorème d'existence, EGA III.5], $\mathcal{X}'$ est le complété formel d'un revêtement étale $\bar{X}'$ de $\bar{X} = X \otimes_A \hat{A}$.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où A est l'hensélisé d'une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini. On peut alors appliquer le théorème d'approximation d'Artin au foncteur F: (A-algèbres) → (ensembles) qui, à une A-algèbre B, fait correspondre l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements étales de $X \otimes_A B$. En effet ce foncteur est localement de présentation finie: si B_i est un système inductif filtrant de A-algèbres et si $B = \varinjlim B_i$, on a $F(B) = \varinjlim F(B_i)$. D'après le théorème d'Artin, étant donné un élément $\bar{\xi} \in F(\hat{A})$, en l'occurrence la classe d'isomorphisme de $\bar{X}'$, il existe $\xi \in F(A)$ ayant même image que $\bar{\xi}$ dans $F(A/\underline{m})$. Autrement dit il existe un revêtement étale X' de X dont la restriction à X_o est isomorphe

à X'_o .

3. Faisceaux constructibles.

Dans ce paragraphe, on considère un schéma noethérien X et on appelle faisceau sur X un faisceau abélien sur X_{et} .

Définition (3.1). - On dit qu'un faisceau F sur X est localement constant constructible (en abrégé l.c.c.) s'il est représenté par un revêtement étale de X .

Définition (3.2). - On dit qu'un faisceau F sur X est constructible s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes:

(i) Il existe une famille finie surjective de sous-schémas X_i de X tels que la restriction de F à X_i soit l.c.c..

(ii) Il existe une famille finie de morphismes finis $p_i : X'_i \to X$, pour chaque i un faisceau constant constructible (= défini par un groupe abélien fini) C_i sur X'_i , et un monomorphisme $F \to \Pi p_{i*} C_i$.

On vérifie facilement que la catégorie des faisceaux constructibles sur X est une catégorie abélienne. De plus, si $u : F \to G$ est un homomorphisme de faisceaux et si F est constructible, le faisceau $Im(u)$ est constructible.

Lemme (3.3). - Tout faisceau de torsion F est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles.

En effet, si $j : U \to X$ est un schéma étale de type fini sur X , un élément $\xi \in F(U)$ tel que $n\xi = 0$ définit un homomorphisme de faisceaux $j_! \, \mathbb{Z}/n_U \to F$ dont l'image (le plus petit sous-faisceau de F dont ξ soit section locale) est un sous-faisceau constructible de F . Il est clair que F est limite inductive de tels sous-faisceaux.

Définition (3.4). - Soient C une catégorie abélienne et T un foncteur défini

sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. On dira que T est effaçable dans $\mathcal{C}$ si, pour tout objet A de $\mathcal{C}$ et tout $\alpha \in T(A)$, il existe un monomorphisme $u : A \to M$ dans $\mathcal{C}$ tel que $T(u).\alpha = 0$.

Lemme (3.5). - Les foncteurs $H^q(X, \cdot)$ pour $q > 0$ sont effaçables dans la catégorie des faisceaux constructibles sur X.

Il suffit de remarquer que, si F est un faisceau constructible, il existe nécessairement un entier $n > 0$ tel que F soit un faisceau de $\mathbb{Z}/n$-modules. Alors il existe un monomorphisme $F \hookrightarrow G$, où G est un faisceau de $\mathbb{Z}/n$-modules et $H^q(X, G) = 0$ pour tout $q > 0$. On peut par exemple prendre pour G la résolution de Godement $\prod_{x \in X} i_{x*} F_{\bar{x}}$, où x parcourt les points de X et $i_x : \bar{x} \to X$ est un point géométrique centré en x. D'après (3.3) G est limite inductive de faisceaux constructibles, d'où le lemme, car les foncteurs $H^q(X,.)$ commutent aux limites inductives.

Lemme (3.6). - Soit $\varphi^\bullet : T^\bullet \to T'^\bullet$ un morphisme de foncteurs cohomologiques définis sur une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Supposons que T^q est effaçable pour $q > 0$ et soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble d'objets de $\mathcal{C}$ tel que tout objet de $\mathcal{C}$ soit contenu dans un objet appartenant à $\mathcal{E}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\varphi^q(A)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

(ii) $\varphi^0(M)$ est bijectif et $\varphi^q(M)$ surjectif pour tout $q > 0$ et tout $M \in \mathcal{E}$.

(iii) $\varphi^0(A)$ est bijectif pour tout $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ et T'^q est effaçable pour tout $q > 0$.

La démonstration se fait par récurrence sur q et ne présente pas de difficultés.

Proposition (3.7). - Soit X_o un sous-schéma de X . Supposons que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout schéma X' fini sur X , l'application canonique

$$H^q(X', \mathbb{Z}/n) \to H^q(X'_o, \mathbb{Z}/n) ,$$

où $X'_o = X' \times_X X_o$, est bijective pour $q = 0$ et surjective pour $q > 0$. Alors, pour tout faisceau de torsion F sur X et pour tout $q \geq 0$, l'application canonique

$$H^q(X, F) \to H^q(X_o, F)$$

est bijective.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer l'assertion pour F constructible. On applique le lemme (3.6) en prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie des faisceaux constructibles sur X , $T^q = H^q(X, \cdot)$, $T'^q = H^q(X_o, \cdot)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des faisceaux constructibles de la forme $\pi_{p_i *} C_i$, où $p_i : X'_i \to X$ est un morphisme fini et C_i un faisceau constant fini sur X'_i .

4. Fin de la démonstration.

Par la méthode de fibration par des courbes (III.4.3), on se ramène à démontrer le théorème en dimension relative ≤ 1 . D'après le paragraphe précédent, il suffira de montrer que, si S est le spectre d'un anneau local noethérien strictement hensélien, $f : X \to S$ un morphisme propre dont la fibre fermée X_o est de dimension ≤ 1 et n un entier ≥ 0 , l'homomorphisme canonique

$$H^q(X, \mathbb{Z}/n) \to H^q(X_o, \mathbb{Z}/n)$$

est bijectif pour $q = 0$ et surjectif pour $q > 0$.

Les cas $q = 0$ et 1 ont été vus plus haut et on a $H^q(X_o, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q \geq 3$; il suffit donc de traiter le cas $q = 2$. On peut évidemment supposer

que n est une puissance d'un nombre premier. Si $n = p^r$, où p est la caractéristique du corps résiduel de S, la théorie d'Artin-Schreier montre qu'on a $H^2(X_o, \mathbb{Z}/p^r) = 0$. Si $n = \ell^r$, $\ell \neq p$, on déduit de la théorie de Kummer un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X_o) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X_o, \mathbb{Z}/\ell^r) \end{array}$$

où l'application β est surjective [On l'a vu au chapitre III pour une courbe lisse sur un corps algébriquement clos, mais des arguments similaires s'appliquent à n'importe quelle courbe sur un corps séparablement clos].

Pour conclure, il suffira donc de montrer:

Proposition (4.1). - Soient S le spectre d'un anneau local noethérien hensélien et $f : X \to S$ un morphisme propre dont la fibre fermée X_o est de dimension ≤ 1. Alors l'application canonique de restriction

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_o)$$

est surjective [Il suffit d'ailleurs que le morphisme f soit séparé de type fini].

Pour simplifier la démonstration, nous supposerons que X est intègre, bien que cela ne soit pas nécessaire. Tout faisceau inversible sur X_o est associé à un diviseur de Cartier (car X_o est une courbe, donc quasi-projectif), il suffit donc de montrer que l'application canonique $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X_o)$ est surjective.

Tout diviseur sur X_o est combinaison linéaire de diviseurs dont le support est concentré en un seul point fermé non isolé de X_o. Soient x un

tel point, $t_o \in \underline{O}_{X_o,x}$ un élément régulier non inversible de $\underline{O}_{X_o,x}$ et D_o le diviseur concentré en x d'équation locale t_o. Soit U un voisinage ouvert de x dans X tel qu'il existe une section $t \in \Gamma(U, \underline{O}_U)$ relevant t_o. Soit Y le fermé de U d'équation $t = 0$; quitte à prendre U assez petit, on peut supposer que x est le seul point de $Y \cap X_o$. Alors Y est quasi-fini au-dessus de S en x ; puisque S est le spectre d'un anneau local hensélien, on en déduit que $Y = Y_1 \amalg Y_2$, où Y_1 est fini sur S et où Y_2 ne rencontre pas X_o. De plus, comme X est séparé sur S, Y_1 est fermé dans X.

Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert plus petit de x, on peut supposer que $Y = Y_1$, autrement dit que Y est fermé dans X. On définit alors un diviseur D sur X relevant D_o en posant $D|X - Y = 0$ et $D|U = \mathrm{div}(t)$ ce qui a un sens car t est inversible sur $U - Y$.

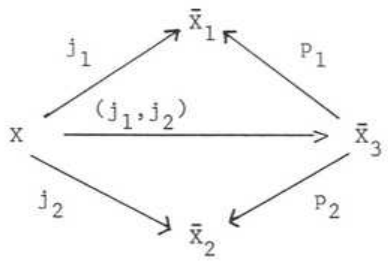
Remarque (4.2). - Dans le cas où f est propre, on pourrait aussi faire une démonstration du même style que celle de la proposition (2.2). En effet, comme X_o est une courbe, il n'y a pas d'obstruction à relever un faisceau inversible sur X_o aux voisinages infinitésimaux X_n de X_o, donc au complété formel $\mathfrak{X}$ de X le long de X_o. On conclut alors en appliquant successivement le théorème d'existence de Grothendieck et le théorème d'approximation d'Artin.

5. Cohomologie à support propre.

Définition (5.1). - Soit X un schéma séparé de type fini sur un corps k. D'après un théorème de Nagata, il existe un schéma $\bar{X}$ propre sur k et une immersion ouverte $j : X \to \bar{X}$. Pour tout faisceau de torsion F sur X on note $j_!F$ le prolongement par 0 de F à $\bar{X}$ et on définit les groupes de cohomologie à support propre $H^q_c(X,F)$ en posant

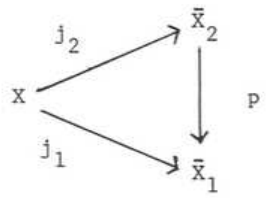
$$H^q_c(X, F) = H^q(\bar{X}, j_!F) .$$

Montrons que cette définition est indépendante de la compactification $j : X \to \bar{X}$ choisie. Soient $j_1 : X \to \bar{X}_1$ et $j_2 : X \to \bar{X}_2$ deux compactifications. Alors X s'envoie dans $\bar{X}_1 \times \bar{X}_2$ par $x \mapsto (j_1(x), j_2(x))$ et l'image fermée $\bar{X}_3$ de X par cette application est une compactification de X. On a ainsi un diagramme commutatif



où p_1 et p_2, les restrictions des projections naturelles à $\bar{X}_3$, sont des morphismes propres.

Il suffit donc de traiter le cas où on a un diagramme commutatif



avec p un morphisme propre.

Lemme (5.2). - On a $p_*(j_{2!}F) = j_{1!}F$ et $R^q p_*(j_{2!}F) = 0$, pour $q > 0$.

Notons tout de suite que le lemme suffit pour conclure. En utilisant la suite spectrale de Leray du morphisme p, on en déduit qu'on a, pour tout $q \geq 0$,

$$H^q(\bar{X}_2, j_{2!}F) = H^q(\bar{X}_1, j_{1!}F) .$$

Pour démontrer le lemme, on raisonne fibre par fibre en utilisant le

le théorème de changement de base (1.1) pour p . Le résultat est immédiat, car, au-dessus d'un point de X , p est un isomorphisme et, au-dessus d'un point de $\bar{X}_1 - X$, $j_{2!}F$ est nul sur la fibre de p .

(5.3) De même, si $f : X \to S$ est un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens, il existe un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \to S$ et une immersion ouverte $j : X \to \bar{X}$. On définit alors les images directes supérieures à support propre $R^q f_!$ en posant pour tout faisceau de torsion F sur X

$$R^q f_! = R^q f_*(j_! F) \quad .$$

On vérifie comme précédemment que cette définition est indépendante de la compactification choisie.

Théorème (5.4). - Soient $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens et F un faisceau de torsion sur X . Alors la fibre de $R^q f_! F$ en un point géométrique s de S est isomorphe à la cohomologie à support propre $H^q_c(X_s, F)$ de la fibre X_s de f en s .

C'est une simple variante du théorème de changement de base pour un morphisme propre (1.1). Plus généralement, si

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

est un diagramme cartésien, on a un isomorphisme canonique

$$g^*(R^q f_! F) \simeq R^q f'_! (g'^* F) \quad . \tag{5.4.1}$$

6. Applications.

Théorème d'annulation (6.1). - Soient $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini dont les fibres sont de dimension $\leq n$ et F un faisceau de torsion sur X. Alors on a $R^q f_! F = 0$ pour $q > 2n$.

D'après le théorème de changement de base, on peut supposer que S est le spectre d'un corps séparablement clos. Si $\dim X = n$, il existe un ouvert affine U de X tel que $\dim(X-U) < n$; on a alors une suite exacte $0 \to F_U \to F \to F_{X-U} \to 0$ et, par récurrence sur n, il suffit de démontrer le théorème pour $X = U$ affine. Puis la méthode de fibration par des courbes (III.4.1) et le théorème de changement de base permettent de se ramener à une courbe sur un corps séparablement clos pour lequelle on déduit le résultat voulu du théorème de Tsen (cf. III.3.6).

Théorème de finitude (6.2). - Soient $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini et F un faisceau constructible sur X. Alors les faisceaux $R^q f_! F$ sont constructibles.

Nous ne considérerons que le cas où F est annulé par un entier inversible sur X.

Pour démontrer le théorème on se ramène au cas où F est un faisceau constant $\mathbb{Z}/n$ et où $f : X \to S$ est un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des courbes géométriquement connexes de genre g. Pour n inversible sur X, les faisceaux $R^q f_* F$ sont alors localement libres de rang fini, nuls pour $q > 2$ (6.1). Remplaçant $\mathbb{Z}/n$ par le faisceau localement isomorphe (sur S) μ_n, on a canoniquement

$$
\begin{aligned}
R^0 f_* \mu_n &= \mu_n \\
R^1 f_* \mu_n &= \underline{\mathrm{Pic}}(X/S)_n \\
R^2 f_* \mu_n &= \mathbb{Z}/n \quad .
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

Théorème (6.3) (comparaison avec la cohomologie classique). - Soient $f:X \to S$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, et F un faisceau de torsion sur X. Notons par un exposant ^{an} le foncteur de passage aux espaces topologiques usuels, et par $R^q f^{an}_!$ les foncteurs dérivés du foncteur image directe à support propre par f^{an}. On a

$$(R^q f_! F)^{an} \simeq R^q f^{an}_! F^{an} .$$

En particulier, pour S = un point et F le faisceau constant $\mathbb{Z}/n$,

$$H^q_c(X, \mathbb{Z}/n) \simeq H^q_c(X^{an}, \mathbb{Z}/n) .$$

Des dévissages utilisant le théorème de changement de base nous ramènent au cas où X est une courbe propre et lisse, où S = un point, et où $F = \mathbb{Z}/n$. Les groupes de cohomologie considérés sont alors nuls pour $q \neq 0,1,2$, et on invoque GAGA: en effet, si X est propre sur $\mathbb{C}$, on a $\pi_o(X) = \pi_o(X^{an})$ et $\pi_1(X)$ = completé profini de $\pi_1(X^{an})$, d'où l'assertion pour $q = 0,1$. Pour $q=2$, on utilise la suite exacte de Kummer et le fait que, par GAGA encore, $Pic(X) = Pic(X^{an})$.

Théorème (6.4) (dimension cohomologique des schémas affines). Soient X un schéma affine de type fini sur un corps séparablement clos et F un faisceau de torsion sur X. Alors on a $H^q(X, F) = 0$ pour $q > \dim(X)$.

Pour la très jolie démonstration nous renvoyons à SGA 4, XIV §2 et 3.

Remarque (6.5). - Ce théorème est en quelque sorte un substitut pour la théorie de Morse. Considérons en effet le cas classique où X est lisse et affine sur $\mathbb{C}$ plongé dans un espace affine type $\mathbb{C}^N$. Alors, pour presque tout point $p \in \mathbb{C}^N$, la fonction "distance à p" sur X est une fonction de Morse et les indices de ses points critiques sont plus petits que $\dim(X)$. Ainsi X est obtenu par recollement d'anses d'indice plus petit que $\dim(X)$, d'où l'analogue classique de (6.4).

V. Acyclicité locale des morphismes lisses

Soient X une variété analytique complexe et $f : X \to D$ un morphisme de X dans le disque. On note $[0, t]$ le segment de droite fermé d'extrémités 0 et t dans D et $]0, t]$ le segment semi-ouvert. Si f est <u>lisse</u>, l'inclusion

$$j : f^{-1}(]0, t]) \hookrightarrow f^{-1}([0, t])$$

est une équivalence d'homotopie; on peut pousser la fibre spéciale $X_o = f^{-1}(0)$ dans $f^{-1}([0, t])$.

En pratique, pour t assez petit, $f^{-1}(]0, t])$ sera un fibré sur $]0, t]$ de sorte que l'inclusion

$$X_t = f^{-1}(t) \hookrightarrow f^{-1}(]0, t])$$

sera également une équivalence d'homotopie. On appelle alors <u>morphisme de cospécialisation</u> la classe d'homotopie d'applications:

$$\text{cosp}: X_o \hookrightarrow f^{-1}([0, t]) \xleftarrow{\approx} f^{-1}(]0, t]) \xleftarrow{\approx} X_t \ .$$

On peut exprimer cette construction en termes imagés en disant que, pour un morphisme lisse, la fibre générale avale la fibre spéciale.

Ne supposons plus f nécessairement lisse (mais supposons que $f^{-1}(]0, t])$ soit un fibré sur $]0, t]$). On peut encore définir un morphisme cosp* en cohomologie dès que $j_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et $R^q j_* \mathbb{Z} = 0$ pour $q > 0$. Sous ces hypothèses, la suite spectrale de Leray pour j montre qu'on a

$$H^*(f^{-1}([0, t]), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^*(f^{-1}(]0, t]), \mathbb{Z})$$

et cosp^* est le morphisme composé:

$$\text{cosp}^* : H^*(X_t, \mathbb{Z}) \simeq H^*(f^{-1}(]0, t]), \mathbb{Z}) \simeq H^*(f^{-1}([0,t], \mathbb{Z}) \to H^*(X_o, \mathbb{Z})$$

La fibre de $R^q j_* \mathbb{Z}$ en un point $x \in X_o$ se calcule comme suit. On prend dans un espace ambiant une boule B_ε de centre x et de rayon ε assez petit, et pour η assez petit, on pose $E = X \cap B_\varepsilon \cap f^{-1}(\eta\, t)$; c'est la <u>variété des cycles évanescents</u> en x . On a

$$(R^q j_* \mathbb{Z})_x \simeq H^q(X \cap B_\varepsilon \cap f^{-1}(]0, \eta\, t]), \mathbb{Z}) \simeq H^q(E, \mathbb{Z})$$

et le morphisme de cospécialisation est défini en cohomologie dès que les variétés de cycles évanescents sont acycliques $[H^0(E, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^q(E, \mathbb{Z}) = 0$ pour $q > 0]$, ce qui s'exprime en disant que f est <u>localement acyclique</u>.

Ce chapitre est consacré à l'analogue de cette situation pour un morphisme lisse de schémas et pour la cohomologie étale. Cependant il est indispensable dans ce cadre de se limiter aux coefficients de torsion et d'ordre <u>premier aux caractéristiques résiduelles</u>. Le paragraphe 1 est consacré à des généralités sur les morphismes localement acycliques et les flèches de cospécialisation. Dans le paragraphe 2, on démontre qu'un morphisme lisse est localement acyclique. Dans le paragraphe 3, on joint ce résultat à ceux du chapitre précédent pour en déduire deux applications: un théorème de spécialisation des groupes de cohomologie (la cohomologie des fibres géométriques d'un morphisme propre et lisse est localement constante) et un théorème de changement de base par un morphisme lisse.

Dans tout ce qui suit, on fixe un entier n et "schéma" signifie "schéma sur lequel n est inversible". "Point géométrique" signifiera toujours "point géométrique algébrique" (II 3.1.) $x:\text{Spec}(k) \to X$, avec k algébriquement clos.

1. Morphismes localement acycliques.

Notation (1.1). - Etant donnés un schéma S et un point géométrique s de S, on notera $\tilde{S}^s$ le spectre du localisé strict de S en s.

Définition (1.2). - On dit qu'un point géométrique t de S est une générisation de s s'il est défini par une clôture algébrique du corps résiduel d'un point de $\tilde{S}^s$. On dit aussi que s est une spécialisation de t et on appelle flèche de spécialisation le S-morphisme $t \to \tilde{S}^s$.

Définition (1.3). - Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Soient s un point géométrique de S, t une générisation de s, x un point géométrique de X au-dessus de s et $\tilde{X}^x_t = \tilde{X}^x \times_{\tilde{S}^s} t$. Alors on dit que $\tilde{X}^x_t$ est une variété de cycles évanescents de f au point x.

On dit que f est localement acyclique si, la cohomologie réduite de toute variété de cycles évanescents $\tilde{X}^x_t$ est nulle:

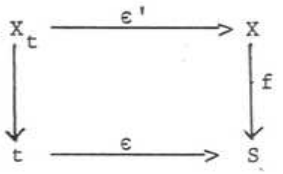
(1.3.1) $$\hat{H}^*(\tilde{X}^x_t, \mathbb{Z}/n) = 0 ,$$

i.e. $H^0(X^x_t, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(\tilde{X}^x_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$.

Lemme (1.4). - Soient $f : X \to S$ un morphisme localement acyclique et $g : S' \to S$ un morphisme quasi-fini (ou limite projective de morphismes quasi-finis). Alors le morphisme $f' : X' \to S'$ déduit de f par changement de base est localement acyclique.

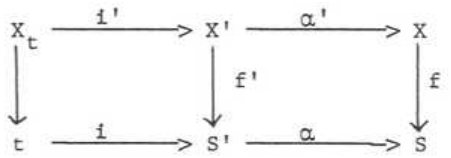
On vérifie en effet que toute variété de cycles évanescents de f' est une variété de cycles évanescents de f.

Lemme 1.5. Soit $f : X \to S$ un morphisme localement acyclique. Pour tout point géométrique t de S, donnant lieu à un diagramme cartésien



On a $\varepsilon'_* \mathbb{Z}/n = f^* \varepsilon_* \mathbb{Z}/n$ **et** $R^q \varepsilon'_* \mathbb{Z}/n = 0$ **pour** $q > 0$.

Soient $\bar{S}$ l'adhérence de $\varepsilon(t)$, S' le normalisé de $\bar{S}$ dans $k(t)$, et le diagramme cartésien



Les anneaux locaux de S' sont normaux à corps de fractions séparablement clos. Ils sont donc strictement henséliens, et l'acyclicité locale de f' (1.4) fournit $i'_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, $R^q i'_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$. Puisque α est entier, on a alors

$$R^q \varepsilon'_* \mathbb{Z}/n = \alpha'_* R^q i'_* \mathbb{Z}/n = \alpha'_* f'^* R^q i_* \mathbb{Z}/n = f^* \alpha_* R^q i_* \mathbb{Z}/n = f^* R^q \varepsilon_* \mathbb{Z}/n ,$$

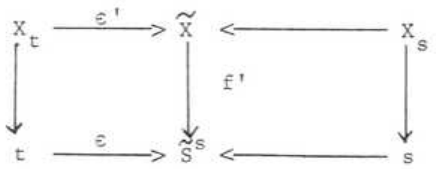
et le lemme.

(1.6) Etant donnés un morphisme localement acyclique $f : X \to S$ et une flèche de spécialisation $t \to \tilde{S}^s$, nous allons définir des homomorphismes canoniques, dits flèches de cospécialisation

$$\mathrm{cosp}^* : H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \to H^*(X_s, \mathbb{Z}/n) ,$$

reliant la cohomologie de la fibre générale $X_t = X \times_S t$ et celle de la fibre spéciale $X_s = X \times_S s$.

Considérons le diagramme cartésien



déduit de f par changement de base. D'après 1.4, f' est encore localement acyclique. De la définition de l'acyclicité locale, on tire aussitôt que la restriction à X_s des faisceaux $R^q\varepsilon'_*\mathbb{Z}/n$ est $\mathbb{Z}/n$ pour $q=0$, et 0 pour $q>0$. Par 1.5, on sait même que $R^q\varepsilon'_*\mathbb{Z}/n = 0$ pour $q>0$. On définit cosp* comme la flèche composée

(1.6.1) $H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \simeq H^*(X, \varepsilon'_*\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^*(X_s, \mathbb{Z}/n)$.

Variante: Soient $\bar{S}$ l'adhérence de $\varepsilon(t)$ dans $\tilde{S}^s$, S' le normalisé de $\bar{S}$ dans k(t) et X'/S' déduit de X/S par changement de base. Le diagramme (1.6.1) peut encore s'écrire

$$H^*(X_t, \mathbb{Z}/n) \simeq H^*(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^*(X_s, \mathbb{Z}/n) \quad .$$

Théorème (1.7). - Soient S un schéma localement noethérien, s un point géométrique de S et f : X → S un morphisme. On suppose

a) le morphisme f est localement acyclique,

b) pour tout morphisme de spécialisation $t \to \tilde{S}^s$ et pour tout $q \geq 0$, les flèches de cospécialisation $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) \to H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ sont bijectives.

Alors l'homomorphisme canonique $(R^qf_*\mathbb{Z}/n)_s \to H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$.

Pour démontrer le théorème, il est clair qu'on peut supposer $S = \tilde{S}^s$. On va en fait montrer que, pour tout faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules F sur S , l'homomorphisme canonique $\varphi^q(F) : (R^q f_* f^* F)_s \to H^q(X_s, f^*F)$ est bijectif.

Tout faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules (IV.3.3). De plus tout faisceau constructible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules se plonge dans un faisceau de la forme $\prod i_{\lambda *} C_\lambda$, où $i_\lambda : t_\lambda \to S$ est une famille finie de générisations de s et C_λ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module libre de rang fini sur t_λ . D'après la définition des flèches de cospécialisation, la condition b) signifie que les homomorphismes $\varphi^q(F)$ sont bijectifs si F est de cette forme.

On conclut à l'aide d'une variante du lemme (IV.3.6):

Lemme (1.8). - Soit C une catégorie abélienne dans laquelle les limites inductives filtrantes existent. Soit $\varphi^\bullet : T^\bullet \to T'^\bullet$ un morphisme de foncteurs cohomologiques commutant aux limites inductives filtrantes, définis sur C et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Supposons qu'il existe deux sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ d'objets de C tels que:

a) tout objet de C est limite inductive filtrante d'objets appartenant à $\mathcal{A}$,

b) tout objet appartenant à $\mathcal{A}$ est contenu dans un objet appartenant à $\mathcal{E}$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\varphi^q(A)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $A \in \mathrm{Ob}\, C$.

(ii) $\varphi^q(M)$ est bijectif pour tout $q \geq 0$ et tout $M \in \mathcal{E}$.

La démonstration du lemme se fait par passage à la limite inductive, récurrence sur q et application répétée du lemme des cinq au diagramme de suites exactes de cohomologie déduit d'une suite exacte $0 \to A \to M \to A' \to 0$, avec $A \in \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{E}$, $A' \in \mathrm{Ob}\, C$.

Corollaire (1.9) . - Soient S le spectre d'un anneau local noethérien strictement hensélien et $f : X \to S$ un morphisme localement acyclique. Supposons que, pour tout

point géométrique t de S on ait $H^0(X_t, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$ [autrement dit les fibres géométriques de f sont acycliques]. Alors on a $f_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$ et $R^q f_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$.

Corollaire (1.10). - Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes de schémas localement noethériens. Alors, si f et g sont localement acycliques, il en est de même de $g \circ f$.

On peut supposer que X, Y et Z sont strictement locaux et que f et g sont des morphismes locaux. Il s'agit alors de montrer que, si z est un point géométrique algébrique de Z , on a $H^0(X_z, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^q(X_z, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$.

Puisque g est localement acyclique, on a $H^0(Y_z, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$, et $H^q(Y_z, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q > 0$. Par ailleurs le morphisme $f_z : X_z \to Y_z$ est localement acyclique (1.4) et ses fibres géométriques sont acycliques, car ce sont des variétés de cycles évanescents de f . D'après (1.9), on a donc $R^q f_{z*} \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q > 0$. De plus $f_{z*} \mathbb{Z}/n$ est constant de fibre $\mathbb{Z}/n$ sur Y_z . On conclut à l'aide de la suite spectrale de Leray de f_z .

2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse.

Théorème (2.1). - Un morphisme lisse est localement acyclique.

Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse. L'assertion est locale pour la topologie étale sur X et S , on peut donc supposer que X est l'espace affine type de dimension d sur S . Par passage à la limite, on peut supposer que S est noethérien et la transitivité de l'acyclicité locale (1.10) montre qu'il suffit de traiter le cas $d = 1$.

Soient s un point géométrique de S et x un point géométrique de X centré en un point fermé de X_s. Il s'agit de montrer que les fibres géométriques du morphisme $\widetilde{X}^x \to \widetilde{S}^s$ sont acycliques. On posera désormais $S = \widetilde{S}^s = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \widetilde{X}^x$. On a $X \simeq \mathrm{Spec}\, A\{T\}$, où $A\{T\}$ est l'hensélisé de $A[T]$ au point $T = 0$ au-dessus de s.

Si t est un point géométrique de S, la fibre X_t est limite projective de courbes affines et lisses sur t. On a donc $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $q \geq 2$ et il suffit de montrer que $H^0(X_t, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ et $H^1(X_t, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour n premier à la caractéristique résiduelle de S. Cela résulte des deux propositions suivantes.

Proposition (2.2). - Soient A un anneau local strictement hensélien, $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}\, A\{T\}$. Alors les fibres géométriques de $X \to S$ sont connexes.

On peut se ramener par passage à la limite au cas où A est un hensélisé strict d'une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

Soient $\bar{t}$ un point géométrique de S, localisé en t, et k' une extension finie séparable de $k(t)$ dans $k(\bar{t})$. On pose $t' = \mathrm{Spec}(k')$ et $X_{t'} = X \times_S \mathrm{Spec}(k')$. Il nous faut vérifier que, quels que soient $\bar{t}$ et t', $X_{t'}$ est connexe (par quoi on entend connexe et non vide). Soit A' le normalisé de A dans k', i.e. l'anneau des éléments de k' entiers sur l'image de A dans $k(t)$. On a $A\{T\} \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} A'\{T\}$: le membre de gauche est en effet hensélien local (car A' est fini sur A, et local) et limite d'algèbres locales étale sur $A'[T] = A[T] \otimes_A A'$. Le schéma $X_{t'}$ est donc encore la fibre en t' de $X' = \mathrm{Spec}(A'\{T\})$ sur $S' = \mathrm{Spec}(A')$. Le schéma local X' est normal, donc intègre; son localisé $X_{t'}$ est encore intègre, a fortiori connexe.

Proposition (2.3). - Soient A un anneau local strictement hensélien, $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A\{T\})$. Soient $\bar{t}$ un point géométrique de S et $X_{\bar{t}}$ la fibre géométrique correspondante. Alors tout revêtement étale galoisien de $X_{\bar{t}}$ d'ordre premier à la caractéristique du corps résiduel de A est trivial.

Lemme (2.3.1) (théorème de pureté de Zariski-Nagata en dimension 2). - Soient C un anneau local régulier de dimension 2 et C' une C-algèbre finie normale étale au-dessus de l'ouvert complémentaire du point fermé de $\mathrm{Spec}(C)$. Alors C' est étale sur C.

En effet C' est normal de dimension 2, donc $\mathrm{prof}(C') = 2$. Puisque $\mathrm{prof}(C') + \dim \mathrm{proj}(C') = \dim(C) = 2$, on en conclut que C' est libre sur C. Alors l'ensemble des points de C où C' est ramifié est défini par une équation, le discriminant; puisqu'il ne contient pas de point de hauteur 1, il est vide.

Lemme (2.3.2) (cas particulier du lemme d'Abhyankar). - Soient $S = \mathrm{Spec}(V)$ un trait, π une uniformisante, η le point générique de S, X lisse sur S, irréductible, de dimension relative 1, $\tilde{X}_\eta$ un revêtement étale galoisien de X_η, de degré n inversible sur S, et $S_1 = \mathrm{Spec}(V[\pi^{1/n}])$. Notons par un indice $_1$ le changement de base de S à S_1. Alors, $\tilde{X}_{1\eta}$ se prolonge en un revêtement étale de X_1.

Soit $\tilde{X}_1$ le normalisé de X_1 dans $\tilde{X}_{1\eta}$. Vu la structure des groupes d'inertie modérée des anneaux de valuation discrète localisés de X aux points génériques de la fibre spéciale X_s, $\tilde{X}_1$ est étale sur X_1 sur la fibre générale, et aux points génériques de la fibre spéciale. Par 2.3.1, il est étale partout.

2.3.3. Prouvons 2.3. Notons t le point en lequel $\bar{t}$ est localisé. Il nous est loisible de remplacer A par le normalisé de A dans une extension finie séparable $k(t')$ de $k(t)$ dans $k(\bar{t})$ (cf. 2.**2**). Ceci, et un passage à la limite préliminaire,

nous permettent de supposer que

a) A est normal noethérien, et t est le point générique de S .

b) Le revêtement étale considéré de $X_{\bar{t}}$ provient d'un revêtement étale de X_t .

c) Il provient d'un revêtement étale $\tilde{X}_U$ de l'image réciproque X_U d'un ouvert non vide U de S (résulte de b): t est la limite des U).

d) Le complément de U est de codimension ≥ 2 (ceci au prix d'agrandir k(t) , par application de 2.3.2 aux anneaux de valuation discrète localisés de S en les points de S-U de codimension 1 dans S ; ces points sont en nombre fini).

e) Le revêtement $\tilde{X}_U$ est trivial au-dessus du sous-schéma T=0 . (Ceci quitte à encore agrandir k(t)).

Lorsque ces conditions sont remplies, nous allons voir que le revêtement $\tilde{X}_U$ est trivial.

Lemme (2.3.4). - Soient A un anneau local strictement hensélien normal et noethérien, U un ouvert de Spec(A) dont le complément est de codimension ≥ 2 , V son image réciproque dans $X = \mathrm{Spec}(A\{T\})$ et V' un revêtement étale de V . Si V' est trivial au-dessus de T = 0 , alors V' est trivial.

Soit $B = \Gamma(V', \mathcal{O})$. Puisque V' est l'image inverse de V dans Spec(B) , il suffit de voir que B est fini étale sur $A\{T\}$ (donc décomposé, puisque $A\{T\}$ est strictement hensélien). Soit $\hat{X} = A[[T]]$, et notons par $\hat{}$ le changement de base de X à $\hat{X}$. Le schéma $\hat{X}$ est fidèlement plat sur X . On a donc $\Gamma(\hat{V}', \mathcal{O}) = B \otimes_{A\{T\}} A[[T]]$, et il suffit de voir que cet anneau $\hat{B}$ est fini étale sur $A[[T]]$.

Soit V_m (resp. V'_m) le sous-schéma de $\hat{V}$ (resp. $\hat{V}'$) d'équation $T^{m+1} = 0$. Par hypothèse, V'_o est un revêtement trivial de V_o : une somme de n-copies de V_o . De même pour V'_m/V_m , puisque les revêtements étales sont insensibles aux nilpotents. On en tire

$$\varphi : \Gamma(\hat{V}', \mathcal{O}) \to \varprojlim_m \Gamma(V'_m, \mathcal{O}) = (\varprojlim_m \Gamma(V_m, \mathcal{O}))^n \quad .$$

Par hypothèse, le complément de U est de profondeur ≥ 2 : on a $\Gamma(V_m, \mathcal{O}) = A[T]/(T^{m+1})$, et φ est un homomorphisme de $\hat{B}$ dans $A[[T]]^n$. Au-dessus de U, il fournit n sections distinctes de $\hat{V}'/\hat{V}$: $\hat{V}'$ est donc trivial, somme de n copies de $\hat{V}$. Le complément de $\hat{V}$ dans $\hat{X}$ étant encore de codimension ≥ 2 (donc de profondeur ≥ 2), on en déduit que $\hat{B} = A[[T]]^n$, d'où le lemme.

3. Applications.

Théorème (3.1) (spécialisation des groupes de cohomologie). - Soit $f:X \to S$ un morphisme propre et localement acyclique, par exemple un morphisme propre et lisse. Alors les faisceaux $R^q f_* \mathbb{Z}/n$ sont localement constants constructibles et pour toute flèche de spécialisation $t \rightsquigarrow s$, les flèches de cospécialisation $H^q(X_t, \mathbb{Z}/n) \to H^q(X_s, \mathbb{Z}/n)$ sont bijectives.

Cela résulte immédiatement de la définition des flèches de cospécialisation et des théorèmes de finitude et de changement de base pour les morphismes propres.

Théorème (3.2) (changement de base par un morphisme lisse). - Soit un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

avec g lisse. Pour tout faisceau F sur X, de torsion et premier aux caractéristiques résiduelles de S, on a

$$g^* R^q f_* F \xrightarrow{\sim} R^q f'_* (g'^* F) \quad .$$

En prenant un recouvrement ouvert de X, on se ramène au cas où X est affine, puis par un passage à la limite au cas où X est de type fini sur S. Alors f se factorise en une immersion ouverte $j : X \to \bar{X}$ et un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \to S$. De la suite spectrale de Leray pour $\bar{f} \circ j$ et du théorème de changement de base pour les morphismes propres, on déduit qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $X \to S$ est une immersion ouverte.

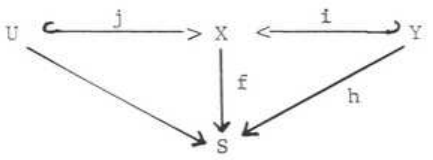
Dans ce cas, si F est de la forme $\varepsilon_* C$, où $\varepsilon : t \to X$ est un point géométrique de X, le théorème est corollaire de 1.5. Le cas général en résulte par le lemme 1.8.

Corollaire (3.3). - Soient K/k une extension de corps séparablement clos, X un k-schéma et n un entier premier à la caractéristique de k. Alors l'application canonique $H^q(X, \mathbb{Z}/n) \to H^q(X_K, \mathbb{Z}/n)$ est bijective pour tout $q \geq 0$.

Il suffit de remarquer que $\bar{K}$ est limite inductive de $\bar{k}$-algèbres lisses.

Théorème (3.4) (pureté relative). - Soit un diagramme commutatif

(3.4.1)

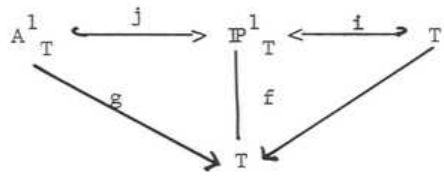


avec f lisse purement de dimension relative N , h lisse purement de dimension relative N-1 , i un plongement fermé et U = X-Y . Pour n premier aux caractéristiques résiduelles de S , on a

$$\begin{cases} j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n \\ R^1 j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n(-1)_Y \\ R^q j_* \mathbb{Z}/n = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 2 \end{cases}$$

Dans ces formules, $\mathbb{Z}/n(-1)$ désigne le $\mathbb{Z}/n$-dual de μ_n . Si t est une équation locale pour Y , l'isomorphisme $R^1 j_* \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/n(-1)_Y$ est défini par l'application $a : \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 j_* \mu_n$ qui envoie 1 sur la classe du μ_n-torseur des racines $n^{\text{ièmes}}$ de t .

La question est de nature locale. Ceci permet de remplacer (X, Y) par un couple localement isomorphe, par exemple



avec $T = A^{n-1}_S$ et i = section à l'infini. Le corollaire 1.9 s'applique à g , et fournit $R^q g_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$ pour q=0 , 0 pour $q > 0$. Pour f , on a par ailleurs (IV 6.2.1)

$$R^q f_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n \ , \ 0, \mathbb{Z}/n(-1) \ , \ 0 \quad \text{pour} \quad q > 2 \ .$$

On vérifie facilement que $j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, et que les $R^q j_* \mathbb{Z}/n$ sont concentrés sur i(T) pour $q > 0$. La suite spectrale de Leray

$E_2^{pq} = R^p f_* R^q j_* \mathbb{Z}/n \Rightarrow R^{p+q} g_* \mathbb{Z}/n$ se réduit donc à

$$\begin{array}{lll} i^* R^q j_* \mathbb{Z}/n & 0 & \cdots \\ i^* R^1 j_* \mathbb{Z}/n & 0 & \cdots \\ \mathbb{Z}/n & 0 & \mathbb{Z}/n\,(-1) \quad 0 \quad \cdots \quad : \end{array}$$

(d_2 : $i^* R^1 j_* \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$)

$R^q j_* \mathbb{Z}/n = 0$ pour $q \geq 2$, et $R^1 j_* \mathbb{Z}/n$ est le prolongement par zéro d'un faisceau localement libre de rang un sur T (isomorphe, via d_2, à $\mathbb{Z}/n(-1)$). L'application a, définie plus haut, étant injective (ainsi qu'on le vérifie fibre par fibre), c'est un isomorphisme, et ceci prouve 3.4.

3.5. Nous renvoyons à SGA 4 XVI (§ 4 et § 5) pour la démonstration des applications suivantes du théorème d'acyclicité (2.1).

(3.5.1) Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$ et F un faisceau constructible sur X. Alors

$$(R^q f_* F)^{an} \sim R^q f_*^{an}(F^{an})$$

(cf IV 6.3; en cohomologie ordinaire, il est nécessaire de supposer F constructible et non seulement de torsion).

(3.5.2) Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas de type fini sur un corps k de caractéristique 0 et F un faisceau constructible sur X. Alors, les $R^q f_* F$ sont également constructibles.

La preuve utilise la résolution des singularités et 3.4. Elle est généralisée au cas d'un morphisme de type fini de schémas excellents de caractéristique 0 dans SGA4 XIX §5. Une autre démonstration, indépendante de la résolution, est donnée dans ce volume (Th. finitude, 1.1), elle s'applique à un morphisme de schémas de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind.

VI. Dualité de Poincaré

1. Introduction

Soit X une variété topologique orientée, purement de dimension N, et supposons que X admette un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq K}$, tel que les intersections non vides d'ouverts U_i soient homéomorphes à des boules. Pour une telle variété, le théorème de dualité de Poincaré peut se présenter ainsi:

A. La cohomologie de X est la cohomologie de Čech correspondant au revêtement $\mathcal{U}$. C'est la cohomologie du complexe

$$(1) \qquad 0 \to \mathbb{Z}^{A_0} \to \mathbb{Z}^{A_1} \to \dots$$

où $A_k = \{(i_0,\dots,i_k) \mid i_0 < \dots < i_k \text{ et } U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$.

B. Pour $a \in A_k$, $a = (i_0,\dots,i_k)$, soit $U_a = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$ et soit j_a l'inclusion de U_a dans X. Le faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur X admet la résolution (à gauche)

$$(2) \qquad \dots \to \bigoplus_{a \in A_1} j_{a!}\mathbb{Z} \to \bigoplus_{a \in A_0} j_{a!}\mathbb{Z} \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{Z} \quad .$$

La cohomologie à support compact $H_c^*(X, j_{a!}\mathbb{Z})$ n'est autre que la cohomologie à support propre de la boule (orientée) U_a :

$$H_c^i(X, j_{a!}\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq N \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = N \end{cases}$$

La suite spectrale d'hypercohomologie, pour le complexe (2) et la cohomologie à support propre, affirme donc que $H_c^i(X)$ est le $(i-N)$-ième groupe de cohomologie d'un complexe

(3) $$\ldots \to \mathbb{Z}^{A_1} \to \mathbb{Z}^{A_0} \to 0 \quad .$$

Ce complexe est le dual du complexe (1), d'où la dualité de Poincaré.

Les points essentiels de cette construction sont

a) l'existence d'une théorie de cohomologie à support propre :

b) le fait que tout point x d'une variété X purement de dimension N a un système fondamental de voisinages ouverts U pour lesquels

(4) $$H_c^i(U) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq N \ , \\ \mathbb{Z} & \text{pour } i = N \ . \end{cases}$$

La dualité de Poincaré en cohomologie étale peut se construire sur ce modèle. Pour X lisse purement de dimension N sur k algébriquement clos, n inversible sur X et x un point fermé de X, le point clef est de calculer la limite projective, étendue aux voisinages étales U de x

(5) $$\varprojlim H_c^i(U, \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 2N \\ \mathbb{Z}/n & \text{si } i = 2N \ . \end{cases}$$

De même que pour les variétés topologiques il faut d'abord traiter directement le cas d'une boule ouverte (voire simplement celui de l'intervalle $]0, 1[$), ici il faut d'abord traiter directement le cas des courbes (§2). Le théorème d'acyclicité locale des morphismes lisses permet ensuite de ramener (5) à ce cas particulier (§ 3).

Les isomorphismes (4) et (5) ne sont pas canoniques: ils dépendent du choix d'une orientation de X. Pour n inversible sur un schéma X, μ_n est un faisceau de $\mathbb{Z}/n$-modules libres de rang un. On note $\mathbb{Z}/n(N)$ sa puissance tensorielle $N^{\text{ième}}$ $(N \in \mathbb{Z})$. La forme intrinsèque de la deuxième ligne de (5) est

(5') $\varprojlim H_c^{2N}(U, \mathbb{Z}/n(N)) = \mathbb{Z}/n$,

et $\mathbb{Z}/n(N)$ s'appelle le faisceau d'orientation de X ; le faisceau $\mathbb{Z}/n(N)$ étant constant, isomorphe à $\mathbb{Z}/n$, on peut le faire sortir du signe H et écrire plutôt

(5") $\varprojlim H_c^{2N}(U, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n(-N)$,

et la dualité de Poincaré prendra la forme d'une dualité parfaite, à valeurs dans $\mathbb{Z}/n(-N)$, entre $H^i(X, \mathbb{Z}/n)$ et $H_c^{2N-i}(X, \mathbb{Z}/n)$.

2. Le cas des courbes.

(2.1) Soient $\bar{X}$ une courbe projective et lisse sur k algébriquement clos, et n inversible sur $\bar{X}$. La preuve de III 3.5 fournit, pour $\bar{X}$ connexe, un isomorphisme canonique

$$H^2(\bar{X}, \mu_n) = \mathrm{Pic}(\bar{X})/n\mathrm{Pic}(\bar{X}) \xrightarrow{\deg}_{\sim} \mathbb{Z}/n \ .$$

Soient D un diviseur réduit de $\bar{X}$ et $X = \bar{X} - D$

$$X \xrightarrow[j]{} \bar{X} \xleftarrow[i]{} D \ .$$

La suite exacte $0 \to j_!\mu_n \to \mu_n \to i_*\mu_n \to 0$ et le fait que $H^i(\bar{X}, i_*\mu_n) = H^i(D, \mu_n) = 0$ pour $i > 0$ fournissent un isomorphisme

$$H_c^2(X, \mu_n) = H^2(\bar{X}, j_!\mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \ .$$

Pour $\bar{X}$ disconnexe, on a de même

$$H_c^2(X, \mu_n) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{\pi_o(X)}$$

et on définit le morphisme trace comme la somme

$$\mathrm{Tr} : H_c^2(X, \mu_n) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{\pi_o(X)} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/n \ .$$

Théorème (2.2).- *La forme* $\mathrm{Tr}(a \cup b)$ *identifie chacun des deux groupes* $H^i(X, \mathbb{Z}/n)$ *et* $H_c^{2-i}(X, \mu_n)$ *au dual (à valeurs dans* $\mathbb{Z}/n$ *) de l'autre.*

Preuve transcendante. Si $\bar{X}$ est une courbe projective et lisse sur un trait S, et que $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ est l'inclusion du complémentaire d'un diviseur D étale sur S, les cohomologies (resp. les cohomologies à support propre) des fibres géométriques spéciales et génériques de X/S sont "les mêmes", i.e. les fibres de faisceaux localement constants sur S. Ceci se déduit des faits analogues pour $\bar{X}$ et D, via la suite exacte $0 \to j_! \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n_D \to 0$ (pour la cohomologie à supports propres) et les formules $j_* \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$, $R^1 j_* \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/n_D(-1)$ $R^i j_* \mathbb{Z}/n = 0$ $(i \geq 2)$ (pour la cohomologie ordinaire) (V 3.4).

Ce principe de spécialisation ramène 2.2 au cas où k est de caractéristique 0. Par V 3.3, ce cas se ramène à celui où $k = \mathbb{C}$. Enfin, pour $k = \mathbb{C}$, les groupes $H^*(X, \mathbb{Z}/n)$ et $H_c^*(X, \mu_n)$ coïncident avec les groupes de même nom, calculés pour l'espace topologique classique X_{cl} et, via l'isomorphisme $\mathbb{Z}/n \to \mu_n : x \mapsto \exp(\frac{2\pi i x}{n})$, le morphisme trace s'identifie à "l'intégration sur la classe fondamentale", de sorte que 2.2 résulte de la dualité de Poincaré pour X_{cl}.

(2.3) Preuve algébrique. Pour une preuve très économique, voir (Dualité §2). En voici une autre, liée à l'autodualité de la jacobienne.

Reprenons les notations de 2.1. On peut supposer - et on suppose - que X est connexe. Les cas $i=0$ ou 2 étant triviaux, on suppose aussi que $i = 1$. Définissons ${}_D\mathbb{G}_m$ par la suite exacte $0 \to {}_D\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to i_* \mathbb{G}_m \to 0$ (sections de $\mathbb{G}_m$ congrues à 1 mod D). Le groupe $H^1(\bar{X}, {}_D\mathbb{G}_m)$ classifie les faisceaux inversibles sur $\bar{X}$ trivialisés sur D. C'est le groupe des points de $\mathrm{Pic}_D(\bar{X})$, une extension de $\mathbb{Z}$ (le degré) par le groupe des points d'une jacobienne généralisée de Rosenlicht (correspondant au conducteur 1 en chaque point de D) $\mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})$, elle-même extension de la variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(\bar{X})$ par le tore $\mathbb{G}_m^D/(\mathbb{G}_m$ diagonal).

a) La suite exacte $0 \to j_! \mu_n \to {}_D\mathbb{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^n} {}_D\mathbb{G}_m \to 0$ fournit un isomorphisme

$$H_c^1(X, \mu_n) = \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})_n \quad . \tag{2.3.1}$$

b) L'application qui à $x \in X(k)$ associe la classe du faisceau inversible $\mathcal{O}(x)$ sur $\bar{X}$, trivialisé par 1 sur D, provient d'un morphisme

$$f : X \longrightarrow \mathrm{Pic}_D(\bar{X}) \quad .$$

Pour la suite, on fixe un point base 0 et on pose $f_0(x) = f(x) - f(0)$.
Pour tout homomorphisme $v : \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})_n \to \mathbb{Z}/n$, soit $\bar{v} \in H^1(\mathrm{Pic}_D^0(\bar{X}), \mathbb{Z}/n)$ l'image par v de la classe dans $H^1(\mathrm{Pic}_D^0(\bar{X}), \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})_n)$ du torseur défini par l'extension

$$0 \to \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})_n \to \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X}) \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}_D^0(\bar{X}) \to 0$$

La théorie du corps de classe géométrique (telle qu'exposée dans Serre [15]) montre que l'application $v \mapsto f_0^*(\bar{v})$:

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}_D^0(\bar{X})_n, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n) \tag{2.3.2}$$

est un isomorphisme. Pour déduire 2.2 de (2.3.1) (2.3.2), il reste à savoir que

$$\mathrm{Tr}(u \cup f_0^*(\bar{v})) = -v(u) \quad . \tag{2.3.3}$$

Cette compatibilité est prouvée en (Dualité, 3.2.4).

3. Le cas général.

Soient X une variété algébrique lisse et purement de dimension N, sur k algébriquement clos. Pour énoncer le théorème de dualité de Poincaré, il faut tout d'abord définir le morphisme trace

$$\mathrm{Tr} : H_c^{2N}(X, \mathbb{Z}/n(N)) \to \mathbb{Z}/n \quad .$$

La définition est un dévissage pénible à partir du cas des courbes (SGA 4 XVIII § 2). On a alors

Théorème (3.1).- *La forme* $Tr(a \cup b)$ *identifie chacun des groupes* $H_c^i(X, \mathbb{Z}/n(N))$ *et* $H^{2N-i}(X, \mathbb{Z}/n)$ *au dual de l'autre.*

Soient $x \in X$ un point fermé et X_x le localisé strict de X en x. Nous posons, pour U parcourant les voisinages étales de x

$$H_c^*(X_x, \mathbb{Z}/n) = \varprojlim H_c^*(U, \mathbb{Z}/n) . \tag{1}$$

Il serait préférable de considérer plutôt le pro-objet "$\varprojlim$" $H_c^*(U, \mathbb{Z}/n)$ mais, les groupes en jeu étant finis, la différence est inessentielle. Comme on a tenté de l'expliquer dans l'introduction, (3.1) résulte de ce que

$$H_c^i(X_x, \mathbb{Z}/n) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 2N \quad \text{et que} \tag{2}$$

$$Tr: H_c^{2N}(X_x, \mathbb{Z}/n(N)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Le cas où $N=0$ est trivial. Si $N > 0$, soit Y_y le localisé strict en un point fermé d'un schéma Y lisse purement de dimension $N-1$, et soit $f : X_x \to Y_y$ un morphisme essentiellement lisse (de dimension relative un). La démonstration utilise la suite spectrale de Leray en cohomologie à support propre pour f, pour se ramener au cas des courbes. Les "cohomologies à support propre" considérées étant définies comme des limites (1), l'existence d'une telle suite spectrale pose divers problèmes de passage à la limite, traités avec trop de détails dans SGA4 XVIII. Ici, nous nous contenterons de calculer.

Pour tout point géométrique z de Y_y, on a

$$(R^i f_! \mathbb{Z}/n)_z = H_c^i(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) .$$

La fibre géométrique $f^{-1}(z)$ est une limite projective de courbes lisses sur un corps algébriquement clos. Elle vérifie la dualité de Poincaré. Sa cohomologie ordinaire est donnée par le théorème d'acyclicité locale pour les morphismes lisses:

$$H^i(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i > 0 \end{cases} .$$

Par dualité, on a

$$H^i_c(f^{-1}(z), \mathbb{Z}/n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n(-1) & \text{pour } i = 2 \\ 0 & \text{pour } i \neq 2 \end{cases} ,$$

et la suite spectrale de Leray s'écrit

$$H^i_c(X_x, \mathbb{Z}/n\ (N)) = H^{i-2}_c(Y_y, \mathbb{Z}/n(N-1)) \quad .$$

On conclut par récurrence sur N .

4. Variantes et applications.

On peut construire, en cohomologie étale, un "formalisme de dualité" (= des foncteurs Rf_* , $Rf_!$, f^* , $Rf^!$ satisfaisant diverses compatibilités et formules d'adjonction) parallèle à celui qui existe en cohomologie cohérente. Dans ce langage, les résultats du paragraphe précédents se transcrivent comme suit: si $f : X \to S$ est lisse et purement de dimension relative N , et que $S = \mathrm{Spec}(k)$, avec k algébriquement clos, alors

$$Rf^! \mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n\ [2N](N) \quad .$$

Ce résultat vaut sans hypothèse sur S . Il admet le

Corollaire.- Si f est lisse et purement de dimension relative N , et que les faisceaux $R^i f_! \mathbb{Z}/n$ sont localement constants, alors les faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}/n$ sont aussi localement constants, et

$$R^i f_* \mathbb{Z}/n = \underline{\mathrm{Hom}}\ (R^{2N-i} f_! \mathbb{Z}/n(N), \mathbb{Z}/n) \quad .$$

En particulier, sous les hypothèses du corollaire, les faisceaux

$R^i f_* \mathbb{Z}/n$ sont constructibles. Partant de là, on peut montrer que, si S est de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind, alors, pour tout morphisme de type fini $f : X \to S$ et tout faisceau constructible $\mathfrak{F}$ sur X, les faisceaux $R^i f_* \mathfrak{F}$ sur S sont constructibles (Th. finitude, 1.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN. Grothendieck topologies (notes miméographiées), Harvard University, 1962.

[2] M. ARTIN. Algebraic approximation of structures over complete local rings, Pub. Math. I.H.E.S., n° 36, 1959, p. 25-58.

[3] M. ARTIN. Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques (chap. VII, le théorème de finitude en cohomologie étale), Presses de l'Université de Montréal, 1973 .

[4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER. Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, SGA 4, Lecture notes in Maths., n° 269, 270 et 305, Springer, 1972/73.

[5] J. GIRAUD. Analysis situs (d'après Artin et Grothendieck). Séminaire Bourbaki, 1962/63, exp. 266.

[6] A. GROTHENDIECK. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats. Séminaire Bourbaki, 1959/60, exp. 190.

[7] A. GROTHENDIECK. Revêtements Etales et Groupe Fondamental, SGA 1, Lecture notes in Maths., n° 224, Springer, 1971.

[8] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ. Eléments de géométrie algébrique, Pub. Math. I.H.E.S., n° 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960/67 [cité EGA].

[9] M. NAGATA. Imbedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math. Kyoto Univ., 2-1, 1962, p. 1-10.

[10] M. NAGATA. Generalisation of the imbedding problem, J. Math. Kyoto Univ., 3-1, 1963, p. 89-102.

[11] M. RAYNAUD. Anneaux Locaux Henséliens, Lecture notes in Maths., n° 169, Springer, 1970.

[12] J.-P. SERRE. Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Ann. de l'Institut Fourier, t. VI, 1956, p. 1-12 (cité GAGA).

[13] J,-P. SERRE. Corps Locaux, Paris, Hermann, 1968.

[14] J.-P. SERRE. Cohomologie galoisienne, Lecture notes in Maths., n° 5, Springer, 1965.

[15] J.-P. SERRE. Groupes algébriques et corps de classes, Paris, Hermann, 1959.

[16] C. TSEN. Divisionsalgebren über Funktionenkörper, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, p. 335-339.

RAPPORT SUR LA FORMULE DES TRACES

Dans ce texte, j'ai tenté d'exposer de façon aussi directe que possible la théorie cohomologique de Grothendieck des fonctions L . Je suis de très près certains des exposés donnés par Grothendieck à l'IHES au printemps 1966. Dans l'esprit de ce volume, il ne sera pas fait appel à SGA5 - sauf deux références à des passages de l'exposé XV, indépendant du reste de ce séminaire.

Dans le §10 (p.81-90) de [1], le lecteur trouvera un résumé de la théorie, dans le cas crucial des courbes.

Sommaire

1. Quelques rappels 2
2. $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux 7
3. Formule des traces et fonctions L 10
4. Réduction à des théorèmes en $\mathbb{Z}/\ell^n$-cohomologie 14
5. La méthode de Nielsen-Wecken 24
6. Fin de la preuve de 4.10 31

1.- Quelques rappels.

1.1- Notations.

p, q, $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_q$: p est un nombre premier, $q = p^f$ une puissance de p et $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_p$. Pour toute puissance p^n de p, on note $\mathbb{F}_{p^n}$ le sous-corps à p^n éléments de $\mathbb{F}$.

X_o, X : On désignera souvent par un symbole affecté d'un indice o un objet sur $\mathbb{F}_q$. Le même symbole, sans o, désigne alors l'objet qui s'en déduit par extension des scalaires à $\mathbb{F}$. Par exemple, si $\mathcal{F}_o$ est un faisceau sur un schéma X_o sur $\mathbb{F}_q$, on note $\mathcal{F}$ son image réciproque sur $X = X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

F : Si X_o est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, on appelle morphisme de Frobenius et on note F l'endomorphisme de X_o qui "envoie le point de coordonnées x dans celui de coordonnées x^q " : c'est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et, pour x une section locale du faisceau structural, $F^*x = x^q$.

On désigne encore par F l'endomorphisme de X qui s'en déduit par extension des scalaires. Sur l'ensemble $X(\mathbb{F}) = X_o(\mathbb{F})$ des points rationnels de X, F agit comme la substitution de Frobenius $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ définie par $\varphi(x) = x^q$. En particulier, $X^F = X_o(\mathbb{F}_q)$.

En cas d'ambiguité, on écrira $F_{(q)}$ plutôt que F.

1.2 - Correspondance de Frobenius.

Soient X_o un schéma sur $\mathbb{F}_q$, et $\mathcal{F}_o$ un faisceau sur X_o. J'aime voir comme suit la correspondance de Frobenius (un F-endomorphisme de $\mathcal{F}_o$) :

(1.2.1) $$F^* : F^*\mathcal{F}_o \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_o \quad .$$

On regarde $\mathcal{F}_o$ comme le faisceau des sections locales d'un espace $[\mathcal{F}_o]$ étalé sur X_o ($[\mathcal{F}_o]$ est un espace algébrique au sens de M. Artin).

La fonctorialité de F fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{F}_o] & \xrightarrow{F} & [\mathcal{F}_o] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_o & \xrightarrow{F} & X_o \end{array} .$$

Parce que $[\mathcal{F}_o]$ est étale sur X_o, ce diagramme est cartésien ; il fournit un isomorphisme $[\mathcal{F}_o] \xrightarrow{\sim} F^*[\mathcal{F}_o]$ d'inverse (1.2.1) . On note encore F^* les correspondances ou morphismes déduits de F par extension des scalaires ou par fonctorialité, tels $F^* : H_c^*(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H_c^*(X,\mathcal{F})$.

Pour une définition en forme, je renvoie à SGA 5 XV §1,2. On n'y considère que le cas où $q = p$, mais le cas général se traite de même.

1.3- La correspondance de Frobenius est fonctorielle en $(X_o,\mathcal{F}_o)$. Si $f_o : X_o \longrightarrow Y_o$ est un morphisme de $\mathbb{F}_q$-schémas, $\mathcal{F}_o$ un faisceau sur X_o, $\mathcal{G}_o$ un faisceau sur Y_o et $u \in \mathrm{Hom}(f_o^*\mathcal{G}_o,\mathcal{F}_o) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_o, f_{o*}\mathcal{F}_o)$ un f_o-morphisme de $\mathcal{G}_o$ dans $\mathcal{F}_o$, on a un diagramme commutatif d'espaces $f_oF = F f_o$, et au-dessus un diagramme commutatif de faisceaux

$$\begin{array}{ccc} X_o & \xrightarrow{f_o} & Y_o \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ X_o & \xrightarrow{f_o} & Y_o \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_o & \xleftarrow{u} & \mathcal{G}_o \\ \uparrow F^* & & \uparrow F^* \\ \mathcal{F}_o & \longleftarrow & \mathcal{G}_o \end{array} .$$

En particulier, la correspondance sur $f_{o*}\mathcal{F}_o$ déduite de la correspondance de Frobenius de $(X_o,\mathcal{F}_o)$ est la correspondance de Frobenius de $(Y_o, f_{o*}\mathcal{F}_o)$.

1.4- Le morphisme naturel $Y \longrightarrow Y_o$ est limite de morphismes étales. Il en résulte que pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}_o$ sur X_o, les images réciproques sur Y des $R^if_{o*}\mathcal{F}_o$ sont les $R^if_*\mathcal{F}$.

Sur $R^if_*\mathcal{F}$, on dispose de

a) la correspondance $F^*R^if_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^if_*\mathcal{F} \xrightarrow{F^*} R^if_*\mathcal{F}$ déduite par fonctorialité de la correspondance de Frobenius ;

b) la correspondance $F^*R^if_*\mathcal{F} \longrightarrow R^if_*\mathcal{F}$ image réciproque sur Y de la correspondance de Frobenius sur $R^if_{o*}\mathcal{F}_o$.

On déduit de 1.3 que ces correspondances coïncident. Elles induisent le terme initial d'une action de Frobenius sur toute la suite spectrale

$$H^p(Y,R^qf_*\mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathcal{F}) \quad .$$

De même en cohomologie à support propre, et pour la suite spectrale

$$H_c^p(Y,R^qf,\mathcal{F}) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X,\mathcal{F})$$

1.5 - Changement de corps fini.

Soient $(X_o,\mathcal{F}_o)$ sur $\mathbb{F}_q$, n un entier, et $(X_1,\mathcal{F}_1)$ sur $\mathbb{F}_{q^n}$ déduit de $(X_o,\mathcal{F}_o)$ par extension des scalaires. On dispose d'une part de la correspondance de Frobenius $F_{(q)} : X_o \longrightarrow X_o$, $F^*_{(q)} : F^*_{(q)}\mathcal{F}_o \longrightarrow \mathcal{F}_o$, d'autre part de $F_{(q^n)} : X_1 \longrightarrow X_1$, $F^*_{(q^n)} : F^*_{(q^n)}\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$. On vérifie facilement que $F_{(q^n)}$ se déduit de la puissance nième de $F_{(q)}$ par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q^n}$; après extension des scalaires à $\mathbb{F}$, on a encore la même identité $F_{(q^n)} = F^n_{(q)}$ entre endomorphismes de X et correspondances sur X .

Si x est un point fermé de X_o , avec $[k(x) : \mathbb{F}_q] = n$, et que $\bar{x} \in X_o(\mathbb{F}) = X(\mathbb{F})$ est localisé en x , $\bar{x}$ est un point fixe de $F_{(q^n)} = F^n_{(q)}$. On note F^*_x l'endomorphisme de $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ induit par $F^*_{(q^n)}$. A isomorphisme près, $(F^*_x, \mathcal{F}_{\bar{x}})$ ne dépend pas du choix de $\bar{x}$. La trace, etc, de F^*_x se désigne par une notation telle que $\mathrm{Tr}(F^*_x,\mathcal{F})$.

1.6- Fonction L .

Soit X_o un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On note $|X_o|$ l'ensemble de ses points fermés et, pour $x \in |X_o|$, on pose $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_p]$. Si $\mathcal{F}_o$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X_o (pour cette notion, voir ci-dessous) - ou un faisceau constructible et plat de modules sur un anneau noethérien commutatif A - on note $L(X_o, \mathcal{F}_o)$ la série formelle de terme constant 1, dans $\mathbb{Q}_\ell[[t]]$ ou dans $A[[t]]$,

$$L(X_o, \mathcal{F}_o) = \prod_{x \in |X_o|} \det (1 - F_x^* \, t^{\deg(x)}, \mathcal{F})^{-1} \quad .$$

Remarque 1.7.

Dans la définition 1.6, on a $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_p]$ (degré absolu) et non $\deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ (degré relatif à $\mathbb{F}_q$) . Ceci à pour effet que $L(X_o, \mathcal{F}_o)$ ne dépend que du schéma X_o et du faisceau $\mathcal{F}_o$, non de q et du morphisme structurel $X_o \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. L'indéterminée t est un avatar de p^{-s} .

1.8- Le point de vue galoisien.

Ce n^o ne sera pas utilisé dans la suite du rapport. Pour $\mathcal{F}_o$ un faisceau abélien sur X_o , le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathbb{F}$, et par transport de structure sur $H_c^i(X, \mathcal{F})$. En particulier, la substitution de Frobenius φ (1.1) induit un automorphisme, encore noté φ , de $H_c^i(X, \mathcal{F})$. La correspondance de Frobenius définit de son côté un endomorphisme F* de $H_c^i(X, \mathcal{F})$. On a

(1.8.1) $$F^{*-1} = \varphi \qquad (\text{sur } H_c^i(X, \mathcal{F})) \quad .$$

Pour le voir, appliquons 1.4 au cas où Y_o est un point : $Y_o = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. On trouve que $H_c^i(X, \mathcal{F})$ est la fibre, au point géométrique $\mathrm{Spec}(\mathbb{F})$ de Y_o , de $R^i f_! \mathcal{F}_o$, et que F* est la fibre de la correspondance de Frobenius de $R^i f_! \mathcal{F}_o$. Soit $[R^i f_! \mathcal{F}_o]$ comme en 1.2 . On a $H_c^i(X, \mathcal{F}) = [R^i f_! \mathcal{F}_o](\mathbb{F})$ et

a) φ agit par transport de structure, via son action sur $\mathbb{F}$,

b) F^* est l'inverse de $F : [R^i f_! \mathcal{F}_o](\mathbb{F}) \longrightarrow [R^i f_! \mathcal{F}_o](\mathbb{F})$.

On conclut par l'identité $F = \varphi$ de 1.1 .

Un des intérêts du point de vue galoisien est qu'il permet de raisonner par transport de structure.

2.- $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux.

La notion de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau est développée en détail dans SGA 5 V, VI . Nous n'utiliserons que les définitions et résultats ci-dessous.

Définition 2.1.- Soit X un schéma noethérien. Un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X est un système projectif de faisceaux $\mathcal{F}_n$ $(n \geq 0)$, avec $\mathcal{F}_n$ un faisceau de $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}$-modules constructibles (SGA 4 IX §2), et tel que le morphisme de transition $\mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1}$ se factorise par un isomorphisme

$$\mathcal{F}_n \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}} \mathbb{Z}/\ell^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{n-1} \quad .$$

On dit que $\mathcal{F}$ est lisse si les $\mathcal{F}_n$ sont localement constants.

La terminologie de SGA 5 est différente, on y dit

$\mathbb{Z}_\ell$- faisceau constructible pour $\mathbb{Z}_\ell$- faisceau

et

constant tordu constructible pour lisse .

De même, ci-dessous, pour les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux.

2.2- Si k est un corps séparablement clos, un faisceau de $\mathbb{Z}/\ell^n$- modules sur Spec(k) s'identifie à un $\mathbb{Z}/\ell^n$-module, et le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \varprojlim \mathcal{F}_n$ identifie les $\mathbb{Z}_\ell$- faisceaux sur Spec(k) aux $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini. Ceci justifie la définition suivante : la fibre du $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ en le point géométrique x de X est le $\mathbb{Z}_\ell$- module $\varprojlim(\mathcal{F}_n)_x$.

2.3- Supposons X connexe, et soit x un point géométrique de X . On sait que le foncteur "fibre en x" est une équivalence de la catégorie des faisceaux localement constants constructibles de $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules avec la catégorie des $\mathbb{Z}/\ell^n$- modules de type fini munis d'une action continue de $\pi_1(X,x)$. Par passage à la limite, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.4.- Sous les hypothèses ci-dessus, le foncteur "fibre en x" est une équivalence de la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux lisses sur X avec celle des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini munis d'une action continue de $\pi_1(X,x)$.

Proposition 2.5. - Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sur un schéma noethérien X . Il existe une partition finie de X en parties localement fermées X_i telles que les $\mathcal{F}|X_i$ soient lisses.

Posons $gr_\ell^n\mathcal{F} = \ell^n\mathcal{F}_m/\ell^{n+1}\mathcal{F}_m$ pour $m \geq n$, et $gr_\ell\mathcal{F} = \oplus\, gr_\ell^n\mathcal{F}$. C'est un faisceau de modules sur l'anneau noethérien $gr_\ell\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}/\ell[t]$, gradué de $\mathbb{Z}$ pour la filtration ℓ-adique. C'est un quotient de $gr_\ell^0\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} \mathbb{Z}/\ell[t]$, donc un faisceau de $gr_\ell\mathbb{Z}$-modules constructible (SGA 4 IX §2), et il existe une partition finie de X en parties localement fermées X_i , telle que $gr_\ell\mathcal{F}|X_i$ soit localement constant. Chacun des faisceaux $gr_\ell^n\mathcal{F}|X_i$ est alors localement constant ainsi que les $\mathcal{F}_m|X_i$, qui en sont des extensions successives.

2.6.- Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux sur X , on pose $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_n,\mathcal{G}_n)$; c'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module. Puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_n,\mathcal{G}_n)=\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_m,\mathcal{G}_n)$ pour $m \geq n$, on a encore

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \varprojlim_n \varinjlim_m \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_m,\mathcal{G}_n) \quad ,$$

de sorte que le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto "\varprojlim"\mathcal{F}_n$ est pleinement fidèle, de la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux dans celle des pro-faisceaux sur X(= pro-objets de la catégorie des faisceaux sur X) . On l'utilisera pour identifier les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux à certains pro-faisceaux (ceux tels que chaque $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/\ell^{n+1}\mathcal{F}$ soit un faisceau, et que $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} "\varprojlim"\mathcal{F}_n$) . On vérifie aisément que si $\mathcal{F} = "\varprojlim"\mathcal{F}_n$, avec $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible de $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules, pour que $\mathcal{F}$ soit un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau, il faut et il suffit que les systèmes projectifs (en n) $\mathcal{F}_n/\ell^{k+1}\mathcal{F}_n$ soient essentiellement constants : le système projectif des $\mathcal{F}'_k = \varprojlim_n \mathcal{F}_n/\ell^{k+1}\mathcal{F}_n$ vérifie alors les conditions de 2.1 , et $\mathcal{F} = "\varprojlim"\mathcal{F}'_k$.

Dans ce qui suit, nous abandonnons la notation $\mathcal{F}_n$ de 2.1 ; si $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau, le faisceau $\mathcal{F}_n$ de 2.1 sera noté $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1}$.

2.7.- Dans la catégorie abélienne des pro-faisceaux, la sous-catégorie des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux est stable par noyau, conoyau et extension. C'est clair pour les conoyaux. Pour les noyaux, si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux, on déduit aisément de 2.4, 2.5 et de Artin-Rees que le système projectif des $\mathrm{Ker}(f : \mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n)$ vérifie le critère donné en 2.6 ci-dessus. Il existe même un entier r tel que pout tout n

$$\mathrm{Ker}(f) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n = \mathrm{Ker}(f : \mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+r} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+r}) \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \ .$$

Le cas des extensions est laissé au lecteur.

2.8.- Un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ est <u>sans torsion</u> si $\mathrm{Ker}(\ell : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}) = 0$. Chaque $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n$ est alors plat sur $\mathbb{Z}/\ell^n$ (i.e. à fibres des $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules libres de type fini). On déduit de 2.4 , 2.5 que pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$ il existe un entier n tel que $\mathcal{F}/\mathrm{Ker}(\ell^n)$ soit sans torsion.

2.9.- La catégorie abélienne des $\mathbb{Q}_\ell$-<u>faisceaux</u> sur X est le quotient de celle des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux par la sous-catégorie épaisse de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux de torsion. En termes équivalents, ses objets sont les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux et, notant $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ le $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$, vu comme objet de la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell, \mathcal{G} \otimes \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \ .$$

La <u>fibre</u> d'un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ en un point géométrique x de X est la $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

2.10.- Soient X un schéma séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k et $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X . Soit $\mathcal{F}'$ un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau constructible tel que $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}' \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Nous verrons en (4.11) que

$$(\varprojlim H^q_c(X, \mathcal{F}' \otimes \mathbb{Z}/\ell^n)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie. Il ne dépend que de $\mathcal{F}$, et se

note $H_c^q(X,\mathcal{F})$. La preuve n'utilise pas que ℓ soit premier à la caractéristique, mais seul ce cas nous intéresse.

2.11.- Dans cet exposé, tous les calculs importants se feront au niveau des $\mathbb{Z}/\ell^n$-faisceaux, le passage aux $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux ne se faisant qu'en tout dernier lieu. En pratique, il est toutefois souvent commode de travailler systématiquement avec des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux. Dans les exposés V et VI de SGA 5, Jouanolou donne le formalisme qui rend cela possible. Un des résultats essentiels (VI 2.2) est que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens, et $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sur Y , alors, pour chaque q , le pro-faisceau "$\varprojlim$" $R^q f_!(\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sur Y . Il démontre même une propriété de régularité plus forte (à la Artin-Rees) pour le système projectif des $R^q f_!(\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n)$.

Jouanolou se place même dans un cadre plus général, englobant le cas très utile des E_λ-faisceaux, pour E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Ils sont définis comme l'ont été les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux, avec $\mathbb{Q}_\ell$ remplacé par E_λ, $\mathbb{Z}_\ell$ par l'anneau $\mathcal{O}_\lambda$ de la valuation λ et $\mathbb{Z}/\ell^n$ par $\mathcal{O}_\lambda/\pi^n$, pour π une uniformisante. Il reviendrait au même de définir un E_λ-faisceau comme un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}$, muni d'un homomorphisme $E_\lambda \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{F})$.

3.- Formule des traces et fonctions L .

On utilise les notations du §1, et ℓ est un nombre premier $\neq p$.

Soient X_o un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ $(q = p^f)$ et $\mathcal{F}_o$ un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X_o . L'interprétation cohomologique de Grothendieck des fonctions L est le théorème suivant :

Théorème 3.1.- $L(X_o,\mathcal{F}_o) = \prod_i \det(1-F^*t^f, H^i_c(X,\mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$.

Il est obtenu comme conséquence de la formule des traces :

Théorème 3.2.- Pour tout entier n , $\sum_{x \in X^{F^n}} \mathrm{Tr}(F^{n*},\mathcal{F}_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^{*n}, H^i_c(X,\mathcal{F}))$.

Rappelons brièvement la méthode classique pour déduire 3.1 de 3.2. Posons $T = t^f$; les deux membres sont des séries formelles en T , de terme constant 1. Puisque $\mathbb{Q}_\ell$ est de caractéristique 0 , il suffit de prouver que les dérivées logarithmiques $T\frac{d}{dT}\log$ des deux membres sont égales.

Pour calculer ces dérivées logarithmiques, nous utiliserons la formule

$$T\frac{d}{dT}\log \det(1-fT)^{-1} = \sum_{n>o} \mathrm{Tr}(f^n)T^n \quad ,$$

dont la démonstration (dans un cadre un peu plus général) est rappelée ci-dessous. Au premier membre, on trouve

$$T\frac{d}{dT}\log L(X_o,\mathcal{F}_o) = \sum_{x \in |X_o|} \sum_n [k(x) : \mathbb{F}_q]\, \mathrm{Tr}(F^n_x,\mathcal{F})\, T^{n.[k(x) : \mathbb{F}_q]}$$

$$= \sum_{n>o} T^n . \sum_{x \in X^{F^n}} \mathrm{Tr}(F^{n*},\mathcal{F}_x)$$

et au second membre

$$\sum_{n>o} T^n \sum (-1)^i \mathrm{Tr}(F^{*n}, H^i_c(X,\mathcal{F})) \quad ;$$

on compare terme à terme.

Proposition 3.3. - Soient A un anneau commutatif, M un A-module projectif de type fini et f un endomorphisme de M. Pour toute série formelle inversible Q, on pose $\frac{d}{dT}\log Q = Q^{-1}.\frac{d}{dT}Q$. On a

$$(3.3.1) \qquad T\frac{d}{dT}\log\det(1-fT)^{-1} = \sum_{n>o} \mathrm{Tr}(f^n)\,T^n \quad .$$

Soit M' un A-module tel que $M \oplus M'$ soit libre de rang fini. Remplacer (M,f) par $(M \oplus M', f \oplus 0)$ ne change pas les deux membres de 3.3, et nous ramène au cas où M est libre. Pour $M = A^d$, (3.3.1) est une identité algébrique portant sur les coefficients f_i^j de f. Par le principe de prolongement des identités algébriques, il suffit de la vérifier pour A un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les deux membres étant additifs en M dans une extension $o \to M' \to M \to M'' \to o$, il suffit même de ne traiter que le cas où M est de rang 1. Si f est la multiplication par a, (3.3.1) se réduit alors à la formule

$$T\frac{d}{dT}\log((1-aT)^{-1}) = \sum_{n>o} a^n T^n \quad .$$

Corollaire 3.4. - Soient n un entier, et $f^{(n)}$ l'endomorphisme $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (f(x_n),x_1,\dots,x_{n-1})$ de M^n. On a

$$(3.4.1) \qquad \det(1-f\,T^n) = \det(1-f^{(n)}\,T) \quad .$$

Procédant comme en 3.3, on se ramène à supposer que A est de caractéristique 0. Il suffit alors de vérifier que les dérivées logarithmiques $-T\frac{d}{dT}\log$ des deux membres sont égales. On a

$$-T\frac{d}{dT}\log\det(1-f\,T^n) = -n\,T^n\frac{d}{dT^n}\log\det(1-f\,T^n) = n\sum_{m>o}\mathrm{Tr}(f^m)\,T^{nm} \quad ,$$

$$-T\frac{d}{dT}\log\det(1-f^{(n)}T) = \sum_{m>o}\mathrm{Tr}(f^{(n)m})\,T^m \quad ,$$

et on observe que

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(f^{(n)m}) = o & \text{si } n\nmid m \\ \mathrm{Tr}(f^{(n)nm}) = n\,\mathrm{Tr}(f^m) & . \end{cases}$$

Remarque 3.5.- Pour $A = \mathbb{Q}_\ell$, (3.4.1) est le cas particulier $X_o = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n})$ de 3.1. Utilisant cette identité, il est facile de vérifier directement que le second membre de 3.1 est indépendant de q , et du morphisme structural $X_o \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$.

Remarque 3.6.- Si $j : X_o \hookrightarrow \overline{X}_o$ est une compactification de X_o, on a $L(X_o, \mathcal{F}_o) = L(\overline{X}_o, j_!\mathcal{F}_o)$ et $H^i_c(X,\mathcal{F}) = H^i(\overline{X}, j_!\mathcal{F})$. Ceci ramène 3.1 au cas propre, et explique l'usage de la cohomologie à supports propres. Pour X propre, 3.2 a la forme d'une formule des traces de Lefschetz. On notera que les termes locaux $\mathrm{Tr}(F^{n*}, \mathcal{F}_x)$ $(x \in X^{F^n})$ ne dépendent que de la fibre de $\mathcal{F}$ en x , et ne sont pas affectés de multiplicité. Pour X et $\mathcal{F}$ lisses, cela correspond au fait que le graphe de F est transverse à la diagonale (puisque $dF = 0$).

Remarque 3.7.- Si on admet le formalisme des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux (cf. 2.11 ; il faut disposer de la suite spectrale de Leray et du théorème de changement de base pour les images directes supérieures $R^q f_!$) , il est facile de ramener la preuve de 3.1, 3.2 au cas où X_o est une courbe lisse et où $\mathcal{F}_o$ est lisse. Ceci est clairement expliqué dans [2] §5 (pour 3.1 ; 3.2 se traite de même).

3.8.- On dispose de deux méthodes pour prouver 3.2..

A. Lefschetz-Verdier : Si X_o est propre (cf. 3.6), la formule des traces générale de Lefschetz-Verdier permet d'exprimer le second membre de 3.2 comme une somme de termes locaux, un pour chaque point de X^{F^n} . Dans la version originale de SGA 5, cette formule n'était prouvée que modulo la résolution des singularités. Le lecteur trouvera une preuve inconditionnelle dans la version définitive. Dans le cas des courbes, cas auquel on peut se réduire (3.7), les ingrédients de la démonstration étaient d'ailleurs tous disponibles.

Pour déduire 3.2 de la formule de Lefschetz-Verdier, il faut pouvoir en calculer les termes locaux. Pour une courbe et l'endomorphisme de Frobenius, cela avait été fait par Artin et Verdier (voir J.L. Verdier, the Lefschetz fixed point theorem in etale cohomology, Proc. of a conf. on Local Fields, Driebergen (Springer Verlag 1967) et la version définitive de SGA 5).

B. Nielsen-Wecken : Une méthode inspirée des travaux de Nielsen et Wecken permet de ramener 3.2. à un cas particulier prouvé par Weil ; c'est ce qui sera expliqué dans les paragraphes suivants.

4.- Réduction à des théorèmes en $\mathbb{Z}/\ell^n$-cohomologie.

Nous prouverons 3.2 par passage à la limite à partir d'un théorème analogue en $\mathbb{Z}/\ell^n$-cohomologie. L'énoncer présente la difficulté suivante. Soient X_o un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, et $\mathcal{F}_o$ un faisceau plat et constructible de $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules. Ses fibres sont des $\mathbb{Z}/\ell^n$-modules libres de type fini, et le membre de gauche de 3.2 a donc un sens (c'est un élément de $\mathbb{Z}/\ell^n$). Par contre, les $H_c^i(X,\mathcal{F})$ ne seront en général pas libres, de sorte que le membre de droite n'est pas défini. Obvier à cette difficulté est l'un des usages essentiels faits par Grothendieck de la théorie des catégories dérivées.

4.1.- Pour la définition de la catégorie dérivée $D(\mathcal{C})$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, et celle des sous-catégorie $D^+(\mathcal{C})$, $D^-(\mathcal{C})$, $D^b(\mathcal{C})$, je renvoie au texte de Verdier dans ce volume. Pour Λ un anneau, on écrit $D(\Lambda)$ au lieu de D(catégorie des Λ-modules à gauche) ; pour X un site, on écrit $D(X,\Lambda)$ au lieu de D(catégorie des faisceaux de Λ-modules à gauche). De même pour D^+, etc...

Le signe R (resp L, ou $\mathbb{L}$) indique un foncteur dérivé droit (resp. gauche). Par exemple, $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ indique le foncteur dérivé du produit tensoriel : pour K dans $D^-(\Lambda^o)$ et L dans $D^-(\Lambda)$ (Λ^o anneau opposé à Λ), $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L$ se calcule comme suit : on prend des quasi-isomorphismes $K' \longrightarrow K$ et $L' \longrightarrow L$, avec K' et L' bornés supérieurement et l'un d'eux à composantes plates, et le simple complexe $s(K' \otimes_\Lambda L')$ associé au complexe double $K' \otimes_\Lambda L'$.

4.2.- Même pour traiter le seul cas de la $\mathbb{Z}/\ell^n$-cohomologie, nous aurons besoin de la théorie des traces d'endomorphismes de modules sur des anneaux non nécessairement commutatifs (des algèbres de groupes finis $\mathbb{Z}/\ell^n[G]$). Ces traces ont été introduites par Stallings et Hattori ; cf. le récent article de H. Bass : Euler characteristics and characters of discrete groups, Inv. Math. 35 (1976) p. 155-196.

Soit Λ un anneau (à unité, mais non nécessairement commutatif). On désigne

par $\Lambda^\natural$ le quotient du groupe additif de Λ par le sous-groupe engendré par les commutateurs $ab-ba$. Si f est un endomorphisme du Λ-module à gauche libre Λ^n, de matrice f_i^j , on note $Tr(f)$ l'image de Σf_i^i dans $\Lambda^\natural$. Si f et g sont deux homomorphismes $\Lambda^n \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \Lambda^m$, on vérifie aussitôt que $Tr(fg) = Tr(gf)$.

Soit f un endomorphisme d'un Λ-module projectif de type fini P . Ecrivons P comme facteur direct d'un module libre Λ^n : cela signifie choisir un module P' , et un isomorphisme $\alpha : P \oplus P' \xrightarrow{\sim} \Lambda^n$, soit encore choisir un homomorphisme $a : P \longrightarrow \Lambda^n$, et une rétraction $b : \Lambda^n \longrightarrow P$ (prendre $P' = Ker(b)$) . Soit $f' = \alpha(f \oplus 0)\alpha^{-1} = afb$. On pose $Tr(f) = Tr(f')$. Cet élément de $\Lambda^\natural$ ne dépend que de f : si un autre choix $P \underset{d}{\overset{c}{\rightleftarrows}} \Lambda^m$ est fait, on a $a = a(dc)(ba)$, d'où

$$TR(afb) = Tr(adcbafb) = Tr(cbafbad) = Tr(cfd) \quad .$$

Si f est un endomorphisme d'un Λ-module projectif de type fini $\mathbb{Z}/2$-gradué, de composantes $f_i^j : P^j \longrightarrow P^i$, on pose

$$Tr(f) = Tr(f_o^o) - Tr(f_1^1) \quad .$$

S'il y a risque d'ambiguité, on écrira plutôt $Tr(f;P)$. Si les homomorphismes $P \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Q$ sont homogènes, on vérifie aussitôt par réduction au cas libre que

(4.2.1) $$Tr(fg) = Tr((-1)^{\deg f \cdot \deg g} gf) \quad .$$

Si f est un endomorphisme d'un Λ-module $\mathbb{Z}/2$-gradué filtré (P,F) , de filtration finie, compatible à la graduation, et que les $Gr_F^i(P)$ sont projectifs de type fini, alors P est projectif de type fini, et

(4.2.2.) $$Tr(f;P) = \Sigma\, Tr(f\,; Gr_F^i(P))$$

(scinder la filtration pour se ramener au cas d'une somme directe).

4.3.- Un module $\mathbb{Z}$-gradué sera considéré comme $\mathbb{Z}/2$-gradué par la parité du degré. En particulier, si f est un endomorphisme d'un complexe borné de Λ-modules projectifs de type fini, on pose

(4.3.1.) $\quad Tr(f) = \Sigma(-1)^i \, Tr(f^i)$.

D'après 4.2.1., si f est homotope à zéro, $Tr(f) = 0$:

(4.3.2.) $\quad f = dH + Hd \Longrightarrow Tr(f) = 0$.

Soit $K_{parf}(\Lambda)$ la catégorie d'objets les complexes bornés de Λ-modules projectifs de type fini, et de flèches les morphismes de complexes pris à homotopie près. Le foncteur $K_{parf}(\Lambda) \longrightarrow D(\Lambda)$ est pleinement fidèle. On note $D_{parf}(\Lambda)$ son image essentielle. Les formules (4.2.1)(4.3.2.) permettent de définir $Tr(f)$ pour f un endomorphisme de $K \in Ob\ D_{parf}(\Lambda)$ (et cette trace ne dépend que de la classe d'isomorphie de (K,f)) .

4.4.- Rappelons que la catégorie dérivée filtrée $DF(\mathcal{C})$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est la catégorie déduite de celle des complexes d'objets filtrés de filtration finie de $\mathcal{C}$ en inversant les quasi-isomorphismes filtrés (= morphismes de complexes filtrés induisant un quasi-isomorphisme sur le gradué associé). On dispose de foncteurs "complexe sous-jacent" : $DF(\mathcal{C}) \longrightarrow D(\mathcal{C}) : (K,F) \longmapsto K$ et "$p^{ième}$ composante du gradué" : $DF(\mathcal{C}) \longrightarrow D(\mathcal{C}) : (K,F) \longmapsto Gr_F^p(K)$.

Soit $KF_{parf}(\Lambda)$ la catégorie d'objets les complexes bornés filtrés de filtration finie (K,F) avec des $Gr_F^p(K^q)$ projectifs de type fini, et de flèches les morphismes de complexes respectant la filtration, pris à une homotopie respectant la filtration près. Le foncteur $KF_{parf}(\Lambda) \longrightarrow DF(\Lambda)$ est pleinement fidèle ; son image essentielle $DF_{parf}(\Lambda)$ est formée des (K,F) dans $DF(\Lambda)$, tels que les $Gr_F^p(\Lambda)$ soient dans $D_{parf}(\Lambda)$ et presque tous nuls ; si (K,F) est dans $DF_{parf}(\Lambda)$, alors K est dans $D_{parf}(\Lambda)$.

D'après 4.2.2., si f est un endomorphisme de $(K,F) \in Ob\ DF_{parf}(\Lambda)$, on a

(4.4.1) $\quad Tr(f,K) = \sum_p Tr(f, Gr_F^p(K))$.

4.5.- Soient Λ un anneau, et $K \in Ob\ D^-(\Lambda)$. On dit que K est de Tor-dimension $\leq r$ si pour tout Λ-module à droite N , les hypertors

$H^i(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda K)$ sont nuls pour $i < -r$. Il est dit de Tor-dimension finie si cette condition est vérifiée pour un r .

On emploie la même terminologie pour un complexe de faisceaux $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(X,\Lambda)$.

Lemme 4.5.1.- Soient Λ un anneau noethérien à gauche, et $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(\Lambda)$. Pour que K soit dans $D_{parf}(\Lambda)$, il faut et il suffit qu'il soit de Tor-dimension finie et que les $H^i(K)$ soient de type fini.

Quitte à remplacer K par un complexe isomorphe (dans $D^-(\Lambda)$) , on peut supposer K borné supérieurement et à composantes libres de type fini (cf. 4.7. ci-dessous). Si K est de Tor-dimension $\leq r$, les $H^i(K)$ sont nuls pour $i < -r$, $K^{-r}/\mathrm{Im}(d)$ admet la résolution libre

$$(\ldots \longrightarrow K^{-r-1} \longrightarrow K^{-r}) \longrightarrow K^{-r}/\mathrm{Im}(d) \quad ,$$

et pour tout Λ-module à droite N , $H^{-r-k}(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda K) = H^{-r-k}(N \otimes_\Lambda K) = \mathrm{Tor}_k(N, K^r/\mathrm{Im}\ d)$ pour $k \geq 1$.

Par hypothèse, ces groupes sont nuls ; le module $K^r/\mathrm{Im}\ d$ est donc plat de présentation finie, i.e. projectif de type fini. Le quotient

$$0 \longrightarrow K^r/\mathrm{Im}(d) \longrightarrow K^{r+1} \longrightarrow K^{r+2} \longrightarrow \ldots\ldots$$

de K est quasi-isomorphe à K , et ceci montre que $K \in \mathrm{Ob}\ D_{parf}(\Lambda)$.

Proposition-définition 4.6.- Soient X un schéma noethérien, et Λ un anneau noethérien à gauche. On note $D^b_{ctf}(X,\Lambda)$ la sous-catégorie de $D^-(X,\Lambda)$ formée des complexes K vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

i) K est isomorphe (dans $D^-(X,\Lambda)$) à un complexe borné de faisceaux de Λ-modules plats et constructibles.

ii) K est de Tor-dimension finie et les faisceaux $H^i(K)$ sont constructibles.

Même argument qu'en 4.5., à partir du lemme suivant.

Lemme 4.7.- Si un complexe de faisceaux de Λ-modules est tel que les $\underline{H}^i(K)$ soient constructibles, et nuls pour i grand, il existe un quasi-isomorphisme $K' \longrightarrow K$, avec K' borné supérieurement à composantes constructibles et plates.

On construit K' en se propageant de droite à gauche. Pour un m tel que les $\underline{H}^i(K)$ $(i \geq m)$ soient nuls, on prend $K'^i = 0$ pour $i \geq m$. Supposons ensuite déjà construits les K'^i pour $i > n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & K^{n-1} & \longrightarrow & K^n & \longrightarrow & K^{n+1} & \longrightarrow & \ldots \\ & & & & & & \uparrow & & \\ & & & & & & K'^{,n+1} & \longrightarrow & \ldots \end{array} ,$$

avec $\underline{H}^i(K') \xrightarrow{\sim} \underline{H}^i(K)$ pour $i > n+1$, et $\mathrm{Ker}(d) \longrightarrow \underline{H}^{n+1}(K)$ surjectif en degré $n+1$. Définissons des faisceaux A et B par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \longrightarrow & K^n/\mathrm{Im}(d) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(d) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{u} & B & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(d) \end{array} .$$

Alors, B est constructible, u est surjectif, et pour avancer d'un pas, il suffit de construire K^n plat et constructible et $v : K^n \longrightarrow A$ tel que uv soit surjectif. Que ce soit possible est garanti par le lemme suivant.

Lemme 4.8.- Soit $v : A \longrightarrow B$ un épimorphisme de faisceaux de Λ-modules, avec B constructible. Il existe alors $u : K \longrightarrow A$ avec K plat et constructible et vu un épimorphisme.

Le faisceau A est quotient d'une somme de faisceaux de la forme $\varphi_!\Lambda$, pour $\varphi : U \longrightarrow X$ étale. Puisque B est noethérien (SGA 4 IX 2.10), une somme finie de ceux-ci s'envoie déjà sur B, d'où le lemme.

Théorème 4.9.- *Soit* $F : X \longrightarrow Y$ *un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens. Si* $K \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(X,\Lambda)$, *alors* $Rf_!K \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(Y,\Lambda)$.

Rappelons que si $X \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$ est une compactification relative de X/Y , on a par définition $Rf_! = R\bar{f}_* \circ j_!$, où $R\bar{f}_*$ est le foncteur dérivé du foncteur $\bar{f}_*$. Cette formule ramène la preuve de 4.9 au cas où f est propre. Pour f propre, f_* est de dimension cohomologique finie ; ceci permet de définir Rf_* sur la catégorie dérivée tout entière, et aussi comme un foncteur

$$Rf_* : D^-(X,\Lambda) \longrightarrow D^-(Y,\Lambda) \quad .$$

Par composition, on définit de même en général

$$Rf_! : D^-(X,\Lambda) \longrightarrow D^-(Y,\Lambda) \quad .$$

Pour tout Λ-module à droite N , on a (preuve donnée ci-dessous)

$$(4.9.1) \qquad N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_!K \xrightarrow{\sim} Rf_!(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K) \quad .$$

Déduisons 4.9. de (4.9.1.).

a) La suite spectrale

$$E_2^{pq} = R^p f_! \underline{H}^q(K) \Longrightarrow \underline{H}^{p+q} Rf_! K \quad ,$$

et le théorème de finitude pour $Rf_!$, montrent que $Rf_!K \in \mathrm{Ob}\, D^b(X,\Lambda)$ et est à cohomologie constructible. Reste à prouver la Tor-dimension finie (4.6.).

b) Si K est de Tor-dimension $\leq -r$, il en est de même pour $Rf_!K$: on a $\underline{H}^i(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_!K) = \underline{H}^i(Rf_!(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K))$ et, dans la suite spectrale ci-dessus pour $N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K$, les E_2^{pq} sont nuls pour $q < r$ -a fortiori pour $p+q < r$ -

Prouvons 4.9.1., en restant au niveau des complexes.

a) Utilisant la formule de définition $Rf_! = Rf_* \circ j_!$, on se ramène à supposer f propre.

b) Représentons K par un complexe borné supérieurement à composantes acycliques pour f_* : $R^p f_* K^q = 0$ pour $p > 0$. On a alors $Rf_* K \sim f_* K$. Il n'est possible de travailler ainsi avec des complexes bornés supérieurement que parce que f_* est de dimension cohomologique finie.

c) Si L un Λ-module à droite libre, on a $R^p f_*(L \otimes K^q) = L \otimes R^p f_* K^q$: c'est trivial pour Λ libre de type fini, et le cas général s'en déduit par passage à la limite. Le faisceau $L \otimes K^q$ est acyclique pour f_* , et $f_*(L \otimes K^q) = L \otimes f_* K^q$.

d) Soit N_* une résolution libre de N . On a $N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K \sim \underline{s}(N_* \otimes K)$ (complexe simple associé au complexe double $N_* \otimes K$) . D'après c) ,

$$Rf_*(N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K) \sim Rf_*(\underline{s}(N_* \otimes K)) \sim f_*(\underline{s}(N_* \otimes K)) \sim \underline{s}(N_* \otimes f_* K) \sim N \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_* K \ ,$$

soit la formule annoncée.

Lorsque Y est le spectre d'un corps séparablement clos, le foncteur $Rf_!$ s'identifie à un foncteur noté $R\Gamma_c : D^b_{ctf}(X,\Lambda) \longrightarrow D_{parf}(\Lambda)$.

Théorème 4.10.- Avec les notations du §1, soient X_o un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, et Λ un anneau noethérien de torsion, tué par un entier premier à p . Soit $K_o \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(X_o,\Lambda)$. Avec la définition 4.3. des traces, on a pour tout n

$$\sum_{x \in X^{F^n}} \mathrm{Tr}(F^{n*}, K_x) = \mathrm{Tr}(F^{n*}, R\Gamma_c(X,K)) \quad . \tag{4.10}$$

Dans la fin de ce §, nous allons déduire 3.2. de 4.10., et prouver 2.10.

4.11.- Preuve de 2.10.- Soit X un schéma séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k , et soit $\mathcal{G}$ un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X . D'après 2.8. on peut l'écrire sous la forme $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell$, avec $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sans torsion. Posons

$$K_n = R\Gamma_c(X, \mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1}) \in D(\mathbb{Z}/\ell^{n+1}) \ .$$

D'après 4.9., on a $K_n \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(\mathbb{Z}/\ell^{n+1})$, et il résulte de 4.9.1 que la flèche naturelle

(4.11.1) $$K_n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}} \mathbb{Z}/\ell^n \longrightarrow K_{n-1} \quad ,$$

est un isomorphisme. Le problème de la définition de cette flèche est discuté en 4.12 .

On peut maintenant invoquer SGA 5 XV 3.3 (p. 31, 1-2 à la fin ; ce passage est indépendant du reste de SGA 5) pour réaliser chaque K_n par un complexe borné de $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}$-modules libres de type fini, et les flèches 4.11.1 par des <u>isomorphismes de complexes</u>

$$K_n \otimes \mathbb{Z}/\ell^n \xrightarrow{\sim} K_{n-1} \quad .$$

Soit K le complexe $\varprojlim K_n$. C'est un complexe borné de $\mathbb{Z}_\ell$-modules libres, et $K_n \simeq K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^{n+1}$. On a

$$H^i(K) = \varprojlim H^i(K_n) \quad ,$$

(tout système projectif de groupes finis vérifie en effet la condition de Mittag-Leffler), et $H^i(K)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini. On a

$$H^i_c(X,\mathcal{C}) = (\varprojlim H^i(K_n)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \quad :$$

c'est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie .

<u>4.12.- La flèche (4.11.1)</u> .- Pour <u>définir</u> la flèche 4.11.1, on ne peut pas procéder comme en 4.9., i.e. résoudre $\mathbb{Z}/\ell^n$ par un complexe de $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}$-modules libres, puisqu'on veut construire un isomorphisme dans $D_{parf}(\mathbb{Z}/\ell^n)$. La flèche voulue est un cas particulier de la flèche d'extension des scalaires suivante.

(*) Soit $\Lambda \longrightarrow \Lambda'$ un homomorphisme d'anneaux noethériens de torsion. Pour X un schéma séparé de type fini sur k algébriquement clos, et $K \in Ob_{ctf}(X,\Lambda)$, on a un isomorphisme

$$R\Gamma_c(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X, K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda \Lambda') \quad .$$

Des flèches plus générales sont construites dans SGA 4 XVII 4.2.12 . La méthode est la suivante :

a) La définition de $R\Gamma_c$ et la formule $j_!(K \otimes_\Lambda \Lambda') = (j_!K) \otimes_\Lambda \Lambda'$ pour une immersion ouverte nous ramènent au cas où X est propre.

b) Pour X propre, il s'agit de remplacer K par un complexe borné à composantes acycliques pour le foncteur Γ, et de fibre en tout point géométrique (ou seulement en tout point fermé) homotope à un complexe de Λ-modules plats. Pour un tel complexe, on a $\Gamma(X,K) \sim R\Gamma(X,K)$ et $K \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda \Lambda' \sim K \otimes_\Lambda \Lambda'$; la flèche (4.11.1) est définie comme la composition

$$R\Gamma(X,K) \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda \Lambda' \longrightarrow \Gamma(X,K) \otimes_\Lambda \Lambda' \longrightarrow \Gamma(X, K \otimes_\Lambda \Lambda') \xleftarrow{\sim} R\Gamma(X, K \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda \Lambda') \quad .$$

c) Il reste à montrer qu'il est possible de remplacer K par un complexe du type voulu (SGA 4 XVII 4.2.10). On remplace d'abord K par un complexe borné à composantes plates (4.6), puis on en prend une résolution flasque canonique tronquée (ceci ne modifie pas le type d'homotopie des complexes fibres, et on tronque assez loin pour que soit vérifiée la condition d'acyclicité pour Γ (i.e. au-delà de la dimension cohomologique de Γ)).

4.13.- Preuve de 3.2.- Pour simplifier les notations, nous ne traiterons que le cas $n = 1$ de 3.2. Le cas général s'en déduit en remplaçant $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^n}$, et X_o par $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$. On l'obtient aussi en remplaçant ci-dessous F par F^n.

Soient donc X_o séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, et $\mathcal{G}_o$ un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X_o. On a $\mathcal{G}_o = \mathcal{F}_o \otimes \mathbb{Q}_\ell$, pour $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau sans torsion convenable $\mathcal{F}_o$. Soit $K_n = R\Gamma_c(X, \mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n)$. Les morphismes de Frobenius induisent des morphismes

$$F^* : K_n \longrightarrow K_n \qquad (\text{dans } D_{parf}(\mathbb{Z}/\ell^{n+1})) \quad ,$$

qui se déduisent les uns des autres via les isomorphismes 4.11.1.

Réalisons comme en 4.11 les K_n et les isomorphismes 4.11.1 au niveau des complexes. Le passage déjà cité de SGA 5 XV 3.3 permet de réaliser les morphismes F^* par des endomorphismes de complexes, encore notés F^*, qui se réduisent les uns sur les autres. On note encore F^* leur limite projective, et les endomorphismes qui s'en déduisent. Puisque $H^i_c(X,\mathcal{G}) = H^i(K) \otimes \mathbb{Q}_\ell = H^i(K \otimes \mathbb{Q}_\ell)$, on a (avec

la convention de signe de .1)

$$\mathrm{Tr}(F^*, H_c^*(X,\mathcal{C})) = \mathrm{Tr}(F^*, K^* \otimes \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Tr}(F^*,K^*) = \varprojlim_n \mathrm{Tr}(F^*,K^*_n) =$$

$$= \varprojlim_n \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(X,\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1})) \quad .$$

Appliquons 4.10 à $\mathcal{F}_o \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1}$ (vu comme complexe réduit au degré 0), pour $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^{n+1}$. On trouve que

$$\mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(X,\mathcal{F} \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1})) = \sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F^*,\mathcal{F}_x \otimes \mathbb{Z}/\ell^{n+1}) \quad ,$$

$$= \sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F^*,\mathcal{C}_x) \bmod \ell^{n+1} \quad ,$$

et 3.2. en résulte par passage à la limite.

5.- La méthode de Nielsen-Wecken.

Dans ce chapitre, nous prouvons deux cas particuliers de 4.10. Le cas général sera considéré au chapitre suivant.

Lemme 5.1.- Le théorème 4.10 est vrai pour X_o de dimension 0 .

En dimension 0 , la formule (4.10.1) vaut pour toute correspondance, et non seulement pour les itérés d'un Frobenius. Elle est un cas particulier de l'énoncé suivant (appliqué à $X(\mathbb{F})$, K et aux F^{*n}) .

(*) Soit X un ensemble fini, $F : X \longrightarrow X$, $K \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(X,\Lambda)$ et $F^*:F^*K \longrightarrow K$. On a

$$\sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F_x^*,K_x) = \mathrm{Tr}(F^*,\Gamma(X,K)) \quad .$$

On a $\Gamma(X,K) = \bigoplus_{x \in X} K_x$, et la formule résulte de ce que pour tout morphisme $u : \bigoplus_{x \in X} K_x \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} K_x$, de matrice u_x^y , on a $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{x \in X} \mathrm{Tr}(u_x^x)$.

Lemme 5.2.- Soient Λ un anneau noethérien de torsion, tué par une puissance du nombre premier $\ell \neq p$, X_o une courbe projective, lisse et connexe sur $\mathbb{F}_q$, $j : U_o \hookrightarrow X_o$ un ouvert dense de X_o et G_o un faisceau localement constant de Λ-modules projectifs sur U_o . On a

$$\sum_{x \in U^F} \mathrm{Tr}(F^*,G_x) = \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(U,G)) \quad .$$

Plus précisément, nous déduirons 5.2 du

Théorème 5.3.- Soient X une courbe projective non singulière sur un corps algébriquement clos k, f un endomorphisme à points fixes isolés de X et $v(f)$ le nombre de points fixes de f , chacun étant compté avec sa multiplicité : $v(f)$ est le nombre d'intersection du graphe de f avec la diagonale de $X \times X$. Alors, pour ℓ premier à l'exposant caractéristique de k , on a

$$v(f) = \sum (-1)^i \mathrm{Tr}(f^*,H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)) \quad .$$

Ce théorème est dû à Weil ([4], n° 43,66 et 68) et la démonstration de Weil est reproduite dans Lang [3] (VI §3 th.6 combiné avec VII §1 th.3). On peut aussi le déduire du formalisme de la classe de cohomologie associées à un cycle ([Cycle]3.7).

Corollaire 5.4.- Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense de X, tel que $f^{-1}(U) = U$. Si les points fixes de f dans $X-U$ sont de multiplicité un, alors le nombre $v_U(f)$ de points fixes de f dans U (chacun compté avec sa multiplicité) est

$$v_U(f) = \Sigma\ (-1)^i\ \mathrm{Tr}(f^*, H^i_c(U, \mathbb{Q}_\ell))\quad .$$

Soit F l'ensemble fini $X-U$. La suite exacte de cohomologie définie par la suite exacte courte $0 \longrightarrow j_!\,\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell F} \longrightarrow 0$:

$$\xrightarrow{\partial} H^i_c(U, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(F, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\partial}$$

fournit, avec la convention de signe de 3.1.

$$\mathrm{Tr}(f^*, H^*_c(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(f^*, H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) - \mathrm{Tr}(f^*, H^*(F, \mathbb{Q}_\ell)) = v(f) - \mathrm{Tr}(f^*, \mathbb{Q}_\ell^F)\quad .$$

La trace de f^* sur $\mathbb{Q}_\ell^F$ est le nombre $v_F(f)$ de points fixes de f dans F ; l'hypothèse de multiplicité un assure donc que

$$\mathrm{Tr}(f^*, H^*_c(U, \mathbb{Q}_\ell)) = v(f) - v_F(f) = v_U(f)\quad ,$$

comme promis.

La preuve de 5.2. utilise quelques lemmes que nous allons développer maintenant sur un cas particulier des traces non commutatives 4.2.- Pour abréger, nous dirons projectif pour projectif de type fini.

5.5.- Soient Λ un anneau, et H un groupe fini. L'application $\Sigma\, a_h.h \longmapsto$ classe de a_e, de l'algèbre de groupe $\Lambda[H]$ dans $\Lambda^\natural$, s'annule sur les commutateurs ab-ba de $\Lambda[H]$. Elle se factorise donc par

$$\varepsilon : \Lambda[H]^\natural \longrightarrow \Lambda^\natural\quad .$$

Si F est un endomorphisme d'un $\Lambda[H]$-module projectif P, on pose

$$Tr_{\Lambda}^{H}(F) = \varepsilon\, Tr_{\Lambda[H]}(\check{F})$$

où au second membre figure la trace 4.2. Pour éviter des ambiguités, on écrira parfois cette trace $Tr_{\Lambda}^{H}(F,P)$.

Proposition 5.6.- $\quad Tr_{\Lambda}(F) = |H| \,.\, Tr_{\Lambda}^{H}(F)$.

Les propriétés formelles des traces nous ramènent à ne traiter que le cas où $P = \Lambda[H]$. L'endomorphisme F est alors la multiplication à droite par un élément $\Sigma a_h.h$ de $\Lambda[H]$, et $Tr_{\Lambda}(F) = |H|a_e$, $Tr_{\Lambda}^{H}(F) = a_e$.

5.7- Soient A un anneau commutatif et Λ une A-algèbre. La multiplication par un élément de A passe au quotient pour définir une structure de A-module sur Λ^H. Si H est un groupe fini, P un $A[H]$-module projectif et M un $\Lambda[H]$-module, projectif en tant que Λ-module, on sait que le Λ-module $P \otimes_A M$, muni de l'action diagonale de H, est un $\Lambda[H]$-module projectif. En effet :

a) Il suffit de le vérifier par $P = A[H]$.

b) Le Λ-module $P \otimes_A M$, muni de l'action de H définie par son action sur le premier facteur, est clairement un $\Lambda[H]$-module projectif ; notons le $(P \otimes_A M)'$.

c) L'application $h \otimes m \longrightarrow h \otimes h^{-1}m$ induit un isomorphisme

$$(5.7.1) \qquad A[H] \otimes_A M \xrightarrow{\sim} (A[H] \otimes_A M)' \ .$$

Proposition 5.8.- Avec les notations précédentes, si u est un endomorphisme de P et v un endomorphisme de M, on a

$$Tr_{\Lambda}^{H}(u \otimes v) = Tr_{A}^{H}(u).Tr_{\Lambda}(v) \ .$$

On se ramène à supposer que $P = A[H]$; l'endomorphisme u est alors la multiplication à droite m_x par un élément $x = \Sigma a_h h$ de $A[H]$. L'isomorphisme (5.7.1) transforme $u \otimes v$ en $\Sigma a_h m_h \otimes h^{-1}v$, de trace $a_e.Tr_{\Lambda}(v)$.

5.9.- Soient G un groupe extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini H

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \quad ,$$

et G^+ l'image inverse de $\mathbb{N}$. Soient Λ un anneau, et P un $\Lambda[G^+]$-module, projectif en tant que $\Lambda[H]$-module. Si $g \in G^+$, on note Z_g le centralisateur de g dans H ; la multiplication par g est un endomorphisme de P , vu comme $\Lambda[Z_g]$-module . P étant $\Lambda[Z_g]$-projectif, une trace $Tr_\Lambda^{Z_g}(g)$ est définie. D'après 5.6., on a

$$(5.9.1) \qquad Tr_\Lambda(g) = |Z_g| . Tr_\Lambda^{Z_g}(g) \quad .$$

Supposons que Λ soit une algèbre sur un anneau commutatif A . Pour P un $A[G^+]$-module, projectif en tant que $A[H]$-module et M un $\Lambda[G^+]$-module, projectif en tant que Λ-module, le $\Lambda[G^+]$-module $P \otimes_A M$ (action diagonale de G^+) est projectif en tant que $\Lambda[H]$-module et d'après 5.8., pour tout $g \in G^+$, on a

$$(5.9.2) \qquad Tr_\Lambda^{Z_g}(g, P \otimes_A M) = Tr_A^{Z_g}(g,P) . Tr_\Lambda(g,M) \quad .$$

5.10.- Soient P un $\Lambda[G^+]$-module, projectif en tant que $\Lambda[H]$-module, et P_H les coinvariants de H dans P . C'est un Λ-module projectif. L'action de $g \in G^+$ passe au quotient, et définit un endomorphisme de P_H qui ne dépend que de l'image de g dans $\mathbb{N}$. Nous notons F l'action des éléments $g \in G^+$ d'image 1 .

<u>Proposition 5.11.</u>- $Tr_\Lambda(F, P_H) = \sum'_{g \to 1} Tr_\Lambda^{Z_g}(g,P)$, <u>où</u> $\sum'_{g \to 1}$ <u>désigne une somme étendue aux classes de H-conjugaison d'éléments de</u> G^+ <u>d'image</u> 1 <u>dans</u> $\mathbb{N}$.

Après multiplication par $|H|$, cette formule peut se vérifier comme suit:

$$|H| . Tr_\Lambda(F, P_H) = Tr_\Lambda\Big(\sum_{g \to 1} g, P_H\Big) = Tr_\Lambda\Big(\sum_{g \to 1} g, P\Big) = \sum'_{g \to 1} \frac{|H|}{|Z_g|} Tr_\Lambda(g,P) = \sum'_{g \to 1} |H| . Tr_\Lambda^{Z_g}(g,P).$$

Choisissons un élément $g \in G^+$ d'image 1 dans $\mathbb{N}$, et soit σ l'automorphisme $\Lambda[H]$ induit par l'automorphisme adg de H . Il revient au même de se donner un $\Lambda[G^+]$-module, ou un $\Lambda[H]$-module muni d'un endomorphisme σ -linéaire Y : on fait agir $g^n h$ par $Y^n h$. Dans ce langage, la formule 5.11 prend la forme:

pour P un $\Lambda[H]$-module projectif et pour γ un endomorphisme σ-linéaire de P, on a

$$Tr_{\Lambda}(\gamma, P_H) = \sum_h{}' Tr_{\Lambda}^{Z_{hg}}(h\gamma, P) \quad , \text{ où}$$

Σ' est une somme sur les classes de adg-conjugaison dans H (orbites de H agissant sur lui-même par les $x \longmapsto hx\,adg(h)^{-1}$) .

Sous cette forme, les propriétés des traces nous ramènent aussitôt au cas où $P = \Lambda[H]$. L'endomorphisme γ a alors la forme $x \longmapsto \sigma(x)\,a$, avec $a = \Sigma a_h h$ dans $\Lambda[H]$. Il suffit de traiter le cas universel où les a_h sont des indéterminées. Dans ce cas, $\Lambda = \mathbb{Z} < a_h >_{h \in H}$ (polynômes non commutatifs) et Λ^h est sans torsion : on obtient 5.11 par l'argument du début et division par $|H|$. On peut aussi calculer directement.

Remarque 5.11.1.- Tout ce qui a été dit ci-dessus s'applique aussi bien aux modules $\mathbb{Z}/2$-gradués, ou aux complexes de modules (cf. 4.2, 4.3) .

5.12.- Reprenons les notations de 5.2, et soit $A = \mathbb{Z}/\ell^n$, n étant assez grand pour que Λ soit une A-algèbre. Soit $f : V_o \longrightarrow U_o$ un revêtement fini étale et connexe de U_o , galoisien de groupe de Galois H , et tel que le faisceau f^*G_o soit constant. On note M la valeur constante $H^o(V_o, f^*G_o)$ de G_o , c'est un $\Lambda[H]$-module, projectif en tant que Λ-module.

Le faisceau f_*A sur U_o , muni de l'action naturelle de H , est un faisceau localement libre (de rang un) de $A[H]$-modules. Le complexe $R\Gamma_c(U, f_*A)$ est donc objet de $D_{parf}(A[H])$. Il est muni d'un endomorphisme de Frobenius F^* .

Pour l'action naturelle de H sur $f_*f^*G_o$, le morphisme trace $f_*f^*G_o \longrightarrow G_o$ se factorise par un isomorphisme

$$(f_*f^*G_o)_H \longrightarrow G_o \quad .$$

Par ailleurs, on a $f_*f^*G_o = f_*M = f_*A \otimes_A M$ (avec action diagonale de H) .

L'isomorphisme

$$G_o \xleftarrow{\sim} (f_* A \otimes_A M)_H = (f_* A \otimes_A M) \otimes_{\Lambda[H]} \Lambda$$

se dérive (4.12) en un isomorphisme

$$R\Gamma_c(U,G) \simeq (R\Gamma_c(U,f_*A) \otimes_A M) \otimes_{\Lambda[H]} \Lambda \quad .$$

L'endomorphisme F^* du membre de gauche se déduit de l'endomorphisme F^* de $R\Gamma_c(U,f_*A)$. Le complexe de $\Lambda[H]$-modules $R\Gamma_c(U,f_*A)$, muni de F^* , peut être vu comme un complexe de $\Lambda[G^+]$-modules, pour $G^+ = H \times \mathbb{N}$. Les formules 5.10 et 5.9.2., amplifiées par 5.11.1, fournissent donc

$$\mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(U,G)) = \sum_h{}' \mathrm{Tr}_A^{Z_h}(hF^*, R\Gamma_c(U,f_*A)).\mathrm{Tr}_\Lambda(h,M)$$

où Σ' est une somme sur les classes de conjugaison dans H . De plus,

$$|Z_h|.\mathrm{Tr}_A^{Z_h}(hF^*,R\Gamma_c(U,f_*A)) = \mathrm{Tr}_A((Fh^{-1})^*,R\Gamma_c(V,A)) \quad .$$

Cette formule reste vraie pour $A = \mathbb{Z}/\ell^m$, avec m de plus en plus grand. Passant à la limite, on trouve que $\mathrm{Tr}_A^{Z_h}(hF^*,R\Gamma_c(U,f_*A))$ vaut

$$\frac{1}{|Z_h|} \Sigma(-1)^i \mathrm{Tr}((Fh^{-1})^*, H_c^i(V,\mathbb{Q}_\ell))$$

(un élément de $\mathbb{Z}_\ell$) , et

$$(5.12.1)\quad \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(U,G)) = \sum_h{}' \frac{1}{|Z_h|} \mathrm{Tr}((Fh^{-1})^*, H_c^*(V,\mathbb{Q}_\ell)).\mathrm{Tr}_\Lambda(h,M) \quad .$$

5.13.- Il reste maintenant à appliquer 5.4 (noter que si $\overline{V}$ est la complétion projective non singulière de V , les points fixes de Fh^{-1} sont tous de multiplicité un). On peut le faire sans aucun calcul :

A. Si $U^F = \emptyset$, $\mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(U,G)) = 0$.

En effet, Fh^{-1} n'a pas de point fixe sur V , 5.4. montre que $\Sigma(-1)^i \mathrm{Tr}((Fh^{-1})^*, H_c^i(V,\mathbb{Q}_\ell)) = 0$ et on applique 5.12.1 .

B. Dans le cas général, soit $j : U' = U - U^F \hookrightarrow U$. La filtration $j_!j^*G_o \subset G_o$ de G_o induit une filtration de $R\Gamma_c(U,G)$ de quotients successifs $R\Gamma_c(U',G)$ et $R\Gamma_c(U^F,G)$. D'après 4.4.1 et 5.1, on a

$$Tr(F^*,R\Gamma_c(U,G)) = Tr(F^*,R\Gamma_c(U',G)) + \sum_{x \in U^F} Tr(F^*,G_x) \quad ,$$

et, puisque $U'^F = \emptyset$, le premier terme au second membre est 0 .

6.- Fin de la preuve de 4.10.

Prouvons 4.10., sous les hypothèses additionnelles que l'anneau Λ est annulé par une puissance d'un nombre premier $\ell \neq p$, et que $n = 1$. Le cas général en résultera : décomposer Λ en ses composantes ℓ-primaires (ℓ parcourant les nombres premiers), et remplacer $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^n}$, X_o par $X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$.

Pour X_o séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, et $K_o \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(X_o,\Lambda)$, posons

$$T'(X_o,K_o) = \sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F^*,K_x)$$

et

$$T''(X_o,K_o) = \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(X,K)) \quad .$$

Il faut prouver l'identité

$$(1\ ;\ X_o,K_o) \qquad T'(X_o,K_o) = T''(X_o,K_o) \quad .$$

On commence par observer que T' et T'' (notés génériquement T) obéissent à un même formalisme :

(A) Si $j : U_o \hookrightarrow X_o$ est un ouvert de X_o, de fermé complémentaire Y_o, on a

$$T(X_o,K_o) = T(U_o,K_o|U_o) + T(Y_o,K_o|Y_o) \quad .$$

C'est clair pour T'. Pour T'', on observe que la filtration $0 \subset j_!j^* K_o \subset K_o$ de K_o induit une filtration de $R\Gamma_c(X,K)$, de quotients successifs $R\Gamma_c(U,K)$ et $R\Gamma_c(Y,K)$, et on invoque 4.4.1 [plus exactement énoncé : K_o, muni de la filtration dite, définit un objet de $DF(X,\Lambda)$; par application de $R\Gamma_c$, on en déduit un objet de $DF_{parf}(\Lambda)$, auquel $R\Gamma_c(X,K)$ est sous-jacent, et de gradué comme dit].

(B) Si K_o est un complexe borné à composantes constructibles et plates,

$$T(X_o,K_o) = \Sigma(-1)^i\, T(X_o,K_o^i) \quad .$$

C'est clair pour T' ; pour T'' , on applique l'argument ci-dessus à la filtration bête de K_o , pour obtenir

$$T''(X_o,K_o) = \Sigma\, T''(X_o,K_o^i[-i]) = \Sigma(-1)^i\, T''(X_o,K_o^i) \quad .$$

(C) Pour $f : X_o \longrightarrow Y_o$ un morphisme, on a

$$T''(X_o,K_o) = T''(Y_o,Rf_!K_o)$$

et la même identité vaut pour T' si les fibres de f aux points rationnels de Y_o vérifiant $(1 ; f^{-1}(y),K_o|f^{-1}(y))$: on utilise que

$$T'(X_o,K_o) = \sum_{y \in Y^F} T'(f^{-1}(y),K_o|f^{-1}(y))$$

et

$$R\Gamma_c(Y,Rf_!K) = R\Gamma_c(X,K) \quad .$$

Utilisant ce formalisme, et 4.7., on ramène la preuve de 4.10 aux deux particuliers 5.1. et 5.2.

Bibliographie

[1] P. Deligne. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L - dans Anvers II (Lecture Notes in Math. 349).

[2] A. Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L.- Séminaire Bourbaki 279 (décembre 1964) - Benjamin.

[3] S. Lang. Abelian varieties - Interscience 1959.

[4] A. Weil. Variétés abéliennes et courbes algébriques.- Act. Sci. et Ind., Hermann, Paris.

FONCTIONS L MODULO ℓ^n ET MODULO p.

Dans cet exposé, je prouve une formule analogue au théorème du rapport sur la formule des traces (ce volume ; cité "Rapport" par la suite) pour un anneau de coefficients A qui soit de torsion premier à p , ou un corps de caractéristique p . Un usage essentiel sera fait de SGA 4 XVII 5.5 .

Sommaire

1. Tenseurs symétriques 2
2. Le théorème 7
3. Théorie d'Artin-Scheier 11
4. Formule des traces modulo p 16

1.- Tenseurs symétriques.

1.1.- Soit A un anneau commutatif. Pour une liste des propriétés des foncteurs Γ^n : (A-modules) $\longrightarrow$ (A-Modules), je renvoie à SGA 4 XVII 5.5.1 et 2. Rappelons seulement que pour M plat (en fait, seul le cas où M est projectif de type fini nous intéresse), on a

$$\Gamma^n M = (\overset{n}{\otimes} M)^{\mathfrak{S}_n} \qquad \text{(tenseurs symétriques de degré } n\text{)} .$$

1.2.- Soient X un S-schéma, X^n/S la puissance fibrée $n^{\text{ième}}$ de X et π la projection de X^n/S sur $(X^n/S)/\mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}^n_S(X)$ (supposé exister). Si G est un faisceau de A-modules sur X, le produit tensoriel externe de n copies de G : $\overset{n}{\boxtimes} G$, est un faisceau $\mathfrak{S}_n$-équivariant sur X^n/S. Nous aurons à faire usage du foncteur Γ^n externe de SGA 4 XVII 5.5.7 à 9. Rappelons seulement que pour G un faisceau de A-modules plats (en fait, seul le cas constructible et plat nous intéresse), on a

$$\Gamma^n_{ext}(G) = (\pi_* \overset{n}{\boxtimes} G)^{\mathfrak{S}_n} .$$

Lemme 1.3. - Pour $S = \mathrm{Spec}(k)$, avec k algébriquement clos, X une somme finie de copies de S, et G un faisceau plat de A-modules sur X, on a

$$\Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X), \Gamma^n_{ext}(G)) = \Gamma^n \Gamma(X,G)$$

En effet,

$$\Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X), \Gamma^n_{ext}(G)) = \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X), \pi_* \overset{n}{\boxtimes} G)^{\mathfrak{S}_n} = \Gamma(X^n/S, \overset{n}{\boxtimes} G)^{\mathfrak{S}_n} = (\overset{n}{\otimes} \Gamma(X,G))^{\mathfrak{S}_n} =$$

$$= \Gamma^n \Gamma(X,G) .$$

1.4.- Nous aurons à utiliser les dérivés des foncteurs non additifs Γ^n et Γ^n_{ext}.

La théorie de tels foncteurs dérivés est due à Dold et Puppe (Homologie nicht additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier XI 1961, p. 201-312). Pour des rappels plus complets que ceux donnés ci-dessous, je renvoie à SGA 4 XVII 5.5.3.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne (voire une catégorie additive où tout endomorphisme idempotent soit la projection sur un facteur direct). Notons N le foncteur de normalisation N : (complexes cosimpliciaux d'objets de $\mathcal{C}$) $\longrightarrow$ (complexes différentiels d'objets de $\mathcal{C}$, avec $K^i = 0$ pour $i < 0$). C'est une équivalence de catégories. Ainsi que son inverse, elle transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes. Si T est un foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$, et si K est un complexe d'objets de $\mathcal{C}$, à degrés positifs ($K^i = 0$ pour $i < 0$), on pose $TK = NT\,N^{-1}K$.

Exemple 1.5.- Si K est réduit à M en degré 0, TK est réduit à TM en degré 0.

1.6.- Si K est un complexe borné, à degrés positifs, de A-module projectifs de type fini, le complexe de A-modules $\Gamma^n K$ a les mêmes propriétés.

Notons $D^{\geq 0}_{parf}(A)$ la sous-catégorie de $D_{parf}(A)$ (Rapport 4.3.) formée des complexes de Tor-dimension ≤ 0. On voit que Γ^n induit un foncteur

$$L\Gamma^n : D^{\geq 0}_{parf}(A) \longrightarrow D^{\geq 0}_{parf}(A) \quad .$$

Pour la définition analogue, mais plus compliquée, de $L\Gamma^n_{ext}$, je renvoie à SGA 4 XVII 5.5.14.

1.7.- Soient K un complexe borné de A-modules projectifs de type fini, et u un endomorphisme de K. On note $\det(1-ut,K)$ la série formelle de terme constant 1

$$\det(1-ut,K) = \prod_i \det(1-ut,K^i)^{(-1)^i} \quad .$$

On laisse au lecteur la vérification des propriétés suivantes.

(1.7.1) Soit F une filtration finie stable par u, telle que les $Gr^p_F(K^q)$ soient projectifs de type fini. Alors

$$\det(1-ut,K) = \prod_p \det(1-ut,Gr^p_F(F)) \quad .$$

(1.7.2) Si on translate K de q crans vers la gauche, on a

$$\det(1-ut,K[q]) = \det(1-ut,K)^{(-1)^q} \quad .$$

Proposition 1.8.- Soit u un endomorphisme d'un complexe borné, à degrés positifs, de A-modules projectifs de type fini. On a

(1.8.1) $$\det(1-ut,K)^{-1} = \sum_n \mathrm{Tr}(u,\Gamma^n K)t^n \quad .$$

Notons D(u,K) le second membre de (1.8.1) .

Lemme 1.9.- Soit u un endomorphisme d'une suite exacte courte de complexes bornés à degrés ≥ 0 de A-modules projectifs de type fini

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad .$$

On a $D(u,K) = D(u,K') \cdot D(u,K'')$.

Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte scindable de A-modules, $\Gamma^n M$ a une filtration naturelle, de quotients successifs les $\Gamma^i M' \otimes \Gamma^j M''$ $(i+j=n)$. Dès lors, $\Gamma^n K$ admet une filtration naturelle, de quotients successifs les complexes $N(N^{-1}\Gamma^i K' \otimes N^{-1}\Gamma^j K'')$ $(i+j=n)$, canoniquement homotopes aux complexes simples $s(\Gamma^i K' \otimes \Gamma^i K'')$ déduit des complexes doubles $\Gamma^i K' \otimes \Gamma^i K''$, et

$$\mathrm{Tr}(u,\Gamma^n K) = \sum_{i+j=n} \mathrm{Tr}(u,\Gamma^i K').\mathrm{Tr}(u,\Gamma^j K'') \quad ,$$

d'où le lemme. De 1.9., on tire par récurrence :

Lemme 1.10.- Soit F une filtration finie stable par u de K , telle que les $Gr_F^p(K^q)$ soient projectifs de type fini. Alors,

$$D(u,K) = \prod_p D(u,Gr_F^p(K)) \quad .$$

Lemme 1.11.- Soient u un endomorphisme d'un A-module projectif de type fini M , et M[-q] le complexe réduit à M en degré q . On a

$$D(u,M[-q]) = (\sum \mathrm{Tr}(u,\Gamma^n M)t^n)^{(-1)^q} \quad (q \geq 0) \quad .$$

D'après 1.5., c'est vrai pour $q = 0$. Procédons par récurrence, il reste à montrer que

$$D(u,M[-q]) \cdot D(u,M[-(q+1)]) = 1 \quad .$$

Cette formule résulte de 1.9, appliqué ou complexe K réduit à M en degrés q et $q+1$ (avec $d = Id$) , et à sa filtration bête :

$$(\ldots\ 0 \longrightarrow M \ldots) \longrightarrow (\ldots M \longrightarrow M) \longrightarrow (\ldots M \longrightarrow 0 \ldots) \quad .$$

En effet, K est homotope à 0 . Dans la catégorie dérivée, on a donc $\Gamma^n(K) = \Gamma^n(0)$; 0 pour $n > 0$ et A pour $n = 0$, et $D(u,K) = 1$.

1.12 - Prouvons 1.8. D'après 1.10 appliqué à la filtration "bête" de K par les sous-complexes

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow K^q \longrightarrow K^{q+1} \longrightarrow \ldots . \quad ,$$

on a

$$D(u,K) = \prod_q D(u,K^q[-q]) =_{(1.10)} \prod_q (\Sigma\ \mathrm{Tr}(u,\Gamma^n(K^q))t^n)^{(-1)^q} \quad .$$

Il reste à prouver que pour u un endomorphisme d'un module projectif de type fini M , on a

$$\det(1-ut,M)^{-1} = \Sigma\ \mathrm{Tr}(u,\Gamma^n M)t^n \quad . \tag{1.12.1}$$

Si $u = 0$, les deux membres valent 1 . Ajoutant à M un module N sur lequel $u = 0$, et appliquant 1.9 , on se ramène à supposer que M est libre. Prenons-en une base. Il s'agit alors de prouver des identités algébriques entre les coordonnées de u . Le principe de prolongement des identités algébriques nous ramène à supposer que A est un corps algébriquement clos. Le module M admet alors une filtration stable par u à quotients successifs de rang 1 , et 1.10 nous ramène au cas où M est de rang 1. La formule 1.12.1 se ramène alors à l'identité

$$\frac{1}{1-at} = \Sigma\ a^n t^n \quad .$$

Corollaire 1.13.- Soient u et u' des endomorphismes de complexes bornés K et K' de A-modules projectifs de type fini. Si, dans la catégorie dérivée, K , muni de u , est isomorphe à K' , muni de u' , alors

$$\det(1-ut,K) = \det(1-u't,K') \quad .$$

Appliquant 1.7.2, on se ramène à supposer que K et K' sont à degrés positifs. On observe alors que le second membre de 1.8 possède la propriété d'invariance voulue.

1.14.- Ce corollaire permet de définir $\det(1-ut,K)$ pour u un endomorphisme de $K \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(A)$. Cette construction est ad hoc ; en fait, pour v un automorphisme de $L \in \mathrm{Ob}\, D_{parf}(\Lambda)$, on peut définir $\det(v) \in \Lambda^*$, et $\det(1-ut,K)$ s'obtient pour $v = 1-ut$, $\Lambda = A[[t]]$ et $L = K \otimes_A \Lambda$.

2.- Le Théorème.

2.1.- Reprenons les notations de Rapport, §1 . Pour A un anneau noethérien commutatif de torsion, X_o un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $K_o \in \mathrm{Ob}\, D_{ctf}(X_o,A)$, on pose

$$L(X_o,K_o) = \prod_{x \in |X_o|} \det(1-F_x^* t^{\deg(x)},K)^{-1}$$

(1.7,1.13 et Rapport 1.5,1.6).

Théorème 2.2.- Dans chacun des deux cas suivants

a) A est de torsion première à p ;

b) A est réduit et de caractéristique p

on a

(2.2.1) $$L(X_o,K_o) = \det(1-F^* t^f, R\Gamma_c(X,K))^{-1} \quad .$$

Remarque 2.3.- Dans le cas a), la méthode de Rapport §3 permet de déduire de la formule des traces (Rapport 4.10) que les dérivées logarithmiques des deux membres de 2.2.1 sont égales. L'anneau A étant de torsion, cela ne suffit pas pour prouver 2.2.

Remarque 2.4.- Si A est un corps, on a

$$L(X_o,K_o) = \prod_i L(X_o,\underline{H}^i(K_o))^{(-1)^i}$$

et la suite spectrale $E_2^{pq} = H_c^p(X,\underline{H}^q(K)) \Rightarrow \mathbb{H}_c^{p+q}(X,K)$ montre que

$$\det(1-F^* t^f, R\Gamma_c(X,K)) = \prod_n \det(1-F^* t^f, \mathbb{H}_c^n(X,K))^{(-1)^n} = \prod_{p,q} \det(1-F^* t^f, H_c^p(X,\underline{H}^q(K)))^{(-1)^{p+q}} .$$

Ceci ramène 2.2 (pour A un corps) au cas particulier suivant.

(2.4.1) Si G_o est un faisceau constructible de A-espaces vectoriels, on a

$$L(X_o,G_o) = \prod_n \det(1-F^* t^f, H_c^n(X,G))^{(-1)^{n+1}} \quad .$$

Remarque 2.5.- Il est facile de réduire le cas b) à celui où A est un corps (voire même un corps fini) de caractéristique p . cf 4.2 .

Remarque 2.6.- Le cas particulier de b) où $A = \mathbb{Z}/p$, et où K est réduit au faisceau constant $\mathbb{Z}/p$ en degré 0 :

$$Z(X_o,t) = \prod_{x \in |X_o|} (1-t^{\deg(x)})^{-1} = \prod_n \det(1-F^* t^f, H_c^n(X, \mathbb{Z}/p))^{(-1)^{n+1}} \pmod p$$

avait été prouvé par N. Katz (SGA 7 XXII 3.1). Sa méthode, toute différente de celle suivie ici, part de la théorie p-adique de Dwork de $Z(X_o,t)$.

Remarque 2.7.- Contrairement à ce que j'avais imprudemment affirmé à des amis, on ne peut pas dans b) omettre l'hypothèse "A réduit". Pour un contre exemple, cf. 4.5.

2.8.- Plan de la preuve de 2.2.- Une translation sur les degrés (1.7.2) nous ramène à supposer que K_o est un complexe borné, à degré positifs, de faisceaux de A-modules constructibles et plats. On a alors $R\Gamma_c(X,K) \in Ob\, D^{\geq 0}_{parf}(A)$ (Rapport, preuve 4.9,b)). Nous allons utiliser 1.8 pour développer les deux membres de (2.2.1.) en série de puissances de $T = t^f$. L'égalité des coefficients de T^n se déduira de SGA 4 XVII 5.5.21 et d'une formule des traces sur $Sym^n(X)$: dans le cas a), la formule (Rapport 4.10), et dans le cas b) une formule qui sera prouvée dans le chapitre suivant. Il y a lieu de se ramener au préalable au cas où les puissances symétriques de X_o existent (par exemple au cas où X_o est affine) à l'aide des propriétés de multiplicativité en X_o des deux membres de 2.2.1 : pour U_o un ouvert de X_o , de fermé complémentaire Y_o , on a $L(X_o,K_o) = L(U_o,K_o).L(Y_o,K_o)$ et la formule analogue pour le membre de droite résulte de (1.7.1) par la méthode de (Rapport §6 (A)) .

2.9.- Le Cas où X_o est fini.

La multiplicativité en X_o des deux membres de 2.2.1 ramène ce cas à celui où $X_o = Spec(\mathbb{F}_{q^k})$. Revenant aux définitions, on voit que (2.2.1) équivaut alors à Rapport 3.4.

2.10.- Le premier membre.

D'après 1.8., on a

$$L(X_o,K_o) = \prod_{x \in |X_o|} \sum_n \mathrm{Tr}(F_x^*, \Gamma^n K) t^{n\deg(x)} \quad .$$

Le coefficient de T^n est donc la somme, étendue à celles des combinaisons linéaires formelles $\sum_{x \in |X_o|} n_x.x$ ($n_x \geq 0$, les n_x presque tous nuls) d'éléments de $|X_o|$ telles que $\sum n_x[k(x) : \mathbb{F}_q] = n$, des produits

$$\prod_x \mathrm{Tr}(F_x^*, \Gamma^{n_x} K) \quad . \tag{2.10.1}$$

Pour $x \in |X_o|$, notons (x) le o-cycle des $[k(x) : \mathbb{F}_q]$ points de X au-dessus de x (une orbite de F). L'application $\sum n_x\, x \longmapsto \sum n_x.(x)$ identifie les combinaisons linéaires formelles comme ci-dessus, avec $\sum n_x[k(x) : \mathbb{F}_q] = n$, aux o-cycles effectifs de degré n de X fixes sous F , soit encore aux points fixes de F dans $\mathrm{Sym}^n(X)$. Le coefficient de T^n dans $L(X_o,K_o)$ apparaît ainsi comme une somme de produits (2.10.1), indenée par $\mathrm{Sym}^n(X)^F$. Plus précisément, on a

Lemme 2.11. - $L(X_o,K_o) = \sum_n \sum_{x \in \mathrm{Sym}^n(X)^F} \mathrm{Tr}(F_x^*, L\Gamma^n_{ext} K)\, T^n$.

Pour Y_o un sous-schéma fini de plus en plus grand de X_o , on a

$$L(X_o,K_o) = \ell\mathrm{im}\, L(Y_o,K_o) \quad ,$$

i.e., pour tout m , il existe un sous-schéma fini $Z_o \subset X_o$ tel que si $Y_o \supset Z_o$, $L(X_o,K_o)$ et $L(Y_o,K_o|Y_o)$ soient congrus mod T^m . Il suffit que Z_o contienne les points fermés de degré $\leq m$. Le même fait valant pour le membre de droite, il suffit de prouver 2.11 pour X_o fini. On a alors

$$L(X_o,K_o) =_{2.9} \det(1-F^*T, \Gamma(X,K))^{-1} =_{1.8} \sum_n (\mathrm{Tr}(F^*, \Gamma^n \Gamma(X,K))T^n =_{1.3}$$

$$= \sum_n \mathrm{Tr}(F^*, \Gamma(\mathrm{Sym}^n(X), \Gamma^n_{ext}(K))T^n = \sum_n \sum_{x \in \mathrm{Sym}^n(X)^F} \mathrm{Tr}(F_x^*, \Gamma^n_{ext}(K))\, T^n$$

(par la formule des traces dans le cas trivial d'un ensemble fini).

2.12.- Le second membre.- D'après 1.8 et SGA 4 XVII 5.5.21, on a

$$\det(1-F^*T,R\Gamma_c(X,K))^{-1} = \sum_n \mathrm{Tr}(F^*,L\Gamma^n R\Gamma_c(X,K))T^n = \sum_n \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(\mathrm{Sym}^n(X),\Gamma^n_{ext}K))T^n.$$

2.13.- Le théorème équivaut donc aux formules des traces

$$\mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(\mathrm{Sym}^n(X,\Gamma^n_{ext}K)) = \sum_{x \in \mathrm{Sym}^n(X)^F} \mathrm{Tr}(F^*_x,\Gamma^n_{ext}K) \quad .$$

Dans le cas a), elles résultent de Rapport 4.10. La formule analogue dans le cas b) sera prouvée au §4 .

3.- Théorie d'Artin-Scheier.

3.1.- Dans ce qui suit, un faisceau cohérent sur un schéma S sera toujours regardé comme un faisceau sur $S_{ét}$. Soit S un schéma de caractéristique $p > 0$. Si G est un faisceau localement constant de $\mathbb{Z}/p$ -vectoriels de rang fini, $\mathcal{G} = G \otimes_{\mathbb{Z}/p} \mathcal{O}$ est un faisceau cohérent localement libre sur S . On notera Φ tant l'endomorphisme $f \longrightarrow f^p$ de $\mathcal{O}$ que son produit tensoriel avec l'identité de G : $\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$. La théorie d'Artin-Scheier (SGA 4 IX 3.5) affirme que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\Phi - 1} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

est exacte. Par tensorisation avec G , on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\Phi - 1} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \quad .$$

3.2.- Supposons que S soit un ouvert dans un schéma noethérien $\overline{S}$. Soient $j : S \hookrightarrow \overline{S}$ le morphisme d'inclusion, et I un faisceau d'idéaux qui définit le fermé complémentaire $\overline{S} - S$. Notons encore Φ le prolongement par fonctorialité de Φ à $j_*\mathcal{G}$.

Lemme 3.3.- *Il existe des prolongements cohérents $\overline{\mathcal{G}} \subset j_*\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$ tels que*

(3.3.1) $\qquad \Phi(\overline{\mathcal{G}}) \subset I.\overline{\mathcal{G}}$.

Si $\overline{\mathcal{G}}$ est un tel prolongement, la suite

(3.3.2) $\qquad 0 \longrightarrow j_!G \longrightarrow \overline{\mathcal{G}} \xrightarrow{\Phi - 1} \overline{\mathcal{G}} \longrightarrow 0$

est exacte.

a) Existence : Soit $\mathcal{G}' \subset j_*\mathcal{G}$ un prolongement cohérent de $\mathcal{G}$ à $\overline{S}$. Pour tout n, on a $\Phi(I^n\mathcal{G}') \subset I^{p^n}\Phi(\mathcal{G}')$. Soit n assez grand pour que $I^{n(p-1)-1}\Phi(\mathcal{G}') \subset \mathcal{G}'$, et posons $\overline{\mathcal{G}} = I^n\mathcal{G}'$. On a $\Phi(\overline{\mathcal{G}}) \subset I^{pn}\Phi(\mathcal{G}') = I.I^n.I^{n(p-1)-1}\Phi(\mathcal{G}') \subset I.I^n\mathcal{G}' = I\,\overline{\mathcal{G}}$.

b) Noyau de Φ-1 : Sur S , l'assertion résulte de 3.1 ; il reste à vérifier qu'une section de x de $\mathrm{Ker}(\Phi-1)$, sur U étale sur $\overline{S}$, s'annule dans un voisinage de l'image réciproque de $\overline{S}$-S . Puisque $x = \Phi(x)$, on a en effet par (3.3.1) $x \in I\bar{\mathcal{G}}$; de plus, $x \in I^n\bar{\mathcal{G}} \Rightarrow x = \Phi(x) \in \Phi(I^n\bar{\mathcal{G}}) \subset I^{np}\bar{\mathcal{G}}$, et x est dans tous les $I^n\bar{\mathcal{G}}$, donc nul au voisinage de $\overline{S}$-S .

c) Surjectivité de Φ-1 : On peut supposer $\overline{S}$ affine, et écrire $\mathcal{G}$ comme quotient de $\mathbb{G}^n$; Φ se relève alors en une application p-linéaire $\tilde{\Phi} : \mathbb{G}^n \longrightarrow \mathbb{G}^n$, et il suffit de vérifier la surjectivité de $\tilde{\Phi} - 1$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}^n & \xrightarrow{\tilde{\Phi}-1} & \mathbb{G}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\Phi-1} & \mathcal{G} \end{array} .$$

Le faisceau $\mathbb{G}^n$ est le faisceau des sections locales du schéma en groupes $\mathbb{G}_a^n$, et $\tilde{\Phi} - 1$ est induit par un homomorphisme de $\mathbb{G}_a^n$ dans $\mathbb{G}_a^n$. Cet homomorphisme est étale. Pour vérifier qu'il est surjectif, il suffit de le voir après tout changement de base $\mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \overline{S}$ (k algébriquement clos) et sur k algébriquement clos, tout homomorphisme étale entre groupes connexes de même dimension est surjectif. Enfin, un morphisme étale et surjectif de $\overline{S}$-schémas induit un épimorphisme entre les faisceaux correspondant sur $\overline{S}_{et}$.

3.4.- Frobenius et Frobenius.

Le morphisme de Frobenius absolu $F_{abs} : S \longrightarrow S$ est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à S , et $f \longrightarrow f^p$ sur le faisceau structural. Pour U/S étale, on a un isomorphisme canonique $F_{abs}^* U = U$: le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F_{abs}} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_{abs}} & S \end{array}$$

est cartésien. L'endomorphisme de site annelé $(S_{ét}, \mathbb{G}) \longrightarrow (S_{et}, \mathbb{G})$ défini par F_{abs} peut donc être décrit comme suit :

$$\begin{cases} F^*_{abs} \text{ est l'identité sur } S_{ét} \ ; \\ \text{l'homomorphisme } F^*_{abs}\mathcal{G} = \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \text{ est } \Phi \ . \end{cases}$$

Avec cette description, pour tout faisceau étale G sur S, la correspondance de Frobenius $F^*_{abs}G \longrightarrow G$ est l'identité.

Se donner un morphisme p-linéaire de faisceaux quasi-cohérents $u : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ sur S revient à se donner un morphisme linéaire $u' : F^*_{abs}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. En particulier, avec les notations de 3.5., l'homomorphisme $\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ correspond à $\Phi' : F^*_{abs}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Lemme 3.5.- Avec les notations de 3.4., le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^*_{abs}\, G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*_{abs}\,\mathcal{G} & \xrightarrow{\Phi'} & \mathcal{G} \end{array}$$

est commutatif.

Il suffit de le vérifier localement. On peut donc supposer G constant, auquel cas le lemme est évident.

La même théorie vaut pour les puissances de F_{abs}.

3.6.- Supposons maintenant que $\overline{S}$ soit un schéma sur $\mathbb{F}_q$ $(q = p^f)$ et conformément aux conventions de Rapport §1, écrivons $S_o, \overline{S}_o, G_o, \mathcal{G}_o, \overline{\mathcal{G}}_o$ au lieu de $S, \ldots$ Le lemme 3.5., pour $F^f_{abs} = F : S_o \longrightarrow S_o$, donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^*G_o & \longrightarrow & G_o \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*\mathcal{G}_o & \xrightarrow{(\Phi^f)'} & \mathcal{G}_o \end{array} \qquad \text{, puis} \qquad \begin{array}{ccc} F^*(j_!G_o) & \longrightarrow & j_!G_o \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*\overline{\mathcal{G}}_o & \xrightarrow{(\Phi^f)'} & \overline{\mathcal{G}}_o \end{array} \ ,$$

puis, par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}$ et passage à la cohomologie

$$\begin{array}{ccc} F^*(j_!G) & \xrightarrow{F^*} & j_!G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*\bar{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{G}} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} H^*(\bar{S},j_!G) & \xrightarrow{F^*} & H^*(\bar{S},j_!G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) & \longrightarrow & H^*(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) \end{array}$$

où la seconde ligne est obtenue par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}$ de l'endomorphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire Φ^f de $H^*(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o)$.

La théorie d'Artin-Scheier fournit une suite exacte longue

$$\longrightarrow H^i(\bar{S},j_!G) \longrightarrow H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\Phi-1} H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) \longrightarrow$$

où Φ est l'extension p-linéaire à $H^*(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) = H^*(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ de l'endomorphisme p-linéaire Φ de $H^*(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o)$.

3.7.- Si $\bar{S}_o$ est propre sur $\mathbb{F}_q$, les $H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}})$ sont de dimension finie et $\Phi-1$ est surjectif (cf. 3.6 b)). On a donc

$$H^i_c(S,G) = \mathrm{Ker}(\Phi-1 : H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) \longrightarrow H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}})) \ ,$$

et F* est induit par l'extension $\mathbb{F}$- linéaire à $H^i(\bar{S},\bar{\mathcal{G}}) = H^i(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o)\otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ de l'endomorphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire Φ^f de $H^i(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o)$.

Appliquant le lemme 3.8. ci-dessous, on en déduit l'identité

(3.7.1) $$\mathrm{Tr}(F^*,H^i_c(S,G)) = \mathrm{Tr}(\Phi^f,H^i(\bar{S}_o,\bar{\mathcal{G}}_o)) \ .$$

Lemme 3.8.- Soit Φ un endomorphisme p-linéaire d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{F}_q$: $\Phi(\lambda x) = \lambda^p\Phi(x)$. On pose $F = \Phi^f$ (F est linéaire) et on note encore Φ et F les extensions respectivement p-linéaire et linéaire de Φ et F à $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$. Alors, F stabilise $\mathrm{Ker}(\Phi - 1) \subset V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ et

$$\mathrm{Tr}(F,\mathrm{Ker}(\Phi-1)) = \mathrm{Tr}(F,V) = \mathrm{Tr}(F,\ V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}) \ .$$

Sur $V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$, on a $F\Phi = \Phi F$: l'endomorphisme p-linéaire $F\Phi - \Phi F$ s'annule sur V , donc partout. Ecrivons $V = V' \oplus V''$, avec F inversible sur V' et nilpotent sur V'' . La théorie des endomorphismes p-linéaires assure que

$$\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}-1) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} V' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F} \quad .$$

Puisque $\mathrm{Tr}(F,V'') = 0$, on a donc

$$\mathrm{Tr}(F,\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}-1)) = \mathrm{Tr}(F,\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}-1) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}) = \mathrm{Tr}(F,V' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}) = \mathrm{Tr}(F,V \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F})$$

$$= \mathrm{Tr}(F,V) \quad .$$

4.- Formule des traces modulo p .

Théorème 4.1.- Soient X_o un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, A un anneau noethérien commutatif réduit et de caractéristique p , et $K_o \in \mathrm{Ob}\, D_{ctf}(X_o,A)$. On a

(4.1.1.) $$\sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F^*_x,K_x) = \mathrm{Tr}(F^*,R\Gamma_c(X,K)) \quad .$$

4.2.- Réduction au cas où A est un corps fini. Un argument standard de passage à la limite nous ramène au cas où A est de type fini sur $\mathbb{Z}/p$. Pour chaque idéal maximal m de A , l'image de chaque membre de (3.1.1.) dans A/m est donnée par la même formule, avec K_o remplacé par $K_o \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A A/m \in \mathrm{Ob}\, D_{ctf}(X_o,A/m)$ (pour le second membre, cf Rapport 4.12). Les A/m étant finis, et l'intersection des idéaux maximaux de A étant réduite à 0 , on obtient la réduction annoncée.

4.3.- Réduction au cas où $A = \mathbb{Z}/p$. Supposons que A soit un corps fini, et notons $T'_A(K_o)$ et $T''_A(K_o)$ les deux membres de (3.1.1.). Si, par restriction des scalaires, on regarde K_o comme un complexe de faisceaux de $\mathbb{Z}/p$-modules, on a

$$T'_{\mathbb{Z}/p}(K_o) = \mathrm{Tr}_{A/(\mathbb{Z}/p)}\, T'_A(K_o)$$

et de même pour T" . Si (3.1.1.) vaut pour $A = \mathbb{Z}/p$, on a donc

(4.3.1.) $$\mathrm{Tr}_{A/(\mathbb{Z}/p)} T'_A(K_o) = \mathrm{Tr}_{A/(\mathbb{Z}/p)} T''_A(K_o) \quad .$$

J'affirme que, pour tout $\lambda \in A$, on a même

(4.3.2) $$\mathrm{Tr}_{A/(\mathbb{Z}/p)}(\lambda . T'_A(K_o)) = \mathrm{Tr}_{A/(\mathbb{Z}/p)}(\lambda . T''_A(K_o)) \quad ,$$

et donc $T'_A(K_o) = T''_A(K_o)$. C'est clair pour $\lambda = 0$. Pour λ inversible, notons $A(\lambda)$ l'image réciproque sur X du faisceau de A-modules libre de rang un sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ pour lequel $F^* = \lambda$. La formule (4.3.2.) n'est autre que (4.3.1.) pour $A(\lambda) \otimes_A K_o$.

4.4.- La méthode de Rapport §6, ramène maintenant 4.1. à l'énoncé suivant.

Théorème 4.1.bis - Soient $\overline{S}_o$ une courbe projective et lisse, $j : S_o \hookrightarrow \overline{S}_o$ un ouvert dense de $\overline{S}_o$ et G_o un faisceau localement constant de $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels de rang fini sur S_o. On a

$$(4.4.1) \qquad \sum_{x \in S^F} \mathrm{Tr}(F^*_x, G_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^*, H^i_c(S,G)) \quad .$$

Preuve : Appliquons 3.3. à $(S_o, \overline{S}_o, G_o)$. Le prolongement cohérent $\overline{\mathcal{G}}_o$ de $\mathcal{G}_o$ dont 3.3. garantit l'existence est localement libre car il est sans torsion (on a $\overline{\mathcal{G}}_o \subset j_* \mathcal{G}_o)_*$ et que $\overline{S}_o$ est régulier de dimension un. L'endomorphisme q-linéaire Φ^f de $\overline{\mathcal{G}}_o$ peut s'interpréter comme un morphisme

$$u : F^* \overline{\mathcal{G}}_o \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}_o \quad .$$

Il se factorise par $I\overline{\mathcal{G}}$, pour I définissant le fermé $\overline{S} - S$. Soit $v : j_! G_o \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}_o$ l'unique prolongement de l'application naturelle $G_o \longrightarrow \mathcal{G}_o = G_o \otimes_{\mathbb{Z}/p} \mathcal{O}$. Le diagramme

$$(4.4.2) \qquad \begin{array}{ccc} F^* j_! G_o & \xrightarrow{F^*} & j_! G_o \\ \downarrow{\scriptstyle F^*v} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ F^* \overline{\mathcal{G}}_o & \xrightarrow{u} & \overline{\mathcal{G}}_o \end{array}$$

est commutatif.

Enfin, notons uF^* l'application composée

$$H^*(\overline{S}, \overline{\mathcal{G}}) \xrightarrow{F^*} H^*(\overline{S}, F^* \overline{\mathcal{G}}) \xrightarrow{u} H^*(\overline{S}, \overline{\mathcal{G}}) \quad ,$$

on a par (3.7.1.)

$$(4.4.3.) \qquad \mathrm{Tr}(F^*, H^i_c(S,G)) = \mathrm{Tr}(uF^*, H^i(\overline{S}, \overline{\mathcal{G}})) \quad .$$

Pour chaque point fermé $i_x : x \hookrightarrow \overline{S}$ de $\overline{S}$, posons $\overline{\mathcal{G}}_x = i_x^* \overline{\mathcal{G}}$. La formule des traces de Lefschetz en cohomologie cohérente ("Woodshole fixed point formula"), appliqué à F et u, dit que

$$(4.4.4.) \qquad \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(u^*F^*, H^i(\overline{S}, \overline{\mathcal{G}})) = \sum_{x \in \overline{S}^F} \frac{\mathrm{Tr}(u_x, \mathcal{G}_x)}{\det(1-dF_x)} \quad .$$

Au second membre

a) puisque $dF = 0$, les dénominateurs valent 1 ;

b) pour $x \in \overline{S}^F - S^F$, l'endomorphisme u_x de $\overline{\mathcal{G}}_x$ est nul, donc aussi $\mathrm{Tr}(u_x, \overline{\mathcal{G}}_x)$;

c) pour $x \in S^F$ 4.4.4 fournit une contribution

$$\mathrm{Tr}(u_x, \overline{\mathcal{G}}_x) = \mathrm{Tr}(F_x^*, G_x) \quad .$$

L'identité (4.4.1.) résulte donc de (4.4.3.) (4.4.4.) .

4.5.- Un contre-exemple. On montre par un exemple qu'on ne peut pas, dans 4.1., omettre l'hypothèse que A soit réduit.

Soit Y_o la courbe elliptique sur $\mathbb{F}_2$ pour laquelle les valeurs propres de Frobenius sont $\pm\sqrt{-2}$. Elle a 3 points rationnels, et est supersingulière. L'involution $\sigma : x \longrightarrow -x$ n'a donc qu'un seul point fixe, le point 0 . Le quotient de Y_o par σ est une droite projective ; celui de $Y_o - 0$ par σ est donc une droite affine $\mathbb{A}^1_o$, et $Y_o - 0$ est un revêtement double non ramifié de $\mathbb{A}^1_o$:

$$\pi : Y_o - 0 \longrightarrow \mathbb{A}^1_o \quad , \quad \pi = \pi\sigma \quad .$$

Le faisceau $\pi_*\mathbb{Z}/2$ est un module libre de rang un sur l'algèbre A du groupe à deux éléments $\{1,\sigma\}$ sur $\mathbb{Z}/2$. Cette algèbre est isomorphe à celle des nombres duaux sur $\mathbb{Z}/2$.

Le faisceau de A-modules $\pi_*\mathbb{Z}/2$ est notre exemple :

a) On a $H^*_c(\mathbb{A}^1, \pi_*\mathbb{Z}/2) = H^*_c(Y - 0, \mathbb{Z}/2)$. Puisque Y_o est supersingulière, on a $H^i(Y, \mathbb{Z}/2) = 0$ pour $i > 0$, et la suite exacte longue

$$\longrightarrow H^i_c(Y - 0, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^i(\{0\}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow$$

montre que $H_c^*(Y - 0, \mathbb{Z}/2) = 0$. On a donc $H_c^*(\mathbb{A}^1, \pi_* \mathbb{Z}/2) = 0$ et

$$Tr_A(F^*, R\Gamma_c(\mathbb{A}^1, \pi_* \mathbb{Z}/2)) = 0 \quad .$$

b) Puisque $Y_o - 0$ a deux points rationnels, en l'un des points rationnels de $\mathbb{A}_o^1$, la substitution de Frobenius est l'identité, et en l'autre, c'est σ . On a donc

$$\sum_{x \in \mathbb{A}^1 F} Tr(F^*, \pi_* \mathbb{Z}/2) = 1 + \sigma \quad ,$$

et $1 + \sigma \neq 0$.

L'équation du revêtement π est $y^2 - y = x^3$.

La classe de cohomologie associée à un cycle.

par A. Grothendieck, rédigé par P. Deligne.

Cet exposé est inspiré de notes de Grothendieck, qui formaient un état 0 de SGA 5 IV. On y définit la classe de cohomologie d'un cycle X dans un schéma séparé lisse de type fini sur un corps et on prouve que l'intersection correspond au cup-produit.

Le Chapitre 1 contient quelques sorites généraux. Au Chapitre 2, on définit la classe d'un cycle, dans plusieurs situations plus générales que celle dite plus haut. La principale compatibilité non considérée est celle entre image directe d'un cycle et morphisme trace en cohomologie. Au Chapitre 3, on déduit de ce formalisme la formule des traces de Lefschetz pour un endomorphisme à points fixes isolés d'un schéma propre et lisse sur k algébriquement clos - et pour un endomorphisme de Frobenius d'une courbe.

Nous faisons les conventions suivantes:

1) "schéma" signifie schéma noethérien séparé (ceci est largement une hypothèse de commodité).
2) Dans le Chapitre 2, on fixe un entier n, et n est inversible sur tous les schémas considérés.
3) Dans le Chapitre 3, on fixe un nombre premier ℓ, et ℓ est inversible sur tous les schémas considérés. La cohomologie utilisée est toujours la cohomologie ℓ-adique :

$$H^*(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim H^*(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \quad .$$

Classes de cohomologie de cycles, morphismes traces, ... sont définis par passage à la limite à partir du cas de coefficients finis $\mathbb{Z}/\ell^n$ (cf SGA 5 VI).

Sommaire

1. Cohomologie à support et cup-produits 3
1.1. H^1 et torseurs 3
1.2. Cup-produits 5
1.3. La règle de Koszul 8
2. La classe de cohomologie associée à un cycle 10
2.1. La classe d'un diviseur 10
2.2. Méthode cohomologique 11
2.3. Méthode homologique 16
3. Application : la formule des traces de Lefschetz dans le cas propre et lisse.23

1. Cohomologie à support et cup-produits.

Ce paragraphe contient des rappels de topologie générale, que le lecteur est invité à ne consulter qu'au fur et à mesure des besoins.

1.1. H^1 et torseurs.

1.1.1. - Soit F un faisceau abélien sur un site X. On sait que $H^1(X,F)$ classifie les F-torseurs sur X. Nous normaliserons (= choisirons le signe) de l'isomorphisme (ensemble des classes d'isomorphie de F-torseurs) $\longrightarrow H^1(X,F)$ de telle sorte que pour toute suite exacte $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$ et tout $h \in H^0(X,H)$, le F-torseur $\beta^{-1}(h) \subset G$, sur lequel F agit par $(f,x) \longmapsto \alpha(f) + x$, soit de classe ∂h.

1.1.2. - Soit P un F-torseur. Si (U_i) est un recouvrement ouvert de X, et p_i une section de P sur U_i, on associe à P le cocycle de Čech

$$p_{ij} = p_j - p_i \qquad (p_{ij} \in H^0(U_i \times U_j, F)) \ .$$

Si, selon la règle usuelle, on définit l'application $\check{H}^*(X,F) \longrightarrow H^*(X,F)$ de telle sorte que ce soit un morphisme de ∂-foncteurs, l'image de $(p_{ij}) \in \check{H}^1(X,F)$ dans $H^1(X,F)$ est la classe de P, telle que normalisée par 1.1.1.

! **1.1.3.** - La définition de $H^*(X,F)$ est la suivante: pour F^* une résolution à composantes acycliques de F, $H^i(X,F) = H^i\Gamma(X,F^*)$. La structure de ∂-foncteur s'obtient en associant à une suite exacte courte de faisceaux une suite exacte courte de résolutions qui reste exacte après application du foncteur Γ. Si F^* est une résolution de F, l'homomorphisme de connection ∂ associé à

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F^0 \xrightarrow{d} \mathrm{Ker}(d) \longrightarrow 0$$

induit l'opposé de l'isomorphisme de définition $H^1(X,F) = \dfrac{\Gamma(X,\mathrm{Ker}\ d)}{d\Gamma(X,F^0)}$.

1.1.4. - Soit U une partie ouverte de X (un sous-faisceau du faisceau final) et soit D le "fermé complémentaire". On sait que $H^1_D(X,F)$ classifie les F-torseurs sur X, trivialisés sur U. Pour toute suite exacte courte $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$, et toute section à support dans D $h \in H^0_D(X,H)$, le torseur $\beta^{-1}(h)$, trivialisé sur U par la section 0, a pour classe ∂h.

La suite exacte longue de cohomologie à support

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H^i_D(X,F) \longrightarrow H^i(X,F) \longrightarrow H^i(U,F) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

est définie à partir de la suite de foncteurs

$$0 \longrightarrow \Gamma_D \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma(U, \ ) \longrightarrow 0$$

(exacte sur les faisceaux injectifs). Pour toute section $f \in H^0(U,F)$, $\partial f \in H^1_D(X,F)$ est la classe du torseur trivial F, trivialisé sur U par la section f.

! 1.1.5. - Soit $j : U \hookrightarrow X$. Si F s'injecte dans j_*j^*F, la suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow j_*j^*F \longrightarrow j_*j^*F/F \longrightarrow 0$$

fournit $\partial : H^0(j_*j^*F/F) = H^0_D(j_*j^*F/F) \longrightarrow H^1_D(X,F)$. L'application composée

$$H^0(U,F) = H^0(X, j_*j^*F) \longrightarrow H^0(X, j_*j^*F/F) \xrightarrow{\partial} H^1_D(X,F)$$

est l'opposée de l'application considérée en 1.1.4.

1.1.6. - On rappelle que si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur un schéma X, le $\mathbb{G}_m$-torseur correspondant est le faisceau $\mathrm{Isom}(\mathcal{O},\mathcal{L})$, sur lequel $\mathbb{G}_m$ agit par $(\lambda,f) \longmapsto f \circ (\lambda .) = \lambda f$. On rappelle aussi que si D est un diviseur de Cartier sur X, et $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)$ est le sous-faisceau de $j_*\mathcal{O}_U$ formé des sections locales s telles que sf soit dans $\mathcal{O}_X$, pour f une équation locale de D.

1.2 Cup-produits.

Dans ce numéro, nous développons quelques remarques sur les cup-produits en cohomologie à support qui nous reservirons, dans [Dualité], pour relier dualité de Poincaré des courbes et autodualité de la jacobienne.

1.2.1.- Soient X un site, Y une partie fermée de X, et F,G deux faisceaux abéliens sur X. Par exemple : X un schéma, Y un sous-schéma fermé et F,G des faisceaux sur X_{et}. Définissons un produit

(1.2.1.1.) $$\Gamma_Y(X,F) \otimes \Gamma(Y,G) \longrightarrow \Gamma_Y(X,F \otimes G) \quad .$$

Le produit d'une section s, à support dans Y, de F par une section t de G sur Y s'obtient comme suit : localement sur X, t est la restriction à Y d'une section t' de G sur X, et on forme le produit $s \otimes t'$. Il est à support dans Y, et ne dépend pas du choix de t', ce qui légitime et permet de globaliser la définition.

Soit $i : Y \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. L'analogue local de (1.2.1.1) est le produit.

(1.2.1.2.) $$i^!F \otimes i^*G \longrightarrow i^!(F \otimes G) \quad ,$$

dont (1.2.1.1.) se déduit par application de $\Gamma(Y, \ )$.

1.2.2.- Dérivons ces flèches. Soient K,L et M dans la catégorie dérivée, et une application bilinéaire $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L \longrightarrow M$. Par dérivation de (1.2.1.1.), on en déduit

(1.2.2.1.) $$R\Gamma_Y(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(Y,L) \longrightarrow R\Gamma_Y(X,M)$$

induisant

(1.2.2.2.) $$H^i_Y(X,K) \otimes H^j(Y,L) \longrightarrow H^{(i+j)}_Y(X,M)$$

(le cup-produit). La flèche locale (1.2.1.2.) fournit

(1.2.2.3.) $\quad Ri'K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} i^*L \longrightarrow Ri'M$,

dont (1.2.2.1) se déduit par application de $R\Gamma(Y,)$.

1.2.3.- Ci-dessus, j'ai passé sous silence les conflits qu'entraîne l'usage dans une même formule de dérivations à droite $(R\Gamma)$ et à gauche $(\overset{\mathbb{L}}{\otimes})$.

a) Au numéro suivant, les dérivés droits considérés seront tous de dimension cohomologique finie. Ceci permet de travailler systématiquement dans les catégories dérivées D^-. Pour disposer de complexes à la fois plats et flasques, on utilise les résolutions flasques canoniques comme en SGA 4 XVII.

b) Pour une théorie plus générale, il cesse d'être tenable d'interpréter les applications bilinéaires de K et L dans M comme des morphismes de $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L$ dans M. Par exemple, $R\Gamma_Y(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(Y,L)$ n'est pas défini si les deux facteurs sont dans D^+. Une solution est de travailler dans D^+, de définir

$$Bil(K,L;M) = \varinjlim \mathrm{Hom}(K' \otimes L', M') \quad ,$$

où la limite est prise sur les quasi-isomorphismes $K' \xrightarrow{\sim} K$, $L' \xrightarrow{\sim} L$, $M \xrightarrow{\sim} M'$ (K',L',M' bornés inférieurement) et où Hom est pour "morphisme de complexes, à homotopie près", et d'utiliser systématiquement de telles applications bilinéaires, sans jamais mentionner de $\otimes$.

1.2.4. - Deuxième thème.

Soit U un ouvert de X et $j : U \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. Pour K dans la catégorie dérivée, sur U, on pose $R\Gamma_!(U,K) = R\Gamma(X, j_!K)$. Pour K,L et M sur U, et une application bilinéaire $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L \longrightarrow M$, on veut définir

(1.2.4.1.) $\quad R\Gamma(U,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_!(U,L) \longrightarrow R\Gamma_!(U,M)$.

Au niveau des faisceaux, et de leurs sections globales, un tel produit se déduit de l'isomorphisme $j_*F \otimes j_!G \xleftarrow{\sim} j_!(F \otimes G)$, mais il faut prendre garde au fait que $R\Gamma_!$ n'est en général pas le dérivé du foncteur $\Gamma(X, j_!)$.

On commence par définir

$$Rj_*K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} j_!L \xleftarrow{\sim} j_!(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L) \longrightarrow j_!M \quad .$$

Appliquant $R\Gamma(X,)$, on trouve

$$R\Gamma(U,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_!(U,L) = R\Gamma(X,Rj_*K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(X,j_!L) \longrightarrow R\Gamma(X,j_!M) \quad .$$

Ici encore, le conflit entre la gauche et la droite se résoudra au numéro suivant en travaillant dans D^-.

1.2.5 Coda.

Soient $j : U \hookrightarrow X$ une partie ouverte et $i : Y \hookrightarrow U$ une partie fermée de U. Soit $\overline{Y}$ un fermé de X tel que $\overline{Y} \cap U = Y$ (par exemple, le complément de $U-Y$). Soit K sur U. On pose $R\Gamma_{Y!}(U,K) = R\Gamma_!(Y,Ri^!K)$ où $R\Gamma_!$ est relatif à l'inclusion de Y dans $\overline{Y}$. Pour tout ouvert V de U, contenant Y, $R\Gamma_{Y!}(U,K)$ s'envoie dans $R\Gamma_!(V,K)$: si on note encore i l'inclusion de $\overline{Y}$ dans X, j celle de Y dans $\overline{Y}$ et k celle de V dans X, on a $Ri^!K = j^*Ri^!k_!(k^*K)$, d'où un morphisme $j_!Ri^!K \longrightarrow Ri^!k_!(k^*K)$. Lui appliquant $R\Gamma(\overline{Y},)$, on trouve $R\Gamma_{Y!}(U,K) \longrightarrow R\Gamma_{\overline{Y}}(k_!k^*K) \longrightarrow R\Gamma(k_!k^*K) = R\Gamma_!(V,K)$.

Pour K,L,M sur U, et une application bilinéaire $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L \longrightarrow M$, on veut définir

(1.2.5.1.) $$H^n_Y(U,K) \otimes H^m_!(Y,L) \longrightarrow H^{n+m}_{Y!}(U,M)$$

(ce dernier groupe lui-même s'envoyant dans $H^{n+m}_!(V,M)$). Dans la catégorie dérivée, il s'agit de définir

(1.2.5.2.) $$R\Gamma_Y(U,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_!(Y,L) \longrightarrow R\Gamma_{Y!}(U,M) \quad .$$

On identifie $R\Gamma_Y(U,K)$ à $R\Gamma(Y,Ri^!K)$. Le produit cherché est alors du type (1.2.4.1) relatif au produit local (1.2.2.3) sur Y : $Ri^!K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L \longrightarrow Ri^!M$.

1.2.6. - Ci-dessus, on a déroulé le sorite absolu. On a un sorite relatif parallèle, avec Γ remplacé par f_* pour f un morphisme $X \longrightarrow S$.

1.3. La règle de Koszul.

Soient A un anneau commutatif, et $(V_i)_{i \in I}$ une famille finie de A-modules gradués (ou $\mathbb{Z}/2$-gradués). Rappelons la définition du produit tensoriel gradué $\bigotimes_{i \in I} V_i$, au sens de la règle de Koszul (cf. SGA 4 XVII 1.1). Pour chaque ordre total a sur I , on va définir un module $V(a)$. On va aussi définir un système transitif d'isomorphismes $\varphi_{ab} : V(b) \xrightarrow{\sim} V(a)$ et le produit tensoriel gradué des V_i sera la "valeur commune" $\varprojlim V(a)$ de ce système de modules. On prend

a) $V(a) = \bigotimes_{i \in I} |V_i|$ (produit-tensoriel ordinaire des modules non gradués sous-jacents aux V_i) .

b) si les $x_i \in V_i$ sont homogènes, on prend $\varphi_{ab}(\otimes x_i) = (-1)^N \otimes x_i$, où N est la somme des $\deg(x_i)\deg(x_j)$ étendue aux couples (i,j) tels que $i <_a j$ et $i >_b j$.

Exemple 1 : Prenons $I = \{1,2\}$ et soient a l'ordre où $1 < 2$, b l'ordre où $1 > 2$. Soient $v_i \in V_i$, homogènes , et notons $v_1 \otimes v_2$ (resp $v_2 \otimes v_1$) l'image dans le produit tensoriel gradué du produit des v_i dans $V(a)$ (resp $V(b)$) . On a

$$v_1 \otimes v_2 = (-1)^{\deg(v_1)\deg(v_2)} v_2 \otimes v_1$$

(règle de Koszul).

Exemple 2 : Si les V_i sont tous de degré 1, on a, reliant le module sous-jacent au produit tensoriel gradué, et le produit tensoriel ordinaire des modules $|V_i|$ sous-jacents aux V_i , un isomorphisme canonique

$$|\otimes V_i| \cong \otimes |V_i| \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{|I|} \mathbb{Z}^I \quad .$$

Exemple 3 : Pour A un corps, et X_i une famille finie d'espaces, la formule de Künneth s'écrit $H^*(\prod X_i, A) = \otimes H^*(X_i, A)$.

Soit $V^\vee$ le dual gradué de V . L'application canonique

(1.3.1) $$V^\vee \otimes V = V \otimes V^\vee \longrightarrow A$$

est $v' \otimes v \longmapsto v'(v)$.

On suppose maintenant que A est un corps, et on ne considère que des espaces vectoriels de dimension finie. L'isomorphisme canonique

(1.3.2.) $$W \otimes V^\vee \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)$$

est $w \otimes v' \longmapsto (v \longmapsto w.v'(v))$. Via cet isomorphisme, la composition $\mathrm{Hom}(Y,Z) \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$ s'identifie au morphisme induit par (1.3.1) : $Z \otimes Y^\vee \otimes Y \otimes X^\vee \longrightarrow Z \otimes X^\vee$.

La trace de $f : V \longrightarrow V$ (nulle pour f homogène de degré $\neq 0$) est l'image de f par

(1.3.4) $$\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}(V,V) \xleftarrow[1.3.2]{\sim} V \otimes V^\vee = V^\vee \otimes V \xrightarrow[1.3.1]{} A \quad .$$

On vérifie aisément que, pour f de degré 0 ,

(1.3.5) $$\mathrm{Tr}(f,V) = \Sigma(-1)^i \mathrm{Tr}(f,V^i) \quad .$$

Si on exprime que les deux morphismes composés de morphismes 1.3.1 $V^\vee \otimes V \otimes W^\vee \otimes W \longrightarrow k$ commutent, on trouve que, pour $f : V \longrightarrow W$ et $g : W \longrightarrow V$ homogènes, on a

(1.3.6) $$\mathrm{Tr}(fg) = (-1)^{\deg f \deg g} \mathrm{Tr}(gf) \quad .$$

2. La classe de cohomologie associée à un cycle.

2.1. - La classe d'un diviseur.

2.1.1. - Soit D un diviseur de Cartier dans un schéma X. Hors de D, le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)$ est trivialisé par la section 1. La classe $c\ell(D)$ de D, dans $H^1_D(X,\mathbb{G}_m)$, est la classe du $\mathbb{G}_m$-torseur trivialisé sur $X-D$ correspondant (1.1.6 et 1.1.4).

Soit $\partial : H^i(X-D,\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^{i+1}_D(X,\mathbb{G}_m)$ le morphisme 1.1.4. Si D admet une équation globale f, la multiplication par f est un isomorphisme de $\mathcal{O}(D)$, trivialisé par 1 sur $X-D$, avec $\mathcal{O}$, trivialisé par f sur $X-D$. D'après 1.1.4, on a donc

(2.1.1.1) $\qquad c\ell(D) = \partial f$.

Pour tout morphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que u^*D soit encore un diviseur de Cartier (i.e., $u^{-1}D$ disjoint de $\mathrm{Ass}(X')$), on a $c\ell(u^*D) = u^*c\ell(D)$. Si on voulait une telle fonctorialité pour tout morphisme u, il faudrait considérer non pas des diviseurs de Cartier, mais plus généralement des faisceaux inversibles munis d'une section.

Rappelons que l'entier n est dorénavant supposé inversible sur les schémas considérés. Soit $\partial : H^i_D(X,\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^{i+1}_D(X,\mu_n)$ le cobord pour la suite exacte de Kummer $0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$.

Définition 2.1.2. - La classe $c\ell_n D$ de D dans $H^2_D(X,\mu_n)$ est $\partial c\ell(D)$.

Quand il n'y aura pas de risque de confusion, on omettra la mention de n .

2.1.3. - Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^0(X-D,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\partial} & H^1_D(X,\mathbb{G}_m) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ H^1(X-D,\mu_n) & \xrightarrow{\partial} & H^2_D(X,\mu_n) \end{array}$$

est anticommutatif. Si D admet une équation globale f , $c\ell_n(D)$ est donc l'opposé de l'image par ∂ de la classe dans $H^1(X-D,\mu_n)$ du μ_n-torseur des racines $n^{\text{ièmes}}$ de f .

Proposition 2.1.4. - Soit i l'inclusion de D dans X . Si D et X sont réguliers, les faisceaux de cohomologie à support $R^p i^! \mu_n$ sont nuls pour p = 0,1 , et $R^2 i^! \mu_n = \mathbb{Z}/n$, engendré par $c\ell_n(D)$.

Il suffit de prouver que, pour X strictement local et D défini par un paramètre régulier, on a $H^p_D(X,\mu_n) = 0$ pour p = 0,1 et $H^2_D(X,\mu_n) = \mathbb{Z}/n$ engendré par $c\ell(D)$. Notant par un $\sim$ la cohomologie réduite, on a $\tilde{H}^{p-1}(X-D,\mu_n) \xrightarrow{\sim} H^p_D(X,\mu_n)$. L'assertion pour p = 0,1 exprime que D ne disconnecte par X , et pour p = 2 résulte, via 2.1.3, du lemme d'Abhyankar.

Ceci est un analogue partiel du théorème relatif (Arcata, V 3.4) . Grothendieck conjecture que les $R^p i^! \mu_n$ sont nuls pour $p \neq 2$, du moins pour X excellent (conjecture de pureté), mais ceci n'est connu qu'en caractéristique 0 (SGA 4 XIX).

Compatibilité fondamentale 2.1.5. - Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, P un point fermé de X et Tr le composé $H^2_P(X,\mu_n) \longrightarrow H^2_c(X,\mu_n) \xrightarrow{Tr} \mathbb{Z}/n$. On a

$$Tr\ c\ell(P) = 1 \ .$$

Soit $\overline{X}$ la courbe projective et lisse complétant X . La formule exprime que le faisceau inversible $\mathcal{O}(P)$ sur $\overline{X}$ est de degré 1 .

2.2 .- Méthode cohomologique.

2.2.1.- Soit X un schéma (noethérien). Rappelons qu'un sous-schéma Y de X est dit d'intersection complète locale, de codimension c , si, localement (sur Y), il est défini par une suite régulière de c équations dans X . Pour X le spectre d'un anneau local A d'idéal maximal m et Y d'idéal a , cela signifie que $Ext^i(A/a,A) = 0$ pour $i < \dim(a/ma) = c$, et toute suite d'éléments de a ,

d'image dans a/ma une base de a/ma , est une suite régulière d'équations pour Y .

2.2.2 - Soit $i : Y \hookrightarrow X$ d'intersection complète locale, de codimension c . On se propose de définir une classe fondamentale locale $c\ell(Y)$ qui soit une section globale du faisceau de cohomologie à support $R^{2c}i^!\mathbb{Z}/n(c)$ (rappelons que $\mathbb{Z}/n(c) = \mu_n^{\otimes c}$) .

Localement, Y est l'intersection d'une suite de c diviseurs D_i , et on définit $c\ell(Y)$ comme le cup-produit des $c\ell(D_i)$. Chaque $c\ell(D_i)$ est à support dans D_i , leur produit est à support dans Y . Que, localement, ce produit ne dépende pas du choix des D_i , résulte de 2.2.3 ci-dessous et des propriétés d'invariance suivantes :

a) compatibilité à la localisation ;

b) indépendance de l'ordre des D_i (les $c\ell(D_i)$ sont de degré 2 , pair, donc le cup-produit est commutatif) ;

c) le produit ne dépend que du "drapeau" $D_1 \supset D_1 \cap D_2 \supset \ldots \supset Y$.

Pour prouver c), on note l'existence d'un produit (variante de 1.2.1)

$$H^*_{D_1}(X) \otimes H^*_{D_1 \cap D_2}(D_1) \otimes \ldots \otimes H^*_Y(D_1 \cap \ldots \cap D_{c-1}) \longrightarrow H^*_Y(X) \quad ;$$

le produit des $c\ell(D_i)$ est encore le produit des $(c\ell(D_i)$ restreint à $D_1 \cap \ldots \cap D_{i-1}) = (c\ell(D_1 \cap \ldots \cap D_i)$ dans $D_1 \cap \ldots \cap D_{i-1})$.

Lemme 2.2.3. - Soient A un anneau local d'idéal maximal m et $\underline{u} = (u_1 \ldots u_c)$, $\underline{v} = (v_1 \ldots v_c)$ deux suites régulières engendrant le même idéal a . Il existe alors une suite $\underline{w}_i$ $(1 \leq i \leq N)$ de telles suites, les reliant, telle que $\underline{w}_{i+1}$ se déduise de $\underline{w}_i$ par une permutation, ou en ne changeant que le dernier élément.

Puisqu'on dispose des permutations, il reviendrait au même de se permettre de changer un seul élément, plutôt que le dernier. Par 2.2.1, on se ramène alors à vérifier que, dans l'espace vectoriel a/ma , on peut passer d'une base à une

autre par une suite de permutations et de changements de base ne modifiant qu'un seul vecteur. Le groupe linéaire est en effet engendré par les matrices diagonales, élémentaires et de permutation.

2.2.4 - Les mêmes méthodes permettent de définir une classe fondamentale locale pour tout $Y \subset X$ localement définissable par c équations (là où moins d'équations suffisent, la classe est nulle).

2.2.5 - On peut passer d'une telle classe fondamentale locale, dans $H^0(Y,R^{2c}i^!\mathbb{Z}/n(c))$, à une classe fondamentale globale, dans $H^{2c}_Y(X,\mathbb{Z}/n(c))$, lorsqu'on dispose de résultats de semi-pureté :

Proposition 2.2.6 - (i) Si $R^pi^!\mathbb{Z}/n = 0$ pour $p < 2c$, alors

$$H^{2c}_Y(X,\mathbb{Z}/n(c)) \xrightarrow{\sim} H^0(Y,R^{2c}i^!\mathbb{Z}/n(c)) \ .$$

(ii) Soit Z une partie fermée de Y , de complément V dans Y , et k l'inclusion de Z dans X . Si $R^pk^!\mathbb{Z}/n = 0$ pour $p \leq 2c$, alors

$$H^{2c}_Y(X,\mathbb{Z}/n(c)) \hookrightarrow H^{2c}_V(X,\mathbb{Z}/n(c)) \ .$$

Si $R^pk^!\mathbb{Z}/n = 0$ pour $p \leq 2c+1$, cette flèche est un isomorphisme.

L'hypothèse $R^pi^!\mathbb{Z}/n = 0$ équivaut à $R^pi^!\mathbb{Z}/n(c) = 0$. Ceci dit, (i) se lit sur la suite spectrale $H^p(Y,R^qi^!) \Rightarrow H^{p+q}_Y(X,\ )$. Si k_1 est l'inclusion de Z dans Y , on a $k = ik_1$, d'où $Rk^!\mathbb{Z}/n = Rk_1^!Ri^!$, et la suite exacte longue de cohomologie pour $Z \subset Y$ fournit une suite exacte longue

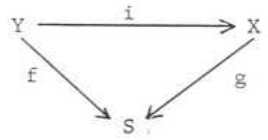
$$\longrightarrow H^i(Z,Rk^!\mathbb{Z}/n(c)) \longrightarrow H^i_Y(X,\mathbb{Z}/n(c)) \longrightarrow H^i_V(X,\mathbb{Z}/n(c)) \longrightarrow$$

dont (ii) résulte.

Amplification 2.2.7 - La proposition 2.2.6 reste valable pour i un quelconque morphisme séparé de type fini, et $2c$ un entier (positif ou négatif) quelconque, pour autant qu'on y remplace $H^{2c}_Y(X,\mathbb{Z}/n(c))$ par $H^{2c}(Y,Ri^!\mathbb{Z}/n(c))$, et de même pour H_V .

Les résultats de semi-pureté suivants résultent de SGA 2 XIV 1.8, 1.10, 1.15. Nous rappellerons leur preuve.

Rappel 2.2.8 - Soit un morphisme de S-schémas séparés de type fini



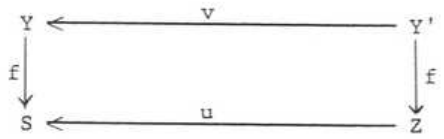
On suppose X lisse, purement de dimension relative N et que Y est fibre par fibre de dimension $\leq d$. Soit $c = N-d$.

(i) On a $R^p i^! \mathbb{Z}/n = 0$ pour $p < 2c$; de même pour $\mathbb{Z}/n$ remplacé par un faisceau g^*F .

(ii) Si, au dessus d'un ouvert dense U de S , Y est fibre par fibre de dimension $< d$, on a $R^p i^! \mathbb{Z}/n = 0$ pour $p \leq 2c$. Si de plus le complément Z de U ne disconnecte pas localement S , on a $R^p i^! \mathbb{Z}/n = 0$ pour $p \leq 2c + 1$.

Puisque $Rg^! F = g^*F(N)[2N]$, la formule de transitivité $Ri^! Rg^! = Rf^!$ montre que $R^{2c+q} i^!(g^*F) = 0 \iff R^{-2d+q} f^!(F)$. Ceci nous ramène à étudier f , i.e. à supposer que $X = S$. L'assertion (i) est alors SGA 4 XVIII 3.17.

Soit Y' l'image inverse de Z dans Y :



D'après (i), les $R^p f^! \mathbb{Z}/n$ sont à support dans Y' pour $p \leq -2d+1$; et la suite spectrale $R^a v^! R^b f^! \Rightarrow R^{a+b}(fv)^!$ montre qu'ils coïncident avec les $R^p(fv)^! \mathbb{Z}/n = R^p(uf)^! \mathbb{Z}/n$. Appliquant (i) à Y'/Z et à la suite spectrale $R^a f^! R^b u^! \Rightarrow R^{a+b}(uf)^!$, on trouve que (ii) résulte de la nullité de $R^b u^! \mathbb{Z}/n$ pour $b = 0$, ou $b = 0$ et 1 selon le cas .

2.2.9 - Grothendieck conjecture l'analogue absolu suivant de 2.2.8 (conjecture de semi-pureté - une conséquence de la conjecture de pureté) : pour Y de codimension $\geq c$ dans X régulier, on a $H^i_Y(X,\mathbb{Z}/n) = 0$ pour $i < 2c$, tout au moins si X est excellent.

2.2.10 - On est maintenant à pied d'oeuvre pour définir la classe d'un cycle Y de codimension c dans X lisse sur un corps k. On écrit $Y = \sum d_i Y_i$, où les Y_i sont réduits irréductibles. Un ouvert U_i de Y_i, de complémentaire de codimension $> c$, est alors d'intersection complète locale dans X. Ceci permet de définir la classe fondamentale locale de U_i. D'après 2.2.6 et 2.2.8, celle-ci provient d'une unique classe fondamentale $c\ell(Y_i) \in H^{2c}_{Y_i}(X,\mathbb{Z}/n(c))$, et on pose

$$c\ell(Y) = \sum d_i c\ell(Y_i) \in H^{2c}_{|Y|}(X,\mathbb{Z}/n(c)) \quad .$$

2.2.11 - En géométrie analytique complexe, une construction de Baum, Fulton et Mac Pherson (Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. IHES 45 (1975) p. 101-146 - IV 4) permet de définir sans restriction la classe de cohomologie d'une intersection complète locale $Y \subset X$. Supposons Y purement de codimension c, et soit η le fibré vectoriel sur Y fibré normal de Y dans X. Ses sections locales sont celles de $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$, d'où $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux de Y. Rappelons que le faisceau des fonctions C^∞ sur X est défini localement, en terme de plongements locaux de X dans $\mathbb{C}^n$, comme la restriction à X du quotient du faisceau des fonctions C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ par l'idéal engendré par les parties réelles et imaginaires des équations qui définissent X. Le fibré η se prolonge en un fibré vectoriel complexe C^∞ N sur un voisinage U de Y dans X, et pour U assez petit, il existe des sections f de N, de lieu des zéros Y, et telles que, sur Y, $df : \eta \longrightarrow N$ soit l'identité. Deux choix de N et f sont homotopes sur U assez petit.

La classe de cohomologie $c\ell(U)$ de la section 0 de N (notée $z : U \longrightarrow N$) est définie : U est d'intersection complète locale dans N, et $R^i z^! \mathbb{Z} = 0$ pour $i \neq 2c$, $R^{2c} z^! \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. On dispose de $f^* : H^*_U(N,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*_Y(X,\mathbb{Z})$ et on pose

$$c\ell(Y) = f^* c\ell(U) \quad .$$

La même construction marche dès qu'on a sur un sous-espace analytique Y de X la structure normale suivante : un faisceau localement libre C de rang c sur Y_{red} , et un épimorphisme $C \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}.\mathcal{I}_{red}$.

2.3. Méthode homologique.

2.3.1. - Soit $f : Y \longrightarrow S$ un morphisme plat de type fini, à fibres de dimension $\leq d$. Dans SGA 4 XVIII 2.9, nous avons défini un morphisme trace

(2.3.1.1.) $\quad Tr_f : R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$.

On a $R^i f_!\mathbb{Z}/n(d) = 0$ pour $i > 2d$, et $R^i f^!\mathbb{Z}/n = 0$ pour $i < -2d$. Ceci, et l'adjonction entre $Rf_!$ et $Rf^!$, fournissent des isomorphismes

(2.3.1.2) $\quad Hom(R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d), \mathbb{Z}/n) = Hom(Rf_!\mathbb{Z}/n(d), \mathbb{Z}/n\,[-2d])$

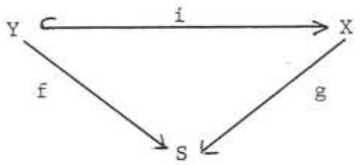
$= Hom(\mathbb{Z}/n, Rf^!\mathbb{Z}/n(-d)\,[-2d]) = H^0(Y, R^{-2d}f^!\mathbb{Z}/n)$.

Au moins pour S un point, l'image de Tr_f dans les deux derniers groupes mérite le nom de classe fondamentale de Y (en homologie).

On note encore Tr_f l'image de Tr_f dans le second groupe, et les morphismes qui s'en déduisent par fonctorialité. Par exemple, pour Y/S propre, le morphisme

(2.3.1.3) $\quad H^i(Y, \mathbb{Z}/n(d)) = \mathbb{H}^i(S, Rf_!\mathbb{Z}/n(d)) \longrightarrow H^{i-2d}(S, \mathbb{Z}/n)$.

Supposons Y contenu dans X lisse sur S , purement de dimension relative N , et posons $c = N-d$.



On a $Rf^! = Ri^!Rg^!$, et $Rg^!\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n(-N)\,[-2N]$. La classe fondamentale de Y s'identifie à un élément de $H^0(Y, Ri^!\mathbb{Z}/n(c)[2c]) = H^{2c}_Y(X, \mathbb{Z}/n(c))$, la classe $c\ell(Y)$ de Y dans X . Nous verrons plus loin qu'elle ne dépend que de $Y \subset X$, non de la projection de X sur S .et que pour Y d'intersection complète locale, elle induit la classe locale du numéro précédent.

Explicitons l'isomorphisme

$$H_Y^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d),\mathbb{Z}/n)$$

qui transforme $c\ell(Y)$ en Tr_f : via les isomorphismes

$$H_Y^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c)) = H_Y^{2c}(Ri^!\mathbb{Z}/n(c)) = \mathrm{Hom}_Y(\mathbb{Z}/n(d)[2d]\ ,\ Ri^!\mathbb{Z}/n(N)[2N])$$

$$= \mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}/n(d)[2d]_Y\ ,\mathbb{Z}/n(N)[2N])\ ,$$

c'est la ligne supérieure de

$$\begin{array}{ccccc} H_Y^{2c} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d],Rf_!Ri^!\mathbb{Z}/n(N)[2N]) & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Hom}(Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d],\mathbb{Z}/n) \\ & \searrow^{(3)} & \downarrow \mathrm{Tr}_i & & \| \\ & & \mathrm{Hom}(Rg_!\mathbb{Z}/n(d)[2d]_Y,Rg_!\mathbb{Z}/n(N)[2N]) & \xrightarrow[\mathrm{Tr}_g]{(2)} & \mathrm{Hom}(Rg_!\mathbb{Z}/n(d)[2d]_Y,\mathbb{Z}/n) \end{array}\ ,$$

où (1) est la flèche d'adjonction $Rf_!Rf^! \longrightarrow \mathrm{Id}$. La commutativité (2) exprime que l'isomorphisme $Rf^! = Ri^!Rg^!$ est défini par adjonction. Enfin, la flèche déduite de (3)

$$H_Y^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c)) \otimes R^{2d}g_!\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow R^{2N}g_!\mathbb{Z}/n(N)$$

s'interprète comme un cup-produit (cf. 1.2) .

Définition 2.3.2 - La classe $c\ell(Y) \in H_Y^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c))$ a pour propriété caractéristique que, pour toute section locale u de $R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d)$, on a

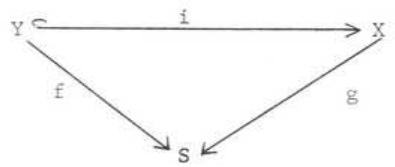
$$\mathrm{Tr}_f(u) = \mathrm{Tr}_g(c\ell(Y) \cup u) \quad .$$

Du fait que $c\ell(Y)$ ait déjà une image Tr_f dans $\mathrm{Hom}(Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d],\mathbb{Z}/n)$, la formule 2.3.2 vaut pour les flèches déduites de Tr_f par fonctorialité. Par exemple, pour X sur S propre et $u \in H^*(Y,\mathbb{Z}/n)$, la formule vaut dans $H^*(S,\mathbb{Z}/n(-d))$. Pour $v \in H^*(X,\mathbb{Z}/n)$, elle donne

$$\mathrm{Tr}_f(i^*v) = \mathrm{Tr}_g(c\ell(Y) \cup v)\ ,$$

où le cup-produit peut se calculer dans $H^*(X,\mathbb{Z}/n)$.

2.3.3 - Nous allons définir le morphisme trace, et donc la classe $c\ell(Y)$, sous des hypothèses plus générales. Soit donc un diagramme



avec g lisse, purement de dimension relative N et Y fermé dans X , fibre par fibre de dimension $\leq d$. On munit de plus Y d'un "poids" $\varkappa$ du type suivant : $\varkappa \in D^b_{parf,X}$ est un complexe borné de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur X , de Tor-dimension finie sur S (ou sur X ,cela revient au même) et dont les faisceaux de cohomologie soient cohérents et à support dans Y . On se propose de définir un morphisme $Tr_{f,\varkappa} : R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$. Pour Y plat sur S et $\varkappa = \mathcal{O}_Y$, ce sera le morphisme trace précédent. En général, il ne dépend que des longueurs de $\varkappa$ aux points génériques y des composantes irréductibles de Y ($\ell g_y(\varkappa) = \Sigma(-1)^i \ell g \mathcal{H}^i(\varkappa)_y$) . Enfin, on notera $c\ell(Y,\varkappa)$ la classe à support dans Y telle que

(2.3.3.1) $\qquad Tr_g(c\ell(Y,\varkappa) \cup u) = Tr_{f,\varkappa}(u)$.

2.3.4 - La construction de $Tr_{f,\varkappa}$ est parallèle à celle de SGA 4 XVIII § 2 ; nous n'en indiquerons que les grandes lignes.

A.d = 0 (f quasi-fini) . Soit x un point géométrique de Y , s son image dans S , $\varkappa_{(x)}$ l'image réciproque de $\varkappa$ sur le localisé strict de X en x , $\varkappa_{(x)s} = \varkappa_{(x)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{S,s}^h} k(s)$ son image réciproque sur la fibre géométrique en s , et $n(x) = \Sigma(-1)^i dim_{k(s)} H^i(\mathcal{H}_{(x)s})$. La fonction $x \longmapsto n(x)$ est une pondération de f , et on prend le morphisme trace correspondant (SGA 4 XVII 6.2.5). La pondération $n(x)$, et $Tr_{f,\varkappa}$ sont de formation compatible à tout changement de base.

B. Cas général . Si $u : Z \longrightarrow A^d_S$ est tel que ui soit quasi-fini, on pose $Tr_{f,\varkappa} = Tr_{A^d_S} \circ Tr_{ui,\varkappa}$. Ce morphisme trace est clairement compatible à tout changement de base S'/S . Pour prouver qu'il ne depend pas de u , on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos k . Soient dans ce

cas Y_i les composantes irréductibles de Y, et ℓg_i la longueur de $\varkappa$ au point générique de Y_i. Si α_i est l'inclusion de $(Y_i)_{red}$ dans Y, on a

(2.3.4.1) $$Tr_{f,\varkappa} = \Sigma\, \ell g_i\, Tr_{Y_{ired}/S}\, \alpha_i^*$$

(cette formule résulte de la formule analogue et facile pour Tr_{ui}).

Ceci définit $Tr_{f,\varkappa}$ localement sur Y ; on procède ensuite comme en SGA 4 XVIII 2.9.

Lemme 2.3.5 - Si $g = g'g'' : X \xrightarrow{g''} S' \xrightarrow{g'} S$, avec g' et g'' lisse et purement de dimension relative N' et N'', et que Y est encore, sur S', fibre par fibre de codimension $\geq c$, alors la classe $c\ell(Y,\varkappa)$ est la même, calculée en terme de g ou de g''.

Soient $f' = g''i$ et $d' = d-N'$. La formule $Tr_g = Tr_{g'} \circ Tr_{g''}$ (SGA 4 XVIII 2.9 Var 3) assure la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
H_X^{2c}(Z,\mathbb{Z}/n(c)) & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_{S'}(Rf'_!\mathbb{Z}/n(d')[2d'], Rg''_!\mathbb{Z}/n(N'')[2N'']) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S'}(R^{2d'}f'_!\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \\
\downarrow Rg'_!(N') & & \downarrow Tr_{g'} \circ R^{2N'}g'_! \\
\mathrm{Hom}_S(Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d], Rg'_!\mathbb{Z}/n(N)[2N]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n)
\end{array}$$

tandis que la formule analogue et facile à vérifier $Tr_{f,\varkappa} = Tr_{g'} \circ Tr_{f',\varkappa}$ assure que l'image de $Tr_{f',\varkappa}$ est $Tr_{f,\varkappa}$. L'assertion en résulte.

Lemme 2.3.6 - Si Y est un diviseur dans X, la classe 2.3.2 coïncide avec la classe 2.1.2.

Par semi-pureté (2.2.6(i) et 2.2.8(i)), le problème est local sur Y ; utilisant 2.3.5 pour remplacer S par S' convenable, ceci nous permet de supposer que $N = 1$. Utilisant à nouveau la semi-pureté (2.2.6(ii) et 2.2.8 (ii)) il suffit de prouver 2.3.6 au-dessus des points génériques de S. Une localisation étale nous ramène alors à supposer S spectre d'un corps algébriquement clos k.

les classes 2.3.2 et 2.1.2 étant chacune additive en Y , ceci nous ramène au cas où Y est un point fermé sur une courbe lisse sur k . Que la propriété caractéristique 2.3.2 soit vérifiée est alors la compatibilité fondamentale 2.1.5 .

Lemme 2.3.7 - La formation de $c\ell(Y,\varkappa)$ est compatible à tout changement de base S'/S .

Résulte de la même assertion pour les morphismes trace.

Théorème 2.3.8 - (i) $c\ell(Y,\varkappa)$ ne dépend que de $Y \subset X$ et des longueurs de $\varkappa$ aux points génériques de Y . Cette classe est additive en $\varkappa$. Pour $\varkappa = \mathcal{O}_Y$ et Y d'intersection complète locale, elle induit la classe locale 2.2.2.

(ii) Soit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

avec X' lisse sur S' . Si $u^{-1}(Y)$ est encore fibre par fibre de codimension $\geq c$, alors

$$c\ell(u^{-1}(Y), Lu^*\varkappa) = u^*c\ell(Y,\varkappa) \quad .$$

(iii) Soit $Y' \subset X$ fibre par fibre de codimension $\geq c'$, $\varkappa'$ un poids sur Y' et supposons que $Y \cap Y'$ soit fibre par fibre de codimension $\geq c+c'$. Alors

$$c\ell(Y \cap Y', \varkappa \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \varkappa') = c\ell(Y,\varkappa) \cup c\ell(Y',\varkappa') \quad .$$

(2.3.8.1) - Etant donné $Y \subset X/S$ comme dit, il résulte de la semi-pureté (2.2.6) (2.2.8) que pour vérifier que deux classes dans $H^{2c}_Y(X, \mathbb{Z}/n(c))$ coïncident, il suffit de le vérifier localement aux points génériques de Y , voire même après tout changement de base $s \longrightarrow S$ (s point géométrique générique de S), aux points génériques de Y .

(2.3.8.2) Preuve de (ii) pour $S = S'$ et u un plongement fermé.

Par localisation (2.3.8.1) on peut supposer que X' est l'image réciproque de la section 0 par un morphisme lisse $v : X \longrightarrow A_S^{N'}$

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{u} & X & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ S & \xrightarrow{0} & A_S^{N'} & \xrightarrow{\pi} & S \end{array} \quad .$$

On applique 2.3.5 à $g = \pi v$ et 2.3.7 au changement de base $S \longrightarrow A_S^{N'}$.

(2.3.8.3) Dans une situation produit : $X = X' \times_S X'', Y = Y' \times_S Y'', \varkappa = \varkappa' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_S \varkappa''$, on a $c\ell(Y,\varkappa) = c\ell(Y',\varkappa') \cup c\ell(Y'',\varkappa'')$ (cup-produit extérieur, i.e. $pr_1^* c\ell(Y',\varkappa') \cup pr_2^* c\ell(Y'',\varkappa'')$) .

Des propriétés fonctorielles de Tr_g (SGA 4 XVIII 2.12) résulte la commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} H_{X'}^{2c'} \otimes H_{X''}^{2c''} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(Rf_!\mathbb{Z}/n(d')[2d'], Rg_!\mathbb{Z}/n(N')[2N']) \otimes \ldots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(R^{2d'}f_!\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \otimes \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_X^{2c} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d], Rg_!\mathbb{Z}/n(N)[2N]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \end{array}$$

et on vérifie que Tr_f est l'image de $Tr_{f'} \otimes Tr_{f''}$ d'où l'assertion.

Preuve de (ii) : (2.3.7) et un changement de base préliminaire nous ramènent à supposer que $S = S'$. Factorisons u par son graphe :

$$X' \xrightarrow{(Id,u)} X' \times X \xrightarrow{pr_2} X \quad .$$

Ceci nous amène à traiter séparément pr_2 , justiciable de (2.3.8.3) pour $X' = X'$, $\varkappa' = \mathcal{O}_{X'}$ (avec $c\ell(Y') = 1 \in H^0(X,\mathbb{Z}/n)$) , et (Id,u) , justiciable de (2.3.8.2).

Preuve de (iii) : Soit $\delta : X \longrightarrow X \times_S X$ l'inclusion diagonale. On utilise la formule $\delta^*(Y_1 \times_S Y_2) = Y_1 \cap Y_2$ pour se ramener à (2.3.8.2) et (2.3.8.3).

Preuve de (i) : Le changement de base $S_{red} \longrightarrow S$ remplace X par X_{red} ; ceci nous ramène à supposer X et S réduits. Une localisation au voisinage des points génériques de Y nour ramène ensuite au cas où Y_{red} est irréductible et l'intersection complète de c diviseurs D_i . La même localisation, et la définition de Tr dans le cas quasi-fini, montre ensuite que $c\ell(Y,\varkappa) = \ell g.c\ell(Y_{red},\mathcal{O}_{Y_{red}})$, où ℓg est la longueur de $\varkappa$ au point générique de Y . D'après (iv), on a donc

$$c\ell(Y,\varkappa) = \ell g.\prod_i c\ell(D_i,\mathcal{O}_{D_i})$$

et on conclut par 2.3.6.

Remarque 2.3.9 : Pour S le spectre d'un corps, et la classe d'un cycle étant définie comme en 2.2.10, l'assertion (iii) dit que, si deux cycles Y' et Y'' se coupent avec la bonne dimension, alors

$$c\ell(Y' \cap Y'') = c\ell(Y') \cup c\ell(Y'') \quad ,$$

pourvu que les multiplicités des composantes de $Y' \cap Y''$ soient calculées comme sommes alternées de Tor.

Remarque 2.3.10 : Soit $X/\mathrm{Spec}(k)$, k algébriquement clos. Si deux cycles de codimension c dans X sont algébriquement équivalents, il résulte de l'existence de la théorie relative ci-dessus que les images dans $H^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c))$ de leurs classes sont les fibres, en deux points de S connexe convenable, d'une section sur S du faisceau constant $H^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c))$ (le faisceau $R^{2c}f_*\mathbb{Z}/n(c)$ pour $f = pr_2 : X \times S \longrightarrow S$) : deux cycles algébriquement équivalents ont même classe dans $H^{2c}(X,\mathbb{Z}/n(c))$.

3. Application : la formule des traces de Lefschetz dans le cas propre et lisse.

3.1. - Soient X et Y des variétés algébriques propres et lisses sur un corps algébriquement clos k, purement de dimensions N et M. Via l'isomorphisme de Künneth $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$, le morphisme trace $H^*(X \times Y)(M) \longrightarrow H^*(X)$ n'est autre que $H^*(X) \otimes$ (le morphisme trace $H^*(Y)(M) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$). Le morphisme étant homogène de degré pair, il n'y a pas de problème de signe. On le note $\int_Y$.

3.2. - Une classe $\eta \in H^{2q}(X \times Y)(q)$ définit un morphisme de degré $2(q-N)$ $\eta_{XY} : H^*(Y)(N-q) \longrightarrow H^*(X)$, par la formule

$$\beta \longmapsto \int_Y \eta . pr_2^* \beta \quad .$$

Proposition 3.3 - *Soient p et q deux entiers, avec $p + q = N + M$, et $\varepsilon \in H^{2p}(X \times Y)(p)$, $\eta \in H^{2q}(X \times Y)(q)$. La trace de $\eta_{XY}\, \varepsilon_{YX} : H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$ étant entendue au sens 1.3, on a alors*

$$Tr_{X \times Y}(\eta . \varepsilon) = Tr(\eta_{XY}\, \varepsilon_{YX}, H^*(X)) \quad .$$

Pour exorciser les signes, il y a intérêt à ne retenir de la graduation de H^* que la $\mathbb{Z}/2$-graduation sous-jacente. Pour éviter de trainer avec soi les twist à la Tate, on fixe de plus un isomorphisme $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell$. Soit α_Y l'homomorphisme $H^*(Y) \longrightarrow H^*(Y)^\vee$ (un isomorphisme) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^*(Y) \otimes H^*(Y) & \xrightarrow{\ \cdot\ } & H^*(Y) & \xrightarrow{Tr} & \mathbb{Q}_\ell \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y \otimes 1} & & & & \| \\ H^*(Y)^\vee \otimes H^*(Y) & & \xrightarrow[1.3.1]{} & & \mathbb{Q}_\ell \end{array} \quad .$$

L'application η_{XY} est l'image de η par

$$H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\alpha_Y} H^*(X) \otimes H^*(Y)^\vee \underset{1.3.2}{=\!=} Hom(H^*(Y), H^*(X)) \quad ,$$

et de même pour ε. La définition 1.3.4 de la trace ramène alors 3.3 à la formule $Tr_{X \times Y} = Tr_X \otimes Tr_Y$.

Remarque 3.4 - La preuve de 3.4 n'utilise pas que α_X et α_Y soient des isomorphismes. Elle vaut sans supposer X et Y lisses. Toutefois, en dehors du cas lisse, il est difficile de trouver des classes de cohomologie auxquelles on veuille appliquer 3.3 .

Remarque 3.5 - Si ξ, η sont les classes de cohomologie de cycles algébriques A et B sur $X \times Y$, de codimension p et q , et que $A \cap B$ est de dimension 0 , alors $Tr_{X \times Y}(\eta\xi)$ est la multiplicité d'intersection A.B , calculée par une somme alternée de Tor (2.3.9).

Proposition 3.6. - Pour $q = M$ et $\eta = c\ell(B)$ la classe d'un sous-schéma $B \subset X \times Y$, fini sur X , l'application η_{XY} est la composée

$$\eta_{XY} : H^*(Y) \xrightarrow{pr_2^*} H^*(B) \xrightarrow{Tr_{B/X}} H^*(X) \quad .$$

D'après 3.2 et (2.3.3.1) pour $\varkappa = \mathcal{O}_B$, on a en effet

$$\eta_{XY}(\beta) = Tr_{X \times Y/X}(c\ell(B).pr_2^*\beta) = Tr_{B/X}(pr_2^*\beta) \quad .$$

Le cas le plus important est celui où B est le graphe d'une application $f : X \longrightarrow Y$. Dans ce cas, 3.6 montre que $\eta_{XY} = f^*$.

Corollaire 3.7 - Soit f un endomorphisme de X propre et lisse sur un corps algébriquement clos k . On suppose que les points fixes de f sont isolés. Alors, la trace $\Sigma(-1)^i Tr(f^*, H^i(X))$ est le nombre de points fixes de f , chacun compté avec sa multiplicité.

Dans 3.5, on prend A = graphe de l'identité, B = graphe de f et on applique 3.3, 3.6 .

Corollaire 3.8 - Soient X une courbe sur k algébriquement clos, déduite par extension des scalaires de X_0 sur $\mathbb{F}_q$, et f le morphisme de Frobenius. Alors, $\Sigma(-1)^i Tr(f^*, H_c^i(X))$ est le nombre de points fixes de f .

On peut remplacer X par X_{red} , donc supposer X réduite. Soit U l'ouvert de X où X est lisse de dimension 1, et $\bar{U}$ la complétion projective

et lisse de U . Les suites exactes longues de cohomologie pour (X,U) et $(\overline{U},U)$ donnent

$$\mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(X)) = \mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(U)) + \mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(X-U))$$

et

$$\mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(\overline{U})) = \mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(U)) + \mathrm{Tr}(f^*,H_c^*(\overline{U}-U)) \quad .$$

Les mêmes formules valent pour les nombres de points fixes. La formule 3.8 étant claire pour un schéma de dimension 0 , ceci ramène à prouver 3.8 pour $\overline{U}$. Ce cas est justiciable de 3.7. Le fait que $df = 0$ garantit que les points fixes sont tous de multiplicité un.

Remarque 3.9 - Pour X de dimension ≤ 1 sur k algébriquement clos, et $f : X \longrightarrow X$ tel que $df = 0$, il n'est pas difficile de vérifier que 3.8 est encore valable.

DUALITE

On trouvera dans cet exposé quelques théorèmes et compatibilités, tous relatifs à la dualité de Poincaré. Au paragraphe 1, le théorème de bidualité locale en dimension 1 (SGA 5 I 5.1) et quelques calculs de duaux.
Au paragraphe 2, une démonstration très économique de la dualité de Poincaré sur les courbes, que m'a apprise M. Artin. Au paragraphe 3, une compatibilité qui fait le lien entre deux définitions de l'accouplement qui donne lieu à la dualité de Poincaré pour les courbes : par cup-produit, ou par autodualité de la jacobienne. Au paragraphe 4, enfin, la preuve de la compatibilité du titre.

Dans tout l'exposé, les schémas seront noethériens et séparés, et n est un entier inversible sur tous les schémas considérés.

SOMMAIRE

1. Bidualité locale, en dimension 1..... 1
2. La dualité de Poincaré pour les courbes, d'après M. Artin..... 5
3. Dualité de Poincaré et jacobienne..... 8
4. Compatibilité SGA 4 XVIII 3.1.10.3..... 12

1. Bidualité locale, en dimension 1.

1.1 - Soit S un schéma régulier purement de dimension 1. Nous nous proposons de montrer que le complexe réduit à $\mathbb{Z}/n$ en degré 0 est dualisant, i.e. que pour $K \in Ob D_c^b(S,\mathbb{Z}/n)$ ($_c$ pour constructible), si on pose $DK = R\underline{Hom}(K,\mathbb{Z}/n)$, alors DK est encore constructible à cohomologie bornée, et que le morphisme canonique α de K dans DDK est un isomorphisme.

Pour K dans D^-, et L quelconque, on a

$$Hom(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L, \mathbb{Z}/n) = Hom(L, \underline{Hom}(K,\mathbb{Z}/n)) \quad .$$

Le morphisme de K dans DDK est défini en supposant DK dans D^- ; si $\beta : DK \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ est l'accouplement canonique, il est défini par l'accouplement $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} DK = DK \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/n$.

1.2 - Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini. Posons $K_X = Rf^!\mathbb{Z}/n$. Pour $K \in Ob D^-(X,\mathbb{Z}/n)$, on pose $DK = R\underline{Hom}(K,K_X)$. L'adjonction entre $Rf_!$ et $Rf^!$ assure que

$$Rf_*DK = Rf_*\, R\underline{Hom}(K,Rf^!\mathbb{Z}/n) = R\underline{Hom}(Rf_!K,\mathbb{Z}/n) = DRf_!K \quad .$$

L'accouplement correspondant entre $Rf_!K$ et Rf_*DK est le composé

$$Rf_!K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_*DK \longrightarrow Rf_!(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} DK) \longrightarrow Rf_!Rf^!\mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n \quad .$$

La symétrie de cette description montre que, pour f propre, le diagramme

(1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} Rf_*K & \longrightarrow & DDRf_*K \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ Rf_*DDK & \xrightarrow{\sim} & DRf_*DK \end{array}$$

est commutatif.

Si f est l'inclusion d'un point fermé, on sait que $Rf^!\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n(-1)[-2]$ - soit, à torsion et décalage près, $\mathbb{Z}/n$. Sur le spectre d'un corps, ce complexe est dualisant (dualité de Pontrjagin pour les $\mathbb{Z}/n$-modules). D'après 1.2.1, on a donc $K \xrightarrow{\sim} DDK$ pour K de la forme $Rf_!L$ - et donc lorsque le support de H^*K est fini.

Théorème 1.3 - Soient $j : U \hookrightarrow S$ un ouvert dense de S et F un faisceau localement constant constructible de $\mathbb{Z}/n$-modules sur U . On a $Dj_*F = j_*DF$, i.e. $\underline{Hom}(j_*F, \mathbb{Z}/n) = j_*\underline{Hom}(F, \mathbb{Z}/n_U)$ et $\underline{Ext}^i(j_*F, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $i > 0$.

Sur U , $\underline{Ext}^i(j_*F, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $i > 0$, car F est localement constant (et $\mathbb{Z}/n$ un $\mathbb{Z}/n$-module injectif), tandis que pour $i = 0$ c'est le dual $F^\vee$ de F . On vérifie que $\underline{Hom}(j_*F, \mathbb{Z}/n) = j_*F^\vee$, et il reste à vérifier la nullité des $\underline{Ext}^i (i > 0)$ en les points de $S - U$. Le problème est local en ces points. Ceci nous ramène à supposer que S est un trait strictement local et, que U est réduit à son point générique η . Soit $I = Gal(\bar{\eta}/\eta)$. Le faisceau F s'identifie au module galoisien $F_{\bar{\eta}}$, et la fibre spéciale de j_*F à $F_{\bar{\eta}}^I$.

Soit i l'inclusion du point fermé s, et appliquons D aux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & j_!F & \longrightarrow & j_*F & \longrightarrow & i_*F_{\bar{\eta}}^I & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & j_!F_{\bar{\eta}}^I & \longrightarrow & F_{\bar{\eta}}^I & \longrightarrow & i_*F_{\bar{\eta}}^I & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On obtient un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} i_*(F_{\bar{\eta}}^I)^\vee(-1)[-2] & \longrightarrow & Dj_*F & \longrightarrow & Rj_*F^\vee \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ i_*(F_{\bar{\eta}}^I)^\vee(-1)[-2] & \longrightarrow & (F_{\bar{\eta}}^I)^\vee & \longrightarrow & Rj_*F_{\bar{\eta}}^I \end{array} .$$

La suite exacte longue déduite de la première ligne fournit la nullité des $\underline{Ext}^i (i > 2)$ et, prenant la fibre en s , on trouve

$$0 \longrightarrow (\underline{H}^1 Dj_* F)_s \longrightarrow H^1(I, F_{\bar{\eta}}^{\vee}) \xrightarrow{\partial} (F_{\bar{\eta}}^{I})^{\vee}(-1) \longrightarrow (\underline{H}^2 Dj_* F)_s \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(I, (F_{\bar{\eta}}^{I})^{\vee}) \xrightarrow{\partial} (F_{\bar{\eta}}^{I})^{\vee}(-1) \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisque $(F_{\bar{\eta}}^{I})^{\vee} = (F_{\bar{\eta}}^{\vee})_I$, posant $M = F_{\bar{\eta}}^{\vee}$, il faut finalement vérifier que

$$H^1(I,M) \xrightarrow{\sim} H^1(I,M_I) \quad .$$

Si p est l'exposant caractéristique résiduel, I est extension d'un groupe isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}_{p'} = \varprojlim_{(m,p)=1} \mathbb{Z}/m$ par un p-groupe P . Puisque P est premier à l'ordre de M , on a $H^i(P,M) = 0$ $(i > 0)$ et $(M_I)^P = (M^P)_I$. Ceci permet de remplacer M par M^P et I par I/P . On a enfin un isomorphisme fonctoriel $H^1(\hat{\mathbb{Z}}_{p'},M) \sim$ (coinvariants de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}$ dans M), d'où le théorème.

Théorème 1.4 - Pour $K \in \mathrm{Ob}\, D_c^b(S,\mathbb{Z}/n)$, on a $K \xrightarrow{\sim} DDK$.

Par dévissage, on se ramène à supposer que K est réduit à un faisceau constructible F en degré 0 , et que F est soit à support fini (1.2), soit de la forme j_*F_1 comme en 1.3 . Dans ce second cas, 1.3 nous ramène à la bidualité locale pour F localement constant sur U .

2. La dualité de Poincaré pour les courbes, d'après M. Artin.

2.1 - Soit X une courbe projective et lisse sur k algébriquement clos. On pose $K_X = \mathbb{Z}/n(1)[2]$ et, pour $K \in \mathrm{Ob}\, D_c^b(X,\mathbb{Z}/n)$, $DK = R\underline{\mathrm{Hom}}(K,K_X)$. Pour M un $\mathbb{Z}/n$-module, on pose aussi $DM = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}/n)$; de même pour les complexes de modules. Le morphisme trace $H^0(X,K_X) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, ou $R\Gamma(X,K_X) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, définit un accouplement $R\Gamma(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(X,DK) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$. La dualité de Poincaré entre cohomologie et cohomologie à supports propres d'un ouvert $j : U \hookrightarrow X$ de X dit que, pour $K = j_!\mathbb{Z}/n$, cet accouplement identifie chaque facteur au dual de l'autre.

J'expose ci-dessous une démonstration, qui m'a été communiquée par M. Artin, de ce que pour $K \in \mathrm{Ob}\, D_c^b(X,\mathbb{Z}/n)$, cet accouplement est toujours parfait, i.e. définit un isomorphisme

$$R\Gamma(X,K) \xrightarrow{\sim} DR\Gamma(X,DK) \qquad (2.1.1)$$

Pour tout faisceau constructible F, posons

$$'H^i(X,F) = \mathbb{Z}/n\text{-dual de } H^{-i}(X,DF) .$$

Que (2.1.1) soit un isomorphisme équivaut au

Théorème 2.2 - *Pour F un faisceau constructible de $\mathbb{Z}/n$-modules, on a*

$$H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} {}'H^i(X,F) \qquad (2.2.1)$$

Lemme 2.3 - *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme génériquement étale entre courbes lisses sur k. On a $K_X = f^*K_Y = Rf^!K_Y$, avec Tr_f pour flèche d'adjonction $Rf_!Rf^!K_Y \longrightarrow K_Y$.*

On se ramène à vérifier que pour f fini, on a $f_*Rf^!K_Y = R\mathrm{Hom}(f_*\mathbb{Z}/n,K_Y)$ est $f_*\mathbb{Z}/n$, avec Tr_f pour flèche d'adjonction. La nullité des $\underline{\mathrm{Ext}}^i (i > 0)$ résulte de 1.3, et l'assertion en résulte.

On peut dire, plus explicitement, que $Rf^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^!$: $f^!F(U) = \mathrm{Hom}(f_!\mathbb{Z}_U, F)$ et que 1.3 implique la nullité des $R^if^!\mathbb{Z}/n$ pour $i > 0$.

Corollaire 2.4 - Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme génériquement étale de courbes projectives et lisses sur k . On a $'H^i(X, f_*F) = 'H^i(X', F)$; cet isomorphisme est fonctoriel et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, f_*F) & \longrightarrow & 'H^i(X, f_*F) \\ \| & & \| \\ H^i(X', F) & \longrightarrow & 'H^i(X', F) \end{array}$$

est commutatif.

L'isomorphisme est donné par 1.2 : $Df_*F = f_*DF$.

2.5 - Prouvons 2.2. Si F est réduit à $\mathbb{Z}/n$ en un point, prolongé par 0 , on a $\mathbb{H}^*(DF) = \mathrm{Ext}^*(F, K_X) = \mathbb{Z}/n$ en degré 0 , et dans l'accouplement $H^*(F) \otimes H^*(DF) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, on a $1 \otimes 1 \longrightarrow 1$ (Cycle, 2.1.5) : la dualité est parfaite. Le cas où F est à support fini se traite de même.

Pour F constructible quelconque, A le sous-faisceau de ses sections à support fini, et $G = F/A$, la suite exacte

(2.5.1) $$0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

fournit un diagramme

(2.5.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \longrightarrow & H^0(X,A) & \longrightarrow & H^0(X,F) & \longrightarrow & H^0(X,G) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow & 'H^{-1}(X,F) & \longrightarrow & 'H^{-1}(X,G) & \longrightarrow & 'H^0(X,A) & \longrightarrow & 'H^0(X,F) & \longrightarrow 'H^0X,G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et des isomorphismes compatibles $H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} H^i(X,G)$, $'H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} 'H^i(X,G)$ $(i \neq 0, -1)$. Si $j : U \longrightarrow X$ est un ouvert sur lequel F est localement constant, on a une suite exacte

(2.5.3) $\quad 0 \longrightarrow G \longrightarrow j_*j^*F \longrightarrow B \longrightarrow 0$

avec B à support fini. Puisque $'H^i(X, j_*j^*F) = DH^{2-i}(X, j_*(j^*F)^\vee(1))$ d'après 1.3, cet $'H^i = 0$ pour $i < 0$ et (2.5.2) et la suite exacte longue définie par (2.5.3) montrent que $'H^i$ est toujours nul pour $i < 0$.

Si $F = \mathbb{Z}/n$, le théorème est vrai pour $i = 0$ et 2 . Ceci exprime que, pour X connexe, le morphisme trace : $H^2(X, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$ est un isomorphisme. D'après 2.4, le théorème reste vrai pour $i = 0$ et $F = f_*\mathbb{Z}/n$.

Pour F à nouveau quelconque et G comme plus haut, il existe $f : X' \longrightarrow X$ comme en 2.4 tel que G se plonge dans $f_*\mathbb{Z}/n$:

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow f_*\mathbb{Z}/n \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ .$$

Changeant X' en un X''/X' , on peut supposer que $H^i(X,G) \longrightarrow H^i(X, f_*\mathbb{Z}/n) = H^i(X', \mathbb{Z}/n)$ est nul pour $i > 0$. Considérons alors

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & H^0(X,G) & \to & H^0(X',\mathbb{Z}/n) & \to & H^0(X,Q) & \to & H^1(X,G) & \xrightarrow{0} & H^1(X',\mathbb{Z}/n) & \to & H^1(X,Q) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & 'H^0(X,G) & \to & 'H^0(X',\mathbb{Z}/n) & \to & 'H^0(X,Q) & \to & 'H^1(X,G) & \longrightarrow & 'H^1(X',\mathbb{Z}/n) & \to & 'H^1(X,Q) & \to \ldots
\end{array}$$

L'isomorphisme en $H^0(X')$ fournit $H^0(X,G) \hookrightarrow 'H^0(X,G)$, et la même injectivité pour F (2.5.2). On applique cela à Q pour trouver que $H^0(X,G) \xrightarrow{\sim} 'H^0(X,G)$. De même pour F (2.5.2). Appliqué à Q , cela donne $H^1(X,G) \hookrightarrow 'H^1(X,G)$. On applique cela à $H^1(X', \mathbb{Z}/n)$. Ce groupe ayant même ordre que $'H^1(X', \mathbb{Z}/n) = D(H^1(X', \mathbb{Z}/n)(1))$, on trouve un isomorphisme, et $H^1(X,G) \xrightarrow{\sim} 'H^1(X,G)$. De même pour F . Pour $i = 2$, on sait déjà que $H^2(X', \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} 'H^2(X', \mathbb{Z}/n)$, et on procède de même, puis on s'arrête, faute de combattants.

3. Dualité de Poincaré pour les courbes.

Dans ce paragraphe, nous prouvons la compatibilité (Arcata VI 2.3.3) .

3.1 - Les notations sont celles de (Arcata VI 2.3) : $\bar{X}$ est une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k , D est un diviseur réduit sur $\bar{X}$, O un point de $X = \bar{X} - D$

$$X \xhookrightarrow{j} \bar{X} \xleftarrow{i} D \quad ,$$

et $\mathrm{Pic}_D(\bar{X}) = H^1(\bar{X}, {}_D\mathbb{G}_m)$ où ${}_D\mathbb{G}_m$ est le faisceau des sections de $\mathbb{G}_m$ congrues à 1 mod D . On rappelle que $H^1_c(X,\mu_n) = \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})_n$, et que $x \longrightarrow \mathcal{O}(x)$ définit une application canonique $f : X \longrightarrow \mathrm{Pic}_D(\bar{X})$. On pose $f_O(x) = f(x) - f(O) : X \longrightarrow \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})$.

Notons encore j l'inclusion de $X \times X$ dans $X \times \bar{X}$. La diagonale Δ de $X \times X$ est fermée dans $X \times \bar{X}$; elle définit une classe dans $H^2_\Delta(X \times X, \mu_n) = H^2_\Delta(X \times \bar{X}, j_!\mu_n)$. On note c son image dans $H^2(X \times \bar{X}, j_!\mu_n)$.

La formule de Künneth assure que

$$H^*(X \times \bar{X}, j_!\mu_n) = H^*(X, \mathbb{Z}/n) \otimes H^*(\bar{X}, j_!\mu_n) = H^*(X, \mathbb{Z}/n) \otimes H^*_c(X, \mu_n) \quad .$$

Nous nous proposons de calculer la (1,1)-composante de c ,

$$c^{1,1} \in H^1(X, \mathbb{Z}/n) \otimes H^1_c(X, \mu_n) = H^1(X, H^1_c(X, \mu_n))$$

$$= H^1(X, \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})_n) \quad .$$

La suite exacte

$$O \longrightarrow \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})_n \longrightarrow \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X}) \xrightarrow{x \longrightarrow x^n} \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X}) \longrightarrow O$$

fait de $\mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})$ un $\mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})_n$ -torseur sur $\mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})$. Notons, u la classe, dans $H^1(X, H^1_c(X,\mu_n)) = H^1(X, \mathrm{Pic}^O_D(\bar{X})_n)$, de son image réciproque par f_O .

Proposition 3.2 - Avec les notations précédentes, $c^{1,1} = -u$.

Soit e la différence des images dans $H^2(X \times \bar{X}, j_!\mu_n)$ des classes de cohomologie de Δ et $X \times \{0\}$. La classe de $X \times \{0\}$ étant de type de Künneth $(0,2)$, on a $c^{1,1} = e^{1,1}$. Soit la suite spectrale de Leray pour $pr_1 : X \times \bar{X} \longrightarrow X$ et le faisceau $j_!\mu_n$:

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q pr_{1*} j_!\mu_n) = H^p(X, H_c^q(X, \mu_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X \times \bar{X}, j_!\mu_n) \quad .$$

Elle dégénère : c'est le produit tensoriel de $H^*(X)$ par la suite spectrale de Leray (triviale) pour $\bar{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau $j_!\mu_n$. Le diviseur $\Delta - X \times \{0\}$ est fibre par fibre de degré 0 , de sorte que l'image de e dans E^{02} est nulle. On peut donc parler de son image $\bar{e}$ dans $E^{1,1}$, et il nous faut montrer que $\bar{e} = -u$.

Soit G sur $X \times \bar{X}$ le sous-faisceau de $\mathbb{G}_m$ formé des sections locales dont la restriction au sous-schéma $X \times D$ est 1 . On a encore une suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!\mu_n \longrightarrow G \longrightarrow G \longrightarrow 0 \qquad (3.2.1)$$

et e est l'image par ∂ de la classe $e_1 \in H^1(X \times \bar{X}, G)$ du faisceau inversible $\mathcal{O}(\Delta - X \times \{0\})$ trivialisé par 1 sur $X \times D$.

L'image directe par Rpr_{1*} du triangle distingué défini par (2.2.1) est un triangle distingué

$$\xrightarrow{\partial} Rpr_{1*} j_!\mu_n \longrightarrow Rpr_{2*} G \longrightarrow Rpr_{2*} G \xrightarrow{\partial} \qquad (3.2.2)$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(X \times \bar{X}, G) & \xrightarrow{\partial} & H^2(X \times \bar{X}, j_!\mu_n) \\ \| (1) & & \| \\ \mathbb{H}^1(X, Rpr_{1*} G) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{H}^2(X, Rpr_{1*} j_!\mu_n) \end{array}$$

est commutatif : notre problème devient celui d'identifier l'image dans $E^{11} = H^1(X, H_c^1(X, \mu_n))$ (l'image dans E^{02} étant nulle) de l'image par

$\partial_{(3.2.2)} : \mathbb{H}^1(X, Rpr_{1*}G) \longrightarrow \mathbb{H}^2(X, Rpr_{1*}j_!\mu_n)$ de la classe, encore notée e_1, qui correspond à e_1 par (1).

Le faisceau $R^1pr_{1*}G$ est défini par le schéma en groupe sur X image réciproque du groupe algébrique $Pic_D(\bar{X})$ sur $Spec(k)$, et l'image de e_1 dans $H^0(X, R^1pr_*G) = Hom(X, Pic_D(\bar{X}))$ est f_0.

Représentons le triangle (3.2.2) comme défini par une suite exacte courte de complexes de faisceaux.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit B' le sous-faisceau de

$$\tau_{\leq 1}B : \ldots B^0 \longrightarrow Ker(d) \longrightarrow 0 \ldots$$

obtenu en remplaçant $B'^1 = Ker(d)$ par l'image réciproque, par $Ker(d) \longrightarrow \underline{H}^1(B) = Pic_D(\bar{X})$ sur X, de $Pic_D^0(\bar{X})$ sur X. Soient $A' = A \cap B'$ et C' l'image de B'. On a $A' = \tau_{\leq 1}(A)$, et C' se déduit de C comme B' de B, d'où un diagramme commutatif de suites exactes courtes

(3.2.2)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \tau_{\leq 1}A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_c^1(X, \mu_n)[1] & \longrightarrow & Pic_D^0(\bar{X})[1] & \longrightarrow & Pic_D^0(\bar{X})[1] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où la dernière ligne doit être vue comme une suite exactes de complexes de faisceaux réduits au degré 1 sur X. On a

a) $e \in \mathbb{H}^2(X, A)$ provient de $\tilde{e} \in \mathbb{H}^2(X, \tau_{\leq 1}A)$ (car son image dans E^{02} est nulle). On cherche l'image $\bar{e}$ de $\tilde{e}$ dans $\mathbb{H}^2(X, H_c^1(X, \mu_n)[-1]) = H^1(X, H_c^1(X, \mu_n))$

b) $e_1 \in \mathbb{H}^1(X, C)$ provient de $\tilde{e}_1 \in \mathbb{H}^1(X, C')$, car son image f_0 dans $H^0(X, Pic_D(\bar{X}))$ est dans $H^0(X, Pic_D^0(\bar{X}))$. On peut prendre $\tilde{e} = \partial\tilde{e}_1$.

c) On a donc $\bar{e} = \partial f_0$, où ∂ est défini par (3.2.2), et où on utilise les isomorphismes usuels $\mathbb{H}^2(X,F[-1]) = H^1(X,F)$. Ces isomorphismes anticommutent à ∂ , de sorte que $\bar{e} = -\partial f_0$, pour ∂ défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_c(X,\mu_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_D(\bar{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_D(\bar{X}) \longrightarrow 0$$

On conclut par (Cycles, 1.1.1).

3.3 - Pour tout homomorphisme $\varphi : H^1_c(X,\mu_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, soit $\varphi(u) \in H^1(X,\mathbb{Z}/n)$ l'image de u par $\varphi : H^1(X,H^1_c(X,\mu_n)) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}/n)$. Si $x \in H^1_c(X,\mu_n)$, le cup-produit $\varphi(u) \cup x$ est dans $H^2_c(X,\mu_n)$. On se propose de prouver que

<u>Proposition 3.4</u> - $\mathrm{Tr}(\varphi(u) \cup x) = \varphi(x)$.

Cette identité se déduit, par application de φ , de

(3.4.1) $\qquad \mathrm{Tr}(u \cup x) = x$

où Tr est cette fois l'application

$$\mathrm{Tr} : H^2_c(X,H^1_c(X,\mu_n) \otimes \mu_n) \longrightarrow H^1_c(X,\mu_n) \quad ,$$

de sorte que $x \longmapsto \mathrm{Tr}(u \cup x)$ est l'application composée

(3.4.2) $H^1_c(X,\mu_n) \xrightarrow{u \otimes x} H^1(X,H^1_c(X,\mu_n)) \otimes H^1_c(X,\mu_n) \xleftarrow{\sim} H^1(X,\mathbb{Z}/n) \otimes H^1_c(X,\mu_n) \otimes H^1_c(X,\mu_n)$

$$\xrightarrow{(1)} H^2_c(X,\mu_n) \otimes H^1_c(X,\mu_n) \xrightarrow{\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Id}} H^1_c(X,\mu_n)$$

où (1) est donné par $a \otimes b \otimes c \longmapsto (a \cup c) \otimes b$.

Exprimons ce morphisme en terme du morphisme trace $\mathrm{Tr} : H^3_c(X \times X, \mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^1_c(X,\mu_n)$ relatif à la seconde projection. Pour $x \in H^3_c$, $\mathrm{Tr}(x)$ se calcule ainsi : de ses composantes de Künneth, on ne garde que celle de type $(2,1)$, et on applique $\mathrm{Tr} : H^2_c(X,\mu_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$.

Notons u' l'image de u par l'application

$$H^1(X,H^1_c(X,\mu_n)) \xleftarrow{\sim} H^1(X,\mathbb{Z}/n)\otimes H^1_c(X,\mu_n) = H^1(X,\mathbb{Z}/n)\otimes H^1(\bar{X},j_!\mu_n)$$

$$\longrightarrow H^2(X\times\bar{X},\mathbb{Z}/n\boxtimes j_!\mu_n) \quad .$$ Vu la relation entre Künneth et cup-produit, on a

$$\mathrm{Tr}(u\cup x) = -\mathrm{Tr}(u'\cup \mathrm{pr}_1^* x) \quad .$$

Le second cup-produit est celui de [Cycle] 1.2.4 :

$$H^2(X\times\bar{X},\mathbb{Z}/n\boxtimes j_!\mu_n)\otimes H^1(\bar{X}\times\bar{X},j_!\mu_n\boxtimes\mathbb{Z}/n)\longrightarrow H^3(\bar{X}\times\bar{X},j_!\mu_n\boxtimes j_!\mu_n) \quad .$$

Le signe - provient de la permutation de deux symboles de degré 1 dans (1). Puisque $c\cup \mathrm{pr}_1^* x$ et $c^{1,1}\cup \mathrm{pr}_1^* x$ ont même (2,1)-composante de Künneth, et que $u' = c^{1,1}$, on a

$$\mathrm{Tr}(u\cup x) = \mathrm{Tr}(c\cup \mathrm{pr}_1^* x) \quad .$$

Le cup-produit à droite peut cette fois s'interpréter comme le cup-produit (Cycle 1.2.5) de $c\ell(\Delta)\in H^2_\Delta(X\times X,\mu_n)$ par $\mathrm{pr}_1^* x \in H^1_c(\Delta,\mu_n)$. Sur Δ, on a $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2$, d'où

$$\mathrm{Tr}(c\cup \mathrm{pr}_1^* x) = \mathrm{Tr}(c\ell(\Delta)\cup \mathrm{pr}_1^* x) = \mathrm{Tr}(c\ell(\Delta)\cup \mathrm{pr}_2^* x) = \mathrm{Tr}(c\ell(\Delta))\cup x = x.$$

4. - Compatibilité SGA 4 XVIII 3.1.10.3.

Dans SGA 4 XVIII, en proie au découragement, je n'ai pas vérifié la compatibilité du titre. Bien qu'elle s'avère n'être que fumée, je me crois tenu de réparer ici cette lacune. Pour $f : X \longrightarrow S$ séparé de type fini, il s'agissait de vérifier que le morphisme d'adjonction : $Rf_!Rf^!L \longrightarrow L$ est compatible à toute localisation étale $k : V \longrightarrow S$. Désignant par k et f plusieurs flèches, comme ci-dessous, il s'agit de vérifier une commutativité :

$$\begin{array}{ccc} X_V & \xrightarrow{k} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow{k} & S \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} k^*Rf_!Rf^!L & \xrightarrow{k^*(adj)} & k^*L \\ \downarrow & & \| \\ Rf_!Rf^!k^*L & \xrightarrow{adj} & k^*L \end{array}$$

Au niveau des complexes, la commutativité voulue s'écrit (loc.cit.)

$$\begin{array}{ccc} k^*f_!f^!L & \longrightarrow & k^*L \\ \downarrow{\scriptstyle (1)} & & \| \\ f_!f^!k^*L & \longrightarrow & k^*L \end{array}$$

On la vérifie composante par composante, ce qui ramène à une compatibilité analogue, pour L un faisceau et pour chacune des paires de foncteurs adjoints $(f_i^!, f_!^i)$, notés simplement $f^!$ et $f_!$. La flèche (1) est définie à partir de l'isomorphisme (2) : $k^*f_! = f_!k^*$, et d'un morphisme (3) : $k^*f^! \longrightarrow f^!k^*$ qui s'en déduit. Dans loc.cit, on introduit d'abord un morphisme (4) : $k_!f_! \longrightarrow f_!k_!$ déduit de (2) par adjonction de $k^* = k^!$ et de $k_!$: $k_!f_! \longrightarrow k_!f_!k^*k_! = k_!k^*f_!k_! \longrightarrow f_!k_!$, et on déduit (3) de (4) par adjonction. Il revient au même de déduire (3) de (2) par adjonction de $f_!$ et $f^!$: $k^*f^! \longrightarrow f^!f_!k^*f^! = f^!k^*f_!f^! \longrightarrow f^!k^*$.

Ecrivant k pour k^* et omettant L, la commutativité est alors celle du bord extérieur de

$$\begin{array}{ccccccc} kf_!f^! & \longrightarrow & f_!kf^! & \longrightarrow & f_!f^!f_!kf^! & \longrightarrow & f_!f^!kf_!f^! \\ \| & & & & & & \| \\ kf_!f^! & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & f_!f^!kf_!f^! \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ k & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & f_!f^!k \end{array}$$

En première ligne, on trouve un homomorphisme $kf_!f^! \longrightarrow f_!f^!kf_!f^!$, défini parce que $kf_!f^!$ est de la forme $f_!X$ $(X = kf^!)$; il admet pour rétraction le morphisme d'adjonction en seconde ligne, et la commutativité du carré inférieur est la fonctorialité de ce morphisme d'adjonction.

Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques.

Dans cet exposé, j'explique comment la formule des traces permet de calculer ou d'étudier diverses sommes trigonométriques et comment, jointe à la conjecture de Weil, elle peut permettre de les majorer.

Les deux premiers paragraphes donnent un "mode d'emploi" de ces outils. Le paragraphe 3 est un exposé, dans un langage cohomologique, des résultats de Weil sur les sommes à 1 variable. Les paragraphes 4 à 6 forment une étude détaillée des sommes de Gauss et de Jacobi - y inclus les résultats anciens et récents de Weil sur les caractères de Hecke définis par des sommes de Jacobi. Au paragraphe 7, nous étudions une généralisation à plusieurs variables des sommes de Kloosterman. Enfin, au paragraphe 8, on trouvera quelques indications sur d'autres usages qui ont été faits ou peuvent être faits de ces méthodes.

Sommaire

1. Principes..... 2
2. Dictionnaire..... 16
3. Sommes à une variable..... 22
4. Sommes de Gauss et sommes de Jacobi..... 29
5. Caractères de Hecke..... 41
6. Les caractères de Hecke définis par les sommes de Jacobi..... 46
7. Sommes de Kloosterman généralisée 52
8. Autres applications..... 63

Notations.

0.1 - On utilise les notations de Rapport , paragraphe 1. On aura souvent à considérer une extension finie $\mathbb{F}_{q^n} \subset \mathbb{F}$ de $\mathbb{F}_q$. On notera par un indice 0 un objet sur $\mathbb{F}_q$, et par un indice 1 un objet sur $\mathbb{F}_{q^n}$. Remplacer un indice 0 par un indice 1 (resp. supprimer l'indice) signifie qu'on étend les scalaires à $\mathbb{F}_{q^n}$ (resp. à $\mathbb{F}$) .

0.2 - On désigne par ℓ un nombre premier $\neq p$. Nous utilisons librement le langage des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux, ainsi que celui des E_λ-faisceaux, pour E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ (cf. Rapport, paragraphe 2 et spécialement 2.11).

0.3 - Soit H^* un espace vectoriel gradué. Si T est un endomorphisme de H^* , on pose (cf. Cycle, 1.3.5)

$$\mathrm{Tr}(T,H^*) = \sum(-1)^i \mathrm{Tr}(T,H^i) \quad .$$

1. - Principes.

1.1 - Soient X_0 un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ et $\mathcal{F}_0$ un E_λ-faisceau sur X_0 . La formule des traces dit que

$$(1.1.1) \qquad \sum_{x \in X^F} \mathrm{Tr}(F_x^*,\mathcal{F}) = \sum(-1)^i \mathrm{Tr}(F^*,H_c^i(X,\mathcal{F})) \quad .$$

Avec la notation 0.3, le membre de droite s'écrit simplement $\mathrm{Tr}(F^*,H_c^*(X,\mathcal{F}))$.

Cette formule des traces pour les E_λ-faisceaux peut soit être déduite de Rapport 4.10 par passage à la limite (cf. Rapport 4.11 à 4.13) , soit être déduite de la formule des traces pour les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux (Rapport 3.2) par la méthode de (Fonctions L mod.ℓ^n , 4.3).

Nous allons interpréter diverses sommes trigonométriques comme le membre de gauche de (1.1.1), pour X_0 et $\mathcal{F}_0$ convenables.

1.2 - Soit A un groupe fini. Un A-torseur sur un schéma X est un faisceau T sur X, muni d'une action à droite de A, qui, localement (pour la topologie étale) sur X, est isomorphe au faisceau constant A sur lequel A agit par translation à droite.

Si $\tau : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme, et T un A-torseur, il existe à isomorphisme unique près un et un seul B-torseur $\tau(T)$, muni d'un morphisme de faisceaux $\tau : T \longrightarrow \tau(T)$ tel que

(1.2.1) $\qquad \tau(ta) = \tau(t)\tau(a)$.

Si T est un A-torseur sur X, et ρ une représentation linéaire de A : $\rho : A \longrightarrow GL(V)$ (V espace vectoriel de dimension finie sur E_λ), il existe à isomorphisme unique près un seul E_λ-faisceau $\mathfrak{F}$, lisse de rang $\dim(V)$, muni d'un morphisme de faisceaux

(1.2.2) $\qquad \rho : T \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}(V, \mathfrak{F})$

tel que $\rho(ta) = \rho(t)\,\rho(a)$. On le note $\rho(T)$. Pour $\tau : A \longrightarrow B$ et ρ une représentation de B, on a un isomorphisme canonique $\rho(\tau(T)) = (\rho\tau)(T)$.

Dans ce paragraphe (sauf l'appendice), on ne considère que le cas où A est commutatif et où $V = E_\lambda$: ρ est un caractère $A \longrightarrow E_\lambda^*$, et $\rho(T)$ un E_λ-faisceau lisse de rang un. Le morphisme 1.2.2 s'interprète comme un morphisme partout non nul

(1.2.3) $\qquad \rho : T \longrightarrow \rho(T)$

tel que $\rho(ta) = \rho(a).\rho(t)$.

1.3 - Soient S un schéma, G un schéma en groupe commutatif sur S, et G' une extension de schémas en groupes commutatifs sur S

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G' \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \quad .$$

Le faisceau T des sections locales de π est alors un A-torseur sur G .

Si X est un schéma sur S, et f,g deux S-morphismes de X dans G, du fait que T est défini par une extension, on a un isomorphisme canonique

(1.3.1) $\qquad (f+g)^*T = f^*T + g^*T \quad .$

A gauche, $f+g$ est la somme de f et g, au sens de la loi de groupe G ; à droite, $+$ désigne une somme de torseurs.

Si $f : X \longrightarrow G$ se factorise par G', f^*T est trivial (et une factorisation donne une trivialisation):à isomorphisme (non unique) près, le A-torseur f^*T ne dépend que de l'image de f dans $\mathrm{Hom}_S(X,G)/\pi\,\mathrm{Hom}_S(X,G')$: il est donné par le morphisme ∂ dans la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,G) \xrightarrow{\partial} H^1(X,A) \quad .$$

Nous appliquerons ces constructions aux suites exactes de Kummer $0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$, et aux torseurs de Lang.

1.4 - <u>Le torseur de Lang</u>. Soit G_0 un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$ (pour le cas non commutatif, voir l'appendice). La loi de groupe est notée <u>multiplicativement</u>. L'isogénie de Lang

$$\mathfrak{L} : G_0 \longrightarrow G_0 : x \longrightarrow Fx.x^{-1}$$

est étale ; son image, un sous-groupe ouvert de G_0, ne peut être que G_0 lui-même ; son noyau est le groupe fini $G_0(\mathbb{F}_q)$. Le <u>torseur de Lang</u> L est le $G_0(\mathbb{F}_q)$-torseur sur G_0 défini par la suite exacte

(1.4.1) $\qquad 0 \longrightarrow G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow G_0 \xrightarrow{\mathfrak{L}} G_0 \longrightarrow 0 \quad .$

<u>Notation</u> : On note encore L et $\mathfrak{L}$ (ou $L_{(q)}$ et $\mathfrak{L}_{(q)}$) les objects déduits de L et $\mathfrak{L}$ par extension du corps de base. En cas de besoin, on précisera par un indice 0 ou 1.

Exemples : Pour $G_0 = \mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$, les suites (1.4.1) s'écrivent

(1.4.2) $$0 \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{x^q - x} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0$$

(1.4.3) $$0 \longrightarrow \mu_{q-1} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{x^{q-1}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

1.5 - Calculons l'endomorphisme F^* de la fibre du torseur de Lang en $\gamma \in G^F = G_0(\mathbb{F}_q)$. Si $g \in \mathcal{L}^{-1}(\gamma) \subset G$, on a $Fg = Fg.g^{-1}.g = \gamma g$. Dès lors (Rapport, 1.2)

(1.5.1) sur $L_0(G_0)_\gamma \simeq \mathcal{L}^{-1}(\gamma)$, F^* est $g \longmapsto g\gamma^{-1}$.

1.6 - Sur $\mathbb{F}_{q^n}$, l'identité $F_{(q^n)} = F_{(q)}^n$ entre endomorphismes de G_1 implique que $\mathcal{L}_{(q^n)} = \mathcal{L}_{(q)} \circ \prod_{i=0}^{n-1} F_{(q)}^i$. Sur $G_0(\mathbb{F}_{q^n})$, $F_{(q)}^i$ agit comme l'élément $x \longmapsto x^{q^i}$ de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$. Sur $G_0(\mathbb{F}_{q^n})$, $\prod F_{(q)}^i$ est donc le composé de la norme $G_0(\mathbb{F}_{q^n}) \longrightarrow G_0(\mathbb{F}_q)$ et de l'inclusion $G_0(\mathbb{F}_q) \subset G_0(\mathbb{F}_{q^n})$: le diagramme

(1.6.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_0(\mathbb{F}_{q^n}) & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(q^n)}} & G_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle N} & & \downarrow{\scriptstyle \prod_{i=0}^{n-1} F_{(q)}^i} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & G_0(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(q)}} & G_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif. Dans le langage des torseurs, ceci fournit un isomorphisme canonique entre $G_0(\mathbb{F}_q)$-torseurs sur G_1

(1.6.2) $$NL_{(q^n)} = L_{(q)} \quad .$$

Définition 1.7 : Soient $f_0 : X_0 \longrightarrow G_0$ un morphisme et $\chi : G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère. On pose $\mathcal{F}(\chi, f_0) = \chi^{-1}(f_0^*(L_0(G_0)) = f_0^*\chi^{-1}(L_0(G_0))$

On a les propriétés de fonctorialité suivantes :

a) $\mathcal{F}(\chi, f_0)$ est bimultiplicatif en χ et f_0 :

(1.7.1) $$\mathcal{F}(\chi, f_0'.f_0'') = \mathcal{F}(\chi, f_0') \otimes \mathcal{F}(\chi, f_0'') \quad ,$$

(1.7.2) $$\mathcal{F}(\chi'\chi'', f_0) = \mathcal{F}(\chi', f_0) \otimes \mathcal{F}(\chi'', f_0) \quad .$$

Cela résulte de la définition de $\chi(T)$, pour T un torseur, joint à (1.3.1) pour (1.7.1).

b) Pour $g_0 : Y_0 \longrightarrow X_0$ un morphisme, on a

(1.7.3) $\qquad \mathcal{F}(\chi, f_0 \circ g_0) = g_0^* \mathcal{F}(\chi, f_0)$.

En particulier, $\mathcal{F}(\chi, f_0) = f_0^* \mathcal{F}(\chi)$, où $\mathcal{F}(\chi)$ désigne $\mathcal{F}(\chi, Id_{G_0})$.

c) Pour $u_0 : G_0 \longrightarrow H_0$ un morphisme, et $\chi : H_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$, on a

(1.7.4) $\qquad \mathcal{F}(\chi, u_0 f_0) = \mathcal{F}(\chi\, u_0, f_0)$

d) Pour $G_0 = \prod_{i \in I} G_0^i$, χ de coordonnées χ_i $(i \in I)$ et f_0 de coordonnées f_0^i , il résulte de (1.7.1) à (1.7.4) que

(1.7.5) $\qquad \mathcal{F}(\chi, f_0) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}(\chi_i, f_0^i)$.

Noter le χ^{-1} dans la définition 1.7 . Il assure que, pour $x \in X^F$, on ait sur $\mathcal{F}(\chi, f_0)_x$

(1.7.6) $\qquad F_x^* = \chi f_0(x)$

(utiliser que la fibre en x du morphisme 1.2.2, pour $\rho = \chi^{-1}$, commute à F_x^* , et 1.5.1).

Si $\mathcal{F}(\chi, f_0)_1$ est le faisceau déduit de $\mathcal{F}(\chi, f_0)$ par extension du corps de base à $\mathbb{F}_{q^n}$, on déduit de 1.6.2 que

(1.7.7) $\qquad \mathcal{F}(\chi, f_0)_1 = \mathcal{F}(\chi \circ N, f_1)$.

1.8 - Abus de notations (i) : Si Ξ est une notation pour l'application composée $\chi f_0 : X_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$, on écrira parfois $\mathcal{F}(\Xi)$ au lieu de $\mathcal{F}(\chi, f_0)$. Grâce à (1.7.1) à (1.7.5), on ne risque guère d'ambiguité. Par exemple :

a) on écrit $\mathcal{F}(\chi)$ pour $\mathcal{F}(\chi, Id_{G_0})$ (notation déjà utilisée en 1.7 b)) ;

b) on écrit $\mathcal{F}(\chi f_0)$ pour $\mathcal{F}(\chi, f_0)$;

c) avec les notations de 1.7 d), on écrit $\mathcal{F}(\prod \chi_i\, f_0^i)$ pour $\mathcal{F}(\chi, f)$.

Avec cette notation, (1.7.4) exprime que l'écriture $\mathcal{F}(\chi\, u_0 f_0)$ n'est pas ambiguë, (1.7.1) (1.7.2) (1.7.5) expriment une multiplicativité de $\mathcal{F}(\Xi)$ en Ξ, et (1.7.6) se récrit $F^*_x = \Xi(x)$ sur $\mathcal{F}(\Xi)_x$.

(ii) Si X est un schéma sur une extension k de $\mathbb{F}_q$, et que f est un morphisme de X dans $G_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k$, on notera encore $\mathcal{F}(\chi, f)$, $\mathcal{F}(\chi f)$, ou $\mathcal{F}(\chi)$ (pour f une inclusion) l'image réciproque par f du E_λ-faisceau déduit de $\chi^{-1}(L_0(G_0))$ par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à k. Si f_0 est le composé $X \longrightarrow G_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k \longrightarrow G_0$, c'est encore le $\mathcal{F}(\chi, f_0)$ de 1.7. Pour k est une extension finie de $\mathbb{F}_q$, on a $\mathcal{F}(\chi f) = \mathcal{F}(\chi N_{k/\mathbb{F}_q} f)$.

Appliquant 1.1.1 à 1.7.6 et 1.7.7, on trouve :

Scholie 1.9 : Soient S_0 un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, G_0 un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$, $f_0 : S_0 \longrightarrow G_0$ un morphisme et $\chi : G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E^*_\lambda$. On a

$$(1.9.1) \qquad \sum_{s \in S_0(\mathbb{F}_q)} \chi f_0(s) = \mathrm{Tr}(F^*, H^*_c(S, \mathcal{F}(\chi, f_0)))$$

et, pour tout entier $n \geq 1$

$$(1.9.2) \qquad \sum_{s \in S_0(\mathbb{F}_{q^n})} \chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q} f_0(s) = \mathrm{Tr}(F^{*n}, H^*_c(S, \mathcal{F}(\chi, f_0))) \quad .$$

Remarque 1.9.3 : Prenons pour G_0 un produit. Avec les notations de 1.7 d) et 1.8 c), la formule 1.9.2 devient

$$\sum_{s \in S_0(\mathbb{F}_{q^n})} \prod_i \chi_i \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f_0^i(s)) = \mathrm{Tr}(F^{*n}, H^*_c(S, \mathcal{F}(\prod_i \chi_i f_0^i))) \quad .$$

Remarque 1.9.4 : Prenons $G_0 = \{e\}$. La formule (1.9.1) devient

$$|S_0(\mathbb{F}_q)| = \sum_{s \in S_0(\mathbb{F}_q)} 1 = \mathrm{Tr}(F^*, H^*_c(S, \mathbb{Q}_\ell)) \quad .$$

Il est rare qu'on puisse explicitement calculer le membre de droite de (1.9.1). Voici un exemple amusant, avec $G_0 = \{e\}$.

Exemple 1.10 : Une quadrique projective non singulière de dimension impaire sur $\mathbb{F}_q$ a le même nombre de points rationnels que l'espace projectif sur $\mathbb{F}_q$ de la même dimension.

Si, sur $\mathbb{C}$, X est une hypersurface quadrique non singulière dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{2N}$, et Y un hyperplan, on sait que pour $i \leq 2\dim(X)=2\dim(Y)$, les inclusions $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{2N} \hookleftarrow Y$ induisent des isomorphismes (en cohomologie ordinaire)

$$H^i(X,\mathbb{Q}) \xleftarrow{\sim} H^i(\mathbb{P}^{2N},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(Y,\mathbb{Q}) \quad .$$

Par spécialisation, il en résulte que si X'_0 est une hypersurface quadrique non singulière dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{2N}_0$ sur $\mathbb{F}_q$, et Y'_0 un hyperplan, les inclusions $X'_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^{2N}_0 \hookleftarrow Y'_0$ induisent des isomorphismes

$$H^i(X',\mathbb{Q}_\ell) \xleftarrow{\sim} H^i(\mathbb{P}^{2N},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i(Y',\mathbb{Q}_\ell) \quad .$$

Ces isomorphismes commutent à F^*, et on applique la formule des traces.

1.11 - On peut aussi utiliser la formule des traces pour comprendre les formules classiques donnant le nombre de points rationnels des groupes linéaires sur les corps finis, et ceux de certains espaces homogènes (voir le paragraphe 8).

1.12 - On dispose d'un dictionnaire permettant de traduire en termes cohomologiques divers types de manipulations classiques sur les sommes trigonométriques. Ce dictionnaire sera donné au paragraphe 2. L'énoncé cohomologique étant plus "géométrique", il pourra parfois s'appliquer à des situations où l'argument classique ne s'applique qu'après une extension du corps fini de base. Voici un exemple (un cas particulier d'un théorème de Kazhdan).

Théorème 1.13 (Kazhdan) : Soit X_0 un schéma sur $\mathbb{F}_q$. Supposons qu'il existe une action ρ de $\mathbb{G}_a$ sur X, et un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de schémas sur $\mathbb{F}$, faisant de X un $\mathbb{G}_a$-torseur sur Y. Alors, le nombre de points rationnels de X_0 est divisible par q.

Supposons d'abord que ρ , Y et f soient définis sur $\mathbb{F}_q$.

Argument classique : Les fibres de $f : X_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow Y_0(\mathbb{F}_q)$ ont toutes q éléments : $|X_0(\mathbb{F}_q)| = q.|Y_0(\mathbb{F}_q)|$, d'où la divisibilité.

Traduction cohomologique : Les faisceaux images directes supérieures $R^i f_! \mathbb{Q}_\ell$ sont

$$\begin{cases} R^i f_! \mathbb{Q}_\ell = 0 & \text{pour } i \neq 2 \\ R^2 f_! \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell(-1) & \end{cases} .$$

La suite spectrale de Leray de f dégénère donc en un isomorphisme

$$H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = H_c^{i-2}(Y, \mathbb{Q}_\ell)(-1) .$$

Pour comprendre l'effet d'un twist à la Tate sur les valeurs propres de Frobenius, le plus commode est d'utiliser le point de vue galoisien (Rapport 1.8), et de noter que la substitution de Frobenius φ agit sur $\mathbb{Q}_\ell(1)$ par multiplication par q . Les valeurs propres de F* sur $H_c^p(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont donc les produits par q des valeurs propres de F* agissant sur $H_c^{i-2}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$. On sait que celles-ci sont des entiers algébriques (SGA 7 XXI 5.2.2) ; dès lors

(*) les valeurs propres de F* agissant sur $H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques divisibles par q .

Descente : Revenons aux hypothèses du théorème. Pour n convenable, on peut supposer que ρ ,Y et f sont définis sur $\mathbb{F}_{q^n}$. Le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q^n}$ étant la puissance $n^{\text{ième}}$ de celui relatif à $\mathbb{F}_q$, l'énoncé (*) pour le schéma sur $\mathbb{F}_{q^n}$ déduit de X_0 par extension des scalaires nous fournit :

(**) les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des valeurs propres de F* agissant sur $H_c^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des entiers algébriques divisibles par q^n .

Cette assertion implique (*). Le nombre de points rationnels de X_0 , soit $\Sigma(-1)^i \mathrm{Tr}(F^*, H^i(X, \mathbb{Q}_\ell))$, est donc un entier algébrique divisible par q . Ceci implique qu'il soit divisible par q en tant qu'entier rationnel.

1.14 - La formule 1.9.3 contrôle la dépendance en n de la somme trigonométrique au membre de gauche. Elle implique des identités entre une somme trigonométrique et celles qui s'en déduisent par "extension des scalaires". La plus célèbre de ces identités est celle de Hasse-Davenport : soient $\chi : \mathbb{F}_q^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^*$ des caractères, Ψ non trivial, et définissons la somme de Gauss $\tau(\chi,\Psi)$ par

$$\tau(\chi,\Psi) = - \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \Psi(x)\chi^{-1}(x) \quad . \tag{1.14.1}$$

Théorème 1.15 (Hasse-Davenport) : On a

$$\tau(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}, \Psi \circ Tr_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}) = \tau(\chi,\Psi)^n \quad . \tag{1.15.1}$$

Soient $E \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres contenant les valeurs de χ et Ψ, et E_λ le complété de E en une place de caractéristique $\ell \neq p$. L'identité (1.15.1) est une identité dans E. Il revient au même de la prouver dans $\mathbb{C}$, ou dans E_λ. Nous la prouverons dans E_λ, en regardant χ et Ψ comme à valeurs dans E_λ^*.

On applique 1.9.3 pour $X_0 = \mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{F}_q$ et $G_0 = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$. Les $H_c^i(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\chi^{-1}\Psi))$ sont nuls pour $i \neq 1$, et le H_c^1 est de dimension 1 (4.2). D'après 1.9.3, $\tau(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}, \Psi \circ Tr_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q})$ est l'unique valeur propre de $(F^*)^n$ sur H_c^1, et (1.15.1) en résulte.

Des exemples analogues sont donnés dans Weil [7] (App V, 3e éd.).

1.16 - Un E_λ-faisceau $\mathcal{F}_0$ sur X_0 est dit ponctuellement de poids n si pour tout point fermé $x \in |X_0|$, les valeurs propres de F_x^* (Rapport 1.2) sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q_x^{n/2}$, où q_x est le nombre d'éléments de $k(x)$. Le théorème suivant sera démontré dans (P. Deligne - La conjecture de Weil II - en préparation).

Théorème 1.17 : Si $\mathcal{F}_0$ est ponctuellement de poids n, pour toute valeur propre α de l'endomorphisme F^* de $H_c^i(X,\mathcal{F})$, il existe un entier $m \leq n+i$ tel que les conjugués complexes de α soient tous de valeur absolue $q^{m/2}$.

Les faisceaux considérés en 1.9 sont de poids 0. Le théorème fournit donc pour la somme 1.9.1 (ou plutôt, pour tous ses conjugués complexes) la majoration

$$(1.17.1) \qquad \left| \sum_{s \in S_0(\mathbb{F}_q)} \prod_i \chi_i(f^i(s)) \right| \leq \sum_i \dim H_c^i(S, \mathcal{F}(\prod \chi_i f^i)).q^{i/2} .$$

Remarques 1.18 : a) Si $\dim S = n$, pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ sur S, on a

$$H_c^i(S,\mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \notin [0,2n] .$$

b) Le groupe $H_c^0(S,\mathcal{F})$ est le groupe des sections globales de $\mathcal{F}$ sur S dont le support est propre. Si S est connexe, non complet, et $\mathcal{F}$ lisse, ou bien si S est connexe, $\mathcal{F}$ lisse de rang un, et non constant, ce groupe est nul.

c) Si S est lisse purement de dimension n, et $\mathcal{F}$ lisse, la dualité de Poincaré dit que les espaces vectoriels $H_c^i(X,\mathcal{F})$ et $H^{2n-i}(X,\mathcal{F}^\vee)(2n)$ sont duaux l'un de l'autre (pour l'effet d'un twist à la Tate sur les valeurs propres de Frobenius, cf. la 2ème partie de la preuve de 1.13).

d) Si $\dim S = n$, la dualité de Poincaré permet de calculer comme suit $H_c^{2n}(S,\mathcal{F})$: on prend un ouvert U de S_{red}, dont le complémentaire est de dimension $< n$, lisse purement de dimension n, et sur lequel $\mathcal{F}$ est lisse. On a alors $H_c^{2n}(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H_c^{2n}(S,\mathcal{F})$, car dans la suite exacte longue de cohomologie, $H_c^i(S-U,\mathcal{F}) = 0$ pour $i = 2n, 2n-1$. Par Poincaré, on a donc

$$H_c^{2n}(S,\mathcal{F}) \simeq [H^0(U,\mathcal{F}^\vee)(2n)]^\vee .$$

Supposons U connexe, et soit u un point géométrique de U. Le "système local" $\mathcal{F}$ correspond à une représentation de $\pi_1(U,u)$ sur $\mathcal{F}_u$, et $H^0(U,\mathcal{F}^\vee)$ est $(\mathcal{F}_u^\vee)^{\pi_1(U,u)} = ((\mathcal{F}_u)_{\pi_1(U,u)})^\vee$ (dual des coinvariants). On a donc

$$H_c^{2n}(S,\mathcal{F}) \simeq (\mathcal{F}_u)_{\pi_1(U,u)}(-2n) \quad .$$

e) Ces remarques permettent souvent le calcul de b_o et b_{2n} . Calculer les autres b_i peut être difficile. Si $b_{2n} = 0$ et que $b_{2n-1} \neq 0$, la majoration (1.17.1) est une majoration à la Lang-Weil, avec, pour q grand, un gain en $\sqrt{q}$ par rapport à la majoration triviale en $O(q^n)$. On prendra toutefois garde que la majoration (1.17.1) n'implique pas formellement la majoration triviale

$$\left| \sum_{s \in S_o(\mathbb{F}_q)} \prod_i \chi_i(f^i(s)) \right| \leq \left| S_o(\mathbb{F}_q) \right| \quad ,$$

dont il peut être utile de tenir compte (cf. la preuve de 3.8).

J'explique ci-dessous une méthode pour prouver que $b_i = 0$ pour $i \neq n$. Quand elle s'applique, elle fournit une estimation en $O(q^{n/2})$. La constante implicite dans O est $b_n = (-1)^n \chi(S, \mathcal{F}(\prod \chi_i f^i))$ et peut être difficile à calculer.

Proposition 1.19 : Soient $\bar{X}$ un schéma propre sur un corps algébriquement clos k , $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ un ouvert de X et $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau sur X . On suppose que

a) $(j_*\mathcal{F})_x = 0$ pour $x \in \bar{X} - X$, i.e. $j_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_*\mathcal{F}$;

b) $R^i j_*\mathcal{F} = 0$ pour $i > 0$.

Alors, les applications

$$H_c^i(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F})$$

sont des isomorphismes.

Les hypothèses a) b) signifient que $j_!\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathcal{F}$, d'où

$$H_c^i(X,\mathcal{F}) = H^i(\bar{X}, j_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i(\bar{X}, Rj_*\mathcal{F}) = H^i(X,\mathcal{F}) \quad .$$

Autrement dit, la suite spectrale de Leray pour j

$$E_2^{pq} = H^p(\bar{X}, R^q j_*\mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathcal{F})$$

dégénère, par b) en des isomorphismes

$$H^i(\bar{X}, j_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{F}) \quad ,$$

tandis que, par a)

$$H^i_c(X, \mathcal{F}) = H^i(\bar{X}, j_!\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(\bar{X}, j_*\mathcal{F}) \quad .$$

Exemple 1.19.1 : Si X est une courbe, ou si $\bar{X}$ est lisse, X le complément d'un diviseur à croisements normaux et $\mathcal{F}$ modérément ramifié, l'hypothèse a) de 1.19 (pas d'invariants sous la monodromie locale) implique l'hypothèse b) .

Proposition 1.20 : Soient X_0 un schéma affine lisse purement de dimension n sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_0$ un E_λ-faisceau lisse ponctuellement de poids m sur X_0 . On suppose que les applications $H^i_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F})$ sont des isomorphismes (cf. 1.17) . Alors, $H^i_c(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \neq n$, et les conjugués complexes des valeurs propres de F^* sur $H^n_c(X, \mathcal{F})$ sont de valeur absolue $q^{(m+n)/2}$.

La dualité de Poincaré met en dualité $H^i_c(X, \mathcal{F})$ (resp. $H^i_c(X, \mathcal{F}^\vee)$) avec $H^{2n-i}(X, \mathcal{F}^\vee(n))$ (resp. $H^{2n-i}(X, \mathcal{F}(n))$) . D'après SGA 4 XIV 3.2, les H^i sans support sont nuls pour $i > n$. Par dualité, les H^i_c sont nuls pour $i < n$; puisque $H^i_c(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{F})$, ces groupes sont nuls pour $i \neq n$. Appliquons 1.15 à $\mathcal{F}_0$ et à $\mathcal{F}_0^\vee(n)$ (de poids $-m-2n$) . On trouve que les conjugués complexes α des valeurs propres de F^* sur $H^n_c(X, \mathcal{F}) = H^n_c(X, \mathcal{F}^\vee(n))^\vee$ vérifient

$$|\alpha| \leq q^{(m+n)/2} \qquad \text{et}$$

$$|\alpha^{-1}| \leq q^{((-m-2n)+n)/2} = q^{-(m+n)/2} \quad ,$$

d'où l'assertion.

Remarque 1.21 : Le dernier argument montre que si X_0 est un schéma séparé lisse sur $\mathbb{F}_q$, que $\mathcal{F}_0$ est un E_λ-faisceau lisse ponctuellement de poids m sur X_0 et que $H^i_c(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^i(X, \mathcal{F})$, alors les conjugués complexes des valeurs propres de F^* sur $H^i_c(X, \mathcal{F})$ sont de valeur absolue $q^{(m+i)/2}$.

Appendice - L'isogénie de Lang dans le cas non commutatif.

1.22 - Soient G_0 un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathfrak{L}$ le morphisme $x \longmapsto Fx.x^{-1}$ de G_0 dans lui-même. C'est un morphisme de G_0-espaces homogènes, si à la source on fait agir G_0 par translation à gauche $x \longmapsto (y \longmapsto xy)$, au but par $x \longmapsto (y \longmapsto Fx.y.x^{-1})$. On a $\mathfrak{L}(x\gamma) = \mathfrak{L}(x)$ pour $\gamma \in G_0(\mathbb{F}_q)$, et $\mathfrak{L}$ induit un isomorphisme $G_0/G_0(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\sim} G_0$.

Comme dans le cas commutatif, $\mathfrak{L}$ fait donc de G_0 un $G_0(\mathbb{F}_q)$-torseur sur G_0, le torseur de Lang L. Si $\rho : G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow GL(n,E_\lambda)$ est une représentation linéaire de $G_0(\mathbb{F}_q)$, nous noterons $\mathfrak{F}(\rho)$ le E_λ-faisceau $\rho(L)$ (1.2).

1.23 - Soit $\gamma \in G^F = G_0(\mathbb{F}_q)$, et calculons l'endomorphisme F^* de $\mathfrak{F}(\rho)_\gamma$. Soit $g \in G$ tel que $\mathfrak{L}(g) = \gamma$, d'où un repère $\rho(g) \in \mathrm{Isom}(E_\lambda^n, \mathfrak{F}(\rho)_\gamma)$. Pour $e \in E_\lambda^n$, on a

$$F(\rho(g)(e)) = \rho(Fg)(e) = \rho(\gamma g)(e) = \rho(g.g^{-1}\gamma g)(e) .$$

On verra que $g^{-1}\gamma g \in G_0(\mathbb{F}_q)$, d'où

$$F(\rho(g)(e)) = \rho(g)\rho(g^{-1}\gamma g)(e) \qquad \text{et}$$

$$\rho(g)^{-1}(F^*_\gamma)^{-1}\rho(g) = \rho(g^{-1}\gamma g) \qquad (1.23.1)$$

$\rho(g)$ identifie l'inverse de F^* en γ à l'automorphisme $\rho(g^{-1}\gamma g)$ de E^n_γ. Reste à comprendre ce qu'est $g^{-1}\gamma g$!

Lemme 1.24 : (i) *Si* $Fg.g^{-1} \in G_0(\mathbb{F}_q)$, *on a* $g^{-1}(Fg.g^{-1})g = g^{-1}Fg \in G_0(\mathbb{F}_q)$.

(ii) *Soient* $\gamma \in G_0(\mathbb{F}_q)$, *et* g *tel que* $Fg.g^{-1} = \gamma$. *La classe de conjugaison de* $\gamma' = g^{-1}Fg$ *dans* $G_0(\mathbb{F}_q)$ *ne dépend que de celle de* γ.

(iii) *L'application ', induite par* $\gamma \longmapsto \gamma'$, *de l'ensemble* $G_0(\mathbb{F}_q)^\natural$ *des classes de conjugaison de* $G_0(\mathbb{F}_q)$ *dans lui-même, est bijective. Son inverse est l'application ' pour le groupe opposé.*

(i) Si $\gamma = Fg.g^{-1} \in G_0(\mathbb{F}_q)$, les identités $Fg = \gamma g$ et $F\gamma = \gamma$ donnent $F(g^{-1}Fg) = (Fg)^{-1}FFg = g^{-1}\gamma^{-1}F(\gamma g) = g^{-1}\gamma^{-1}F\gamma Fg = g^{-1}Fg$, de sorte que $g^{-1}Fg \in G_0(\mathbb{F}_q)$.

(ii) Pour $\alpha,\gamma \in G_0(\mathbb{F}_q)$, les g tels que $Fg.g^{-1} = \gamma$ forment une classe à droite sous $G_0(\mathbb{F}_q)$, et si $Fg.g^{-1} = \gamma$, on a $F(\alpha g\alpha^{-1})(\alpha g\alpha^{-1})^{-1} = \alpha\gamma\alpha^{-1}$. Pour γ parcourant une classe de conjugaison dans $G_0(\mathbb{F}_q)$, les g tels que $Fg.g^{-1}=\gamma$ parcourent donc une double classe sous $G_0(\mathbb{F}_q)$, et $\gamma' = g^{-1}Fg$ parcourt une classe de conjugaison.

(iii) Enfin, l'inverse de $Fg.g^{-1} \longmapsto g^{-1}Fg$ est $g^{-1}Fg \longmapsto Fg.g^{-1}$.

1.25 - La formule 1.23.1 peut se lire, brièvement : F* en γ est $\rho(\gamma')^{-1}$. Si γ appartient à la composante neutre de son centralisateur, on peut prendre g dans $Z(\gamma)$. On a alors $\gamma = \gamma'$. Si cette condition n'est pas remplie, γ et γ' peuvent ne pas être conjugués.

1.26 Un exemple - Pour $G_0 = SL(2)$, q impair, $\alpha \in \mathbb{F}_q^* - \mathbb{F}_q^{*2}$ et $\bar{\gamma}$ la classe de conjugaison de $-1(1+N)$, avec $N^2 = 0$, $\bar{\gamma}'$ est la classe de conjugaison de $-1.(1+\alpha N)$, de sorte que $\bar{\gamma}' \neq \bar{\gamma}$ si $N \neq 0$.

2. Dictionnaire.

Une manipulation élémentaire sur les sommes trigonométriques peut souvent être vue comme le reflet, via la formule des traces, d'un énoncé cohomologique. Dans ce paragraphe, j'énumère de tels énoncés, et leur reflet ; il portent le même numéro, augmenté d'une * pour l'énoncé cohomologique.

2.1 - "Une somme d'entiers algébriques est un entier algébrique" admet pour analogue cohomologique le théorème suivant, prouvé dans SGA 7 XXI 5.2.2 (cf. l'usage de 2.1* en 1.13).

Théorème 2.1* : Soient X_0 un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_0$ un E_λ-faisceau sur X_0 . Si, pour tout $x \in |X_0|$, les valeurs propres de F_x^* sur $\mathcal{F}_0$ sont des entiers algébriques, alors les valeurs propres de F^* sur $H_c^i(X,\mathcal{F})$ sont des entiers algébriques.

2.2 - D'autres résultats d'intégralités sont prouvés dans SGA 7 XXI (5.2.2 et 5.4) : si $\dim(X_0) \leq n$, et que α est une valeur propre de F^* sur $H_c^i(X,\mathcal{F})$, on a :

a) sous les hypothèses de 2.1* , et si $i > n$, alors q^{i-n} divise α ;

b) si les inverses des valeurs propres des F_x^* sont des entiers algébriques, alors α^{-1} est entier, sauf en p . Plus précisement, $q^{\inf(n,i)}\alpha^{-1}$ est un entier algébrique.

Pour les faisceaux considérés en 1.9, les valeurs propres des F_x^* sont des racines de l'unité, de sorte que les hypothèses du théorème et celle de b) ci-dessus sont vérifiées.

2.3 - Soient $f : A \longrightarrow B$ une application d'un ensemble fini dans un autre, et ε une fonction sur A . On a

$$(2.3.1) \qquad \sum_{a \in A} \varepsilon(a) = \sum_{b \in B} \sum_{f(a)=b} \varepsilon(a) \quad .$$

2.3* - Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas séparés de type fini sur k algébriquement clos, et $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau sur X. La suite spectrale de Leray de f en cohomologie à support propre s'écrit

$$(2.3.1)^* \qquad E_2^{pq} = H_c^p(Y, R^q f_! \mathcal{F}) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F}) \quad .$$

Soient $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un morphisme de schémas séparés de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_0$ un E_λ-faisceau sur X_0. On a entre (2.3.1) et (2.3.1)* la compatibilité suivante.

a) Le faisceau $R^q f_! \mathcal{F}$ se déduit par extension des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}$ du faisceau $R^q f_{0!} \mathcal{F}_0$ sur Y_0. En tant que tel, il est muni d'une correspondance de Frobenius $F^* : F^* R^q f_! \mathcal{F} \longrightarrow R^q f_! \mathcal{F}$. Elle se déduit par fonctorialité de $Rf_!$ de la correspondance de Frobenius de $\mathcal{F}$: c'est le composé

$$F^* R^q f_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^q f_! F^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^q f_! \mathcal{F} \quad .$$

b) La formule des traces pour $\mathcal{F}_0$ s'écrit

$$(1) \qquad \sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(F^*_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F^*, H^*(X, \mathcal{F})) \quad ;$$

celle pour $R^q f_! \mathcal{F}$ s'écrit

$$(2_q) \qquad \sum_{y \in Y_0(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(F^*_y, R^q f_! \mathcal{F}) = \mathrm{Tr}(F^*, H^*(Y, R^q f_! \mathcal{F})) \quad .$$

On a, pour $y \in Y(\mathbb{F})$, $(R^q f_! \mathcal{F})_y = H_c^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})$, et si $y \in Y_0(\mathbb{F}_q)$,

$$\mathrm{Tr}(F^*_y, R^q f_! \mathcal{F}) = \mathrm{Tr}(F^*, H_c^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})) \quad ,$$

d'où par la formule des traces sur la fibre

$$\sum_{\substack{x \in X_0(\mathbb{F}_q) \\ f(x)=y}} \mathrm{Tr}(F^*_x, \mathcal{F}_0) = \Sigma(-1)^q \mathrm{Tr}(F^*_y, R^q f_! \mathcal{F}) \quad .$$

Prenant la somme alternée des identités (2_q) , on trouve donc

$$(2) \qquad \sum_{y \in Y_0(\mathbb{F}_q)} \sum_{\substack{x \in X_0(\mathbb{F}_q) \\ f(x)=y}} \mathrm{Tr}(F^*_x, \mathcal{F}_0) = \mathrm{Tr}(F^*, H^*(Y, R^*f_!\mathcal{F})) \quad .$$

L'égalité des membres de gauche de (1) et (2) résulte de (2.3.1), celle des membres de droite de (2.3.1)* (compte tenu du fait que F^* est un endomorphisme de toute la suite spectrale).

2.4 - Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ensembles finis, $A = \prod_{i \in I} A_i$, ε_i une fonction sur A_i , et ε la fonction $a \longmapsto \pi\varepsilon_i(a_i)$ sur A . On a

$$(2.4.1) \qquad \sum_{a \in A} \varepsilon(a) = \prod_{i \in I} \sum_{a_i \in A_i} \varepsilon_i(a_i) \quad .$$

2.4* - Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de schémas séparés de type fini sur k algébriquement clos, $X = \prod_{i \in I} X_i$, $\mathcal{F}_i$ un E_λ-faisceau sur X_i et $\mathcal{F}$ le produit tensoriel externe $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigotimes_{i \in I} \mathrm{pr}_i^*(\mathcal{F}_i)$ des $\mathcal{F}_i$. On a la formule de Künneth

$$(2.4.1)^* \qquad H^*_c(X, \mathcal{F}) = \bigotimes_{i \in I} H^*_c(X_i, \mathcal{F}_i) \quad .$$

Si on veut un isomorphisme (2.4.1)* canonique, et indépendant du choix d'un ordre total sur I , il faut prendre au membre de droite le produit tensoriel gradué au sens de la règle de Koszul (Cycle, 1.3).

2.5 - Soient A un ensemble fini, B une partie de A et ε une fonction sur A . On a

$$(2.5.1) \qquad \sum_{a \in A} \varepsilon(a) = \sum_{a \in A-B} \varepsilon(a) + \sum_{a \in B} \varepsilon(a) \quad .$$

2.5* - Soient X un schéma séparé de type fini sur k algébriquement clos, Y un sous-schéma fermé et $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau sur X . On a une suite exacte longue de cohomologie

$$(2.5.1)^* \qquad \ldots \xrightarrow{\partial} H^i_c(X-Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_c(Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

Plus généralement, si on part d'une filtration finie de X par des parties fermées X_p ($p \in \mathbb{Z}$; on suppose que $X_p \supset X_{p+1}$, que $X_p = X$ pour p assez petit, et que $X_p = \emptyset$ pour p assez grand), on a une suite spectrale

(2.5.2)* $$E_1^{pq} = H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, \mathfrak{F}) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathfrak{F}) \quad .$$

2.6 - Soient A un ensemble fini, $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de A et ε une fonction sur A. Pour $J \subset I$, soit A_J l'intersection des $A_j (j \in J)$. On a

(2.6.1) $$\sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} \sum_{a \in A_J} \varepsilon(a) = 0 \quad .$$

2.6* - Soient X un schéma séparé de type fini sur k algébriquement clos, $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé (resp. ouvert) fini de X par des sous-schémas, et $\mathfrak{F}$ un E_λ-faisceau sur X. Pour $J \subset I$, soit X_J l'intersection des $X_j (j \in J)$. On a des suites spectrales respectives (de Leray)

(2.6.1)* $$E_1^{pq} = \bigoplus_{|J|=p+1>0} H_c^q(X_J, \mathfrak{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{|J|} \mathbb{Z}^J \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathfrak{F})$$

(2.6.2)* $$E_1^{pq} = \bigoplus_{|J|=1-p>0} H_c^q(X_J, \mathfrak{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{|J|} \mathbb{Z}^J \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathfrak{F}) \quad .$$

Si $J = \emptyset$ n'était pas exclus, on aurait de même des suites spectrales convergeant vers 0. Les facteurs $\bigwedge^{|J|} \mathbb{Z}^J$ sont là pour nous dispenser de choisir un ordre total sur I.

2.7 - Soient A un groupe commutatif fini, et $\chi : A \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère non trivial. On a

(2.7.1) $$\sum_{a \in A} \chi(a) = 0 \quad .$$

On prouvera l'analogue cohomologique de (2.7.1) en en transposant la preuve suivante : si $x \in A$, $a \longmapsto xa$ est une permutation de A, et

$$\sum_{a \in A} \chi(a) = \sum_{a \in A} \chi(xa) = \chi(x) \sum_{a \in A} \chi(a) \quad , \quad \text{d'où}$$

$$(\chi(x)-1) \sum_{a \in A} \chi(a) = 0 \quad ,$$

et il existe par hypothèse x tel que $\chi(x)-1 \neq 0$.

Théorème 2.7* - Soient G_0 un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$ et $\chi : G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère non trivial. On a

(2.7.1)* $\qquad H_c^*(G, \mathcal{F}(\chi)) = 0$.

Pour x un point rationnel de G , notons t_x la translation $t_x(g) = xg$ de G . La formule $\mathcal{L} t_x = t_{\mathcal{L}(x)} \mathcal{L}$ exprime que $(t_x, t_{\mathcal{L}(x)})$ est un automorphisme du diagrame $G \xrightarrow{\mathcal{L}} G$ (G muni du torseur de Lang). Soit $\rho(g)$ l'automorphisme de $(G, \mathcal{F}(\chi))$ qui s'en déduit. Pour $g \in G_0(\mathbb{F}_q)$, i.e. pour $\mathcal{L}(g) = e$, c'est l'identité sur G , et la multiplication par $\chi(g)^{-1}$ sur $\mathcal{F}(\chi)$.

Notons $\rho_H(g)$ l'automorphisme de $H_c^*(G, \mathcal{F}(\chi))$ déduit de $\rho(g)$. Un argument d'homotopie (lemme 2.8 ci-dessous) montre que $\rho_H(g) = \rho_H(e)$, donc est l'identité. D'autre part, pour $g \in G_0(\mathbb{F}_q)$, $\rho_H(g)$ est la multiplication par $(\chi^{-1}(g)$: sur $H^*(G, \mathcal{F}(\chi))$, la multiplication par $(\chi^{-1}(g)-1)$ est nulle. Prenant g tel que $\chi(g) \neq 1$, on obtient 2.7* .

Lemme 2.8 - Soient X et Y deux schémas sur k algébriquement clos, avec X séparé de type fini et Y connexe. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et (ρ, ε) une famille d'endomorphismes de $(X, \mathcal{F})$ paramétrée par Y :

$$\rho : Y \times_k X \longrightarrow Y \times_k X \quad , \text{ est un } Y\text{-morphisme, et}$$

$$\varepsilon : \rho^* pr_2^* \mathcal{F} \longrightarrow pr_2^* \mathcal{F} \text{ un morphisme de faisceaux} \quad .$$

On suppose que ρ est propre. Pour $y \in Y(k)$, soit $\rho_H(y)^*$ l'endomorphisme de $H_c^*(X, \mathcal{F})$ induit par $\rho_y : X \longrightarrow X$ et $\varepsilon_y : \rho_y^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. Alors, $\rho_H(y)^*$ est indépendant de y .

En effet, $R^p pr_{1!} pr_2^* \mathcal{F}$ est le faisceau constant sur Y de valeur

$H^p(X,\mathcal{F})$, et $\rho_H(y)^*$ est la fibre en y de l'endomorphisme

$$R^p pr_{1!} pr_2^* \mathcal{F} \xrightarrow{\rho^*} R^p pr_{1!} \rho^* pr_2^* \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} R^p pr_{1!} pr_2^* \mathcal{F}$$

de ce faisceau.

Remarque 2.9 - Soient G_0 un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{F}_q$ et $\rho : G_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow GL(V)$ une représentation linéaire telle que $V^{G_0(\mathbb{F}_q)} = 0$. On a encore $H_c^*(G,\rho(L)) = 0$.

3. Sommes à une variable.

3.1 - Weil est le premier à avoir appliqué des méthodes "cohomologiques" à l'étude des sommes trigonométriques à une variable ; puisqu'il avait prouvé l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L d'Artin sur les corps de fonctions, ces méthodes lui fournissaient d'excellentes estimations (en O(racine carrée du nombre de termes)), et le comportement de ces sommes par "extension du corps de base".

L'essentiel de ce paragraphe est un exposé, dans un langage cohomologique, de ses résultats.

3.2 - Les méthodes cohomologiques amènent ici à calculer des groupes $H^i_c(X,\mathcal{F})$, pour $\mathcal{F}_0$ un E_λ-faisceau sur une courbe X_0 sur $\mathbb{F}_q$. Ces groupes sont nuls pour $i \neq 0,1,2$ et pour $i = 0,2$, ils ont une interprétation simple (1.18 a)b)c)). De plus, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_c(\mathcal{F}) = \Sigma(-1)^i \dim H^i_c(X,\mathcal{F})$ (par ailleurs égale à $\chi(\mathcal{F}) = \Sigma(-1)^i \dim H^i(X,\mathcal{F})$) peut être calculée en terme de X , de rang de $\mathcal{F}$ aux points génériques de X , et des propriétés de ramification de $\mathcal{F}$. Le résultat essentiel est le suivant.

Soient $\bar{X}$ une courbe projective lisse et connexe, de genre g , sur un corps algébriquement clos k , X un ouvert dense de $\bar{X}$, le complément d'un ensemble fini S de points et $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau lisse sur X . Soient $\chi(X) = 2-2g- \#S$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de X , et $rg(\mathcal{F})$ le rang de $\mathcal{F}$. Pour chaque point $s \in S$, on définit un entier $Sw_s(\mathcal{F})$, le conducteur de Swan, mesurant la ramification sauvage de $\mathcal{F}$, et

$$\chi_c(\mathcal{F}) = rg(\mathcal{F}).\chi(X) - \sum_{s \in S} Sw_s(\mathcal{F}) \quad . \tag{3.2.1}$$

(Séminaire Bourbaki 286, Février 1965).

3.3 - Soient $\bar{X}$, $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ et $\mathcal{F}$ comme en 3.2. Le théorème de dualité de Poincaré admet la forme très maniable : $H^i(\bar{X}, j_*\mathcal{F})$ et $H^{2-i}(\bar{X}, j_*(\mathcal{F}^\vee(1))$ sont duaux l'un de l'autre (Dualité 1.3).

3.4 - Faisons $k = \mathbb{F}$, et supposons que $X, \bar{X}$ et $\mathcal{F}$ proviennent de $X_0, \bar{X}_0$ et $\mathcal{F}_0$ sur $\mathbb{F}_q$. Si $\mathcal{F}_0$ devient trivial sur un revêtement fini de X_0 , Weil a prouvé que les conjugués complexes des valeurs propres de F^* sur $H^i(\bar{X}, j_*\mathcal{F})$ sont de valeur absolue $q^{i/2}$. De tels faisceaux $\mathcal{F}_0$ correspondent aux fonctions L d'Artin sur le corps de fonctions de $\bar{X}_0$.

3.5 - Sous les mêmes hypothèses, ou plus généralement si E_λ est le complété en une place λ d'un corps de nombres E et que $\mathcal{F}_0$ appartient à un système compatible infini de représentations v-adiques (v place de E), on peut calculer

$$\prod_i \det(-F^*, H^i(X, \mathcal{F}))^{(-1)^i}$$

à partir d'informations <u>locales</u> sur $\mathcal{F}_0$. Ceci est expliqué dans [2.]. Pour $\mathcal{F}_0$ trivial sur un revêtement fini de X_0 , c'est l'expression de la constante de l'équation fonctionnelle d'une fonction L d'Artin comme produit de constantes locales.

<u>Exemple 3.5</u> - Soit ψ le caractère $\exp(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{Tr}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p))$ de $\mathbb{F}_q$; on a $\psi(a^p - a) = 0$. Soient X_0 une courbe projective lisse absolument irréductible de genre g sur $\mathbb{F}_q$, et f une fonction rationnelle sur X_0 , i.e. un morphisme $f : X_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, non identiquement égal à ∞ . On s'intéresse à la somme

$$S'_f = \sum_{\substack{x \in X_0(\mathbb{F}_q) \\ f(x) \neq \infty}} \psi(f(x)) \quad .$$

Cette somme est nulle pour f de la forme $g^p - g$. Ceci suggère de modifier la somme S'_f comme suit :

a) pour tout point fermé s de X_0 , on pose $v_x(f) =$ ordre du pole de f en x si $f(x) = \infty$, $v_x(f) = 0$ sinon, et $v_x^*(f) = \inf v_x(f + g^p - g)$ (borne inférieure sur g) .

b) Si $v_x^*(f) = 0$, que $x \in X_0(\mathbb{F}_q)$, et que $f + g^p - g$ est régulier en x , on pose $\psi(f(x)) = \psi((f+g^p-g)(x))$. On pose enfin

(3.5.1) $$S_f = \sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_q)}{}' \psi(f(x)) \quad ,$$

où $'$ indique que la somme est étendue aux x tels que $v_x^*(f) = 0$.

On a $S_f = S_{f+g^p-g}$. On se propose de vérifier que si f n'est pas de la forme g^p-g+c^{te} , alors

(3.5.2) $$|S_f| \leq (2g-2 + \sum_{v_x^*(f)\neq 0} [k(x):\mathbb{F}_q](1+v_x^*(f)))q^{1/2} \quad .$$

On commence par passer du complexe au ℓ-adique, en remplaçant ψ par un caractère de la forme $\psi_0 \circ Tr_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$, avec $\psi_0 : \mathbb{F}_p \hookrightarrow E_\lambda^*$. Pour $j : U_0 \hookrightarrow X_0$ l'inclusion de l'ouvert où $f \neq \infty$, on prouve alors que

(3.5.3) $$S_f = \Sigma(-1)^i Tr(F^*, H^i(X, j_*\mathcal{F}(\psi f))) \quad .$$

La formule des traces ramène cet énoncé aux suivants (pour $x \in X_0(\mathbb{F}_q)$) :

a) Si $v_x^*(f) = 0$, alors F_x^* sur $j_*\mathcal{F}(\psi f)$ est $\psi(f(x))$;

b) Si $v_x^*(f) \neq 0$, alors $j_*\mathcal{F}(\psi f)$ se ramifie en x : $(j_*\mathcal{F}(\psi f))_{\bar{x}} = 0$.

La formule a) résulte de 1.7.6 si $v_x(f) = 0$, et on se ramène à ce cas en remplaçant f par $f+g^p-g$: à isomorphisme près, ceci ne change pas $\mathcal{F}(\psi f)_0$ sur l'ouvert où f et g sont réguliers (1.3).

La formule b) résulte de

(3.5.4) $$Sw_x\mathcal{F}(f,\psi) = v_x^*(f) \quad .$$

Après réduction au cas où $v_x(f) = v_x^*(f)$ (d'où $p \nmid v_x(f)$) et extension des scalaires à $\mathbb{F}$, cette formule est dans (J.P Serre, Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, Bull. SMF 89 (1961) p. 105-154, n°4.4).

Enfin, on vérifie que le faisceau $\mathcal{F}(\psi f)$ sur U est non constant si f n'est pas de la forme g^p-g+c^{te} : puisque ψ_0 est injectif, la trivialité de $\mathcal{F}(\psi f) = \mathcal{F}(\psi_0 f)$ (1.8(ii)) équivaut à celle du $\mathbb{F}_q$-torseur d'équation $T^p-T-f = 0$ sur U . S'il était trivial, le torseur sur U_0 de même équation

serait l'image réciproque d'un $\mathbb{F}_q$-torseur sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, d'équation $T^p-T-\lambda = 0$, le $\mathbb{F}_p$-torseur d'équation $T^p-T-(f-\lambda) = 0$ sur U_0 serait trivial et f serait donc de la forme $g^p-g+\lambda$. Les $H^i(X, j_*\mathcal{F}(\psi f))$ sont donc nuls pour $i \neq 1$, la formule (3.5.3) se réduit à

$$(3.5.5) \qquad S_f = -\mathrm{Tr}(F^*, H^1(X, j_*\mathcal{F}(\psi f)))$$

et, d'après 3.2.1 et 3.5.4, ce H^1 est de dimension $(2g-2+\sum_{v_x^*(f)>0}[k(x):\mathbb{F}_q](1+v_x^*(f)))$ et $-S_f$ est somme de ce nombre de valeurs propres de F^*, chacune de valeurs absolues complexes $q^{1/2}$.

3.6 - Supposons que, pour un automorphisme σ de X_0, on ait

$$f(\sigma x) = -f(x) .$$

La somme S_f est alors réelle. Si σ est involutif, la dualité de Poincaré permet de dire un peu plus : si on pose $\mathcal{F}_0 = j_*\mathcal{F}(\psi f), \mathcal{G}_0 = j_*\mathcal{F}(\psi(-f))$, on a

a) $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}_0$ sont en dualité.

b) $\sigma^*\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_0$ et $\sigma^*\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0$, pour des isomorphismes naturels tels que le composé $\mathcal{F}_0 = (\sigma^2)^*\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \sigma^*\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0$ soit l'identité.

c) L'accouplement $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{G}_0 \longrightarrow E_\lambda$ vérifie $\sigma^*(f.g) = \sigma^*(f).\sigma^*(g)$.

Passant à la cohomologie, on trouve que $H^1(X,\mathcal{F})$ et $H^1(X,\mathcal{G})$ sont en dualité parfaite à valeur dans $E_\lambda(1)$, et que la forme bilinéaire $\alpha.\sigma^*\beta$ sur $H^1(X,\mathcal{F})$ est <u>alternée</u> : σ^* agit trivialement sur $E_\lambda(1)$, et

$$\alpha.\sigma^*\beta = \sigma^*(\alpha.\sigma^*\beta) = \sigma^*\alpha.\beta = -\beta.\sigma^*\alpha .$$

On en conclut que $H^1(X,\mathcal{F})$ est de dimension paire (on vérifie d'ailleurs facilement que chaque $v_x^*(f)$ non nul est impair) et que les valeurs propres de F^* sur $H^1(X,\mathcal{F})$ sont groupées en paires α et q/α.

Exemple 3.7 - Ceci s'applique aux sommes de Kloosterman $\sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \psi(x+\frac{a}{x})$ (faire $X_0 = \mathbb{P}^1, f = x+\frac{a}{x}, \sigma x = -x$; les pôles de f sont 0 et ∞, et en chacun d'eux $v_x^*(f)=1$; le H^1 est de dimension $-2+2+2=2$). On a donc (pour $a \neq 0$)

$$\sum_{\substack{xy=a \\ x,y \in \mathbb{F}_{q^n}}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(x+y)\right) = -(\alpha^n+\bar{\alpha}^n) \quad , \quad \alpha\bar{\alpha} = q \quad .$$

Ce résultat est dû à L. Carlitz (Kloosterman sums and finite field extension, Acta Arith. 16 (1969/70) p. 179-193, MR 40 4213) .

Voici maintenant une application d'une méthode de Lang-Weil.

Proposition 3.8 - Soit $P \in \mathbb{F}_q[X_1,\ldots,X_n]$ un polynôme à n variable, de degré d, dont on suppose qu'il n'est pas de la forme Q^p-Q+Cte . Posant encore $\psi(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)\right)$ on a

$$\left| \sum_{x_i \in \mathbb{F}_q} \psi P(x_1,\ldots,x_n) \right| \leq (d-1)q^{n-\frac{1}{2}} \quad .$$

On a pour le membre de gauche l'estimation triviale q^n . Il suffit donc de prouver 3.8 lorsque $d-1 < q^{1/2}$; supposons seulement que $d < q+1$, et soit P_d la partie homogène de degré d de P . Rappelons le

Lemme 3.9 - Une hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^r$ $(r \geq 1)$ ne peut passer par tout les points rationnels sur $\mathbb{F}_q$ que si $d \geq q+1$.

On procède par récurrence : s'il existe un hyperplan rationnel non entièrement contenu dans l'hypersurface (tel n'est pas le cas pour $r = 1$) , on applique l'hypothèse de récurrence à la trace de l'hypersurface sur cet hyperplan. Sinon, le degré d est $\geq$ le nombre d'hyperplans rationnel, $\geq q+1$.

Distinguons maintenant deux cas.

Cas 1 $p \nmid d$ - Appliquant le lemme à P_d , on voit que, quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut supposer que $P_d(1,0,\ldots,0) \neq 0$, i.e. que le coefficient de X_1^d dans P est non nul . Un polynôme à 1 variable

$$S(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \quad ,$$

avec $a_d \not\equiv 0 \ (p/d)$ n'est jamais de la forme $Q^p - Q + C^{te}$, et l'estimation 3.5.2 se réduit à

$$\left| \sum \psi(S(x)) \right| \leq (d-1)q^{1/2} \quad .$$

Appliquant cette estimation aux sommes partielles obtenues en ne faisant varier que x_1 , on trouve

$$\left| \sum \psi P(x_1,\ldots,x_n) \right| = \left| \sum_{x_2,\ldots,x_n} \sum_{x_1} \psi P(x_1,\ldots,x_n) \right| \leq q^{(n-1)}(d-1)q^{1/2}$$

comme promis.

<u>Cas 2</u> $p|d$ $(d > 0)$ - Si P_d est une puissance $p^{\text{ième}}$, remplacer P par $P-(P_d-P_d^{1/p})$ ne change pas la somme considérée, et abaisse le degré : on se débarasse de ce cas en procédant par récurrence sur d . Sinon, la différentielle de P_d n'est pas identiquement nulle ; appliquant 3.9, on peut supposer, quitte à faire un changement linéaire de variables, qu'elle n'est pas nulle au point $(1,0,\ldots,0)$. Si on écrit

$$P_d = \sum_{i=0}^{d} X_1^{d-i} S_i(X_2,\ldots,X_n) \quad ,$$

cela signifie que la forme linéaire S_1 n'est pas identiquement nulle.

La forme S_0 est une constante, et remplaçant P par $P-(S_0X_1^d - S_0^{1/p}X_1^{d/p})$, on peut supposer qu'elle est nulle. Soit enfin $-\lambda$ le coefficient de X_1^{d-1} dans P. Pour $x_2,\ldots,x_n$ fixes, on a

$$P(X_1,x_2,\ldots,x_n) = (S_1(x_2,\ldots,x_n)-\lambda)X_1^{d-1} + \text{termes de plus bas degré en } X_1$$

et si $S_1(x_2,\ldots,x_n) \neq \lambda$, on a donc

$$\left|\sum_{x_1} \Psi P(x_1,\ldots,x_n)\right| \leq (d-2)q^{1/2} \quad .$$

Au total,

$$\left|\sum \Psi P(x_1,\ldots,x_n)\right| \leq \sum_{S=\lambda} \Psi P(x_1,\ldots,x_n)\Big| + \sum_{S(X_2,\ldots,X_n)\neq\lambda} \left|\sum_{x_1} \Psi P(x_1,\ldots,x_n)\right|$$

$$\leq q^{n-1}+(q^{n-1}-q^{n-2})(d-2)q^{1/2} < (d-2)q^{n-1/2}+q^{n-1}$$

$$< (d-1)q^{n-1/2} \quad .$$

Un autre résultat de cette nature est donné par R.A. Smith (Mathematika 17 (1970) p. 328-332).

4. - Sommes de Gauss et sommes de Jacobi.

4.1 - Soient k un corps fini de caractéristique p, χ un caractère de k^*, et ψ un caractère non trivial du groupe additif de k. Nous prendrons pour définition des sommes de Gauss :

$$(4.1.1) \qquad \tau(\chi,\psi) = -\sum_{x\in k^*} \psi(x)\chi^{-1}(x)$$

(noter le signe). Classiquement, χ et ψ sont à valeurs complexes. Nous les prendrons à valeurs dans E_λ^* (cf. la preuve de 1.15). Regardons $-\tau(\chi,\psi)$ comme une somme sur les points rationnels du schéma $\mathbb{G}_m$ sur k. D'après le paragraphe 1, on a $-\tau(\chi,\psi) = \mathrm{Tr}(F^*, H_c^*(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi\chi^{-1}))$. De plus

Proposition 4.2 - La cohomologie de $\mathbb{G}_m$ à coefficient dans $\mathcal{F}(\psi\chi^{-1})$ vérifie

(i) $H_c^i = 0$ pour $i \neq 1$, et $\dim H_c^1 = 1$.

(ii) F^*, agissant sur H_c^1, est la multiplication par $\tau(\chi,\psi)$.

(iii) Si χ est non trivial, on a $H_c^* \xrightarrow{\sim} H^*$.

Preuve : Pour tout n premier à p, notons K_n le μ_n-torseur sur $\mathbb{G}_m$ défini par la suite exacte de Kummer $0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{x^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$. Si k a q éléments, on a sur k : $\mu_{q-1} = k^*$, et le torseur de Lang sur $\mathbb{G}_m/k$ est K_{q-1}. Dès lors, $\mathcal{F}(\chi^{-1}) = \chi(K_{q-1})$. L'assertion 4.2 (ii) résulte de (i)(iii), eux-mêmes contenus dans l'énoncé géométrique suivant, où $\mathcal{F}(\psi)$ désigne le faisceau sur $\mathbb{G}_m/\mathbb{F}$ déduit par extension des scalaires de k à $\mathbb{F}$ de $\mathcal{F}(\psi)$ sur $\mathbb{G}_m/k$ (1.8 (ii)).

Proposition 4.3 - Soit $\chi : \mu_n \longrightarrow E_\lambda^*$. La cohomologie de $\mathbb{G}_m$ à coefficient dans $\mathcal{F}(\psi) \otimes \chi(K_n)$ vérifie

(i) $H_c^i = 0$ pour $i \neq 1$, et $\dim H_c^1 = 1$.

(ii) Si χ est non trivial, on a $H_c^* \xrightarrow{\sim} H^*$.

Preuve : Le faisceau $\mathcal{F}(\psi)$ est la restriction à $\mathbb{G}_m$ d'un faisceau localement constant sur $\mathbb{G}_a$, sauvagement ramifié à l'infini, de conducteur de Swan 1. Le faisceau $\chi(K_n)$ est constant si $\chi = 1$; si $\chi \neq 1$, il est ramifié en 0 et ∞, modérément.

Le faisceau $\mathcal{F}(\psi) \otimes \chi(K_n)$ est donc ramifié à l'∞ ; appliquant 1.18 b)c), on trouve que $H_c^i(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi) \otimes \chi(K_n)) = 0$ pour $i \neq 1$. Si $\chi \neq 1$, il est ramifié en 0 et ∞ et (ii) résulte de 1.19.1.

Les conducteurs de Swan sont 0 en 0 et 1 en ∞. D'après 3.2.1, la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc -1 et ceci achève la démonstration.

Remarque 4.4 - Si χ est non trivial, 4.2 (iii) et la dualité de Poincaré montrent que $H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi\chi^{-1}))$ et $H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi^{-1}\chi))$ sont en dualité (dualité à valeurs dans $E_\lambda(-1)$). On a donc $\tau(\chi,\psi).\tau(\chi^{-1},\psi^{-1})=q$, i.e. $|\tau(\chi,\psi)|=q$.

4.5 - Si k est une extension de degré N de $\mathbb{F}_q$, on peut aussi regarder (4.1.1) comme une somme à N variables sur $\mathbb{F}_q$. Soit plus généralement k une algèbre étale sur $\mathbb{F}_q$, de degré N sur $\mathbb{F}_q$. C'est un produits de corps k_i, de degré N_i sur $\mathbb{F}_q$, et on pose

$$\varepsilon(k) =_{dfn} (-1)^{\Sigma(N_i+1)} \qquad (4.5.1)$$

C'est la signature de la permutation de $S = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(k, \mathbb{F})$ induite par la substitution de Frobenius $\varpi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$.

Soient $\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E_\lambda^*$ un caractère non trivial, et $\chi : k^* \longrightarrow E_\lambda^*$. On pose

$$\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi) = (-1)^N \sum_{x \in k^*} \psi \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}(x) . \chi^{-1}(x) \qquad (4.5.2)$$

Si χ a pour coordonnées les $\chi_i : k_i^* \longrightarrow E_\lambda^*$, on a l'identité triviale

$$\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi) = \varepsilon(k) \prod \tau(\chi_i, \psi \circ \mathrm{Tr}_{k_i/\mathbb{F}_q}) \qquad (4.5.3)$$

Après quelques préliminaires, nous donnerons en 4.10 une interprétation cohomologique des sommes (4.5.2). En 4.12, nous interpreterons l'identité de Hasse-Davenport comme une forme tordue (cf.1.12) du cas particulier suivant de (4.5.3) : pour $k = \mathbb{F}_q^N$, et χ un caractère de $\mathbb{F}_q^*$, on a $\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q}, \psi) = \tau(\chi,\psi)^N$.

4.6 - Rappelons que pour M un module projectif de type fini sur un anneau A, le foncteur $\mathrm{Spec}(B) \longmapsto M \otimes_A B$, des schémas affines sur $\mathrm{Spec}(A)$ dans (Ens) est représenté par le schéma affine $V(M^\vee)$ (notations des EGA), le spectre de $\mathrm{Sym}_A^*(M^\vee)$. Si $M = A^n$, c'est l'espace affine type de dimension n.

Supposons que M soit une A-algèbre à unité, et posons $V = V(M^\vee)$. Par définition, pour toute extension B de A, l'ensemble $V(B)$ des points de V à coordonnées dans B est $M \otimes_A B$. Le foncteur $B \longmapsto M \otimes_A B$ étant à valeurs dans les anneaux à unité, V est un schéma en anneaux à unités sur $\mathrm{Spec}(A)$. Les morphismes norme et trace : $M \otimes_A B \longrightarrow B$ sont fonctoriels en B ; ils correspondent donc à des morphismes de schéma N et T de V dans $\mathbb{G}_a$. Nous aurons à considérer les schémas déduits de V suivant :

a) V^* est l'ouvert des éléments inversibles de V (un schéma en groupes pour .) ;

b) W est l'hyperplan d'équation $T = 0$ et $W^* = W \cap V^*$;

c) P est l'hyperplan à l'infini $V-\{0\}/\mathbb{G}_m$ de l'espace affine V sur $\mathrm{Spec}(A)$. Si Q est l'hyperplan à l'infini de W, $W^*/\mathbb{G}_m$ et $V^*/\mathbb{G}_m$ sont des ouverts des espaces projectifs Q P sur $\mathrm{Spec}(A)$.

(4.6.1)
$$\begin{array}{ccc} W^* & \hookrightarrow & V^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ W^*/\mathbb{G}_m & \hookrightarrow & V^*/\mathbb{G}_m \end{array} \quad \subset \quad \begin{array}{ccc} W-\{0\} & \hookrightarrow & V-\{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Q & \hookrightarrow & P \end{array} .$$

Si $M = A^I$, I un ensemble fini, alors $V \simeq \mathbb{G}_a^I$, $V^* \simeq \mathbb{G}_m^I$, $V^*/\mathbb{G}_m$ est le tore $\mathbb{G}_m^I/(\mathbb{G}_m$ diagonal), N et T s'écrivant $\prod x_i$ et $\sum x_i$, et Q est donc l'hyperplan projectif d'équation $\sum x_i = 0$ de P.

Le cas qui nous intéresse est celui où M est fini étale sur A. La description précédente vaut alors localement sur $Spec(A)$ (pour la topologie étale) et on peut écrire $V^* = \mathbb{G}_m^I$, pour I un faisceau localement constant d'ensembles finis sur $Spec(A)$. Si par exemple A est un corps, de clôture algébrique $\bar{A}$, et que M est une A-algèbre séparable, on pose $I = \mathrm{Hom}_A(M,\bar{A})$, et, sur $\bar{A}$, on a $V \sim \mathbb{G}_a^I$. Via cet isomorphisme, N et T s'écrivent $\prod x_i$ et $\sum x_i$.

4.7 - Torseur de Kummer. Soient S un schéma, n un entier inversible sur S et G un schéma en groupes commutatifs à fibres connexes (noté multiplicativement) sur S. La suite

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G \xrightarrow{x^n} G \longrightarrow 0$$

est exacte. Elle définit un G_n-torseur $K_n(G)$ (ou simplement K_n) sur G. Pour $\chi : G_n \longrightarrow E_\lambda^*$ un homomorphisme du S-faisceau étale G_n dans le faisceau constant E_λ^*, on note $\mathcal{K}_n(\chi)$ le E_λ-faisceau $\chi^{-1}(K_n)$.

Les torseurs K_n forment un système projectif de torseurs sous le système projectif de groupes G_n (morphismes de transition $x \longmapsto x^d : G_{nd} \longrightarrow G_n$). Ceci exprime la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_{nd} & \longrightarrow & G & \xrightarrow{x^{nd}} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x^d} & & \downarrow{\scriptstyle x^d} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & G & \xrightarrow{x^n} & G & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On a donc $\mathcal{K}_n(\chi) = \mathcal{K}_{nd}(\chi \circ x^d)$.

4.8 - Appliquons la construction 4.6 pour $A = \mathbb{F}_q$, et $M = k$ une algèbre étale sur $\mathbb{F}_q$. Conformément aux conventions générales, on notera avec un indice 0 les $\mathbb{F}_q$-schémas notés $V, V^*, \ldots$ en 4.6. Les mêmes lettres sans indice désignent les schémas sur $\mathbb{F}$ qui s'en déduisent par extension des scalaires.

On pose $I = \mathrm{Hom}(k,\mathbb{F})$, d'où $V \sim \mathbb{G}_a^I$ et T s'écrit $(x_i) \longmapsto \sum x_i$. Dès lors,

(4.8.1) $\mathcal{F}(\psi \circ \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}) = T^*\mathcal{F}(\psi) = \otimes_i \mathrm{pr}_i^*\mathcal{F}(\psi)$.

Puisque $V^* \sim \mathbb{G}_m^I$, un caractère χ de $V_n^* \sim \mu_n^I$, à valeurs dans E_λ^* , s'écrit comme une famille $(\chi_i)_{i \in I}$ de caractères de μ_n indénée par I . Elle est définie sur $\mathbb{F}_q$ si, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$, on a $\chi_{\sigma_i} = \chi_i \circ \sigma^{-1}$. Elle définit alors un E_λ-faisceau $\mathcal{K}_n((\chi_i)_{i \in I})$ sur V_0^* . Si le produit des χ_i est trivial, χ se factorise par un caractère de $(V_0^*/\mathbb{G}_m)_n$ et $\mathcal{K}_n((\chi_i)_{i \in I})$ est l'image réciproque d'un faisceau, noté de même, sur $V_0^*/\mathbb{G}_m$. Cette construction se compare comme suit au torseur de Lang.

Lemme 4.9 (i) : Pour n assez divisible, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (V_0^*)_n & \longrightarrow & V_0^* & \xrightarrow{x^n} & V_0^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & V_0^* & \xrightarrow{\mathfrak{L}} & V_0^* & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ;$$

si χ est un caractère $\chi : k^* \longrightarrow E_\lambda^*$, on a $\mathcal{F}(\chi) = \mathcal{K}_n(\chi \circ \tau)$.

(ii) Pour n assez divisible, τ identifie k^* aux coinvariants de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/F)$ agissant sur $V_n^* \sim \mu_n^I$.

(iii) Pour k un corps, $N = [k:\mathbb{F}_q]$, $\omega \in I$ un plongement de k dans $\mathbb{F}$, et $n = q^N - 1$, la composante d'indice ω de $\chi \circ \tau$ est $\chi \circ \omega^{-1}$.

(iv) Si χ est non trivial sur chaque facteur de k , les $(\chi \circ \tau)_i$ sont tous non triviaux.

Il suffit de prouver le lemme lorsque k est un corps, de degré N sur $\mathbb{F}_q$. Dans ce cas, n est "assez divisible" si $q^N - 1 | n$. Choisissons un plongement ω de k dans $\mathbb{F}_q$; I s'identifie alors à $\mathbb{Z}/N$: à $i \in \mathbb{Z}/N$ correspond $\omega_i = \omega^{q^i}$. Via l'isomorphisme $V_0^*(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^{*I}$, on a

a) $x \in k^*$ correspond à $(\omega_i(x)) \in \mathbb{F}^{*I}$;

b) $F((x_i)_{i \in \mathbb{Z}/N}) = (x_{i-1}^q)_{i \in \mathbb{Z}/N}$.

Un caractère $\chi = (\chi_i)$ de $V_n^* \sim \mu_n^I$ sera défini sur $\mathbb{F}_q$ si $\chi_{-i} = \chi_0(x^{q^i})$ $(i \in \mathbb{Z})$. Si $q^N-1 \mid n$, il y a q^N-1 tels caractères : χ_0 se factorise par μ_{q^N-1} , et détermine les χ_i . Pour prouver (ii), il suffit donc de vérifier (i) et (iii) (ou son corollaire (iv)) qui assure que $\chi \longmapsto \chi \circ \tau$ est injectif.

Prouvons (i) et (iii), pour $n = q^N-1$. Notons additivement le groupe des endomorphismes de $V^* \sim \mathbb{G}_m^I$; en particulier, notons n l'opérateur $x \longmapsto x^n$. Si α est l'opérateur de permutation circulaire $(x_i) \longmapsto (x_{i-1})$, on a $q^N-1 = (q\alpha)^N-1 = (q\alpha-1)((q\alpha)^{N-1}+\ldots+1)$. Ceci détermine τ : on a $\tau((x_i)) = (\prod_{0 \le j < N} x_{i-j}^{q^j})$, et l'application induite de $(V_0^*)_n$ dans k^* s'écrit [a) ci-dessus] $(x_i) \longmapsto \prod x_{-i}^{q^i}$; de là résulte (iii).

Proposition 4.10 - La cohomologie de V^* à coefficient dans $\mathcal{F}(\chi^{-1}.\Psi \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q})$ vérifie

(i) $H_c^i = 0$ pour $i \neq N$, et $\dim H_c^N = 1$.

(ii) Sur H_c^N , F^* est la multiplication par $\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\Psi)$.

(iii) Si χ est non trivial sur chaque facteur de k , on a $H_c^* \xrightarrow{\sim} H^*$.

Appliquons 4.9 (i) : sur $\mathbb{F}$, si $\chi \circ \tau = (\chi_i)_{i \in I}$, on a $\mathcal{F}(\chi) = \mathcal{K}_n((\chi_i)_{i \in I})$. Les points (i) et (iii) résultent donc de l'énoncé plus géométrique suivant (pour (iii), appliquer 4.9 (iv)) et (ii) en résulte par la formule des traces :

Proposition 4.11 - Soit $(\chi_i)_{i \in I}$ une famille de caractère de $\mu_n(\mathbb{F})$. La cohomologie de $V^* \sim \mathbb{G}_m^I$ à coefficient dans $\mathcal{K}_n((\chi_i)_{i \in I}) \otimes \mathcal{F}(\Psi \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q})$ vérifie

(i) $H_c^i = 0$ pour $i \neq N$, et $\dim H_c^N = 1$.

(ii) Si les χ_i sont tous non triviaux, on a $H_c^* \xrightarrow{\sim} H^*$.

On a $V^* \sim \mathbb{G}_m^I$, $K_n((\chi_i)) = \bigotimes_i pr_i^*\chi_i(K_n(\mathbb{G}_m))$ et $\mathcal{F}(\psi \circ Tr_{\mathbb{F}_q/k}) = T^*\mathcal{F}(\psi) = \bigotimes_i pr_i^*\mathcal{F}(\psi)$. Ceci permet d'appliquer la formule de Künneth, et 4.11 résulte de 4.3.

4.12 - De 2.4* et (Cycle, 1.3 exemple 2), on tire aussi que le groupe des permutations σ de I telles que $\chi_i = \chi_{\sigma i} (i \in I)$ agit sur H_c^N par multiplication par la signature $\varepsilon(\sigma)$. Nous allons en déduire une seconde preuve de l'identité de Hasse-Davenport.

Si χ est un caractère de $\mathbb{F}_q^*$, le fait que, sur $\mathbb{F}$, N s'écrit $(x_i) \longmapsto \prod x_i$ fournit : $\mathcal{F}(\chi \circ N) = N^*\mathcal{F}(\chi) = \bigotimes_i pr_i^*\mathcal{F}(\psi)$ et la formule de Künneth fournit :

$$H_c^*(V^*, \mathcal{F}(\chi^{-1} \circ N . \psi \circ Tr)) \sim H_c^*(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\chi^{-1}\psi))^{\otimes I} ,$$

où, au membre de droite, le produit tensoriel est pris au sens 2.4* . Puisque $H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi\chi^{-1}))$ est de dimension 1 , sa puissance tensorielle $^{\otimes I}$, au sens ordinaire, ne dépend que du cardinal n de I . Appliquant (Cycle 1.3 Ex.2) , on obtient un isomorphisme canonique

$$(4.12.1) \quad H_c^N(V, \mathcal{F}(\chi^{-1} \circ N) \bigotimes T^*\mathcal{F}(\psi)) \sim H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi\chi^{-1})) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^N \mathbb{Z}^I .$$

Pour calculer l'action de F^* , le plus commode est d'adopter le point de vue galoisien et de dire que l'isomorphisme 4.12.1 étant canonique, il est compatible à l'action par transport de structure de $Gal(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$. Si $\varepsilon(k)$ est la signature de la permutation ϖ de I , on trouve que

$$\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q} , \psi) = Tr(\varpi^{-1}, H_c^N(V^*, N^*\mathcal{F}(\chi^{-1}) \otimes T^*\mathcal{F}(\psi))$$

$$= \varepsilon(k) Tr(\varpi^{-1}, H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\chi^{-1}\psi)))^N = \varepsilon(k)\tau(\chi,\psi)^N , \quad \text{soit} ,$$

$$(4.12.2) \quad \tau_{\mathbb{F}_q}(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q} , \psi) = \varepsilon(k)\tau(\chi,\psi)^N .$$

Si k est un corps, ϖ est une permutation circulaire de I , $\varepsilon(k) = (-1)^{N+1}$, et on retrouve l'identité de Hasse-Davenport :

$$\tau(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q}, \Psi \circ Tr_{k/\mathbb{F}_q}) = (-1)^{N+1} \tau_{\mathbb{F}_q}(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q}, \Psi) = \tau(\chi,\Psi)^N \quad .$$

Lemme 4.13 : Pour $\chi \circ \tau = (\chi_i)_{i \in I}$ comme en 4.9(i), les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\chi | \mathbb{F}_q^*$ est trivial (ii) Le produit des χ_i est trivial

(iii) $\mathcal{F}(\chi) = K_n((\chi_i))$ est image réciproque d'un (unique) faisceau sur $V^*/\mathbb{G}_m$.

(iv) L'image réciproque de $\mathcal{F}(\chi)$ sur $\mathbb{G}_m$ (envoyé dans V^* à partir du morphisme structural $\mathbb{F}_q \longrightarrow k$) est triviale.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) On regarde χ comme un caractère de $V^*/\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q) = k^*/\mathbb{F}_q^*$, et on prend $\mathcal{F}(\chi)$ sur $V^*/\mathbb{G}_m$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) De même, on regarde (χ_i) comme un caractère de $(V^*/\mathbb{G}_m)_n$. L'unicité dans (iii) résulte de ce que V^* est un fibré à fibres connexes sur $V^*/\mathbb{G}_m$, et (iii) $\Longrightarrow$ (iv) est trivial.

(iv) $\Longrightarrow$ (i),(ii) : Cette image réciproque est $\mathcal{F}(\chi|\mathbb{F}_q^*)$ et $K_n(\Pi\chi_i)$.

4.14 - Soient k une algèbre étale sur $\mathbb{F}_q$, de dimension $N+1$ et χ un caractère non trivial de k^*, trivial sur $\mathbb{F}_q^*$. La somme de Jacobi $J(\chi)$ est définie par

$$J(\chi) = (-1)^{N-1} \sum_{\substack{x \in k^*/\mathbb{F}_q^* \\ Tr(x)=0}} \chi^{-1}(x) \quad . \tag{4.14.1}$$

Le cas le plus souvent considéré est celui où k est la somme de $N+1$ copes de $\mathbb{F}_q$; χ correspond alors à $(N+1)$ caractères $\chi_0,\ldots,\chi_N$ non tous triviaux de $\mathbb{F}_q^*$, de produit égal à 1 . Dans ce cas, une section du quotient $k^*/\mathbb{F}_q^*$ de k^* est l'ensemble des $(x_o,\ldots,x_N) \in k^{*N+1}$ avec $x_o = 1$; pour un tel x , la condition $Tr(x)=0$ s'écrit $\sum_1^n x_i = -1$. La somme de Jacobi s'écrit donc

$$J(\chi) = (-1)^{N-1} \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_N \in \mathbb{F}_q^* \\ \Sigma x_i = -1}} \chi_1^{-1}(x_1)\ldots\chi_n^{-1}(x_n) \quad . \tag{4.14.2}$$

On a entre sommes de Gauss et sommes de Jacobi l'identité suivante.

Proposition 4.15 - Pour χ comme ci-dessus et ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$, on a

$$qJ(\chi) = \tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi) \quad .$$

Dans le cas particulier où $k = \mathbb{F}_q^n$, cette formule se récrit par 4.5.3

$$qJ(\chi) = \prod_i \tau(\chi_i,\psi) \quad , \tag{4.15.1}$$

plus souvent écrit sous la forme

$$\begin{cases} \chi_0(-1)J(\chi) = (-1)^{N-1} \sum_{\substack{x_1\ldots x_N \in \mathbb{F}_q^* \\ \sum x_i = 1}} \prod_1^N \chi_i^{-1}(x_i) = \tau(\chi_0^{-1},\psi)^{-1} \prod_1^N \tau(\chi_i,\psi) \\ \chi_0^{-1} = \prod_1^N \chi_i \end{cases}$$

Preuve de 4.15 :

$$\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi) = (-1)^{N+1} \sum_{x \in k^*} \chi(x)^{-1}\psi\ \mathrm{Tr}(x) = (-1)^{N+1} \sum_{x \in k^*/\mathbb{F}_q^*} \chi(x)^{-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \psi(\lambda\ \mathrm{Tr}\, x) \ .$$

La somme $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \psi(\lambda\ \mathrm{Tr}\, x)$ vaut $q-1$ si $\mathrm{Tr}(x) = 0$, et -1 si $\mathrm{Tr}(x) \neq 0$. Dès lors,

$$\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi) = (-1)^{N+1}\Big(q \sum_{x \in k^*/\mathbb{F}_q^*} \chi(x)^{-1} - \sum_{x \in k^*/\mathbb{F}_q^*} \chi(x)^{-1}\Big) \quad .$$

Le second terme au second membre est nul, car somme des valeurs d'un caractère, et 4.15 en résulte.

La proposition 4.15 se transpose ainsi en cohomologie :

Proposition 4.16 - La cohomologie de $W^*/\mathbb{E}_m$ (4.6,4.8) à coefficient dans $\mathfrak{F}(\chi^{-1})$ vérifie

(i) $H_c^i = 0$ pour $i \neq N-1$, et $\dim H_c^{N-1} = 1$.

(ii) Sur H_c^{N-1}, F^* est la multiplication par $J(\chi)$.

(iii) H_c^{N-1} est canoniquement isomorphe à $H_c^{N+1}(V^*, \mathfrak{F}(\chi^{-1}.\psi \circ \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}))(1)$

L'assertion (ii) résulte de (i) et de la formule des traces ; (i) et (iii) résultent de 4.11 et de l'énoncé plus géométrique suivant .

Proposition 4.17 - Soit $(\chi_i)_{i\in I}$ une famille de caractères non tous triviaux de $\mu_n(\mathbb{F})$, de produit 1 . Alors, $H_c^{i-1}(W^*/\mathbb{G}_m, \mathcal{K}_m((\chi_i)_{i\in I}))$ est canoniquement isomorphe à $H_c^{i+1}(V^*, \mathcal{K}_m((\chi_i)_{i\in I}) \otimes \mathcal{F}(\psi\, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}))(1)$.

La première ligne de 4.15 devient (π comme en 4.6.1)

$$(4.17.1)\quad R^i\pi_!(\mathcal{K}_n((\chi_i)_{i\in I}) \otimes \mathcal{F}(\psi\, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q})) = \mathcal{K}_n((\chi_i)_{i\in I}) \otimes R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi\, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q})$$

(sur $V^*/\mathbb{G}_m$) . Calculons les faisceaux $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi\, \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}) = R^i\pi_! T^*\mathcal{F}(\psi)$. Soit $v_o : \widetilde{V}_0 \longrightarrow V_0$ l'éclaté de V_0 en $\{0\}$. Dans le diagramme

$$(4.17.2)\qquad \begin{array}{ccccc} V_0-\{0\} & \hookrightarrow & \widetilde{V}_0 & \xrightarrow{v_0} & V_0 \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow & \downarrow & \swarrow{\scriptstyle\bar{\pi}} & \\ & & P_0 & & \end{array}$$

π est une fibration de fibre des droites épointées, $\widetilde{V}_0$ est le fibré en droites correspondant, et $Z_0 = v_0^{-1}(0)$ sa section 0 . Le faisceau $T^*\mathcal{F}(\psi)$ sur $V_0-\{0\}$ se prolonge en $(Tv_0)^*\mathcal{F}(\psi)$ sur $\widetilde{V}_0$, et la restriction de ce faisceau à Z_0 est le faisceau constant E_λ , car T_0v_0 est nul sur Z_0 . La suite exacte longue de cohomologie à support propre s'écrit donc

$$(4.17.3)\quad \longrightarrow R^i\pi_! T^*\mathcal{F}(\psi) \longrightarrow R^i\bar{\pi}_!(Tv)^*\mathcal{F}(\psi) \longrightarrow (E_\lambda \text{ pour } i=0\ ,\ 0 \text{ sinon}) \longrightarrow$$

L'image réciproque $\bar{\pi}^{-1}(Q_0)$ est l'éclaté $\widetilde{W}_0$ de W_0 en 0 ; T_0v_0 s'annule sur $\widetilde{W}_0$; on a donc $(Tv)^*\mathcal{F}(\psi) = E_\lambda$ sur $\pi^{-1}(Q_0)$ et, $\bar{\pi}$ étant un fibré en droites

$$(4.17.4)\qquad R^i\bar{\pi}_!(Tv)^*\mathcal{F}(\psi)\,|Q = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2 \\ E_\lambda(-1) & \text{pour } i = 2 \end{cases} .$$

Si $x \in P$, $x \notin Q$, la droite $D = \pi^{-1}(x)$ est envoyé isomorphiquement sur $\mathbb{G}_a$ par Tv ; on a donc (2.7*)

$$H_c^*(D,Tv)^*\mathcal{F}(\psi)) = H^*(\mathbb{G}_a,\mathcal{F}(\psi)) = 0 \qquad \text{et}$$

$$(4.17.5)\qquad R^i\pi_!(Tv)^*\mathcal{F}(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2 \\ E_\lambda(-1)_Q & \text{pour } i = 2 \end{cases} .$$

Conjuguant 4.17.3 et 4.17.5, on trouve enfin

$$(4.17.6)\qquad R^i\pi_!T^*\mathcal{F}(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 1,2 \\ E_\lambda & \text{pour } i = 1 \\ E_\lambda(-1)_Q & \text{pour } i = 2 \end{cases} .$$

4.18 - Calculons la cohomologie à support propre du faisceau $K_n((\chi_i))\otimes T^*\mathcal{F}(\psi)$ sur V^* à l'aide de la suite spectrale de Leray de $\pi : V^* \longrightarrow V^*/\mathbb{G}_m$. Appliquant (4.17.1) et (4.17.6), on trouve comme termes initiaux les $E_2^{p,1} = H_c^p(V^*/\mathbb{G}_m,K_n(\chi_i)) = 0$ (car $(\chi_i) \neq 1$) et les $E_2^{p,2} = H_c^p(W^*/\mathbb{G}_m,K_n(\chi_i))(-1))$.

La suite spectrale se réduit à un isomorphisme, et 4.17 en résulte.

4.19 - Les faisceaux $K_n((\chi_i)_{i\in I})$ ont un sens sur n'importe quel corps, voire sur n'importe quel schéma de base. Ceci va nous permettre de généraliser 4.16(i). Avec les notations de 4.6, supposons M fini étale partout de rang N sur A , et soit n un entier inversible dans A . On note a la projection de $W^*/\mathbb{G}_m$ sur $\mathrm{Spec}(A)$. Soit aussi χ un caractère (morphisme de faisceaux) $\chi : (V^*/\mathbb{G}_m)_n \to E_\lambda^*$, et $K_n(\chi)$ le faisceau correspondant. Localement pour la topologie étale, on peut regarder χ comme une famille de caractères $(\chi_i)_{i\in I}$ de μ_n , de produit trivial.

Proposition 4.20 : (i) Si χ est (en tout point) non trivial, on a $R^ia_!(K_n(\chi)) = 0$ pour $i \neq N-1$, et $R^{N-1}a_!(K_n(\chi))$ est lisse, de rang 1 .

(ii) Un automorphisme σ de M qui respecte χ agit sur ce $R^{N-1}a_!$ par multiplication par la signature $\varepsilon(\sigma)$ de σ , vu comme permutation de I .

(iii) Si les χ_i sont tous non triviaux, on a $Ra_! \xrightarrow{\sim} Ra_*$.

Preuve : le schéma $W^*/\mathbb{G}_m$ est le complément d'un diviseur à croisements normaux relatif dans le schéma Q , propre et lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$, et $K_n(\chi)$ est

localement constant sur $W^*/\mathbb{G}_m$, à ramification modérée a l'infini. Il en résulte que les $R^i a_!$ et $R^i a_*$ sont lisses, de formation compatible à tout changement de base. Un argument standard nous ramène alors à supposer que A est un corps fini, et (i) résulte de 4.17 et 4.11(i). Pour prouver (ii), on utilise que l'action de σ est compatible à l'isomorphisme 4.17 , et 4.12 . Pour (iii), on note que si les χ_i sont tous non triviaux, alors $K_n(\chi)$ sur $W^*/\mathbb{G}_m \subset Q$ est ramifié le long de chaque diviseur à l'infini, et 1.19.1 .

5. Caractères de Hecke.

5.1 - Soient F un corps de nombres (de degré fini sur $\mathbb{Q}$) et K un corps de caractéristique 0 . Voici diverses façon équivalentes de dire ce qu'est un homomorphisme algébrique $\alpha : F^* \longrightarrow k^*$.

(i) Soit e_i une base de F sur $\mathbb{Q}$. L'homomorphisme α est algébrique s'il est donné par une formule $\alpha(\Sigma x^i e_i) = A(x^i)$, où $A \in k(X^i)$.

Ceci signifie que α coïncide sur F^* avec une application rationnelle définie sur k de $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathbb{G}_m$. Par densité de Zariski de F^* , et le fait qu'un homomorphisme birationnel est partout défini, une telle application est un homomorphisme de schémas en groupes :

(ii) α est induit par un homomorphisme de k-schémas en groupes

$$R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Q}} k \longrightarrow \mathbb{G}_m \quad .$$

Si k est un corps de nombre, la propriété d'adjonction de la restriction des scalaires R montre que ceci équivaut à

(iii) (k corps de nombres) α est induit par un homomorphisme de $\mathbb{Q}$-schémas en groupes : $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow R_{k/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$.

Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et $I = \mathrm{Hom}(F, \bar{k})$. Sur $\bar{k}$, le groupe des caractères de $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ est $\mathbb{Z}^I$, de base les plongements de F dans $\bar{k}$. Les caractères définis sur k sont ceux invariants par $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$; on peut les décrire soit comme ceux envoyant F^* dans $k^* \subset \bar{k}$, soit en terme des orbites de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans I , correspondant elle-même aux facteurs de $F \otimes k$.

(iv) α est de la forme $\alpha = \prod_{\omega \in I} \omega^{n_\omega}$. Les familles d'exposants (n_ω) permises sont celles telles que $n_\omega = n_{\omega'}$ pour ω et ω' dans la même orbite de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Ce sont encore celles telle que $\prod_\omega (x)^{n_\omega} \in k$ pour tout $x \in F$.

(v) Posons $F \otimes k = \prod_{j \in J} F_j$, les F_j étant des corps. Alors, α s'écrit $\alpha = \prod N_{F_j/k}^{m_j}$.

Dans le cas particulier où k contient une clôture normale de F , ces expressions deviennent : $\alpha = \prod_{\omega} \omega^{n_\omega}$, où ω parcourt les $[F:\mathbb{Q}]$ plongements de F dans k .

5.2 - Supposons que k soit un corps de nombres, et soit α un homomorphisme algébrique de F^* dand k^* . Il existe alors un et un seul homomorphisme, encore noté α , du groupe $I(F)$ des idéaux fractionnaires de F dans celui de k , tel que $\alpha((x)) = (\alpha(x))$. L'unicité résulte de ce que tout idéal a une puissance qui est un idéal principal, et de ce que $I(k)$ est sans torsion. Pour prouver l'existence, on utilise par exemple 5.1(v) : on a $\alpha(a) = \prod N_{F_j/k}^{m_j}((a))$.

5.3 - Rappelons la définition des caractères de Hecke algébriques, appelés par Weil caractères de Hecke (ou : grössencharaktere) de type A_0 . Soient F un corps de nombres, m un idéal de F (i.e., de l'anneau des entiers de F), I_m le groupe des idéaux fractionnaires de F premiers à m , et k un corps de caractéristique 0 . Un homomorphisme $\chi : I_m \longrightarrow k^*$ est un <u>caractère de Hecke algébrique</u> (de conducteur $\leq m$) s'il existe un homomorphisme algébrique $\chi_{alg} : F^* \longrightarrow k^*$ vérifiant

(*) Pour $x \in F^*$, premier à m , totalement positif et $\equiv 1 \pmod m$, on a $\chi((x)) = \chi_{alg}(x)$.

Par densité de l'ensemble des x de (*) , χ_{alg} est entièrement déterminé par χ . C'est la <u>partie algébrique</u> de χ . Si $\chi((x)) = \chi_{alg}(x)$ pour x totalement positif et $\equiv 1 \pmod{m'}$, χ se prolonge en un caractère de Hecke de conducteur $\leq \inf(m,m')$: $I_{m+m'} \longrightarrow k^*$. On identifiera les caractères de Hecke qui coïncident sur leur domaine commun de définition, et on appelle <u>conducteur</u> de χ le plus petit m' tel que χ soit de conducteur $\leq m'$.

Remarque 5.4 : Si un caractère de Hecke algébrique χ prend ses valeurs dans un sous-corps k' de k, c'est déjà un caractère de Hecke à valeurs dans k' : il suffit de voir que $\chi_{alg} : R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathbb{G}_m$ est déjà défini sur k', et ceci résulte de la densité de Zariski dans $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ de l'ensemble des x totalement positif $\equiv 1(m)$. On pour toujours prendre pour k' un sous-corps de k de degré fini sur $\mathbb{Q}$.

5.5 - Si ε est une unité totalement positive $\equiv 1(\text{mod } m)$, on a $\chi_{alg}(\varepsilon) = \chi((\varepsilon)) = 1$. L'homomorphisme χ_{alg} se factorise donc par le quotient T_m de $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ par l'adhérence de Zariski du groupe $E_m \subset F^*$ des unités totalement positives $\equiv 1(\text{mod } m)$.

D'après Serre [5]II§3, si k est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, et que m est assez grand, les caractères $\prod_\omega \omega^{n_\omega}$ de $R_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$ de la forme χ_{alg} sont caractérisés comme suit : il doit exister un entier N, le <u>poids</u> de χ (ou de χ_{alg}), tel que pour tout élément σ de $Gal(k/\mathbb{Q})$ conjugué à la conjugaison complexe, on ait $n_\omega + n_{\sigma\omega} = N$. Si F_1 est le plus grand sous-corps de F qui soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel F_1', cela revient à dire que χ_{alg} est de la forme $\chi_1 \circ N_{F/F_1}$, et que $\chi_1|F_1 = (N_{F_1/\mathbb{Q}})^N$.

Si χ est de poids N, pour tout idéal a de F, $\chi(a)$ est un nombre algébrique dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $N(a)^{N/2}$ ([5]II§3 prop. 2).

5.6 - Pour k un corps de nombres fixé, des conditions supplémentaires sont imposées à χ_{alg}. Pour tout idéal a de F premier au conducteur, on a en effet

(5.6.1) $$\chi_{alg}(a) = (\chi(a)) ,$$

de sorte que $\chi_{alg}(a)$ est principal. Puisque le groupe des idéaux fractionnaire de k est sous torsion, il suffit de prouver la puissance $n^{\text{ième}}$ de (5.6.1), $n \neq 0$ convenable ; ceci permet de remplacer a par a^n, donc de supposer $a = (x)$, avec x totalement positif $\equiv 1(\text{mod } m)$. Il ne reste qu'à utiliser les définitions.

Ceci, joint à 5.5, montre que χ_{alg} détermine la norme des $\chi(a)$ en toutes les places de k .

5.7 - Le groupe S_m de Serre pourrait être caractérisé comme étant le groupe de type multiplicatif dont le groupe des caractères (sur n'importe quel corps) est le groupe des caractères de Hecke algébriques de conducteur $\leq m$ (cf. [5]II 2.1 et 2.2). Sa relation avec les représentations ℓ-adiques est expliquée en [5]II 2.3.

Théorème 5.8 ([5]) : Soit χ un caractère de Hecke algébrique de F dans E_λ , pour E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Il existe alors un (et un seul) homomorphisme $\chi_\lambda : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow E_\lambda$, tel que

(i) χ_λ est non ramifié en dehors du conducteur f de χ et de ℓ

(ii) Pour p un idéal premier de F premier à f et à ℓ , et $F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab}$ le Frobenius géométrique en p , on a

$$\chi_\lambda(F_p) = \chi(p) \quad .$$

5.9 - Dans la fin de ce paragraphe, nous donnerons un critère pour qu'une représentation λ-adique provienne ainsi d'un caractère de Hecke, et, au paragraphe suivant, nous l'appliquerons aux sommes de Jacobi. Nous retrouverons ainsi, un peu généralisés des résultats de Weil [8] [9], avec la seconde partie de la démonstration de Weil remplacée par un argument de cohomologie ℓ-adique.

Théorème 5.10 : Soient F de k deux corps de nombres, λ une place de k de caractéristique ℓ , et $\chi_\lambda : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow k_\lambda^*$ un homomorphisme, non ramifié en dehors de ℓ et d'un ensemble fini S de places. On suppose qu'il existe un ensemble T de places (contenant S et les places au-dessus de ℓ), de densité 0 , et un homomorphisme algébrique $\chi_0 : F^* \longrightarrow k^*$ tels que

(i) Pour $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , $\chi_0 : F^* \longrightarrow k^* \hookrightarrow \bar{k}^*$ est du type considéré en 5.5, de poids N ;

(ii) pour p premier $\notin T$, $\chi_\lambda(F_p)$ est dans k^* , $(\chi_\lambda(F_p)) = \chi_0(p)$, et tous les conjugués complexes de $\chi_\lambda(F_p)$ sont de valeur absolue $(Np)^{N/2}$.

Alors, χ_λ est défini (5.8) par un caractère de Hecke algébrique de F à valeurs dans k , de partie algébrique χ_0 .

Soit χ' un caractère de Hecke algébrique à valeurs dans une extension galoisienne finie k' de k , de partie algébrique χ_0 (5.5) . Quitte à aggrandir T , on peut supposer que le conducteur de χ' est à support dans T . Soient λ' une place de k' au-dessus de λ , $\chi_{\lambda'}$ le composé $Gal(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow k_\lambda^* \longrightarrow k_{\lambda'}'^*$, et $\chi'_{\lambda'}$: $Gal(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow k_{\lambda'}'^*$ défini par χ' (5.8). Posons $\varepsilon = \chi_{\lambda'} \cdot \chi'^{-1}_{\lambda'}$

L'hypothèse (ii), et 5.5, 5.6, 5.8 assurent que pour $p \notin T$, on a $\varepsilon(F_p) \in k'^*$, et que, dans tous les complétés de k', ce nombre est de norme 1 . Il en résulte que $\varepsilon(F_p)$ appartient au groupe (fini) μ racines de l'unité de k' . D'après le théorème de densité de Čebotarev, et l'hypothèse de densité faite sur T , les $F_p (p \notin T)$ sont denses dans $Gal(\bar{F}/F)^{ab}$, de sorte que $\varepsilon(\sigma) \in \mu$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)^{ab}$: le caractère ε est un caractère d'ordre fini $Gal(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow \mu$. D'après la théorie du corps de classe, il correspond à un caractère d'ordre fini du groupe des classes d'idèles de F , i.e. à un caractère de Hecke algébrique de partie algébrique triviale. Corrigeant χ' par ce caractère, on se ramène à supposer que $\chi_{\lambda'} = \chi'_{\lambda'}$, et il reste à montrer que χ' , à priori à valeurs dans k' , est en fait à valeurs dans k . Si $\sigma \in Gal(k'/k)$, χ' et χ'^{σ} coïncident sur tout idéal premier $p \notin T$, puisque $\chi'(p) = \chi'_{\lambda'}(F_p) = \chi_{\lambda'}(F_p) \in k^*$. Les caractères $\chi'_{\lambda'}$ et $\chi'^{\sigma}_{\lambda'}$ coïncident donc sur une partie dense de $Gal(\bar{F}/F)^{ab}$, donc sont égaux, de sorte que $\chi' = \chi'^{\sigma}$: χ' est à valeurs dans k .

6. - Les caractères de Hecke définis par les sommes de Jacobi.

L'idée de ce paragraphe est la suivante. Soit une somme de Gauss $\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi)$. Elle-même, et le faisceau correspondant $\mathcal{F}(\chi^{-1}\psi)$ sont deux fois liés à la caractéristique p , et au corps de base $\mathbb{F}_q$:

a) car il y apparaît le caractère additif ψ , et le faisceau $\mathcal{F}(\psi)$;

b) car $\mathcal{F}(\chi)$ est défini à partir de la suite exacte de Lang

$$0 \longrightarrow k^* \longrightarrow V^* \longrightarrow V^* \longrightarrow 0 \quad .$$

Deux difficultés si on veut relever sur un corps de nombres F les constructions cohomologiques correspondantes, et trouver des représentations ℓ-adiques de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ où les valeurs propres de Frobenius soient des sommes de Gauss.

Si χ est trivial sur $\mathbb{F}_q^*$, la somme $\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi,\psi)$ est indépendante de ψ , et est q fois une somme de Jacobi. Celle-ci est liée à la cohomologie de $W^*/\mathbb{G}_m$, à valeurs dans un faisceau déduit de χ : ψ , et la difficulté a), ont disparu . Pour résoudre b), il suffit de décrire les faisceaux utilisés à l'aide de suites exactes de Kummer (qui ont un sens en toute caractéristique). C'est possible grâce à 4.9.

Une fois trouvées les représentations ℓ-adiques, on utilise 5.10 et le théorème de Stickelberger pour montrer qu'elles proviennent de caractères de Hecke algébriques.

6.1 - Si E est un corps, de clôture algébrique $\bar{E}$, et que γ est un caractère d'ordre divisant n de $\mu_d(\bar{E})$, on note ${}_n\gamma$ le caractère de $\mu_n(\bar{E})$ tel que γ et ${}_n\gamma$ induisent le même caractère de $\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\bar{E}} = \varprojlim \mu_m(\bar{E})$. De même pour λ un caractère de $\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\bar{E}}$.

Soient F et k deux corps de nombres, $\bar{F}$ une clôture algébrique de F , I un ensemble fini muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ et $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de caractères $\lambda_i : \hat{\mathbb{Z}}(1)_{\bar{F}} \longrightarrow k^*$. On suppose que $\lambda_i \neq 1 (i \in I)$, que

le produit des λ_i est trivial et que la famille λ est défini sur F , i.e. que pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$, on a $\lambda_{\sigma(i)} = \lambda_i \circ \sigma^{-1}$.

L'ensemble galoisien I est l'ensemble des homomorphisme dans $\bar{F}$ d'une algèbre E séparable sur F . Si C est l'ensemble des orbites de $Gal(\bar{F}/F)$ dans I , on a une décomposition de E en produit de corps $E = \prod_{\alpha \in C} E_\alpha$, où α s'identifie à l'ensemble des plongements de E_α dans $\bar{F}$. Si les caractères λ_i , pour $i \in \alpha$, sont d'ordre d_α , le corps E_α contient les racines $d_\alpha^{\text{ièmes}}$ de 1 et il existe $\lambda_\alpha : \mu_{d_\alpha}(E_\alpha) \hookrightarrow k^*$ tel que, si $i \in \alpha$ correspond au plongement σ_i de E_α dans $\bar{F}$, on ait $_{d_\alpha}\lambda_i = \lambda_\alpha \sigma_i^{-1}$.

6.2 - Soient $n > 0$ un multiple des d_α , Σ l'ensemble des places de F où E/F se ramifie ou qui divisent n , μ une place de k de caractéristique résiduelle ℓ , et A l'anneau des éléments de F entiers en dehors de Σ et ℓ . La clôture intégrale M de A dans E est finie étale de rang $N = |I|$ sur A . Avec les notations de 4.6, 4.8, les $_n\lambda_i$ définissent

$$_n\lambda : (V^*/\mathbb{G}_m)_n \longrightarrow k^* \subset k_\mu^* \quad .$$

Soit a la projection de $W^*/\mathbb{G}_m$ sur $Spec(A)$. D'après 4.20, le faisceau $R^{N-2}a_!K_n(_n\lambda)$ est lisse de rang un ; il définit une représentation ℓ-adique

$$j_\mu[\lambda] : Gal(\bar{F}/F)^{ab} \longrightarrow k_\mu^*$$

(ou simplement j_μ) non ramifiée en dehors de Σ et ℓ .

6.3 - Calculons $j_\mu(F_p)$. D'après 4.20, il suffit de le faire après réduction modulo p . Soient donc $f = A/p$, $e = M/pM$, et $\bar{f}$ la clôture algébrique de f définie par une place de $\bar{F}$ au-dessus de p . On a encore $I = Hom_f(e, \bar{f})$. Après réduction, $_n\lambda$ admet encore une description 6.1 :

a) Soit D l'ensemble des orbites de $Gal(\bar{f}/f)$ dans I . La décomposition de e en produit de corps s'écrit $e = \prod_{\beta \in D} e_\beta$, où les $\sigma_i (i \in \beta)$ s'identifient aux plongements de e_β dans f . Pour $\beta \in D$, on note $\alpha(\beta)$ l'élément de C

contenant β et $d_\beta = d_{\alpha(\beta)}$. Soit

$$\lambda_\beta : \mu_{d_\beta}(e_\beta) \xleftarrow{\sim} \mu_{d_\beta}(E_{\alpha(\beta)}) \xrightarrow{\lambda_{d(\beta)}} k^* \quad .$$

b) Si $i \in I$ correspond au plongement σ_i de e_β dans $\bar{f}$, la réduction $d_\beta\bar{\lambda}_i : \mu_{d_\beta}(\bar{f}) \longrightarrow k^*$ de $d_\beta\lambda_i$ est $\lambda_\beta \circ \sigma_i^{-1}$.

Soient q_β le nombre d'éléments de e_β , $\chi_\beta = (q_\beta - 1)\lambda_\beta$, et $\chi : e^* \longrightarrow k^*$ de coordonnées les χ_β . Sur l'espace affine sur A/p défini par e (4.6), ou plutôt sur le tore e_β^* , on a des isomorphismes $\mathcal{K}_n((_n\bar{\lambda}_i)_{i\in\beta}) = \mathcal{K}_{d_\beta}((\lambda_\beta \circ \sigma_i^{-1})_{i\in\beta}) = \mathcal{K}_{q_\beta - 1}((\chi_\beta \circ \sigma_i^{-1})_{i\in I}) = \mathcal{F}(\chi_\beta)$ (4.9). Sur e^* , on a donc $\mathcal{K}_n((_n\bar{\lambda}_i)_{i\in\beta}) = \mathcal{F}(\chi)$ et cet isomorphisme se descend à la réduction mod p de $V^*/\mathbb{E}_m$. Dès lors

<u>Proposition 6.4</u> - <u>Avec les notations de 6.2 et 6.3</u>, $j_\mu(F_p)$ <u>est la somme de Jacobi</u> $J(\chi)$.

Récrivons les formules liant $(\lambda_i)_{i\in I}$ à $(\chi_\beta)_{\beta\in B}$: pour $i \in \beta \subset \alpha$,

$$d_\alpha\lambda_i = \lambda_\alpha \circ \sigma_i^{-1} \quad , \lambda_\alpha : \mu_{d_\alpha}(E_\alpha) \longrightarrow k^*$$

$$\lambda_\beta = \text{réduction de } \lambda_\alpha \quad , \quad : \mu_{d_\alpha}(e_\beta) \longrightarrow k^*$$

$$\chi_\beta = q_\beta - 1\lambda_\beta : x \longmapsto \lambda_\beta(x^{(q_\beta - 1)/d_\alpha}) : e_\beta^* \longrightarrow k^* \quad .$$

<u>Théorème 6.5</u> - <u>La représentation</u> j_μ <u>est définie par un caractère de Hecke algébrique de</u> F <u>à valeurs dans</u> k^* .

Nous le vérifierons à l'aide de 5.10. On rejoint ici la démonstration de Weil [8] [9], par l'usage du théorème de Stickelberger, et je ne donnerai que quelques indications.

6.6 - Etant donné $j : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow k_\lambda^*$, et une extension finie F'/F , on vérifie à l'aide de 5.10 que j est défini par un caractère de Hecke si et seulement si $j|\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ l'est. Cette remarque permet dans 6.5 de se réduire au cas où Galois agit trivialement sur I , et où F contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de

l'unité. On peut ensuite se réduire au cas où $F = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, puis prendre $k = F$. Dans ce cas, chaque ${}_n\lambda_i$ est défini par $a_i \in \mathbb{Z}/n$: c'est $x \longmapsto x^{a_i} : \mu_n \longrightarrow k^*$. On a $\sum a_i = 0$, et $a_i \neq 0$.

6.7 - Dans un corps de nombres, les places de degré 1 forment toujours un ensemble de densité 0 . En appliquant 5.10, on peut donc négliger les autres, et n'utiliser Stickelberger que pour un corps premier. Soient donc p premier, $0 < a < p-1$, $\tilde{x} : \mathbb{F}_p^* \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$ le caractère "relèvement multiplicatif" et $g = -\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \tilde{x}^{-a}\zeta^x \in \mathbb{Q}_p(\zeta)$, pour ζ une racine $p^{\text{ième}}$ de 1 . Notons encore x l'entier dans $[0,p-1]$ relevant x , et développons $\zeta^x = (1+\pi)^x$ par la formule du binôme. On trouve $g = -\sum_{i=0}^{p-1} A_i \pi^i$ avec $A_i \in \mathbb{Z}_p$, de réduction mod p la somme $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} x^{-a}\binom{x}{i}$. Pour b non divisible par $p-1$, on a $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} x^b = 0$. Si $i < a$, $\binom{x}{i}$ est un polynôme en x de degré $i < a$, d'où $A_i \equiv 0 (\text{mod } p)$. De même, $A_a \equiv \frac{p-1}{a!} (\text{mod } p)$, et $g \sim \frac{\pi^a}{a!}$: la valuation de g est donnée par $v(g)/v(p) = \frac{a}{p-1}$.

6.8 - Soit $\sigma_i (i \in \mathbb{Z}/n^*)$ l'élément de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/\mathbb{Q})$ tel que $\sigma_i(\zeta) = \zeta^i$ pour $\zeta^n = 1$, et notons additivement le groupe des homomorphisme algébriques $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})^* \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})^*$. Pour λ comme en 6.6, défini par une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'entiers mod n , non nuls et de somme nulle 5.10, 4.15.1 et 6.7 montrent que $j_\mu[\lambda]$ est défini par un caractère de Hecke algébrique $j[a]$ et que, si N est la norme, sa partie algébrique est donnée par

$$(6.8.1) \qquad (Nj[a])_{alg} = \sum_{i \in (\mathbb{Z}/n)^*} \sum_{j \in I} \left\{\frac{ia_j}{n}\right\} \sigma_i^{-1}$$

où $\{\ \}$ est la partie fractionnaire.

6.9 - Le cas le plus intéressant est celui où $F \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, et où la famille des ${}_n\lambda_i$ est construite comme suit :

a) On prend une famille finie $(A_j)_{j \in J}$ d'orbites de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/F) = H \subset (\mathbb{Z}/n)^*$ dans $\mathbb{Z}/n$. On suppose que $A_j \neq \{0\}$ et que $\sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j} a = 0$.

b) On prend $I = \coprod_{j \in J} A_j$; Galois agit sur chaque A_j .

c) On prend $\bar{F} \supset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ et, si $i \in I$ correspond à $a \in A_j \subset (\mathbb{Z}/n)^*$ $\lambda_i(x) = x^a$.

On vérifie à l'aide de 4.20 qu'un j_μ général (relatif à F_1) se déduit d'un j_μ comme ci-dessus (pour $F \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, F_1 extension de F) par restriction à $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F_1)$ et multiplication par un caractère d'ordre deux.

Pour $a \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n)^*$, a transformé la famille des A_j en celle des aA_j . Si $a \in H$, la famille des A_j est donc préservée, et les $j_\mu(F_p)$ sont invariant par H :

Proposition 6.10 - Sous les hypothèses de 6.9, j_μ est défini par un caractère de Hecke algébrique de F à valeurs dans F .

Faisons à nouveau $F = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, et considérons les caractères de Hecke $j[a]$ définis par une famille $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in \mathbb{Z}/n$, $a_i \neq 0$, $\Sigma a_i = 0$. Le théorème suivant a été obtenu indépendamment par Vishik.

Théorème 6.11 - Tout caractère de Hecke algébrique de $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ a une puissance dans le groupe engendré par les $j[a]$ et la norme.

Puisqu'on travaille "à torsion près", seule compte la partie algébrique des caractères de Hecke considérés. Appliquant 6.8.1 aux $j[a]$, avec a = un élément de $\mathbb{Z}/n$ répété n fois, on se ramène au lemme suivant

Lemme 6.12 - Notons $\Sigma x_j \sigma_j$ les éléments de l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/n)^*]$, et soit X le sous-groupe de ceux tels que $x_j + x_{-j} = C^{te}$. Alors, X est engendré sur $\mathbb{Q}$ par $N = \Sigma\sigma_j$ et par les $g_a = \Sigma\{\frac{ia}{n}\}\sigma_i^{-1}$ $(a \in \mathbb{Z}/n, a \neq 0)$.

Tant X que $Y = <N, (g_a)>$ sont des idéaux de l'algèbre du groupe, et il suffit de vérifier qu'ils sont annulés par les mêmes caractères complexes χ de $(\mathbb{Z}/n)^*$. Ceci revient à dire qu'un caractère impair $(\chi(j)=-\chi(-j))$ n'annule jamais tous les g_a . Si χ est primitif, on a

$$\chi(g_1) = \sum_i \frac{i}{n} \chi^{-1}(i) = -L(\chi,0) \neq 0 \quad .$$

Dans le cas général, si χ provient d'un caractère primitif de $(\mathbb{Z}/d)^*$, $\chi(g_{n/d})$ se ramène à une somme analogue sur $(\mathbb{Z}/d)^*$, d'où le lemme.

7.- Sommes de Kloosterman généralisées.

7.1 - Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, et ψ un caractère additif non trivial. Dans ce paragraphe, nous faisons une étude cohomologique des sommes de Kloosterman généralisées

$$(7.1.1) \qquad K_{n,a} = \sum_{x_1 \cdots x_n = a} \psi(x_1+\ldots+x_n) \qquad (n \geq 1) \quad .$$

Pour $a=0$, cette somme est élémentaire (cf. 7.7) :

$$(7,1.2) \qquad K_{n,0} = (-1)^{n-1} \quad .$$

Le cas intéressant est celui où $a \neq 0$. Les x_i sont alors dans $\mathbb{F}_q^*$. Nous prouverons dans ce cas une majoration

$$(7.1.3) \qquad |K_{n,a}| \leq n q^{\frac{n-1}{2}} \quad .$$

Nos outils essentiels seront les énoncés cohomologiques de reflet les identités suivantes

$$(7.1.4) \qquad K_{n,a} = \sum_{x_1} \psi(x_1) \sum_{x_2 \cdots x_n = a/x_1} \psi(x_2+\ldots+x_n)$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \psi(x) K_{n-1,a/x} \qquad (a \neq 0,\ n \geq 2)$$

$$(7.1.5) \qquad \sum_a K_{n,a} = \sum_a \sum_{x_1 \cdots x_n = a} \psi(\sum x_i) = \sum_{x_1,\ldots,x_n} \psi(\sum x_i) = 0$$

(7.1.6) Pour χ un caractère non trivial de $\mathbb{F}_q^*$,

$$\sum \chi(a) K_{n,a} = \sum_{x_1,\ldots,x_n} \chi(\prod x_i).\psi(\sum x_i) = (-\tau(\chi^{-1},\psi))^n$$

(somme de Gauss).

7.2 - Soient k une algèbre étale de degré n sur $\mathbb{F}_q$, et $\varepsilon(k)$ comme en (4.5.1). Posons

$$K_{k,a} = \sum_{N_{k/\mathbb{F}_q}(x)=a} \psi\, \mathrm{Tr}(x) \quad .$$

On a encore

(7.2.1) $\quad K_{k,0} = (-1)^{n-1}.\varepsilon(k)$

(7.2.2) $\quad \sum_a K_{k,a} = 0$

(7.2.3) $\quad \sum_a \chi(a)K_{k,a} = (-1)^n \tau_{\mathbb{F}_q}(\chi^{-1} \circ N_{k/\mathbb{F}_q}, \Psi)$.

Par inversion de Fourier sur $\mathbb{F}_q^*$, on en déduit une expression de $K_{k,a}$ en terme de sommes de Gauss :

$$K_{k,a} = \frac{1}{q-1} \sum_\chi \chi(a) \sum_{b \in \mathbb{F}_q^*} \chi^{-1}(b)K_{k,b}$$

(7.2.4) $\quad (-1)^n K_{k,a} = \frac{1}{q-1}\left[\varepsilon(k) + \sum_{\chi \neq 1} \chi(a)\tau_{\mathbb{F}_q}(\chi \circ N_{k/\mathbb{F}_q}, \Psi)\right]$.

L'identité de Hasse-Davenport permet maintenant de comparer $K_{k,a}$ à $K_{n,a} = K_{\mathbb{F}_{q^n},a}$:

(7.2.5) $\quad K_{k,a} = \varepsilon(k)K_{n,a}$.

Je ne connais pas d'interprétation cohomologique de (7.2.4), mais j'en donnerai une de 7.2.5. Revenons aux sommes $K_{n,a}$.

7.3 - Soit $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et, pour $a \in \mathbb{F}$, soit V_a^{n-1} , ou simplement V_a , l'hypersurface de $\mathbb{A}^n$ d'équation $x_1 \ldots x_n = a$. Comme d'habitude, nous regarderons Ψ comme étant à valeurs ℓ-adiques plutôt que complexes. Avec la notation 1.8 (ii), (7.1.3) se déduit du

<u>Théorème 7.4</u> - <u>La cohomologie de</u> V_a^{n-1} <u>à valeurs dans</u> $\mathcal{F}(\Psi(\sum x_i))$ <u>vérifie</u>

(i) $H_c^i = 0$ <u>pour</u> $i \neq n-1$;

(ii) $H_c^* \xrightarrow{\sim} H^*$;

(iii) <u>pour</u> $a \neq 0$, $\dim H_c^{n-1} = n$;

(iv) pour $a = 0$, H_c^{n-1} est canoniquement isomorphe à E_λ .

7.5 - Comme d'habitude, ce théorème contrôle aussi la dépendance de $K_{n,a}$ en q : pour chaque $a \in \mathbb{F}_q^*$, il existe n valeurs propres de Frobenius $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, de valeur absolue complexe $q^{\frac{n-1}{2}}$, telles que

$$\sum_{x_1\dots x_n=a} \psi \circ \mathrm{Tr}(\sum x_i) = (-1)^{n-1}\left[\alpha_1^m+\dots+\alpha_n^m\right] .$$

$x_i \in \mathbb{F}_{q^m}$

Pour n pair, $x \longrightarrow -x$ est une involution de V_a , qui transforme $\mathfrak{F}(\psi)$ en son dual. Raisonnant comme en 3.6 , on en déduit une forme alternée non dégénérée canonique sur $H_c^{n-1}(V_a,\mathfrak{F}(\psi))$, à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell(-(n-1))$ et le

Corollaire 7.6 - Avec les notations de 7.5, si n est pair, les α_i se groupent en $\frac{n}{2}$ paires de racines $\alpha,\bar{\alpha}$ de produit égal à q^{n-1} .

7.7 - Vérifions le cas $a = 0$ de 7.4 . L'hypersurface V_0 est la réunion des hyperplans de coordonnée $x_i = 0$. Calculons la suite spectrale de Leray (2.6.1)* de ce recouvrement de V_0 , pour la cohomologie avec ou sans support à coefficient dans $\mathfrak{F}(\psi)$. D'après 2.7*, tous les termes initiaux sont nuls, sauf la cohomologie de l'intersection $\{0\}$ de tous les hyperplans de coordonnée. Là subsiste un isomorphisme $H_c^0 \xrightarrow{\sim} H^0 = E_\lambda$ qui justifie 7.4.

Nous prouverons 7.4 et 7.8 ci-dessous par une récurrence simultanée sur n , en nous appuyant sur la suite spectrale dont (7.1.4) est le reflet. Ceci exige un contrôle de la dépendance en a de $K_{n,a}$.

Soit $\pi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}$ l'application "produit des coordonnées", et σ la somme des coordonnées. Les hypersurfaces V_a sont les fibres de π .

Théorème 7.8. - (i) Le faisceau $R^{n-1}\pi_!\mathfrak{F}(\psi\sigma)$ est lisse de rang n sur $\mathbb{A}^1-\{0\}$.

(ii) son prolongement par 0 sur $\mathbb{P}^1$ est l'image directe de sa restriction à $\mathbb{A}^1-\{0\}$.

(iii) en 0 , la monodromie est unipotente, avec un seul bloc de Jordan

(iv) en ∞ , l'inertie sauvage agit sans point fixe $\neq 0$, et le conducteur de Swan vaut 1 ,

(v) on a $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \xrightarrow{\sim} R^i\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)$ (nul pour $i \neq n-1$) .

Preuve de ce que 7.4 (pour une valeur donnée de n) implique 7.8 (pour la même valeur de n).

La fibre de $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$ en a est $H^i_c(V_a,\mathcal{F}(\psi\sigma))$, et sur l'ouvert dense $\mathbb{A}^1$ où les $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi^{-1}\sigma)$ sont localement constants, celle de $R^i\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)$ est $H^i(V_a,\mathcal{F}(\psi\sigma))$(Th. Finitude, 2.1). L'hypothèse 7.4(n) nous fournit donc le

Lemme 7.9 - (i) $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) = 0$ pour $i \neq n-1$.

(ii) Pour $i = n-1$, la fibre de ce faisceau en tout point $a \neq 0$ est de rang constant n . En 0 , elle est de rang 1 .

(iii) Sur un ouvert dense U , on a $R^i\pi_!\mathcal{F}(\psi) \xrightarrow{\sim} R^i\pi_*\mathcal{F}(\psi)$.

7.10 - Nous allons maintenant utiliser la suite spectrale de Leray de π , pour la cohomologie avec ou sans support, à coefficients dans $\mathcal{F}(\psi\sigma)$. L'aboutissement est connu : $H^*_c(\mathbb{A}^n,\mathcal{F}(\psi\sigma)) = H^*(\mathbb{A}^n,\mathcal{F}(\psi\sigma)) = 0$ (2.7*) . En cohomologie à support propre, 7.9 (i) assure que $E_2^{pq} = 0$ pour $q \neq n-1$. Les termes E_2 sont donc tous nuls :

(7.10.1) $$H^p_c(\mathbb{A}^1,R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) = 0 \quad .$$

Pour $p = 0$, ceci signifie que $R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$ est sans section à support ponctuel. Vu la constance de rang 7.9 (ii), on en déduit

(7.10.2) Le faisceau $R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$ sur $\mathbb{A}^1$ est lisse sur $\mathbb{A}^1-\{0\}$, et est un sous-faisceau de l'image directe j_* de sa restriction à $\mathbb{A}^1-\{0\}$.

La suite exacte longue de cohomologie de

$$0 \longrightarrow R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où le support de $\mathcal{Q}$ est concentré en 0 , donne

$$H_c^0(\mathbb{A}^1,\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{Q}_0 \longrightarrow H_c^1(\mathbb{A}^1,R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) \quad .$$

Les termes extrêmes étant nuls, $\mathcal{Q} = 0$ et

(7.10.3) $R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$ est l'image directe de sa restriction à $\mathbb{A}^1-\{0\}$.

Soit j l'inclusion de $\mathbb{A}^1$ dans $\mathbb{P}^1$. La version "catégorie dérivée" des suites spectrales de Leray est

$$\mathbf{H}^*(\mathbb{P}^1, j_!R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) = \mathbf{H}_c^*(\mathbb{A}^1, R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) = H_c^*(\mathbb{A}^n, \mathcal{F}(\psi\sigma)) = 0$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbb{P}^1, Rj_*R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)) = \mathbf{H}^*(\mathbb{A}^1, R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)) = H^*(\mathbb{A}^n, \mathcal{F}(\psi\sigma)) = 0 \quad .$$

Soit Δ le mapping cylinder de $j_!R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \longrightarrow Rj_*R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)$. D'après 7.9 (iii), les faisceaux de cohomologie de ce complexe de faisceaux sont à support fini. D'autre part, la suite exacte longue de cohomologie du triangle $(j_!R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma), Rj_*R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma), \Delta)$ montre que $\mathbf{H}^*(\mathbb{P}^1,\Delta) = 0$. On a $\mathbf{H}^*(\mathbb{P}^1,\Delta) = H^0(\mathbb{P}^1,\mathbf{H}^*(\Delta))$, et finalement $\Delta = 0$:

$$j_!R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \xrightarrow{\sim} Rj_*R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma) \quad .$$

En particulier, $R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \xrightarrow{\sim} R\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)$ et, ces complexes de faisceaux n'ayant qu'un faisceau de cohomologie non nul,

(7.10.4) $$j_!R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \xrightarrow{\sim} j_*R\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma) \quad .$$

Ceci complète la preuve de (i) (ii) (v).

7.11 - Soient Sw_0 et Sw_∞ les conducteurs de Swan en 0 et en ∞ de $R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$. On a $\chi_c(R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) = 0$ (7.10.1) et la formule d'Euler-Poincaré (3.2.1) se réduit à

7.11.1) $$Sw_0 + Sw_\infty = 1 \quad :$$

un de ces conducteurs vaut 0 (ramification modérée), l'autre vaut 1 .

7.12 - Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur $\mathbb{G}_m$, du type kummérien 4.7 ($g = K_n(\chi)$) et non constant ($\chi \neq 1$) . Le faisceau $\mathcal{F}(\psi\sigma) \otimes \pi^*\mathcal{L}$ sur $V^* = \pi^{-1}(\mathbb{G}_m) = \mathbb{A}^n - \pi^{-1}(0)$ est alors du type rencontré dans l'étude des sommes de Gauss, et 4.11 (ii) nous donne

(7.12.1) $$H^*_c(V^*, \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}(\psi\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^*(V^*, \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}(\psi\sigma)) \quad .$$

La suite spectrale de Leray de π transforme cet énoncé en

(7.12.2) $$H^*_c(\mathbb{G}_m, \mathcal{L} \otimes R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbb{G}_m, \mathcal{L} \otimes R^{n-1}\pi_*\mathcal{F}(\psi\sigma)) \quad .$$

Soit i l'inclusion de $\mathbb{G}_m$ dans $\mathbb{P}^1$, et Δ le mapping cylinder de $\delta : i_!(\mathcal{L} \otimes R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi)) \longrightarrow Ri_*(\mathcal{L} \otimes R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma))$ (où $R^{n-1}\pi_! = R^{n-1}\pi_*$) . Raisonnant comme en 7.10, on déduit de (7.12.2) que $\Delta = 0$. En particulier

(7.12.3) En 0 et en ∞ , l'inertie agit sans point fixe $\neq 0$ sur $\mathcal{L} \otimes R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$.

En ∞ , ceci vaut même si $\mathcal{L}$ est trivial (7.10.4), de sorte que l'inertie sauvage agit sans point fixe. En particulier, la ramification est sauvage ; d'après 7.11, on a $Sw_\infty = 1$, et la ramification en 0 est modérée.

En 0 , (7.12.3) impose à la ramification - modérée - de $R^{n-1}\pi_!\mathcal{F}(\psi\sigma)$ être unipotente. D'après (7.10.3) et 7.9 (ii), on a un seul bloc de Jordan. Ceci achève la preuve de 7.8 (n) .

7.13 - Pour $n = 1$, 7.4 est trivial. Pour achever la preuve de 7.4 et 7.8, il nous reste à prouver que 7.8, pour une valeur donnée de n , implique 7.4, pour $n+1$. Le cas $a=0$ ayant été traité (7.7), on suppose que $a\neq 0$. On écrira $x_0,\dots,x_n$ pour les coordonnées de $\mathbf{A}^{n+1}$. Soient $g = x_0 : V_a \longrightarrow \mathbb{G}_m$, τ l'involution $x \longmapsto ax^{-1}$ de $\mathbb{G}_m$, et soit comme plus haut π le produit des coordonnées : $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$, et σ leur somme. On notera $\mathcal{F}(\psi\sigma)$ le faisceau $\mathcal{F}(\psi(\Sigma x_i))$ tant sur $\mathbb{A}^{n+1}$ que sur $\mathbb{A}^n$.

7.14 - Ecrivons la suite spectrale de Leray de g . Le faisceau $\mathcal{F}(\psi\sigma)$ sur $\mathbb{A}^{n+1}$ étant produit tensoriel externe des faisceaux $\mathcal{F}(\psi)$ sur $\mathbb{A}^1$ et $\mathcal{F}(\psi\sigma)$ sur $\mathbb{A}^n$; on trouve (cf. 7.1.4)

$$'E_2^{pq} = H_c^p(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi) \otimes \tau^* R^q\pi_! \mathcal{F}(\psi\sigma)) \Longrightarrow H_c^{p+q}(V_a, \mathcal{F}(\psi\sigma))$$

$$''E_2^{pq} = H^p(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi) \otimes \tau^* R^q\pi_* \mathcal{F}(\psi\sigma)) \Longrightarrow H^{p+q}(V_a, \mathcal{F}(\psi\sigma)) .$$

Par hypothèse, $R^q\pi_! \mathcal{F}(\psi\sigma) \xrightarrow{\sim} R^q\pi_* \mathcal{F}(\psi\sigma)$, et ce faisceau est nul pour $q \neq n-1$. Le faisceau $\mathcal{F}(\psi)$ sur $\mathbb{G}_m$ est sauvagement ramifié en ∞ et non ramifié en 0 , tandis que $\tau^* R^q\pi_! \mathcal{F}(\psi\sigma)$ est sauvagement ramifié en 0 (sans invariant sous l'inertie sauvage, de conducteur de Swan 1) et modérément ramifié en ∞ . Leur produit tensoriel est donc

a) sauvagement ramifié en 0 et ∞ , sans invariant sous l'inertie sauvage ;

b) de conducteur de Swan 1 en 0 et n (le rang de $R^q\pi_! \mathcal{F}(\psi)$) en ∞ .

On a $'E_2^{pq} \xrightarrow{\sim} ''E_2^{pq}$, et $'E_2^{pq} = 0$ sauf pour $p = 1$ et $q = n-1$. La formule d'Euler-Poincaré donne enfin

$$\dim\ 'E_2^{pq} = 1+n \quad ;$$

ceci achève la démonstration.

Remarque 7.15.- L'isomorphisme obtenu en 7.14.

(7.15.1) $H_c^n(V_a^n, \mathcal{F}(\psi\sigma)) = H_c^1(\mathbb{G}_m, \mathcal{F}(\psi) \bigotimes \tau^* R^{n-1}\pi_! \mathcal{F}(\psi\sigma))$

permet, avec les notations de 7.5 , de calculer le produit $\det(F)$ des valeurs propres α_i de Frobenius. Le formalisme de [2] s'applique, puisque $\mathcal{F}(\psi)$ et $R^{n-1}\pi_! \mathcal{F}(\psi\sigma)$ appartiennent à des systèmes compatibles infinis de représentations ℓ-adiques. Ceci nous ramène à des problèmes locaux, qu'on peut simplifier en notant que (cf.[2] 9.5)

a) les constantes globales pour $\mathcal{F}(\psi)$ et $\tau^* R^{n-1}\pi_! \mathcal{F}(\psi)$ sont aisées à calculer, la cohomologie de ces faisceaux étant de nature triviale.

b) en tout point, pour l'un ou l'autre de ces faisceaux, la représentation ℓ-adique correspondante du groupe de décomposition a une semi-simplifiée non ramifiée.

Le résultat, pour la somme à n variables, est que

(7.15.2) $$\det(F, H_c^{n-1}(V_a^{n-1}, \mathcal{F}(\psi))) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

Remarque 7.16 - Pour $p = 2$, le faisceau $\mathcal{F}(\psi)$ est orthogonal. Pour $a \neq 0$ et n impair, on en déduit par 7.4 (ii) et dualité de Poincaré une forme bilinéaire symétrique sur $H_c^{n-1}(V_a^{n-1}, \mathcal{F}(\psi))$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell(1-n)$. Relativement à cette forme, F est une similitude orthogonale de multiplicateur q^{n-1} , et $q^{\frac{1-n}{2}} F$ appartient au groupe spécial orthogonal, d'après 7.15.2 . Une des valeurs propres de F est donc $q^{\frac{1-n}{2}}$, et les autres se rangent par paires de racines α , $\bar{\alpha}$ de produit q^{n-1} .

Pour $n = 3$, L. Carlitz [1] a obtenu un résultat plus précis, équivalent à la proposition suivante.

Proposition 7.17 - Pour $p = 2$, et $\psi(x) = (-1)^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_2}(x)}$, on a un isomorphisme

$$H_c^2(V_a^2, \mathcal{F}(\psi\sigma)) = \mathrm{Sym}^2 H_c^1(V_a^1, \mathcal{F}(\psi\sigma)) .$$

La puissance tensorielle seconde de $H^1_c(V^1_a,\mathcal{F}(\psi\sigma))$ est $H^2_c(V^1_a \times V^1_a, \mathcal{F}(\psi\sigma) \boxtimes \mathcal{F}(\psi\sigma))$ (Künneth), la symmétrie $x \otimes y \longrightarrow y \otimes x$ se représentant géométriquement comme $-\tau^*$, où τ est l'automorphisme $(x,y) \longrightarrow (y,x)$ de $V_a \times V_a$. Si X' est le quotient de $V^1_a \times V^1_a$ par $\{Id,\tau\}$ et π la projection de $V^1_a \times V^1_a$ sur X', le groupe $\mathrm{Sym}^2 H^1_c(V^1_a,\mathcal{F}(\psi\sigma))$ s'identifie donc à la cohomologie de X' à coefficient dans la partie antiinvariante par τ de $\pi_*(\mathcal{F}(\psi\sigma) \boxtimes \mathcal{F}(\psi\sigma))$. Notons s la fonction sur X' telle que $s\pi = \sigma\,pr_1 + \sigma\,pr_2$. On a $\mathcal{F}(\psi\sigma) \boxtimes \mathcal{F}(\psi\sigma) = \mathcal{F}(\psi(\sigma\,pr_1 + \sigma\,pr_2)) = \mathcal{F}(\psi s\pi) = \pi^*\mathcal{F}(\psi s)$ (isomorphisme compatible à τ). Sur l'image $\pi(\Delta)$ de la diagonale, le faisceau d'antiinvariants cherchés est donc nul, tandis que sur le complément $X = X' - \pi(\Delta)$, c'est le produit tensoriel de $\mathcal{F}(\psi s)$ par $\varepsilon(P)$, pour ε l'unique caractère d'ordre 2 de $\{1,\tau\}$, et P le $\{1,\tau\}$-torseur sur X qu'est le revêtement double induit par $V^1_a \times V^1_a$. On a

$$\mathrm{Sym}^2 H^1_c(V^1_a,\mathcal{F}(\psi\sigma)) = H^2_c(X,\mathcal{F}(\psi s) \otimes \varepsilon(P)) \quad . \tag{7.17.1}$$

Calculons X, s et $\varepsilon(P)$. Sur $V^1_a \times V^1_a$, posons $x_1 = x_1 \circ pr_1$, $x_2 = x_2 \circ pr_1$, $x'_1 = x_1 \circ pr_2$, $x'_2 = x_2 \circ pr_2$. On a $x_1x_2 = x'_1x'_2 = a$. Identifions fonctions sur X' et fonctions sur X invariante par τ. Soient $s_1 = x_1 + x'_1$, $s_2 = x_2 + x'_2$, $p_1 = x_1x'_1$, $p_2 = x_2x'_2$. On a $s_1p_2 = as_2$, $s_2p_1 = as_1$ et X est défini dans X' par $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. Sur X, on a donc $p_1 = as_1s_2^{-1}$, et (s_1,s_2) identifie X à $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. Sur X, le revêtement P admet pour équation $T^2 - s_1T + as_1s_2^{-1}$ (prendre pour T la coordonnée x_1). Si $T = s_1t$, cela se récrit $t^2 - t + as_1^{-1}s_2^{-1}$. On a donc $\varepsilon(P) = \mathcal{F}(\psi(as_1^{-1}s_2^{-1}))$. Puisque $s = s_1 + s_2$, on a $\mathcal{F}(\psi s) \otimes \varepsilon(P) = \mathcal{F}(\psi(s_1 + s_2 + as_1^{-1}s_2^{-1})$ et le second membre de 7.17.1 s'identifie au premier membre de 7.17.

Remarque - $H^1_c(V^1_a,\mathcal{F}(\psi\sigma))$ est aussi le premier groupe de cohomologie de la courbe elliptique complétée de la courbe affine d'équation

$$\begin{cases} y^2 - y = x_1 + x_2 \\ x_1x_2 = a \end{cases} ;$$

son invariant modulaire est $j = a^{-2}$.

Remarque 7.18 - Pour χ un caractère multiplicatif de $\mathbb{F}_q^*$, et $a \neq 0$, la méthode de 7.14 s'applique à l'étude de la somme

$$S = \sum_{x_0 \ldots x_n = a} \chi(x_0)\psi(x_0 + \ldots + x_n)$$

(remplacer le faisceau $\mathcal{F}(\psi)$ sur $\mathbb{G}_m$ par $\mathcal{F}(\chi.\psi)$). On trouve encore une cohomologie de dimension $n+1$, et $|S| \leq (n+1)q^{n/2}$. De telles sommes ont été considérées par Salié et Mordell. (Mordell, Some exponential sums, Proc. Int. Conf. on number theory, Moscow sept. 1971, p.30-34).

On peut espérer que nos méthodes permettent aussi d'étudier les sommes

$$S_{k,\chi,a} = \sum_{N(x)=a} \chi(x)\psi\ \mathrm{Tr}(x)$$

(k algèbre étale sur $\mathbb{F}_q$, $a \in \mathbb{F}_q^*$, χ caractère de k^*). L'analogue de 7.4 (pour $a \neq 0$) devrait être vrai.

7.19 - Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit sur $\mathbb{A}^n$ en respectant V_a et l'application σ, donc aussi le faisceau $\mathcal{F}(\psi\sigma)$, image réciproque par σ du faisceau $\mathcal{F}(\psi)$ sur $\mathbb{G}_a$. Il s'agit donc sur $H_c^{n-1}(V_a, \mathcal{F}(\psi\sigma))$. La formule 7.2.5 admet l'interprétation cohomologique suivante

Proposition 7.20 - L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $H_c^{n-1}(V_a, \mathcal{F}(\psi\sigma))$ est la multiplication par le caractère signe.

Ceci revient à montrer qu'une transposition τ agit par multiplication par -1. Puisque $\tau^2 = 1$, τ ne peut avoir pour valeur propres que ± 1. Soit V_a/τ le quotient de V_a pour $\{Id, \tau\}$. L'application σ, donc le faisceau $\mathcal{F}(\psi\sigma)$, passent au quotient, et le sous-espace de $H_c^{n-1}(V_a, \mathcal{F}(\psi))$ fixe par τ est $H_c^{n-1}(V_a/\tau, \mathcal{F}(\psi\sigma))$. Il nous faut prouver que cette cohomologie est nulle.

Supposons que $a \neq 0$. Pour $\tau = (1,2)$ le quotient V_a/τ s'identifie à $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^{n-2}$, avec pour application de passage au quotient $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n)$. En effet, x_1 et x_2 sont déterminés

à l'ordre près par $x_1 + x_2$ et $x_1x_2 = a/x_3...x_n$. En ces coordonnées $(t,x_3,...,x_n)$, le faisceau s'écrit $\mathcal{F}(\psi(t+x_3+...+x_n)) = \mathcal{F}(\psi(t)) \otimes \mathcal{F}(\psi(x_3+...+x_n))$. La formule de Künneth, et $H^*_0(\mathbb{G}_a,\mathcal{F}(\psi)) = 0$, fournissent donc la nullité demandée.

Pour $a = 0$, on peut déduire 7.20 du calcul 7.7 .

7.21 - Les sommes $K_{n,a}$ de ce paragraphe ont été étudiées par S . Sperber, dans sa thèse, et dans (p-adic hypergeometric functions I, II, à paraître) par des méthodes p-adiques inspirées de Dwork et de l'article de Bombieri (on exponential sums in finite fields, Ann. J. Math. 88 (1966)). Pour $p \neq 2$, ces méthodes lui donnent la dépendance en q 7.5 , l'équation fonctionnelle $\alpha_i = q^{n-1}\beta_i^{-1}$ entre les valeurs propres de Frobenius pour les sommes $K_{n,a}$ et $K_{n,b}$ si $b = (-1)^n a$ (cf.7.6), et la valeur 7.15 du produit des racines. Pour $p \geq n+3$, il détermine de plus les valuations p-adiques des racines. Le résultat est très beau : si on range les racines α_i dans un ordre convenable, avec $0 \leq i < n$, les $\alpha_i q^{-i}$ sont des unités. Les restrictions sur p ne sont sans doute pas essentielles.

8. - Autres applications.

8.1 - L'identité 1.9.4 peut parfois être utilisée pour calculer le nombre de points rationnels d'une variété algébrique sur $\mathbb{F}_q$. Dans la plupart des cas où un résultat exact a été obtenu, la cohomologie s'exprime en terme de cycles algébriques ; tel est le cas pour les surfaces rationnelles, les quadriques, les intersections lisses de deux quadriques de dimension impaire, les variétés de drapeaux... Ce n'est toutefois pas toujours le cas ; dans le très bel article de Lusztig : "Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius (Inv. Math.,à paraître)", les cycles algébriques n'apparaissent pas.

8.2 - Pour les groupes réductifs, la cohomologie peut se calculer en se relevant en caractéristique 0 : si B est un sous-groupe de Borel de G , G est un B-torseur sur G/B ; la cohomologie de la variété projective et lisse G/B est invariante par spécialisation, et on utilise la suite spectrale de Leray de $G \longrightarrow G/B$ pour prouver le même résultat pour G . Elle s'exprime commodément en terme du tore maximal T de G et de l'action du groupe de Weil W sur T (pour la définition du tore maximal, cf. Bourbaki, Lie VIII §5 Rmq 2 ou [3] p.105). C'est l'algèbre extérieure de sa partie primitive, qui coïncide à un décalage près avec le quotient $I(H^*(BG,\mathbb{Q}_\ell))$ de la cohomologie de BG formé des "éléments indécomposables", et $H^*(BG,\mathbb{Q}_\ell) = H^*(BT,\mathbb{Q}_\ell)^W$. Si X est le groupe des caractères de T , on a au total

$$H^*(G,\mathbb{Q}_\ell) = \Lambda(I(\mathrm{Sym}^*(X \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1))^W)[-1]) \quad .$$

Si G est défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ agit sur X et cet isomorphisme est compatible à Galois. Passant de là à la cohomologie à supports propres, on trouve les formules classiques pour le nombre de points rationnels de G . Si $F^* : X \longrightarrow X$ est défini par le morphisme de Frobenius $F : T \longrightarrow T$, et que $\deg_G(F)$ est le degré $q^{\dim G}$ de $F : G \longrightarrow G$, on a

(8.2.1) $$|G_0(\mathbb{F}_q)| = \deg_G(F).\det(1-F^{*-1}, I(\mathrm{Sym}^*(X \otimes \mathbb{Q})^W)) \quad .$$

La même formule vaut pour les groupes de Ree et de Suzuki ; ces groupes sont de la forme G^F (G réductif, F^2 un Frobenius), et il suffit de vérifier que la formule des traces de Lefschetz est vraie pour F agissant sur G. Si B est un sous-groupe de Borel stable par F, on le vérifie directement pour F agissant sur B, et pour l'action sur G/B, propre et lisse, on peut invoquer les théorèmes généraux.

8.3 - La formule des traces a été utilisée par Deligne-Lusztig [3], Kazhdan [4] et Springer [6] dans l'étude des représentations complexes des groupes finis $G_0(\mathbb{F}_q)$, pour G_0 réductif sur $\mathbb{F}_q$. Les travaux de Kazhdan et Springer contiennent des exemples admirables de comment la formule des traces permet le "prolongement analytique" d'une situation déployée à une situation non déployée (cf. 1.13).

Bibliographie.

[1] L. Carlitz - A note on exponential sums, Pac J. Math. 30 (1969) p. 35-37 MR 39 6839.

[2] P. Deligne - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . Proc. Antwerpen conf. Vol. 2, p.501-597, Lecture Notes 349 (Springer Verlag).

[3] P. Deligne and G. Lusztig - Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103, 1 (1976) p. 103-161.

[4] D. Kazhdan - Proof of Springer's Hypothesis (preprint Harvard).

[5] J.P. Serre - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin (1968).

[6] T.A. Springer - Trigonometrical sums, Green functions and representations of Weil groups, (Preprint Utrecht).

[7] A. Weil - Basic number theory, Springer Verlag.

[8] A. Weil - Jacobi sums as "grössencharaktere", Trans. AMS 73 (1952) p. 487-495.

[9] A. Weil - Sommes de Jacobi et caractères de Hecke.

Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique

1. - Enoncé des théorèmes.

Dans tout cet exposé, S sera un schéma noethérien et A un anneau noethérien à gauche, de torsion annulé par un entier inversible sur S. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1 - *On suppose S régulier de dimension 0 ou 1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas de type fini et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A-modules à gauche sur X. Alors, les faisceaux $R^i f_* \mathcal{F}$ sont constructibles.*

La preuve sera donnée au paragraphe 2 et en 3.10.

Remarque 1.2 - En caractéristique 0, ce résultat est moins général que SGA 4 XIX paragraphe 5, qui prouve la conclusion du théorème pour tout morphisme de type fini de schémas excellents de caractéristique 0. La démonstration de SGA 4 XIX utilise d'une part la résolution des singularités, d'autre part que les schémas soient d'égale caractéristique (pour pouvoir déduire de la résolution le "théorème de pureté").

Remarque 1.3 - Nous dirons qu'un complexe $K \in \mathrm{Ob}D(X,A)$ est *constructible* si ses faisceaux de cohomologie sont constructibles et nous noterons avec un indice c la sous-catégorie de $D(X,A)$ (ou D^+, D^-, D^b) formée des complexes constructibles. Dans le langage des catégories dérivées, que nous utiliserons librement, 1.1 dit que $Rf_* : D^+(X,A) \longrightarrow D^+(Y,A)$ envoie D_c^+ dans D_c^+. Explicitons :

a) Pour K réduit à un faisceau $\mathcal{F}$ en degré 0, on a $\mathcal{H}^i Rf_* K = R^i f_* \mathcal{F}$; l'énoncé dérivé implique donc le théorème.

b) Dans l'autre sens, on invoque la suite spectrale

$$E_1^{pq} = R^q f_* \mathcal{H}^p(K) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q} Rf_* K \quad .$$

Parler le langage des catégories dérivées à l'avantage de remplacer par une simple formule de transitivité $R(fg)_* = Rf_* Rg_*$ une suite spectrale de Leray $E_2^{pq} = R^p f_* R^q g_* \Longrightarrow R^{p+q}(fg)_*$.

Sous les hypothèses de 1.1, il résulte de SGA 4 X que Rf_* est de dimension cohomologique finie. Cela permet ci-dessus de remplacer D^+ par D, D^- ou D^b .

1.4 - Les idées de la démonstration.

a) La dualité de Poincaré permet de traiter le cas où X est lisse, $\mathcal{F}$ localement constant, et Y = S . L'hypothèse de dimension apparaît pour calculer des RHom sur S .

b) On factorise f en gj : g propre et j plongement ouvert. On a $Rf_* = Rg_* Rj_*$ et le théorème de finitude pour les morphismes propres contrôle Rg_* . Dévissant, on se ramène à supposer X lisse, $\mathcal{F}$ localement constant, f un plongement ouvert et Y propre sur S .

c) Une récurrence sur dim X (avec changement de S) permet, grosso modo, de supposer le théorème vrai en dehors d'une partie de Y finie sur S . Notant $a : X \longrightarrow S$ et $b : Y \longrightarrow S$ les morphismes structuraux, on montre alors que si le théorème était faux pour $\mathcal{F}$ et Rf_* , il le serait aussi pour $\mathcal{F}$ et $Rb_* Rf_* = Ra_*$: contradiction.

Corollaire 1.5 - Sous les hypothèses du théorème, les catégories $D_c(X,A)$ et $D_c(Y,A)$ sont transformées l'une en l'autre par les 4 opérations Rf_* , $Rf_!$, f^* , $Rf^!$.

Rf_* est traité ci-dessus, $Rf_!$ en SGA 4 XVII 5.3, f^* est clair. Reste $Rf^!$. Le problème est local, ce qui permet de supposer que f se factorise en $X \xhookrightarrow{i} Z \xrightarrow{g} Y$ (i plongement fermé et g lisse, purement de dimension relative n). La dualité de Poincaré $Rg^! K(n)[2n]$ et la transitivité $Rf^! = Ri^! Rg^!$

nous ramènent à prouver 1.5 pour i . Pour tout $L \in D(Z,A)$, si j est l'inclusion dans Z de $U = Z-X$, $i_*Ri^!L$ est le mapping cylinder de $K \longrightarrow Rj_*j^*K$ et 1.5 pour i résulte de 1.1 pour j .

Corollaire 1.6 - Soit X comme dans le théorème, et supposons A commutatif. Alors, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux constructibles de A-modules sur X , les $\mathcal{E}xt^i_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sont constructibles: $R\mathcal{H}om$ envoie $D_c^-(X,A) \times D_c^+(X,A)$ dans $D_c^+(X,A)$.

Par dévissage de $\mathcal{F}$, on se ramène à supposer $\mathcal{F}$ de la forme $j_!\mathcal{F}_1$ ($j : Y \hookrightarrow X$ un plongement localement fermé et $\mathcal{F}_1$ localement constant sur Y). On a alors

$$R\mathcal{H}om(j_!\mathcal{F}_1,\mathcal{G}) = Rj_*\ \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, Rj^!\mathcal{G}) \quad :$$

d'après 1.3, nous sommes ramenés au cas où $\mathcal{F}$ est localement constant - voire constant puisque le problème est local. Pour $\mathcal{F}$ localement constant constructible, on a $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})_x = \mathcal{H}om(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$, et de même pour $R\mathcal{H}om$. Pour $\mathcal{F}$ constant, on peut donc calculer les $\mathcal{E}xt^i$ à l'aide d'une résolution projective de type fini de sa valeur constante, et les $\mathcal{E}xt^i$ sont constructibles si $\mathcal{G}$ l'est - d'où le corollaire.

Remarque 1.7 - Puisque Rf_* est de dimension cohomologique finie, il transforme complexes de Tor-dimension finie (resp. $\leq d$) en complexes de Tor-dimension finie (resp. $\leq d$) (SGA 4 XVII 5.2.11). SGA 4 XVII 5.2.10 et la preuve de 1.5 montrent alors que la Tor-dimension finie est stable par les 4 opérations Rf_*, $Rf_!$, f^*, $Rf^!$. Une variante de celle de 1.6 (dévisser K selon une partition de X pour supposer les faisceaux de cohomologie localement constants, puis se localiser pour remplacer K par un complexe fini de faisceaux localement libres de type fini) montre alors que, pour A commutatif, $R\mathcal{H}om$ induit

$$R\mathcal{H}om : D^b_{ctf}(X,A) \times D^b_{tf}(X,A) \longrightarrow D^+_{tf}(X,A)$$

(t.f. : tor-dimension finie).

1.8 - Sous les hypothèses du théorème, la même méthode nous permet de prouver un théorème de bidualité locale $K \xrightarrow{\sim} DDK$ (paragraphe 4). Nous prouvons aussi un théorème de finitude pour les faisceaux de cycles évanescents. Pour S quelconque, on obtient encore un théorème "générique" :

Théorème 1.9 - Soit $F : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas de type fini et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A-modules sur X. Il existe un ouvert dense U de S tel que

(i) Au-dessus de U, les $R^i f_* \mathcal{F}$ sont constructibles, et nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

(ii) La formation des $R^i f_* \mathcal{F}$ est compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow U \subset S$.

Pour S le spectre d'un corps, on a $U = S$.

Si S est le spectre d'un corps, un argument de passage à la limite fournit la compatibilité aux S-changements de base des $R^i f_*$ pour tout morphisme quasi-compact quasi-séparé de S-schémas et tout faisceau $\mathcal{F}$.

Corollaire 1.10 - Soient X un schéma de type fini sur k séparablement clos et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A-modules. Alors, les $H^i(X,\mathcal{F})$ sont de type fini.

C'est le cas particulier $S = \mathrm{Spec}(k)$, $Y = S$.

Corollaire 1.11 - Soient X et Y deux schémas de type fini sur k séparablement clos et $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X,A^o)$, $L \in \mathrm{Ob}\, D^-(Y,A)$ des complexes de faisceaux de modules à droite et à gauche. La flèche de Künneth

$$R\Gamma(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(Y,L) \longrightarrow R\Gamma(X \times Y, pr_1^* K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} pr_2^* L)$$

est un isomorphisme.

On procède comme en SGA 4 XVII 5.4.3 :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{pr_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Y & \xrightarrow{b} & Spec(k) \end{array}$$

changeant de base par b, on trouve que $Rpr_{2*}pr_1^*K$ est $b^*R\Gamma(X,K)$. On a alors (cf SGA 4 XVII 5.2.11 et preuve)

$$R\Gamma(X \times Y, pr_1^*K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} pr_2^*L) = R\Gamma(Y, Rpr_{2*}(pr_1^*K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} pr_2^*L)) =$$

$$= R\Gamma(Y, (Rpr_{2*}pr_1^*K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L) = R\Gamma(Y, b^*R\Gamma(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L) = R\Gamma(X,K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(Y,L)$$

1.12 - Enfin, comme contre-partie locale de 1.9 (ii), nous prouverons un théorème d'acyclicité locale générique (2.13).

2.- Théorèmes génériques.

Dans ce paragraphe, nous prouvons 1.9 et le théorème d'acyclicité locale générique 2.13 . Pour prouver 1.9, on se ramène aussitôt à supposer S intègre. Soit η son point générique.

2.1 - Nous commencerons par prouver 1.9 sous les hypothèses additionnelles suivantes : X est lisse sur S , purement de dimension relative n , $A = \mathbb{Z}/m$, $\mathcal{F}$ est localement constant et $Y = S$. Soit $\mathcal{F}' = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m)$. Nous allons montrer que si les $R^i f_! \mathcal{F}'$ sont localement constants, les conclusions de 1.9 valent pour $U = S$. Rappelons que si $\mathcal{L}$ est un faisceau localement constant constructible, les $Ext^i(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ se calculent fibre par fibre, et sont constructibles si $\mathcal{C}$ l'est. Rappelons aussi que $\mathbb{Z}/m$ est un $\mathbb{Z}/m$-module injectif, et est le module dualisant, de sorte que $\mathcal{F} = R\,\mathcal{H}om(\mathcal{F}', \mathbb{Z}/m)$. La dualité de Poincaré

$$Rf_* R\,\mathcal{H}om(K, Rf^! L) = R\,\mathcal{H}om(Rf_! K, L) \quad ,$$

pour $K = \mathcal{F}'$, $L = \mathbb{Z}/m$, $Rf^! L = \mathbb{Z}/m[2n](n)$, fournit donc

$$R^{2n-i} f_* \mathcal{F} = \mathcal{H}om(R^i f_! \mathcal{F}', \mathbb{Z}/m)(-n) \quad .$$

Le faisceau au second membre est localement constant, de formation compatible à tout changement de base -d'où l'assertion.

2.2 - Prouvons 1.9 sous les hypothèses additionnelles : X est lisse sur S , $\mathcal{F}$ est localement constant et $Y = S$.

a) Décomposant X en composantes connexes, on se ramène à supposer qu'il est purement d'une dimension relative n sur S .

b) Décomposant A en produit, on se ramène à supposer que $\ell^m A = 0$, avec ℓ premier inversible sur S ; on filtre alors $\mathcal{F}$ par les $\ell^k \mathcal{F}$ pour se ramener, par la suite spectrale correspondante, au cas où $\ell \mathcal{F} = 0$. On peut alors remplacer A par $A/\ell A$ et supposer que $\ell A = 0$.

c) Remplaçant S par U convenable, on peut supposer qu'il existe un revêtement galoisien fini étale X_1/X, de groupe de Galois G, telle que l'image réciproque $\mathfrak{F}_1$ de $\mathfrak{F}$ sur X_1 soit un faisceau constant, de valeur constante F. Notant f_1 la projection de X_1 sur S, on a alors

$$R^i f_{1*}\mathfrak{F}_1 = (R^i f_{1*}\mathbb{Z}/\ell)\otimes_{\mathbb{Z}/\ell} F \quad .$$

On dispose aussi de la suite spectrale de Hochschild-Serre (ou : de Leray pour le recouvrement X_1/X)

$$\underline{H}^p(G,R^q f_{1*}\mathfrak{F}_1) \Longrightarrow R^{p+q} f_*\mathfrak{F} \quad .$$

D'après 2.1, on peut supposer, quitte à rétrécir U, que les $R^i f_{1*}\mathbb{Z}/\ell$ sont localement constants, de formation compatible à tout changement de base. La même propriété vaut alors pour les $R^i f_*\mathfrak{F}$. Enfin, si $\bar{\eta}$ est un point géométrique localisé au point générique η de S, les $R^i f_*\mathfrak{F}$ sont presque tous nuls, car les $(R^i f_*\mathfrak{F})_{\bar{\eta}} = H^i(X_{\bar{\eta}},\mathfrak{F})$ le sont.

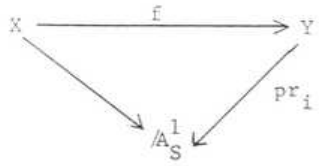
2.3 - Prouvons par récurrence sur n que

$(*)_n$ Les conclusions de 1.9 sont vraies lorsque $\dim X_\eta \leq n$ et que f est un plongement ouvert d'image dense.

Pour $n = 0$, quitte à rétrécir S, on a $X = Y$: $(*)_o$ est évident. Supposons $(*)_{n-1}$, et prouvons $(*)_n$. Dans $(*)_{n-1}$, on peut remplacer "plongement ouvert" par "plongement" comme on le voit en factorisant en plongement ouvert et plongement fermé.

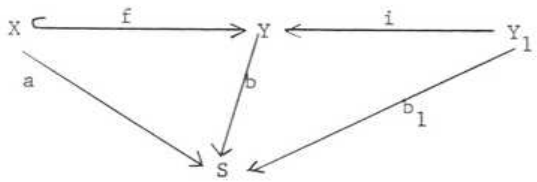
Lemme 2.4 - Quitte à rétrécir S, les conclusions de 1.9 valent au-dessus de $Y' \subset Y$, le complément Y_1 de Y' étant fini sur S.

L'assertion est locale sur Y, qu'on peut supposer affine : $Y \subset \mathbb{A}^n_S$. L'hyptohèse de récurrence $(*)_{n-1}$ s'applique à



Il existe donc pour chaque i un ouvert dense U_i de $\mathbb{A}^1_S$ tel que les conclusions de 1.9 valent au-dessus de $pr_i^{-1}(U_i)$; elle valent au-dessus de la réunion des $pr_i^{-1}(U_i)$, et 2.4 en résulte.

2.6 - Prouvons $(*)_n$ pour X lisse sur S et $\mathfrak{F}$ localement constant sur X . Le problème étant local sur Y , on peut supposer Y affine, puis projectif (remplacer Y par son adhérence dans un espace projectif). Soient $i : Y_1 \hookrightarrow Y$ et $j : Y' \longrightarrow Y$ garantis par 2.4.



quitte à rétrécir S , on sait que $j^*Rf_*\mathfrak{F}$ est constructible, de formation compatible à tout changement de base en S ; on sait aussi que $Ra_*\mathfrak{F} = Rb_*Rf_*\mathfrak{F}$ est constructible, de formation compatible à tout changement de base.

Appliquons Rb_* au triangle défini par la suite exacte

(1) $0 \longrightarrow j_!j^*Rf_*\mathfrak{F} \longrightarrow Rf_*\mathfrak{F} \longrightarrow i_!i^*Rf_*\mathfrak{F} \longrightarrow 0$:

on obtient un triangle

(2) $\longrightarrow Rb_*j_!j^*Rf_*\mathfrak{F} \longrightarrow Ra_*\mathfrak{F} \longrightarrow b_{1*}i^*Rf_*\mathfrak{F} \longrightarrow$

dans lequel les deux premiers termes sont constructibles, de formation compatible à tout changement de base en S (pour le 1er, d'après le théorème de finitude pour le morphisme propre b). Il en va donc de même pour le troisième. Puisque b_1 est fini, on en déduit que $i^*Rf_*\mathfrak{F}$ est constructible de formation compatible à tout changement de Base en S , et de même pour $Rf_*\mathfrak{F}$ par (1).

2.7 - Prouvons $(*)_n$ en général. On commence par se ramener au cas où dans X existe un ouvert dense V lisse sur S. Pour S spectre d'un corps parfait, il suffit de remplacer X par X_{red} (et Y par Y_{red}). En général, il faut rapetisser S, faire un changement de base fini radiciel et surjectif $S' \longrightarrow S$, et remplacer X et Y par X_{red} et Y_{red}. La topologie étale étant insensible aux morphismes finis radiciels et surjectifs, ceci est innocent. Quitte à rétrécir V, on peut supposer $\mathcal{F}$ localement constant sur V

$$V \xhookrightarrow{j} X \xhookrightarrow{f} Y \quad .$$

Définissons Δ par le triangle

(1) $$\longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow Rj_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow \Delta \longrightarrow \quad .$$

Les faisceaux de cohomologie de Δ sont à support dans $X-V$, et $\dim(X-V)_\eta < n$. L'hypothèse de récurrence permet donc de supposer que $Rf_*\Delta$ est constructible. Appliquons Rf_* au triangle (1) ; on trouve un triangle

$$\longrightarrow Rf_*\mathcal{F} \longrightarrow R(fj)_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow Rf_*\Delta \longrightarrow$$

dans lequel deux des sommets sont constructibles de formation compatible à tout changement de base en S. Le troisième l'est donc également.

2.8 - Prouvons 1.9. Le problème est local sur Y, qu'on peut supposer affine. Prenant un recouvrement affine de X et invoquant sa suite spectrale de Leray, on se ramène à avoir X également affine. Tout ceci pour assurer qu'on puisse factoriser f en un plongement ouvert suivi d'un morphisme propre : $f = gj$, d'où $Rf_* = Rg_*Rj_*$. Le plongement ouvert est justiciable d'un $(*)_n$, le morphisme propre du théorème de finitude.

Les corollaires suivants se prouvent comme au paragraphe 1.

Corollaire 2.9 - Sous les hypothèses du théorème, pour K dans $D_c^b(X,\Lambda)$ ou $D_c^b(Y,\Lambda)$ respectivement, il existe un ouvert non vide U de S au-dessus duquel Rf_*K, $Rf_!K$, f^*K, $Rf^!K$ soient dans $D_c^b(Y,\Lambda)$ ou $D_c^b(X,\Lambda)$, et de formation

compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow U \subset S$.

Corollaire 2.10 - Soit X comme dans le théorème, et supposons A commutatif. Alors, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux constructibles de A-modules sur X, au-dessus d'un ouvert dense U de S, les $\mathcal{E}xt^i_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sont encore constructibles, de formation compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow U \subset S$.

2.11 - Si x est un point géométrique d'un schéma X, nous noterons X_x l'henselisé strict de X en x. Pour $f : X \longrightarrow S$ et t un point géométrique de S, nous noterons X_t la fibre géométrique de X en t. Enfin, pour x un point géométrique de X, et t un point géométrique de $S_{f(x)}$, $(X_x)_t$ est la fibre en t de $X_x \longrightarrow S_{f(x)}$.

Définition 2.12 - Soient $f : X \longrightarrow S$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X,A)$. On dit que f est localement acyclique en x, rel. K, si pour tout point géométrique t de $S_{f(x)}$, on a $K_x = R\Gamma(X_x,K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{x,t},K)$. On dit que f est localement acyclique, rel. K, si c'est vrai pour tout x, et universellement localement acyclique, rel. K, si cela reste vrai après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.

Théorème 2.13 - Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini et $\mathcal{F}$ constructible sur X . Il existe un ouvert dense U de S au-dessus duquel f est universellement localement acyclique, rel. $\mathcal{F}$.

Nous admettrons le résultat suivant, prouvé dans l'appendice.

Lemme 2.14 - Soit $X \xrightarrow{f} S_1 \xrightarrow{g} S_2$. Si g est lisse, et f universellement localement acyclique rel. K, alors gf l'est aussi.

On se ramène à supposer S intègre, de point générique η, et on procède par récurrence sur $\dim X_\eta$. On commence par déduire de l'hypothèse de récurrence que

(A) Quitte à rétrécir S, il existe $T \subset X$, fini sur S, tel que f soit universellement localement acyclique en dehors de T .

Cette question étant locale, on se localise sur X et on factorise f en $X \xrightarrow{u} \mathbb{A}^1_S \longrightarrow S$. L'hypothèse de récurrence s'applique à u et on conclut par 2.14 et les arguments habituels.

Pour prouver le théorème, on peut supposer X propre, puisque le problème est local. On rétrécit S pour que les $R^i f_* \mathcal{F}$ soient localement constants et que (A) soit applicable, et on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.15 - Soient $f : X \longrightarrow S$, propre, et $\mathcal{F}$ constructible. On suppose que les $R^i f_* \mathcal{F}$ sont localement constants et que, en dehors de $T \subset X$ fini sur S , f soit localement acyclique rel. à $\mathcal{F}$. Alors, f est localement acyclique rel. à $\mathcal{F}$.

Soient s un point géométrique de S , S_s le localisé strict de S en s et t un point géométrique de S_s . Soient $X_{(s)}$ l'image réciproque de X sur S_s , $\bar{j} : X_t \longrightarrow X_{(s)}$ et $i : X_s \hookrightarrow X_{(s)}$. Notant encore $\mathcal{F}$ l'image réciproque de $\mathcal{F}$ sur $X_{(s)}$ ou X_t , il faut prouver que $i^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^*R\bar{j}_*\mathcal{F}$. Soit Δ le mapping cylinder de cette application. Ses faisceaux de cohomologie sont à support dans T_s . Pour prouver que $\Delta = 0$, il suffit donc de prouver que $R\Gamma(X_s, \Delta) = 0$. C'est là le mapping cylinder de $(Rf_*\mathcal{F})_s = R\Gamma(X_s, i^*\mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(X_s, i^*R\bar{j}_*\mathcal{F}) = R\Gamma(X_{(s)}, R\bar{j}_*\mathcal{F}) = R\Gamma(X_t, \mathcal{F}) = (Rf_*\mathcal{F})_t$. Ce morphisme de spécialisation est par hypothèse un isomorphisme, et $\Delta = 0$.

Corollaire 2.16 - Pour S le spectre d'un corps, tout S-schéma X est universellement localement acyclique, rel. K , quel que soit $K \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, A)$.

Se déduit de 2.13 par passage à la limite (possible, car U de 2.13 est toujours égal à S .

3. - Preuve de 1.1 et constructibilité des faisceaux de cycles évanescents.

3.1 - Soit S un trait strictement local (le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel séparablement clos). On note s et η ses points fermé et générique, et $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η (une clôture séparable de $k(\eta)$) . Soient X sur S et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X_η . Rappelons la définition des faisceaux de cycles évanescents $R^i\psi_\eta(\mathcal{F})$ (des faisceaux sur X_s , munis d'une action de $Gal(\bar{\eta}/\eta)$) . Soient $i : X_s \hookrightarrow X$, $j : X_\eta \hookrightarrow X$, et $\bar{j}$ le composé $X_{\bar{\eta}} \longrightarrow X_\eta \hookrightarrow X$; on a

$$R^i\psi_\eta(\mathcal{F}) = i^*R^i\bar{j}_*(\bar{j}^*\mathcal{F}) \quad .$$

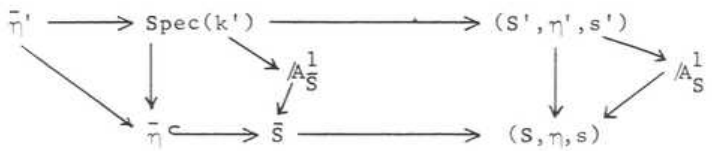
Voici le théorème principal de ce numéro. Il améliore SGA 7 XIII 2.3.1, 2.4.2.

Théorème 3.2 - On suppose X de type fini sur S et $\mathcal{F}$ constructible. Alors, les faisceaux de cycles évanescents $R^i\psi_\eta(\mathcal{F})$ sont constructibles.

On procède par récurrence sur la dimension n de X_η . On peut par ailleurs supposer - et on suppose - X_η dense dans X (remplacer X par $\bar{X}_\eta$ ne change pas les $R^i\psi$, qui sont à support dans $\bar{X}_\eta$) .

Lemme 3.3 - Si 3.2 est vrai en dimension de $X_\eta < n$, et que $\dim X_\eta = n$, il existe des sous-faisceaux constructibles $\mathcal{C}_i$ des $R^i\psi_\eta(\mathcal{F})$ tels que les supports des sections locales de $R^i\psi_\eta(\mathcal{F})/\mathcal{C}_i$ soient finis.

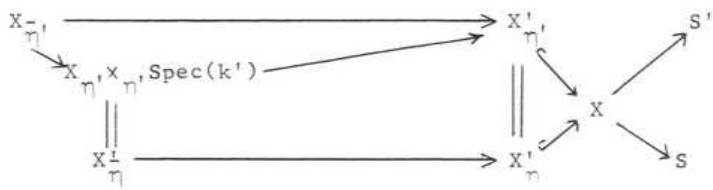
Soit s' un point générique géométrique de la droite affine sur s , et soit S' le localisé strict en s' de la droite affine $\mathbb{A}^1_S$ sur S . C'est encore un trait strictement local, et les uniformisantes pour S sont des uniformisantes pour S' .



Soit $k' = k(\bar{\eta}) \otimes_{k(\eta)} k(\eta')$. Si $\bar{S}$ est le normalisé de S dans $\bar{\eta}$, k' est le corps des fractions du localisé strict de $\mathbb{A}^1_{\bar{S}}$ en s' ; c'est donc un corps, et $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) = \mathrm{Gal}(k'/\eta')$. Soit $\bar{\eta}'$ le spectre d'une clôture algébrique de k' . Le groupe de Galois $P = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}'/k')$ est un pro-p-groupe, pour p l'exposant caractéristique de $k(s)$.

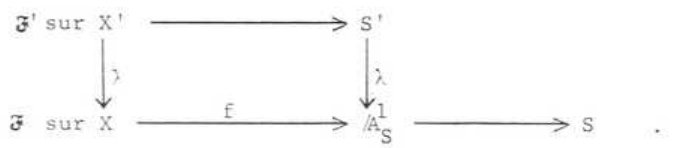
Lemme 3.4 - Pour tout schéma X' sur S' , et tout faisceau $\mathfrak{F}$ sur $X'_{\eta} = X'_{\eta'}$, on a entre les faisceaux de cycles évanescents pour X'/S' et pour X'/S la relation $R^i\Psi_{\eta}(\mathfrak{F}) = R^i\Psi_{\eta'}(\mathfrak{F})^P$.

Le diagramme suivant compare les morphismes utilisés dans la définition de $R\Psi$ pour X'/S' et X'/S :



et le lemme résulte de la suite spectrale de Hochschild-Serre, compte tenu de ce que P est un pro-p-groupe, avec p inversible dans A .

Prouvons 3.3. La question est locale ; ceci permet de supposer X affine , $X \subset \mathbb{A}^n_S$ .Soient f l'une des projection $X \subset \mathbb{A}^n_S \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$, X' le "localisé" $X \times_{\mathbb{A}^1_S} S'$ de X , et $\mathfrak{F}'$ l'image inverse de $\mathfrak{F}$ sur X'



On a, sur $X'_s = X'_{s'}$,

$$\gamma^* R^i\Psi_\eta(\mathcal{F}) = R^i\Psi_\eta(\mathcal{F}') = R^i\Psi_{\eta'}(\mathcal{F}')^P \quad :$$

ce faisceau est constructible, car l'hypothèse de récurrence s'applique à X'/S' , et on utilise le lemme suivant appliqué à $X_s \subset \mathbb{A}^n_s$ et aux faisceaux de cycles évanescents.

Lemme 3.5 - Soient $\mathbb{A}^n$ l'espace affine type de dimension n sur un corps k , $X \subset \mathbb{A}^n$, $\mathcal{F}$ un faisceau de A-modules sur X et $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de $\mathbb{A}^1$. Soient $X_{\bar{\eta},i}$ la fibre générique géométrique de $X \subset \mathbb{A}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbb{A}^1$ et $\mathcal{F}_{\bar{\eta},i}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à $X_{\bar{\eta},i}$. Si les $\mathcal{F}_{\bar{\eta},i}$ sont constructibles, il existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, constructible, tel que les sections locales de $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ soient à support fini.

Par passage à la limite, pour chaque i

a) Il existe un voisinage étale U de $\bar{\eta}$ et un faisceau constructible $\mathcal{H}$ sur $X_{U,i} = X \times_{\mathbb{A}^1, pr_i} U$ de restriction $\mathcal{F}_{\bar{\eta},i}$ à $X_{\bar{\eta},i}$.

b) Pour U convenable, l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\bar{\eta},i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\bar{\eta},i}$ provient de $u : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}_{U,i}$ où $\mathcal{F}_{U,i}$ est l'image réciproque de $\mathcal{F}$ sur $X_{U,i}$. Soit $\varphi : X_{U,i} \longrightarrow X$. Le morphisme u définit $v_i : \varphi_! \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$, d'image $\mathcal{F}'_i$. On a $(\mathcal{F}/\mathcal{F}'_i)_{\bar{\eta},i} = 0$ et on prend pour $\mathcal{F}'$ la somme des $\mathcal{F}'_i$.

3.6 - Prouvons 3.2 en dimension n . On peut supposer X affine (car le problème est local sur X_s), puis projectif sur S (prendre l'adhérence de X dans un plongement projectif). On a alors une suite spectrale (SGA 7 I 2.2.3) (la suite spectrale de Leray pour $\bar{j}$, compte tenu du théorème de changement de base pour le morphisme propre $X \longrightarrow S$).

(1) $$E_2^{pq} = H^p(X_s, R^i\Psi_\eta(\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \quad .$$

Soit $\mathcal{G}^q \subset R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})$ comme en 3.3, et soit $\mathcal{H}^q$ le faisceau quotient. On a $H^i(X_s,\mathcal{H}^q) = 0$ pour $i \neq 0$, et pour que $\mathcal{H}^q$, donc $R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})$ soit constructible, il suffit que $H^0(X_s,\mathcal{H}^q)$ soit de type fini.

Calculons (1) modulo modules de type fini (i.e. dans la catégorie quotient de celle des A-modules par la sous-catégorie épaisse des A-modules de type fini). La suite exacte longue de cohomologie déduite de $0 \longrightarrow \mathcal{G}^q \longrightarrow R^q\Psi_\eta(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}^q \longrightarrow 0$ fournit, par 1.10 appliqué à $\mathcal{G}^q$, que $E_2^{pq} \sim H^p(X_s,\mathcal{H}^q)$. En particulier, $E_2^{pq} \sim 0$ pour $p \neq 0$, $E_2^{0q} \sim H^q(X_{\bar\eta},\mathcal{F}) \sim 0$, et ceci achève la démonstration.

Des arguments parallèles fournissent le résultat suivant, qui améliore SGA 7 XIII 2.1.12, 2.4.2.

<u>Proposition 3.7</u> - <u>La formation des faisceaux de cycles évanescents est compatible aux changements de traits</u>.

Soient $g : (S',\eta',s') \longrightarrow (S,\eta,s)$ un morphisme (surjectif) de traits strictement locaux, X/S, $\mathcal{F}$ sur X_η, de torsion premier à la caractéristique résiduelle et $(X',\mathcal{F}')$ leurs images réciproques sur S'. Notant encore g les morphismes parallèles à g, tels $X'_{s'} \longrightarrow X_s$, il faut prouver que

(3.7.1) $$g^*R\Psi_\eta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R\Psi_{\eta'}(\mathcal{F}') .$$

Ce morphisme est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X'_{s'} & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{\bar j'} & X'_{\eta'} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X_s & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{\bar j} & X_{\bar\eta} \end{array} .$$

Un passage à la limite ramène à supposer X de type fini sur S, et on procède par récurrence sur $\dim X_\eta$. La question étant locale, on peut supposer X affine, puis projectif. Supposons (3.7.1) pour $\dim X_\eta < n$. Pour $\dim X_\eta = n$, il résulte alors des deux assertions suivantes, où Δ est le mapping cylinder de (3.7.1).

(A) Le support des sections locales des faisceaux de cohomologie de Δ est fini.

(B) $R\Gamma(X_s, \Delta) = 0$, donc $\Delta = 0$, d'après (A).

3.8 - La preuve de (A) est parallèle à celle de 3.3 . On se localise sur X et on considère des applications $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$; notant $S(x)$ l'hensélisé strict de $\mathbb{A}^1_S$ au point générique de la fibre spéciale, on applique l'hypothèse de récurrence à $X_1/S(x)$ ($X_1 = X \times_{\mathbb{A}^1} S(x)$) et à $S(x)$. Prenant les invariants par un pro-p-groupe, on trouve que Δ est nul sur la fibre générique géométrique de $X_{s'} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{s'}$. Ceci étant vrai, localement sur X et pour toute projection, on a (A) .

3.9 - Pour (B), la propreté de X sur S assure que

$$R\Gamma(X'_s, R\Psi_\eta(\mathcal{F}')) = R\Gamma(X'_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}')$$

et

$$R\Gamma(X_s, R\Psi_\eta(\mathcal{F})) = R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \quad .$$

On a $R\Gamma(X_s, R\Psi_\eta(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X'_s, g^*R\Psi_\eta(\mathcal{F}))$ (invariance par changement de corps séparablement clos de base) ; $R\Gamma(X'_s, \Delta)$ est donc le mapping cylinder de $R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma(X'_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}')$, un isomorphisme par le même théorème d'invariance.

3.10 - Prouvons 1.1. On se ramène à supposer S connexe, donc intègre. Si $\dim S = 0$, (S spectre d'un corps); on applique 1.9, 1.10 . Si S est de dimension 1, le théorème 1.9 assure que les $R^i f_* \mathcal{F}$ sont constructible au-dessus du complément d'un ensemble fini T de points de S . Il reste à voir que leur restriction aux Y_t ($t \in T$) sont constructibles. Il suffit de le voir après localisation en t : on peut supposer que S est un trait strictement local. Le cas essentiel est le suivant.

Lemme 3.11 - Soient X de type fini sur S , $j : X_\eta \hookrightarrow X$, $i : X_s \hookrightarrow X$ et $\mathcal{F}$ constructible sur X_η . Alors, $i^*Rj_*\mathcal{F}$ est constructible.

Soit $I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe d'inertie. On sait que c'est une extension de $\hat{\mathbb{Z}}_{p'}(1)$ par un pro-p-groupe P (p exposant caractéristique du corps résiduel).

La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{pq} = H^p(I, R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})) \Longrightarrow i^*R^{p+q}j_*\mathcal{F} \quad .$$

Soit $R_t^q = R^q\Psi_\eta(\mathcal{F})^P$ (t pour modéré). Si σ est un générateur de $\hat{\mathbb{Z}}_p'(1)$, on a $E_2^{0q} = \mathrm{Ker}(\sigma - 1, R_t^q)$, $E_2^{1q} = \mathrm{coker}(\sigma - 1, R_t^q)$ et $E_2^{pq} = 0$ pour $p \neq 0,1$. Ces faisceaux sont constructibles, puisque les faisceaux de cycles évanescents le sont, et 3.11 en résulte .

3.12 - Traitons le cas général, S étant toujours un trait strictement hensélien. Si $X = X_\eta$, f est le composé $X \longrightarrow Y_\eta \longrightarrow Y$ et on applique 1.9 et 3.11 . Dans le cas général, soit $j : X_\eta \hookrightarrow X$ et soit Δ le mapping cylinder de $\mathcal{F} \longrightarrow Rj_*j^*\mathcal{F}$. Ses faisceaux de cohomologie sont à support dans X_s ; d'après 1.9 appliqué à $X_s \longrightarrow Y_s$, $Rf_*\Delta$ est donc constructible. Le complexe $Rf_*Rj_*j^*\mathcal{F} = R(fj)_*j^*\mathcal{F}$ l'est également, et on conclut par le triangle

$$\longrightarrow Rf_*\mathcal{F} \longrightarrow Rf_*Rj_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow Rf_*\Delta \longrightarrow .$$

4. - Bidualité locale.

4.1 - Soit S régulier de dimension 0 ou 1 et posons $K_S = A$ (faisceau constant de valeur A). Pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(S,A)$, on pose $DK = R\mathcal{H}om(K,K_S) \in \mathrm{Ob}\, D^+(S,A^0)$ (un complexe de faisceaux de A-modules à droites). On a encore $DK \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(S,A^0)$, et un calcul explicite, possible car S est de dimension 1, montre que $K \xrightarrow{\sim} DDK$ (pour $A = \mathbb{Z}/n$, Dualité 1.4).

4.2 - On supposera que A est commutatif, hypothèse sans doute inutile. Pour $a : X \longrightarrow S$ de type fini sur S, on pose $K_X = Ra^! K_S$. Pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(S,A)$, on pose $DK = R\mathcal{H}om(K,K_X) \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(X,A)$. Notre résultat principal est le suivant

Théorème 4.3 - On a $K \xrightarrow{\sim} DDK$ $(K \in \mathrm{Ob}\, D^b_{ctf}(X,A))$.

Lemme 4.4 - Si a est propre, on a $Ra_*K \xrightarrow{\sim} Ra_*DDK$.

La dualité de Poincaré

$$Ra_*R\mathcal{H}om(K,Ra^!K_S) = R\mathcal{H}om(Ra_!K,K_S)$$

nous fournit un isomorphisme $Ra_*D = DRa_! = DRa_*$. Le lemme résulte de la commutativité du diagramme (Dualité , 1.2)

$$\begin{array}{ccc} Ra_*K & \longrightarrow & Ra_*DDK \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ DDRa_*K & \xrightarrow{\sim} & DRa_*DK \end{array} ,$$

4.5 - On voit par localisation qu'il suffit de traiter les cas où S est spectre d'un corps, ou un trait. Pour S spectre d'un corps, on procède par récurrence sur $\dim X$. Le problème étant local, on peut supposer X propre. Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence assure, par les arguments habituels, que le mapping cylinder Δ de $K \longrightarrow DDK$ a des faisceaux de cohomologie en gratte-ciel. Le lemme assure alors que $Ra_*\Delta = 0$, donc que $\Delta = 0$.

4.6 - Pour S un trait, on sait déjà que 4.3 vaut sur la fibre générique (4.5). On peut aussi supposer X propre sur S et on procède par récurrence sur $\dim X_s$, X propre sur S. Le mapping cylinder Δ a encore des faisceaux de cohomologie en gratte ciel, sur X_s, et on conclut comme plus haut.

4.7 - Supposons que $A = \mathbb{Z}/m$. On a alors une variante de la théorie précédente, en prenant K quelconque dans $D_c^b(X,A)$. Le complexe $Ra^!\mathbb{Z}/m$ est de dimension injective finie (SGA 4 XVIII 3.1.7). Ceci assure que DK est encore dans $D_c^b(X,A)$. Pour prouver la bidualité locale sur S, on utilise que $\mathbb{Z}/m$ est le $\mathbb{Z}/m$-module dualisant. Ensuite, on procède comme ci-devant.

Appendice

par L. Illusie

Dans cet appendice, qui reprend certaines parties de feu SGA 5 II, et une lettre de P. Deligne à l'auteur, nous prouvons ([Th. finitude] 2.14) ainsi que diverses généralisations et variantes des théorèmes de spécialisation (SGA 4 XVI 2.1) et ([Arcata] V 1.7).

Les schémas et morphismes considérés seront supposés quasi-compacts et quasi-séparés. Si X est un schéma et x un point géométrique de X, on notera $X(x)$ le localisé strict de X en x.

On fixe un schéma de base S et un faisceau d'anneaux A sur S (non nécessairement commutatif ni noethérien). Si X est un S-schéma, on écrira $D(X)$ pour $D(X,A_X)$.

1. Propreté cohomologique.

Proposition 1.1. Soient $f : X \to Y$ un S-morphisme et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) La formation de Rf_*E commute à tout changement de base fini $S' \to S$.

(ii) La formation de Rf_*E commute à tout changement de base quasi-fini (ou limite projective de morphismes quasi-finis) $S' \to S$.

(iii) Pour toute flèche de spécialisation $i : t \to S(s)$ ([Arcata] V 1.2), si l'on désigne par $\bar{S}$ le normalisé dans $k(\bar{t})$ du schéma intègre adhérence de $i(t)$ dans $S(s)$ (d'après (EGA IV 6.15.5, 18.5.11, 18.8.16) $\bar{S}$ est donc local intègre, de point fermé radiciel sur s), $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{Y}$ le morphisme déduit de f par le changement de base $\bar{S} \to S$, $f_s : X_s \to Y_s$ la fibre de f en s, alors la flèche de changement de base

$$(R\bar{f}_*(E|\bar{X}))\,|_{Y_s} \to Rf_{s*}(E|X_s)$$

est un isomorphisme.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte du théorème principal de Zariski, et il est clair que (ii) implique (iii). Prouvons que (iii) implique (ii). Pour tout $S' \to S$, limite projective de morphismes quasi-finis, et tout point géométrique s de S', notons $C(S', s)$ le cône de la flèche de changement de base

$$(Rf'_*(E|X'))|Y_s \to Rf_{s*}(E|X_s) \quad ,$$

où $f' : X' \to Y'$ est le morphisme déduit de f par le changement de base $S' \to S$ et $f_s : X_s \to Y_s$ la fibre de f en s. Il s'agit de prouver que, pour tout (S', s) comme ci-dessus, $C(S', s)$ est acyclique. On va montrer, par récurrence sur N, que $H^i C(S',s) = 0$ pour $i \leq N$. Par le Main Theorem, passage à la limite, et nettoyage de morphismes radiciels, on peut supposer que S et S' sont strictement locaux, S' intègre, de point fermé s, $S' \to S$ fini. Soient t un point géométrique générique de S', et $\bar{S}$ le normalisé de S' dans $k(t)$. Soit $\bar{S}.$ le schéma simplicial cosquelette de $\bar{S} \to S'(\bar{S}_o = \bar{S}, \ldots, \bar{S}_n = (\bar{S}/S')^{n+1}), \ldots)$, $X. = X \times_S \bar{S}.$, $g. : \bar{X}. \to X'$ la projection canonique. Posons $G|X' = G'$. Le bicomplexe $g._* g.^* G'$, de colonnes les $g_{n*} g_n^* G'$ est une résolution de G' (SGA 4 VIII 8). On peut donc représenter $C(S', s)$ par un bicomplexe dont les colonnes s'identifient aux $C(\bar{S}_n, s)$. D'après (iii), $C(\bar{S}_o, s) = C(\bar{S}, s)$ est acyclique. D'autre part, pour $n > 0$, on a $H^i C(\bar{S}_n, s) = 0$ pour $i \leq N$ par l'hypothèse de récurrence. On en conclut que $H^i C(S', s) = 0$ pour $i \leq N+1$, ce qui achève la démonstration.

Remarques 1.2. Soit (f,E) vérifiant la condition (i) de 1.1.

a) Si $E \in \text{ob } D^b(X)$, et f_* est de dimension cohomologique finie, alors, pour tout $F \in \text{ob } D^-(S, A^o)$, la flèche canonique

$$(*) \qquad Rf_*(E) \overset{L}{\otimes}_A q^*F \to Rf_*(E \overset{L}{\otimes}_A p^*F) \quad ,$$

où $p:X \to S$, $q:Y \to S$ sont les projections, est un isomorphisme.

Même conclusion avec $E \in \text{ob } D^-(X)$.

Par dévissage, il suffit en effet de vérifier l'assertion pour F de la forme $i_! A_{S'}$, avec $i : S' \to S$ quasi-fini. Par le Main Theorem, on se ramène à supposer i fini, la conclusion équivaut alors à la commutation de $Rf_*(E)$ au

changement de base par i .

b) On suppose A noethérien, constructible. Alors, pour tout $F \in \mathrm{ob}\, D^b(S, A^\circ)$, constructible et de tor-dimension finie, la flèche (*) ci-dessus est un isomorphisme.

On se ramène en effet, par dévissage, au cas où F est de la forme $i_!M$, avec $i : S' \to S$ localement fermé, A localement constant sur S' , M constructible, de tor-dimension finie, et à cohomologie localement constante sur S' . Changeant de base de S à S' , on est donc ramené au cas où F est parfait (SGA 6 I), donc finalement, par localisation et dévissage, au cas où $F = A$, pour lequel la conclusion est triviale.

1.3. Soient $f : X \to Y$ un S-morphisme, et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$. Nous dirons que (f,E) est <u>cohomologiquement propre</u> rel. à S si la formation de Rf_*E commute à tout changement de base $S' \to S$. Il revient au même de dire qu'après tout changement de base $S' \to S$, la formation de $Rf_!E'$ (où $f' = f \times_S S'$, E' = image inverse de E sur $X \times_S S'$) commute à tout changement de base fini $S'' \to S'$ (cf. (SGA 4 XII 6.1)). Voici quelques exemples de propreté cohomologique (pour une étude de la notion analogue pour les faisceaux d'ensembles ou de groupes non commutatifs, le lecteur se reportera à (SGA 1 XIII)).

1.3.1. On suppose A de torsion et f propre. Alors, pour tout $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, (f,E) est cohomologiquement propre rel. à S (théorème de changement de base propre, (SGA 4 XII 5.1)).

1.3.2. On suppose S fini, X et Y de type fini sur S , et A annulé par un entier inversible sur S . Alors, pour tout $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$, (f,E) est cohomologiquement propre rel. à S ([Th. finitude] 1.9).

1.3.3. On suppose A constant, noethérien, annulé par un entier n inversible sur S , $f : X = Y-D \to Y$ l'inclusion du complément d'un diviseur D sur Y , à croisements normaux rel. à S (SGA 1 XIII 2.1). Soit E un faisceau de A-modules sur X vérifiant l'une des conditions suivantes:

(i) E est localement constant constructible et modérément ramifié le long de D ;

(ii) E est localement pour la topologie étale sur Y et sur S l'image inverse d'un faisceau de A-modules sur S .

Alors (f,E) est cohomologiquement propre rel. à S , et Rf_*E est constructible (comparer avec (SGA 1 XIII 2.4)).

Esquissons la démonstration dans le cas (i). La question est locale au voisinage d'un point y de Y . On peut supposer D somme de diviseurs lisses, $D = \sum_{i=1}^{m} D_i$. En vertu du lemme d'Abhyankar relatif (SGA 1 XIII 5.5), on peut, au voisinage de y , trivialiser E par un revêtement fini $\tilde{Y} \to Y$ de la forme $\tilde{Y} = Y[T_1,\dots,T_r]/(T_1^{n_1} - t_1,\dots,T_r^{n_r} - t_r)$, où les t_i sont des équations locales des diviseurs lisses passant par y , et les n_i des entiers premiers à la car. de $k(y)$. L'image inverse $\tilde{D}$ de D dans Y est encore à croisements normaux rel. à S , et si $g : \tilde{X} = \tilde{Y} - \tilde{D} \to X$ est la projection, g^*E est constant. Comme E s'injecte dans g_*g^*E et que le quotient est modérément ramifié, un dévissage facile ramène au cas où E est constant. Notons $p : X \to S$, $q : Y \to S$ les projections, et, pour $1 \leq i \leq m$, $f_i : Y-D_i \to D$ l'inclusion canonique. Du théorème de pureté relatif (SGA 4 XVI 3.7) on déduit aisément, par récurrence sur m , que, pour tout A-Module localement constant M sur S , la flèche canonique

$$(1.3.3.1) \qquad Rf_*(\mathbb{Z}/n) \overset{L}{\otimes} q^*M \to Rf_*(p^*M)$$

est un isomorphisme, et que d'autre part on a:

$$(1.3.3.2) \qquad f_{i*}(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n \ ,$$

$$R^1f_{i*}(\mathbb{Z}/n) = (\mathbb{Z}/n)(-1)_{D_i} \ , \text{ un isomorphisme canonique}$$

étant donné par la classe fondamentale $cl(D_i)$ ([Cycle] 2.1.4),

$$R^qf_{i*}(\mathbb{Z}/n) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 1 \ ,$$

$$Rf_*(\mathbb{Z}/n) = \overset{L}{\otimes} Rf_{i*}(\mathbb{Z}/n) \ , \text{ i.e.:}$$

$$R^1f_*(\mathbb{Z}/n) = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} (\mathbb{Z}/n)(-1)_{D_i} \ ,$$

$$\Lambda^*R^1f_*(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} R^*f_*(\mathbb{Z}/n) \ .$$

La conclusion de 1.3.3, dans le cas (i), résulte donc de 1.3.3.1 et 1.3.3.2. Dans le cas (ii), on se ramène, par passage à la limite, au cas où $E = p^*M$, avec M constructible, puis, par dévissage et changement de base (utilisant (i)), au cas M constant, déjà traité.

Il découle de la démonstration précédente que 1.3.3.1 est un isomorphisme pour tout $M \in \text{ob } D^+(S)$.

On comparera les formules 1.3.3.2 aux formules analogues en cohomologie entière dans le cas $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ (voir par exemple ([2] 3.1)), qui résultent de ce que, localement pour la topologie classique, le complément de D a le type d'homotopie d'un tore.

Par passage à la limite, on déduit de 1.3.3.2 des formules similaires en cohomologie ℓ-adique, i.e. avec $\mathbb{Z}/n$ remplacé par $\mathbb{Z}_\ell$ (ℓ un nombre premier inversible sur S). Supposons $q : Y \to S$ propre et lisse. Il découle alors des conjectures de Weil ([3],[4]) que la suite spectrale de Leray

$$E_2^{ij} = R^i q_* R^j f_* \mathbb{Z}_\ell \Rightarrow R^* p_* \mathbb{Z}_\ell$$

dégénère en E_3 modulo torsion ([1] §6). Le même phénomène se produit en cohomologie entière dans le cas $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$, voir (loc. cit.) et ([2] 3.2.13).

2. Spécialisation et cospécialisation.

Soient $f : X \to S$ et $E \in \text{ob } D^+(X)$.

2.1. Supposons que la formation de Rf_*E commute à tout changement de base fini. Pour toute spécialisation $u : t \to S(s)$ de points géométriques de S, on définit alors une flèche, dite flèche de spécialisation,

$$(2.1.1) \qquad sp(u) : R\Gamma(X_s, E|X_s) \to R\Gamma(X_t, E|X_t) ,$$

de la manière suivante. Soient, comme en 1.1.3, $\bar{S}$ le normalisé dans $k(t)$ de l'adhérence de $u(t)$ dans $S(s)$, et $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{S}$ le morphisme déduit de f par le changement de base $\bar{S} \to S$. D'après la partie triviale (i) $\Rightarrow$ (iii) de 1.1, la flèche de changement de base

(2.1.2) $\quad R\Gamma(\bar{X},E|\bar{X})\ (= R\bar{f}_*(E|\bar{X})_s \to R\Gamma(X_s,E|X_s)$

est un isomorphisme. On définit 2.1.1 comme composée de l'inverse de 2.1.2 et de la flèche de restriction

(2.1.3) $\quad R\Gamma(\bar{X},E|\bar{X}) \to R\Gamma(X_t,E|X_t)$.

2.2. Supposons que f soit localement acyclique rel. à E ([Th. finitude] 2.12). Pour toute spécialisation $u : t \to S(s)$ de points géométriques de S, on définit alors une flèche, dite flèche de cospécialisation,

(2.2.1) $\quad cosp(u) : R\Gamma(X_t,E|X_t) \to R\Gamma(X_s,E|X_s)$,

définie de la manière suivante. Soient $g : X_t \to X$, $g' : \bar{X} \to X$ les flèches canoniques. Il découle de l'hypothèse d'acyclicité locale que la flèche canonique

(2.2.2) $\quad Rg'_*(E|\bar{X}) \to Rg_*(E|X_t)$

est un isomorphisme. En effet, on peut supposer S strictement local, intègre, de point fermé s, t étant un point géométrique générique. Calculons la fibre de 2.2.2 en un point géométrique x de X, d'image y dans S. Quitte à remplacer S par le localisé strict de S en y, on peut supposer que $y = s$. Comme $\bar{S} \to S$ est limite projective de morphismes finis, et radiciel en s, on trouve que $Rg'_*(E|\bar{X})_x = E_x$ et que la fibre de 2.2.2 en x s'identifie à la restriction $E_x = R\Gamma(X(x),E) \to R\Gamma(X(x)_t,E|X(x)_t)$, laquelle est un isomorphisme par hypothèse. Appliquant $R\Gamma(X, -)$ à 2.2.2, on en déduit que la flèche de restriction 2.1.3 est un isomorphisme. On définit 2.2.1 comme composée de l'inverse de 2.1.3 et de la flèche de changement de base 2.1.2.

2.3. Si $s'' \xrightarrow{u'} s' \xrightarrow{u} s$ sont des flèches de spécialisation de points géométriques de S, on vérifie que l'on a

$$sp(u')sp(u'') = sp(uu') \ ,$$

$$cosp(u)cosp(u') = cosp(uu') \ ,$$

chaque fois que les deux membres sont définis.

2.4. Supposons que la formation de Rf_*E commute à tout changement de base fini, et que f soit localement acyclique rel. à E. Il découle des définitions que, pour toute spécialisation $u : t \to S(s)$ de points géométriques de S ; les flèches $sp(u)$ et $cosp(u)$ sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

Les hypothèses précédentes sont vérifiées notamment lorsque A est noethérien, annulé par un entier n inversible sur S, f propre et lisse, et E à cohomologie localement constante (propreté cohomologique des morphismes propres (1.3), et locale acyclicité des morphismes lisses (SGA 4 XV)). On retrouve le "théorème de spécialisation" (SGA 4 XVI 2.1).

D'autre part, 1.1 a la conséquence suivante:

Proposition 2.5. Supposons que f soit localement acyclique relativement à E, et que, pour toute spécialisation $u : t \to S(s)$, la flèche de cospécialisation $cosp(u)$ soit un isomorphisme. Alors la formation de Rf_*E commute à tout changement de base fini.

Compte tenu de 2.4, 2.5 généralise ([Arcata] V 1.7).

Corollaire 2.6. Supposons que f soit localement acyclique rel. à E. Soit x un point géométrique de X, d'image s dans S, notons $f_{(x)} : X(x) \to S(s)$ le morphisme induit par f. Alors la formation de $Rf_{(x)*}(E|X(x))$ commute à tout changement de base fini $S' \to S(s)$.

Il suffit, d'après 2.5, de vérifier que les flèches de cospécialisation pour $(f_{(x)}, E|X(x))$ sont des isomorphismes. Par transitivité des flèches de cospécialisation (2.3), il suffit de montrer que, si $u : t \to S(s)$ est une spécialisation, alors $cosp(u) : R\Gamma(X(x)_t, E|X(x)_t) \to R\Gamma(X(x)_s, E|X(x)_s)$ est un isomorphisme. Mais, comme s est fermé dans $S(s)$, $X(x)_s$ est strictement local de point fermé x, $R\Gamma(X(x)_s, E|X(x)_s) = E_x$, et $cosp(u)$ est un isomorphisme, inverse de l'isomorphisme de restriction $E_x \to R\Gamma(X(x)_t, E|X(x)_t)$.

Corollaire 2.7. Soient $f : X \to Y$ un S-morphisme, $p : X \to S$, $q : Y \to S$ les projections, et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$. On suppose A localement constant, f localement acyclique rel. à E, et q localement acyclique en tout point géométrique y de Y rel. à tout faisceau localement constant au voisinage de y. Alors p est localement acyclique rel. à E.

Soient x un point géométrique de X, d'images y et s dans Y et S, $t \to S(s)$ une spécialisation, $f_{(x)} : X(x) \to Y(y)$ le morphisme induit par f. Il s'agit de montrer que la restriction

$$(*) \qquad E_x \to R\Gamma(X(x)_t, E|X(x)_t)$$

est un isomorphisme. On peut supposer A constant. D'après 2.4 et 2.6, pour toute spécialisation $z \to Y(y)$, la flèche de spécialisation

$$E_x = Rf_{(x)*}(E|X(x))_y \to Rf_{(x)*}(E|X(x))_z = R\Gamma(X(x)_z, E|X(x)_z)$$

est un isomorphisme, autrement dit $Rf_{(x)*}(E|X(x))$ est constant de valeur E_x. L'hypothèse d'acyclicité sur q entraîne donc que la restriction

$$E_x \to R\Gamma(Y(y)_t, (E_x)|Y(y)_t) = R\Gamma(Y(y)_t, (Rf_{(x)*}(E|X(x))|Y(y)_t)$$

est un isomorphisme. Mais cette flèche s'identifie à (*), d'où la conclusion.

L'hypothèse de 2.7 sur q est vérifiée notamment lorsque q est lisse, et que A est annulé par un entier n inversible sur S (SGA 4 XV). D'autre part, si les hypothèses de 2.7 sont vérifiées après tout changement de base $S' \to S$, on conclut alors que p est universellement localement acyclique rel. à E. De ces remarques découle en particulier l'énoncé ([Th. finitude] 2.14).

Corollaire 2.8. Soient $f : X \to S$ et $E \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$. On suppose que f est universellement localement acyclique rel. à E, que la formation de Rf_*E commute à tout changement de base fini, et que pour tout morphisme $s' \to s$, où s est un point géométrique de S et s' le spectre d'un corps séparablement clos, la flèche de changement de base $R\Gamma(X_s, E|X_s) \to R\Gamma(X_{s'}, E|X_{s'})$ est un isomorphisme.

Alors (f,E) est cohomologiquement propre (1.3).

Soit $f' : X' \to S'$ le morphisme déduit de f par un changement de base $S' \to S$, il s'agit de voir que la formation de $Rf'_*(E\ X')$ commute à tout changement de base fini. D'après 2.5, il suffit de montrer que, pour toute spécialisation $u' : t' \to S'(s')$, la flèche de cospécialisation $cosp(u') :$ $R\Gamma(X'_{t'}, E|X'_{t'}) \to R\Gamma(X'_{s'}, E|X'_{s'})$ est un isomorphisme. Soient s (resp. t) le point géométrique image de s (resp. t) dans S, $u : t \to S(s)$ la spécialisation définie par u'. On voit aisément qu'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(X_t, E|X_t) & \xrightarrow{cosp(u)} & R\Gamma(X_s, E|X_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma(X'_{t'}, E|X'_{t'}) & \xrightarrow{cosp(u')} & R\Gamma(X'_{s'}, E|X'_{s'}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches de changement de base. Par hypothèse, celles-ci sont des isomorphismes. D'autre part (2.4) $cosp(u)$ est un isomorphisme, donc $cosp(u')$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Voici un exemple d'application de 2.8. Supposons A annulé par un entier n inversible sur S, f localement de type fini et universellement localement acyclique. Soient x un point géométrique de X, d'image s dans S, $f_{(x)} : X(x) \to S(s)$ le morphisme induit par f. Il résulte de 2.6 et ([Th. finitude] 1.9) (par passage à la limite) que les hypothèses de 2.8 sont vérifiées par le couple $(f_{(x)}, E|X(x))$, qui est donc cohomologiquement propre.

2.9. Supposons A constant. Soient $f : X \to S$, et $E \in ob\ D^+(X)$ un complexe de tor-dimension finie. Nous dirons que f est fortement localement acyclique rel. à E si, pour tout point géométrique x de X, d'image s dans S, toute spécialisation $t \to S(s)$, et tout A^o-module M, la flèche de restriction

$$E_x \overset{L}{\otimes}_A M \to R\Gamma(X(x)_t, (E|X(x)_t) \overset{L}{\otimes}_A M$$

est un isomorphisme. J'ignore si "localement acyclique" implique "fortement localement acyclique".

Proposition 2.10. Sous les hypothèses de 2.9, supposons A noethérien de torsion, S noethérien, et f fortement localement acyclique rel. à E . Alors, pour tout diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{j} & X' & \xleftarrow{j'} & X'' \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ S & \xleftarrow{i} & S' & \xleftarrow{i'} & S'' \end{array} ,$$

avec i quasi-fini et i' immersion ouverte, et tout $F \in \mathrm{ob}\, D^+(S'', A^o)$, la flèche canonique

$$(*) \qquad j^*E \overset{L}{\otimes} f'^*Ri'_*F \to Rj'_*((jj')^*E \overset{L}{\otimes} f''^*F)$$

est un isomorphisme.

On comparera cet énoncé avec (SGA 4 XV 1.17).

Démontrons 2.10. On se ramène facilement à $S = S'$, strictement local, et F constructible, concentré en degré 0 . On résout alors F à droite par des sommes finies de faisceaux de la forme u_*M , où $u : t \to S$ est un point géométrique et M un A^o-module. L'hypothèse implique que (*) est un isomorphisme pour $F = u_*M$, d'où le résultat.

Bibliographie.

[1] P. Deligne, Théorie de Hodge I, Actes Cong. int. math., 1970, t. I, 425-430.

[2] P. Deligne, Théorie de Hodge II, Pub. Math. IHES n° 40, 1972, 1-57.

[3] P. Deligne, La conjecture de Weil I, Pub. Math. IHES n° 43, 1974, 273-307.

[4] P. Deligne, La conjecture de Weil II, à paraître.

INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES

CATEGORIES DERIVEES

Quelques résultats (Etat 0)*)

par Jean-Louis VERDIER

---

*) Ce texte a été rédigé en 1963 (sauf pour un très petit nombre de changements, signalés en bas de page, et pour l'addition de quelques notes de bas de page, en 1976).

Sommaire

Chapitre 1 : Catégories triangulées

§ 1 : Définitions et exemples

n° 1 Définition des Catégories triangulées. Premières propriétés. 1

n° 2 Exemples de catégories triangulées 5

n° 3 Exemples de foncteurs exacts et de foncteurs cohomologiques. 10

§ 2 : Catégories quotients

n° 1 Catégories épaisses. Systèmes multiplicatifs 13

n° 2 Problèmes universels équivalents 15

n° 3 Calcul de fractions 16

n° 4 Propriétés des catégories quotients 19

n° 5 Propriétés du foncteur de passage au quotient 21

n° 6 Orthogonalité. 24

Chapitre 2 : Applications aux catégories abéliennes

§ 1 : Les catégories dérivées

n° 1 Les catégories dérivées d'une catégorie abélienne 28

n° 2 Etude des Ext. 34

§ 2 : Les foncteurs dérivés

n° 1 Définitions des foncteurs dérivés 37

n° 2 Existence des foncteurs dérivés 40

n° 3 Cup-produit. Composition. 44

§ 3 : Exemples

n° 1 Le foncteur Hom 46

n° 2 $\mathcal{C}$ or de faisceaux 47

n° 3 Le foncteur dérivé gauche de l'image réciproque. 48

Chapitre I : CATEGORIES TRIANGULEES

§ 1 : Définitions et exemples

n° 1 - Définition des catégories triangulées -

1-0 : Soient A une catégorie additive, T un automorphisme additif de A. X et Y étant deux objets de A, nous poserons

$$\overset{i}{Hom}(X,Y) = Hom_A(X,T^i(Y)) \qquad i \in Z$$

Soient X, Y, Z trois objets de A, $\alpha \in \overset{i}{Hom}(X,Y)$, $\beta \in \overset{j}{Hom}(Y,Z)$. Nous définirons le composé $\beta \circ \alpha$ appartenant à $\overset{i+j}{Hom}(X,Z)$ par :

$$\beta \circ \alpha = \beta \circ T^i(\alpha)$$

On vérifie qu'on obtient ainsi une nouvelle catégorie dont les groupes de morphismes entre les objets sont gradués. Cette nouvelle catégorie sera appelée, par abus de langage : la catégorie A, graduée par le foncteur de translation T.

Soit A une catégorie graduée par un foncteur de translation T. Lorsqu'on nommera ou notera un morphisme sans spécifier le degré, il s'agira toujours d'un morphisme de degré zéro.

Soient A et A' deux catégories additives graduées par les

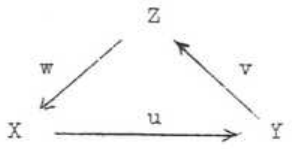
.....

foncteurs T et T', F un foncteur additif de A dans A'. On dira que F <u>est gradué</u> si l'on s'est donné un isomorphisme de foncteurs

$$F \circ T = T' \circ F \qquad (*)$$

La définition des morphismes de foncteurs gradués est donnée au chap. 2, § 2, n° 1.

A étant une catégorie additive graduée par le foncteur T, on appellera triangle, un ensemble de trois objets X, Y, Z et de trois morphismes $u : X \longrightarrow Y$, $v : Y \to Z$, $w : Z \to T(X)$ ($\deg w = 1$). Pour désigner les triangles on utilisera la notation : (X,Y,Z,u,v,w) ou bien le diagramme :



$\deg(w) = 1$

Soient (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') deux triangles de A ; un morphisme du premier triangle dans le second est un ensemble de trois morphismes : $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, $h : Z \to Z'$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array}$$

(*) texte modifié en 1976 : le texte original demandait une égalité $F \circ T = T' \circ F$. Le cas des foncteurs à plusieurs variables est discuté dans SGA 4 XVII 0.3. Il pose un problème de signes.

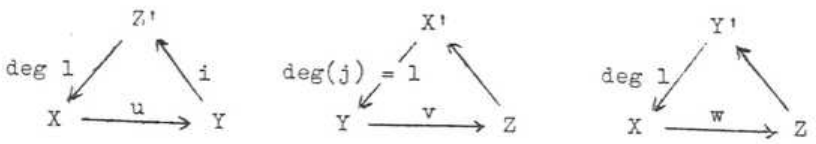
1-1 : On appelle catégorie triangulée, une catégorie additive graduée par un foncteur de translation, munie d'une famille de triangles qu'on appelle famille des triangles distingués. Cette famille doit vérifier de plus les axiomes :

(TR1) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$ est contenu dans un triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) . Le triangle $(X,X,0,id_X,0,0)$ est distingué.

(TR2) Pour que (X,Y,Z,u,v,w) soit distingué, il faut et il suffit que $(Y,Z,T(X),v,w,-T(u))$ soit distingué.

(TR3) (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') étant distingués, pour tout morphisme $(f,g) : u \longrightarrow u'$, il existe un morphisme $h : Z \longrightarrow Z'$ tel que (f,g,h) soit un morphisme de triangles.

(TR4)



étant trois triangles distingués tels que $w = v \circ u$, il existe deux morphismes $f : Z' \longrightarrow Y'$ $g : Y' \longrightarrow X'$ tels que

1) (id_X,v,f) soit un morphisme de triangle

2) (u,id_Z,g) soit un morphisme de triangle

3) $(Z',Y',X',f,g,T(i)\ j)$ soit un triangle distingué

C et C' étant deux catégories triangulées, on appelle foncteur exact de C dans C' , tout foncteur additif, gradué, transformant les triangles distingués en triangles distingués. Les morphismes de foncteurs exacts sont les morphismes de foncteurs gradués .

On déduit immédiatement des axiomes (TR1), (TR2), (TR3) la propriété suivante :

1-2 Proposition : Soient (X,Y,Z,u,v,w) un triangle distingué et M un objet d'une catégorie triangulée . On a alors les suites exactes :

$$\ldots \to \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,u)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,v)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,w)} \overset{i+1}{\mathrm{Hom}}(M,X) \to \ldots$$

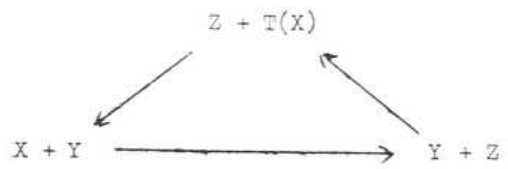
$$\ldots \to \overset{i}{\mathrm{Hom}}(Z,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(v,M)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(Y,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,M)} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(w,M)} \overset{i+1}{\mathrm{Hom}}(Z,M) \to \ldots$$

On déduit alors de cette proposition des énoncés du genre :

-(f,g,h) étant un morphisme de triangle distingué et f,g des isomorphismes. h est un isomorphisme .

- Les triangles distingués construits sur un morphisme (TR1), sont tous isomorphes (mais les isomorphismes ne sont pas, en général, uniquement déterminés).

- Lorsque dans un triangle distingué, un des morphismes admet un noyau ou un conoyau, celui-ci se scinde i.e. il est de la forme :



- La somme de deux triangles distingués est distinguée. (On utilise l'axiome (TR4)) .

n° 2 - Exemples -

2.1 : Nous allons d'abord fixer quelques notations. Soit A une catégorie additive C(A) désignera la catégorie suivante :

- Les objets de C(A) seront les complexes de A , sans limitation de degré, à différentielle de degré +1

- Les morphismes de A seront les morphismes de complexes (qui commutent avec la différentielle) conservant le degré .

Soit T le foncteur suivant : Pour tout objet $X^\cdot$ de C(A)

$$T(X^\cdot)_i = (X^\cdot)_{i+1}$$

$$d_i(T(X^\cdot)) = -d_{i+1}(X^\cdot)$$

Sur les morphismes le foncteur T agit de la manière suivante : Pour tout morphisme $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$, le morphisme $T(f) : T(X^\cdot) \longrightarrow T(Y^\cdot)$ est défini

par

$$T(f)_i = f_{i+1}$$

On vérifie immédiatement que T est un automorphisme additif de A. Les morphismes de degré n, définis à l'aide de ce foncteur de translation, sont alors les morphismes qui augmentent le degré de n, et qui commutent ou anticommutent avec la différentielle suivant la parité de n. On retrouve ainsi la définition généralement adoptée.

$\mathcal{C}$ désignera la famille de triangles suivante : Un triangle $(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, u, v, w)$ est un élément de la famille si[(*)]

- $Z^\cdot$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\ldots \to 0 \to X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \to 0 \to \ldots$$

où les objets de $Y^\cdot$ sont les objets de premier degré zéro, et les objets de $X^\cdot$, les objets de premier degré -1

- v est l'image par le foncteur : complexe double $\rightsquigarrow$ complexe simple, du morphisme de doubles complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0^\cdot & \longrightarrow & Y^\cdot & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^\cdot & \longrightarrow & Y^\cdot & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

- w est l'opposé de l'image, par le même foncteur, du morphisme de doubles complexes :

(*) texte modifié en 1976, pour assurer la validité de 2-4 .

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

2-2 : L'ensemble des morphismes homotopes à zéro est un idéal bilatère (si f et g sont composables et si f ou g est homotope à zéro, le composé est homotope à zéro . Si f et g sont homotopes à zéro, le morphisme $f \oplus g$ est homotope à zéro) . Pour tout couple d'objet X',Y' on désigne par $\mathrm{Htp}(X',Y')$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{C(A)}(X',Y')$ des morphismes homotopes à zéro. $K(A)$ sera alors la catégorie dont les objets sont les objets de $C(A)$ et les morphismes de source X' et de but Y', le groupe :

$$\mathrm{Hom}_{C(A)}(X',Y')/\mathrm{Htp}(X',Y')$$

La loi de composition sur les morphismes de $K(A)$ se définit à partir de la loi de composition sur les morphismes de $C(A)$ en passant au quotient. $K(A)$ est une catégorie additive. Le foncteur de translation T sur $C(A)$ passe au quotient (le translaté d'un morphisme homotope à zéro, est homotope à zéro). Le foncteur obtenu est un automorphisme additif de $K(A)$ que nous noterons encore T . Par abus de notation $K(A)$ désignera par la suite la catégorie $K(A)$ graduée par le foncteur T .

On appellera triangle distingué dans $K(A)$, tout triangle isomorphe à un triangle provenant de $\mathcal{C}$. La famille des triangles distingués vérifie les axiomes (TR1), (TR2) (TR3) et (TR4). Par abus de notation $K(A)$ désignera la catégorie $K(A)$ triangulée par la famille de triangles définie ci-dessus.

2-3 : On définit de plus tout un arsenal de sous-catégories :

- Un complexe est dit borné inférieurement si tous ses objets de degré négatif, sauf au plus un nombre fini, sont nuls . On définit de même les complexes bornés supérieurement, les complexes bornés. On désignera par $K^+(A), K^-(A), K^b(A)$ les sous-catégories pleines de $K(A)$ engendrées par ses familles d'objets . Ces sous-catégories sont des "sous-catégories triangulées" de $K(A)$: Tout triangle distingué dont deux des objets sont des objets de la sous-catégorie, est isomorphe à un triangle dont les trois objets sont des objets de la sous-catégorie .

- Supposons que A soit une catégorie abélienne . Un complexe est dit cohomologiquement borné inférieurement si tous ses objets de cohomologie de degré négatif sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux . On définit de manière analogue les complexes cohomologiquement bornés supérieurement, les complexes cohomologiquement bornés, les complexes acycliques . $K^{\infty,+}(A)$, $K^{\infty,-}(A), K^{\infty,b}(A)$, $K^{\infty,\emptyset}(A)$ désigneront les sous-catégories pleines engendrées par ces familles d'objets . Ce sont des sous-catégories triangulées.
On paiera aussi des sous-catégories triangulées $K^{+,b}(A)$, $K^{+,\emptyset}(A)$, ...etc...
(Le premier signe en exposant donne des renseignements sur les objets des complexes, le deuxième signe sur les objets de cohomologie) .

- A n'étant plus nécessairement abélienne, soit O un ensemble d'objets de A stable par isomorphisme et par somme directe. $O(A)$ désignera la sous-catégorie pleine de $C(A)$ engendrée par les complexes dont les objets en tout degré sont des objets de O . On notera $\underline{O}(A)$ la sous-catégorie

triangulée correspondante dans $K(A)$. A étant abélienne, on pourra prendre pour ensemble O , l'ensemble I des injectifs ou l'ensemble P des projectifs .

2-4 : Unicité de $K(A)$

$K(A)$ est uniquement déterminée par la donnée de $C(A)$ et de la famille $\mathcal{C}$. De manière précise : Tout foncteur additif gradué de $C(A)$ dans une catégorie triangulée, transformant tout triangle de $\mathcal{C}$ en un triangle distingué, se factorise de manière unique par $K(A)$, et le foncteur obtenu est exact .

Pour tout complexe $X^\cdot$ de $C(A)$, $\bar{X}^\cdot$ désignera le complexe obtenu à partir de $X^\cdot$ en annulant la différentielle. Une suite à trois termes :

$$0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$$

sera dite suite semi-scindée si la suite

$$0 \longrightarrow \bar{X}^\cdot \longrightarrow \bar{Y}^\cdot \longrightarrow \bar{Z}^\cdot \longrightarrow 0$$

est scindée; i.e. si elle est isomorphe à la suite :

$$0 \longrightarrow \bar{X}^\cdot \longrightarrow \bar{X}^\cdot + \bar{Z}^\cdot \longrightarrow \bar{Z}^\cdot \longrightarrow 0$$

Soit $0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$ une suite semi-scindée. Choisissons un scindage i.e. pour tout n un isomorphisme

$$(Y^\cdot)^n \approx (X^\cdot)^n + (Z^\cdot)^n$$

La matrice de la différentielle de $Y^\cdot$, dans la décomposition en somme directe ci-dessus est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_{X^\cdot} & \varphi_n \\ 0 & d_{Y^\cdot} \end{pmatrix}$$

où φ_n est un morphisme de $(Z^\cdot)^n$ dans $(X^\cdot)^{n+1}$. Les φ_n déterminent un morphisme de complexes

$$\varphi : Z^\cdot \longrightarrow T(X^\cdot)$$

Lorsqu'on change le scindage, la classe modulo homotopie de φ ne change pas . De plus, en notant $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{\varphi}$ les images dans $K(A)$ des morphismes u, v, φ , le triangle $(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, \underline{u}, \underline{v}, \underline{\varphi})$ est distingué . Désignons par $S.S.S.(A)$ la catégorie des suites semi-scindées de $C(A)$, et par $Tr.K(A)$ la catégorie des triangles distingués de $K(A)$. Ce qui précède permet de définir un foncteur :

$$\rho : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.K(A)$$

Ce foncteur est essentiellement surjectif .

n° 3 - Exemples de foncteurs cohomologiques et de foncteurs exacts -

3.1 : Définition : Soient A une catégorie triangulée, B une catégorie abélienne. Un foncteur additif $F: A \longrightarrow B$ est dit foncteur cohomologique

si pour tout triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) la suite

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z)$$

est exacte .

Le foncteur $F_\circ T^i$ sera souvent noté F^i . En vertu de l'axiome (TR2) des catégories triangulées, on a la suite exacte illimitée :

$$\cdots \to F^i(X) \longrightarrow F^i(Y) \longrightarrow F^i(Z) \longrightarrow F^{i+}(X) \longrightarrow \cdots$$

3.2. Exemples : 1) Soit A une catégorie triangulée . Pour tout objet X de A le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, ;)$ est un foncteur cohomologique . Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot , X)$ est un foncteur cohomologique $A^\circ \longrightarrow Ab$.

2) Soient A une catégorie abélienne , C(A) la catégorie des complexes de A . On désigne par $H^\circ : C(A) \longrightarrow A$ le foncteur suivant : Soit $X^\cdot$ un objet de C(A) . On pose

$$H^\circ(X^\cdot) = \mathrm{Ker}\, d^0 / \mathrm{Im}\, d^{-1}$$

H° annule les morphismes homotopes à zéro, donc se factorise de manière unique par K(A) . On désignera encore par $H^\circ : K(A) \longrightarrow A$, le foncteur obtenu .

3.3. Exemple de bi-foncteur exact : Soient A, A', A" trois catégories additives,

$$P : A \times A' \longrightarrow A''$$

un foncteur bilinéaire (i.e. additif par rapport à chacun des arguments

séparément). On en déduit alors le foncteur bilinéaire :

$$P^* : C(A) \times C(A') \longrightarrow C(A'')$$

de la manière suivante :

Soient $X^\cdot$ un objet de $C(A)$ et $Y^\cdot$ un objet de $C(A')$. $P(X^\cdot, Y^\cdot)$ est un complexe double de A''. On pose alors : $P^*(X^\cdot, Y^\cdot)$ = complexe simple associé à $P(X^\cdot, Y^\cdot)$.

Soient f un morphisme de $C(A)$ (resp. $C(A')$) homotope à zéro et $Z^\cdot$ un objet de $C(A')$ (resp. $C(A)$). Le morphisme $P^*(f, Z^\cdot)$ (resp. $P^\cdot(Z^\cdot,f)$) est alors homotope à zéro. On en déduit que P^* définit d'une manière unique un foncteur :

$$P^\cdot : K(A) \times K(A') \longrightarrow K(A'')$$

$P^\cdot$ est un bi-foncteur exact.

En particulier, soit A une catégorie additive. On peut prendre pour P le foncteur :

$$A^\circ \times A \longrightarrow Ab$$
$$(X,Y) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}\,(X,Y)$$

On obtient alors par la construction précédente un foncteur

$$\mathrm{Hom}^\circ : K(A)^\circ \times K(A) \longrightarrow K(Ab)$$

qui, composé avec le foncteur $H^\circ : K(Ab) \longrightarrow Ab$, redonne évidemment le foncteur $\mathrm{Hom}_{K(A)}$.

§ 2 - Les catégories quotients

n° 1 - Sous-catégories épaisses. Systèmes multiplicatifs de morphismes -

Nous commencerons par donner deux définitions

1-1 Définition : Une sous-catégorie B d'une catégorie triangulée A est dite épaisse si B est une sous-catégorie triangulée pleine de A et si de plus B possède la propriété suivante :

Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, se factorisant par un objet de B et contenu dans un triangle distingué (X,Y,Z,f,g,h) où Z est un objet de B , la source de f et le but de f sont des objets de B .

L'ensemble des sous-catégories épaisses de A sera noté $\mathcal{A}$.

L'intersection d'une famille quelconque de sous-catégories épaisses est une sous-catégorie épaisse.

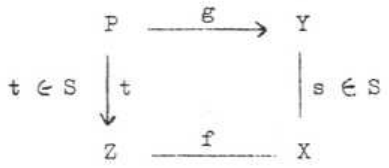
1-2 Définition : Soit A une catégorie triangulée. Un ensemble S de morphismes de A est appelé système multiplicatif de morphismes s'il possède les cinq propriétés suivantes :

(FR1) Si $f, g \in S$ et si f et g sont composables, $f \circ g \in S$. Pour tout objet X de A , le morphisme identique de X est un élément de S .

(FR2) Dans la catégorie A , tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow s \in S \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

se complète en un diagramme commutatif



De plus la propriété symétrique est vraie .

(FR3) Si f et g sont des morphismes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un $s \in S$ tel que $s \circ f = s \circ g$

ii) Il existe un $t \in S$ tel que $f \circ t = g \circ t$

(FR4) Soit T le foncteur de translation de A . Pour tout élément s de S , $T(s) \in S$.

(FR5) (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') étant deux triangles distingués, f et g deux éléments de S tels que le couple (f,g) soit un morphisme de u dans u', il existe un morphisme $h \in S$, tel que (f,g,h) soit un morphisme de triangle.

Un système multiplicatif de morphismes est dit saturé s'il possède la propriété suivante :

Un morphisme f appartient à S si et seulement s'il existe deux morphismes g et g' tels que $g \circ f \in S$ et $f \circ g' \in S$.

L'intersection d'une famille quelconque de systèmesmultiplicatifs saturésest un système multiplicatif saturé .

L'ensemble des systèmes multiplicatifs saturés sera noté $\mathcal{S}$.

Soit B une sous-catégorie épaisse; on désigne par $\varphi(B)$ l'ensemble des morphismes f qui sont contenus dans un triangle distingué (X'Y'Z',f,g,h) où Z est un objet de B . $\varphi(B)$ est un système multiplicatif saturé .

Soit S un système multiplicatif saturé ; on désigne par $\psi(S)$ la sous-catégorie pleine engendrée par les objets Z contenus dans un triangle distingué (X,Y,Z,f,g,h) où f est un élément de S . La sous-catégorie $\psi(S)$ est une sous-catégorie épaisse .

Le résultat principal de ce numéro est alors le suivant : φ est un isomorphisme (conservant la relation d'ordre définie par l'inclusion) de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{S}$. L'isomorphisme inverse n'est autre que ψ .

n° 2 - Problèmes Universels -

Soient A et A' deux catégories triangulées et F un foncteur exact de A dans A' . Soient S(F) l'ensemble des morphismes de A qui sont transformés par F en isomorphismes et B(F) la sous-catégorie pleine engendrée par les objets de A qui sont transformés par F en objets nuls de A' . S(F) est un système multiplicatif saturé et B(F) est une sous-catégorie épaisse. De plus $S(F) = \varphi(B(F))$. Soient alors A une

catégorie triangulée B une sous-catégorie épaisse et $S = \varphi(B)$ le système multiplicatif saturé correspondant . Les deux problèmes universels ci-dessous sont équivalents

Problème 1 - Trouver une catégorie triangulée A/B et un foncteur exact $Q : A \longrightarrow A/B$ tels que tout foncteur exact de A dans une catégorie triangulée A' , transformant les objets de B en objets nuls de A' , admette, de manière unique, une factorisation de la forme $G \circ Q$ où G est un foncteur exact .

Problème 2 - Trouver une catégorie triangulée A_S et un foncteur exact $Q : A \longrightarrow A_S$ tels que tout foncteur exact de A dans une catégorie triangulée A' , transformant les morphismes de S en isomorphismes de A', admette, de manière unique, une factorisation de la forme $G \circ Q$ où G est un foncteur exact .

(Le rédacteur prie le lecteur de bien vouloir l'excuser pour l'emploi de ce langage désuet et rétrograde). Nous allons montrer, dans le numéro suivant, que le problème 2 admet une solution. Donc le problème 1 correspondant admet la même solution .

n° 3 - Calcul de fraction

3.1. Soient A une catégorie triangulée, S un système multiplicatif saturé. Désignons par $A(S^{-1})$ la catégorie de fraction de A pour l'ensemble de morphismes S et Q le foncteur canonique de A dans $A(S^{-1})$. Le couple

$(A(S^{-1}), Q)$ résout le problème suivant : Tout foncteur de A dans une catégorie quelconque (non nécessairement additive) transformant morphisme de S en isomorphisme, se factorise, d'ure manière unique, par $(A(S^{-1}), Q)$. Un tel couple existe toujours, sans hypothèse sur l'ensemble de morphismes S [C.G.G.] . Cependant l'ensemble de morphismes S , étant un système multiplicatif saturé, possède les propriétés (FR1), (FR2), (FR3) . Par suite, d'après C.G.G., la catégorie $A(S^{-1})$ peut s'obtenir par un calcul de fractions, à droite ou à gauche. Nous allons rappeler comment on obtient $A(S^{-1})$ par un calcul de fractions à droite. (Le calcul de fractions à gauche s'obtient par le procédé du renversement des flèches).

3.2. Les objets de $A(S^{-1})$ sont les objets de A .

- Pour tout objet X de A, désignons par S_X la catégorie des flèches appartenant à S , ayant pour but X . A tout objet Y de A, on associe, fonctoriellement en Y , le foncteur suivant sur S_X° à valeur dans la catégorie des ensembles : (S_X° désigne la catégorie opposée)

$$H_Y : s \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{source}(s), Y)$$

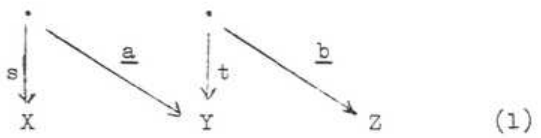
On pose alors :

$$\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{S_X^\circ}(H_Y)$$

(Pour tout ce qui concerne les limites inductives, on se référera à "Grothendieck Topologies") .

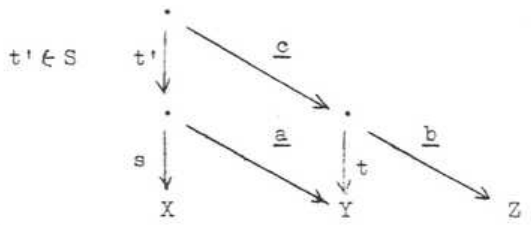
On constatera alors, avec plaisir en utilisant (FR1), (FR2), (FR3) que la catégorie S_X° possède les propriétés L1, L2, L3 . Les limites inductives possèdent donc toutes les bonnes propriétés des limites inductives sur les ensembles ordonnés filtrants).

- Soient X, Y, Z, trois objets de A, a un élément de $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y)$ et b un élément de $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(Y,Z)$. Soient s un objet de S_X, $\underline{a}$ un élément de Hom(source(s),Y) dont l'image est a et un objet de S_Y, $\underline{b}$ un élément de Hom(source(t),Z) dont l'image est b . On a alors un diagramme :



(1)

que, d'après (FR2), on peut compléter en un diagramme :



Notons $b_\circ a$ l'image dans $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Z)$ du morphisme $\underline{b_\circ c}$. On vérifie que grâce aux propriétés (FR1) (FR2) (FR3) $b_\circ a$ ne dépend pas des représentants $\underline{a}$ et $\underline{b}$ choisis et qu'il ne dépend pas non plus de la manière de compléter le diagramme (1) . On vérifie de plus qu'on a ainsi défini une catégorie $A(S^{-1})$.

Nous noterons Q le foncteur évident : $A \longrightarrow A(S^{-1})$

A étant une catégorie additive, $A(S^{-1})$ est une catégorie additive. De plus, on démontre en utilisant (FR4) qu'il existe un et un seul foncteur de translation sur $A(S^{-1})$, que nous noterons encore T , vérifiant la relation :

$$Q \circ T = T \circ Q$$

Enfin, à l'aide de (FR5), on démontre qu'il existe une et une seule structure triangulée sur $A(S^{-1})$ telle que le foncteur Q soit exact . Les triangles distingués de $A(S^{-1})$ ne sont autre que les triangles isomorphes aux images, par Q , des triangles distingués de A . En désignant par A_S, la catégorie $A(S^{-1})$ munie de cette structure triangulée, on démontre sans difficulté que le couple (A_S, Q) est une solution au problème 2 .

3-3 Définition : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse de A , (Q, A/B) la solution du problème 1 (n° 2). A/B sera appelée la catégorie quotient de A par B . Q sera appelé le foncteur canonique de passage au quotient. Plus généralement soit N une sous-catégorie triangulée de A et soit $\underline{N}$ la plus petite sous-catégorie épaisse contenant N . La catégorie quotient de A par N : A/N sera par définition $A/\underline{N}$.

n° 4 - Propriétés des catégories quotients

4-1 : Soient A une catégorie triangulée et H un foncteur cohomologique à valeur dans une catégorie abélienne G . Soient B_H la sous-catégorie

pleine engendrée par les objets dont tous les translatés sont transformés par H en objets nuls de G et S_H l'ensemble des morphismes dont tous les translatés sont transformés par H en isomorphismes de G. B_H est une sous-catégorie épaisse de A ; S_H est un système multiplicatif saturé. De plus $S_H = \varphi(B_H)$ (n° 1). Le foncteur H se factorise d'une manière unique par $(Q, A/B_H)$.

4-2 : Théorème : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie triangulée, N une sous-catégorie épaisse de A, $S = \varphi(N)$ le système multiplicatif saturé correspondant.

(a) La catégorie $N \cap B$ est une sous-catégorie épaisse de B. Le système multiplicatif correspondant est $S \cap B$.

(b) Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout objet X de B et tout morphisme $s : R \longrightarrow X$ où s est un élément de S, il existe un morphisme $s' : R' \longrightarrow R$ où $s \circ s'$ est un élément de $S \cap B$; et $R' \in \mathrm{Ob}\ B$.

(ii) Tout morphisme d'un objet X de B dans un objet Y de N se factorise par un objet de $N \cap B$.

(c) Les propriétés (i)' et (ii)' obtenues à partir de (i) et (ii) en renversant les flèches sont équivalentes.

(d) Si les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées ou bien si les propriétés (i)' et (ii)' sont vérifiées, le foncteur canonique :

$$B/N \cap B \longrightarrow A/N$$

est fidèle .

Comme ce foncteur est injectif sur les objets, il réalise $B/N \cap B$ comme sous-catégorie de A/N .

(e) Si de plus B est une sous-catégorie pleine de A, $B/N \cap B$ est une sous-catégorie pleine de A/N .

4-3 Corollaire : Soient $A \subset B \subset C$ trois catégories triangulées, A sous catégorie épaisse de B , B sous-catégorie épaisse de C . Alors A est une sous-catégorie épaisse de C , B/A est une sous-catégorie épaisse de C/A . Le foncteur canonique $C/B \longrightarrow (C/A)/(B/A)$ est un isomorphisme .

n° 5 - Propriétés du foncteur de passage au quotient -

Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse, S le système multiplicatif correspondant, $Q : A \longrightarrow A/B$ le foncteur canonique de passage au quotient .

5-1 Proposition : X et Y étant des objets de A , les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, tel qu'il existe un morphisme $s : Z \longrightarrow X$, de S , vérifiant $f \circ s = 0$, est un morphisme nul

b) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, tel qu'il existe un morphisme $s : Y \longrightarrow Z$, $s \in S$, vérifiant $s \circ f = 0$, est un morphisme nul

c) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ qui se factorise par un objet de B est nul .

d) L'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est injective .

5-2 Proposition : Soient X et Y deux objets de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Tout diagramme :

$$s \in S \qquad \begin{array}{ccc} & & Z \\ & {\scriptstyle s}\downarrow & \searrow^{f} \\ X & & & Y \end{array}$$

se complète en un diagramme :

$$\begin{array}{lcccc} & & & & Z' \\ t \in S & & & {\scriptstyle t}\downarrow & \\ & & & & Z \\ s \in S & & & {\scriptstyle s}\downarrow & \searrow^{f} \\ & & & X & & Y \end{array}$$

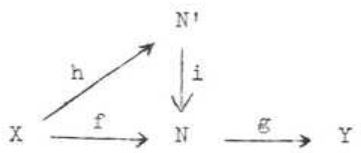
où $f_\circ t$ se factorise par $(X, s_\circ t)$

b) Assertion obtenue en renversant le sens des flèches dans a) et en permutant X et Y

c) Tout diagramme :

$$X \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Y$$

où $g \circ f = 0$ et où N est un objet de B, se complète en un diagramme :



où $f = i \circ h$ et où $g \circ i = 0$.

d) Assertion obtenue en changeant le sens des flèches dans c) et en permutant X et Y.

e) L'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est surjective.

5-3 Proposition : Soit X un objet de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout objet Y de A, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est un isomorphisme.

b) Tout morphisme de X dans un objet de B est nul.

De même, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a)' Pour tout objet Y de A, l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(Y,X) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(Y),Q(X))$$

est un isomorphisme .

b)' Tout morphisme d'un objet de B dans X est nul .

5-4 Définition : Tout objet possédant les propriétés équivalentes a) et b) de la proposition précédente, sera appelé : objet libre à gauche sur A/B ou bien encore objet Q-libre à gauche . De même, tout objet possédant les propriétés équivalentes a)' et b)' sera appelé objet libre à droite sur A/B ou encore objet Q-libre à droite . Il est défini à isomorphisme près par la connaissance de $Q(X) \in \mathrm{Ob}\ A/B$.

n° 6 - Foncteurs adjoints au foncteur de passage au quotient -

6-1 Définition : Deux sous-catégories triangulées N et N' d'une catégorie triangulée A sont dites orthogonales si pour tout objet X de N et tout objet Y de N', on a :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) = 0$$

N' sera dite alors orthogonale à droite à N et N orthogonale à gauche à N'.

6-2 Proposition : Soit N une sous-catégorie triangulée d'une catégorie triangulée A . La catégorie pleine $N^{\perp}$ (resp$^{\perp}$ N) engendrée par les objets X de A tels que pour tout objet Y de N on ait $\mathrm{Hom}_A(Y,X) = 0$

(resp $\mathrm{Hom}_A(X,Y) = 0$), est une sous-catégorie épaisse de A . La catégorie $N^{\perp}$ est appelée par abus de langage, l'orthogonale à droite de N .

Cette proposition nous permet de traduire la proposition 5-3 .

6-3 Proposition : Soit $B \subset A$, une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée A . La catégorie pleine engendrée par les objets libres à droite sur A/B (resp. à gauche), n'est autre que l'orthogonale à droite (resp. à gauche) de B .

6-4 Proposition : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse de A $B^{\perp}$ l'orthogonale à droite de B , $S(B)$, $S(B^{\perp})$ les systèmes multiplicatifs correspondants, Q et $Q^{\perp}$ les foncteurs canoniques de passage au quotient . Considérons pour un objet X de A , les propriétés suivantes :

i) X s'envoie par un morphisme de $S(B)$ dans un objet de $B^{\perp}$,

ii) X reçoit par un morphisme de $S(B^{\perp})$ un objet de B .

iii) La catégorie $S_X(B)$ des flèches de $S(B)$ de source X , admet un objet final.

iv) La catégorie $S^X(B^{\perp})$ des flèches de $S(B^{\perp})$ de but X admet un objet initial.

v) La catégorie B/X des objets de B au-dessus de X , admet un objet final.

vi) La catégorie $B^{\perp}/X$ des objets de $B^{\perp}$ au-dessous de X admet un objet initial .

On a alors $i \iff ii \iff iii \iff v \begin{array}{l} \nearrow iv \\ \searrow vi \end{array}$

Si de plus ${}^{\perp}(B^{\perp}) = B$ alors toutes les propriétés sont équivalentes .

Soient B une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée A, le foncteur d'injection i de B dans A et Q le foncteur de passage au quotient de A dans A/B , $B^{\perp}$ l'orthogonale à droite de B , les foncteurs correspondant $i^{\perp}$ et $Q^{\perp}$. On déduit immédiatement de la proposition 6-4 les propositions suivantes :

6-5 Proposition : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur i admet un adjoint à droite.

ii) Le foncteur Q admet un adjoint à droite.

La proposition est encore vraie lorsqu'on remplace le mot droite par le mot gauche.

6-6 Proposition : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

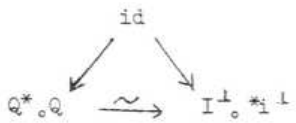
i) Le foncteur i admet un adjoint à droite.

ii) Le foncteur $i^{\perp}$ admet un adjoint à gauche . L'orthogonale à gauche de la catégorie $B^{\perp}$ est égale à B .

6-7 Proposition : Supposons vérifiées les propriétés des propositions 6-5 et 6-6. Soient i* et Q* les adjoints à droite de i et Q . De même soient ${}^{*}i^{\perp}$ et ${}^{*}Q^{\perp}$ les adjoints à gauche de $i^{\perp}$ et de $Q^{\perp}$. Tous ces foncteurs

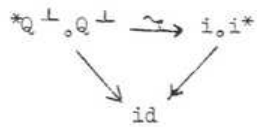
sont exacts . De plus :

Il existe un isomorphisme fonctoriel $Q^* \circ Q \xrightarrow{\sim} I^{\perp} \circ {}^*i^{\perp}$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :



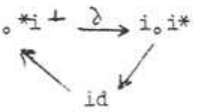
(les flèches obliques sont définies par les propriétés d'adjonction).

Il existe de même un isomorphisme ${}^*Q^{\perp} \circ Q^{\perp} \xrightarrow{\sim} i \circ i^*$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



Enfin, il existe un morphisme fonctoriel de degré 1 : $\partial : i^{\perp} \circ {}^*i^{\perp} \longrightarrow i \circ i^*$ tel que le triangle suivant soit distingué :

$\deg \partial = 1$



Un tel morphisme ∂ est unique et vérifie $\partial(TX_0) = -T\partial(X)$ (X objet q c q, T translation) .

-:-:-:-:-

Chapitre II : APPLICATIONS aux CATEGORIES ABELIENNES

§ 1 : Les catégories dérivées d'une catégorie abélienne

n° 1 - Les catégories dérivées

On utilise les notations du chapitre 1, § 1, n° 2.2. On utilisera de plus les notations suivantes :

1.1. Notation : Soit A une catégorie abélienne. On pose :

$$D(A) = K^{\infty,\infty}(A)/K^{-\infty,\emptyset}(A)$$

$$D^b(A) = K^{b,b}(A)/K^{b,\emptyset}(A)$$

$$D^+(A) = K^{+,+}(A)/K^{+,\emptyset}(A)$$

$$D^-(A) = K^{-,-}(A)/K^{-,\emptyset}(A)$$

1.2. Proposition : Les foncteurs naturels qui figurent dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & D(A) & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ D^+(A) & & & & D^-(A) \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & D^b(A) & & \end{array}$$

sont pleinement fidèles.

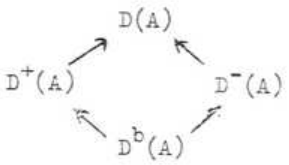
Les foncteurs naturels :

$$D^b(A) = K^{b,b}/K^{b,\emptyset}(A) \longrightarrow K^{+,b}(A)/K^{+,\emptyset}(A)$$

$$D^b(A) = K^{b,b}(A)/K^{b,\emptyset}(A) \longrightarrow K^{-,b}(A)/K^{-,\emptyset}(A)$$

sont des équivalences de catégories .

Les foncteurs du diagramme :



étant injectifs sur les objets, réalisent les catégories $D^b(A)$, $D^+(A)$, $D^-(A)$ comme sous-catégories pleines de $D(A)$.

La preuve de cette proposition se trouve au chap. 1, § 2, n° 4, théorème 2 .

1.3. Définition : La catégorie $D(A)$ sera appelée la catégorie dérivée de la catégorie A . Les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets do $D^b(A)$ seront appelés les objets bornés de $D(A)$. Les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets de $D^+(A)$ seront appelés les objets limités à gauche, les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets de $D^-(A)$ seront appelés les objets limités à droite.

Nous désignerons par D le foncteur canonique :

$$D : \quad C(A) \longrightarrow D(A)$$

La "restriction" de D à la sous-catégorie pleine A de $C(A)$ sera encore noté D. Le foncteur D restreint à A est pleinement fidèle. Le foncteur D se factorise d'une manière unique par $K(A)$. Soient X et Y deux objets de A.

On vérifie sans difficulté que pour tout $m \geqslant 0$, les groupes :

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X), T^{-m}D(Y)) \qquad (T \text{ est le foncteur translation})$$

sont nuls. La dimension cohomologique de A sera le plus petit des entiers n tels que pour tout $m > n$ on ait :

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X), T^{m}D(Y)) = 0 \quad \text{pour tout couple } X, Y \text{ d'objets de } A.$$

S'il n'y a pas de tels entiers, on dira que la dimension cohomologique de A est infinie.

Désignons par $I^+(A)$ (resp. $I(A)$) la sous-catégorie triangulée pleine de $K^+(A)$ (resp. de $K(A)$) définie par les complexes dont les objets sont injectifs en tout degré.

1.4. Proposition : Supposons que la catégorie A possède suffisamment d'injectifs. Le foncteur naturel :

$$Q^+ : \quad K^+(A) \longrightarrow D^+(A)$$

induit une équivalence de catégorie :

$$I^+(A) \longrightarrow D^+(A)$$

Le foncteur quasi-inverse est un adjoint à droite de Q^+.

Si de plus A est de dimension cohomologique finie, l'assertion précédente est encore vraie lorsqu'on y supprime les exposants + .

On a un énoncé analogue concernant les projectifs .

La démonstration de la proposition 1.4 s'appuie sur le chap. 1, § 2, n° 6.4.

La structure triangulée de D(A) , est précisée par la proposition suivante .

Soit E(A) la catégorie des suites exactes à trois termes de C(A) . La catégorie S.S.S(A) des suites exactes semi-scindées (chap.1, § 1, n° 2-4) est une sous-catégorie pleine de E(A) . On a défini (Loc. cit.) un foncteur :

$$\rho : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.K(A)$$

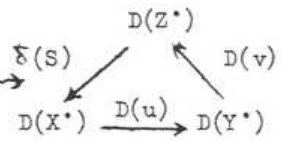
où Tr.K(A) désigne la catégorie des triangles distingués de K(A) .
On en déduit un foncteur

$$\sigma : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.D(A)$$

où Tr.D(A) désigne la catégorie des triangles distingués de D(A) .

1.5 Proposition : Il existe un et un seul foncteur :

$$\pi : E(A) \longrightarrow Tr.\ D(A)$$

de la forme : $(S = 0 \to X^\cdot \to Y^\cdot \to Z^\cdot \to 0) \rightsquigarrow \delta(S)$ 

$\deg \delta(S) = 1$

dont la restriction à S.S.S(A) soit δ . Ce foncteur est essentiellement surjectif .

1.6 Proposition : Le foncteur cohomologique canonique :

$$H^\circ : K(A) \longrightarrow A$$

se factorise d'une manière unique par un foncteur que nous noterons encore H°

$$H^\circ : D(A) \longrightarrow A$$

Sur D(A) le foncteur H° et ses translatés H^i forment un système conservatif, i.e. un morphisme $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ et un isomorphisme si et seulement si pour tout entier i

$$H^i(f) : H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$$

est un isomorphisme .

1.7 Définition : Un morphisme $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ de C(A) (resp. de K(A)) est appelé un quasi-isomorphisme lorsque pour tout entier i

$$H^i(f) : H^i(X^\cdot) \longrightarrow H^i(Y^\cdot)$$

est un isomorphisme. D'après la proposition précédente les quasi-isomorphismes sont les morphismes qui deviennent des isomorphismes dans D(A) .

1.8 Définition : Soient σ un ensemble d'objets de A, $X^\cdot$ un objet de $C(A)$ (resp. de $K(A)$). Une résolution droite (resp. gauche) de type σ de $X^\cdot$, est un quasi-isomorphisme : $X^\cdot \longrightarrow V^\cdot$ (resp. $V^\cdot \longrightarrow X^\cdot$) où $V^\cdot$ est un complexe dont tous les objets appartiennent à σ. On dira résolution injective (resp. projective) au lieu de résolution droite (resp. gauche) de type injectif (resp. projectif). De manière générale, on se permettra de supprimer les mots "droite" ou "gauche" lorsqu'aucune ambiguité n'en résultera.

1.9 Proposition : 1) Supposons que tout objet de A s'injecte dans un objet de σ (resp. soit quotient d'un objet de σ). Alors tout objet de $C^+(A)$ (resp. de $C^-(A)$) admet une résolution droite (resp. gauche) de type σ dans $C^+(A)$ (resp. dans $C^-(A)$).

2) Supposons de plus qu'il existe un entier n tel que pour toute suite exacte :

$$Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y^{n-1} \longrightarrow Y^n \longrightarrow 0$$

$$(\text{ resp. } \quad 0 \longrightarrow Y^n \longrightarrow Y^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y^1 \longrightarrow Y^0)$$

d'objets de A ou pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, Y^i est un objet de σ, l'objet Y^n soit un objet de σ. Alors tout objet de $C(A)$ admet une résolution droite (resp. gauche) de type σ.

n° 2 : Etude des Ext

Soient $X^\cdot$ et $Y^\cdot$ deux objets de $C(A)$ (resp. $K(A)$) et $D : C(A) \longrightarrow D(A)$ (resp. $Q : K(A) \longrightarrow D(A)$) le foncteur canonique .

2.1 Définition : On appelle i-ème hyper-ext et on note :

$$(X^\cdot, Y^\cdot) \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^i(X^\cdot, Y^\cdot)$$

le foncteur : $\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X^\cdot), T^i D(Y^\cdot))$ (resp. $\mathrm{Hom}_{D(A)}(Q(X^\cdot), T^i Q(Y^\cdot))$) .

2.2. Proposition : Soit $0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$ une suite exacte de $C(A)$. Soit $V^\cdot$ un objet de $C(A)$. On a les suites exactes illimitées :

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, X^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, Y^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, Z^\cdot) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+1}(V^\cdot, X^\cdot) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(Z^\cdot, V^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(Y^\cdot, V^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(X^\cdot, V^\cdot) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+1}(Z^\cdot, V^\cdot) \longrightarrow \ldots$$

Soient $X^\cdot$ et $Y^\cdot$ deux objets de $K(A)$. On désigne par $Qis/X^\cdot$ (resp. $Qis^+/X^\cdot$, $Qis^-/X^\cdot$, $Qis^b/X^\cdot$) la catégorie des quasi-isomorphismes de but $X^\cdot$ et de source dans $K(A)$ (resp. $K^+(A)$, $K^-(A)$, $K^b(A)$) . De même on définit les catégories $Y^\cdot/Qis$, $Y^\cdot/Qis^+$... (quasi-isomorphismes de source $Y^\cdot$) .

On se propose de résumer dans la proposition suivante les différentes définitions équivalentes des Ext^i .

2.3. Proposition : 1) Il existe des isomorphismes de foncteurs :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^0(X^\cdot, Y^\cdot) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(Q(X'), Q(Y^\cdot)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis/X^\cdot)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,.\,, Y^\cdot)$$

$$\xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\cdot/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\cdot, \,.\,) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis/X^\cdot)^\circ \times Y^\cdot/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(.\,,\,.)$$

2) Si $X^\cdot$ est un objet de $K^-(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis/X^\cdot)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(.\,, Y^\cdot)$$

Si $Y^\cdot$ est un objet de $K^+(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\cdot/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\cdot, \,.\,)$$

3) Si $X^\cdot$ est un objet de $K^-(A)$ et si $Y^\cdot$ est un objet de $K^b(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\cdot/Qis^b} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\cdot, \,.\,)$$

Si $X^\cdot$ est un objet de $K^b(A)$ et $Y^\cdot$ un objet de $K^+(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis^b/X^\cdot)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,.\,, Y^\cdot)$$

4) Si la catégorie A possède suffisamment d'injectif et si $Y^\cdot$ est un objet de $K^+(A)$, $Y^\cdot$ admet une résolution injective

et une seule (à isomorphisme près dans $K^+(A)$) :

$$Y^\cdot \longrightarrow I(Y^\cdot)$$

et on a :

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\cdot, I(Y^\cdot))$$

On a de même un énoncé analogue pour les projectifs .

5) Si la catégorie A admet suffisamment d'injectifs et si A est de dimension cohomologique finie, tout objet $Y^\cdot$ de $K(A)$ admet une résolution injective et une seule :

$$Y^\cdot \longrightarrow I(Y^\cdot)$$

et on a :

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\cdot, I(Y^\cdot))$$

Enoncé analogue pour les projectifs .

Remarque : En explicitant l'isomorphisme de la proposition 2.3. (3) on retrouve la définition de Yoneda.

§ 2 : Les foncteurs dérivés

n° 1 : Définition des foncteurs dérivés.

1.1 Définition : Soient C et C' deux catégories graduées (on désigne par T le foncteur de translation de C et de C') , F et G deux foncteurs gradués de C dans C' . Un morphisme de foncteurs gradués est un morphisme de foncteurs :

$$u : F \to G$$

qui possède la propriété suivante :

Pour tout objet X de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{lccc} u(TX) : & F(TX) & \longrightarrow & G(TX) \\ & \uparrow s & & \uparrow s \\ Tu(X) : & TF(X) & \longrightarrow & TG(X) \end{array}$$

Soient C et C' deux catégories triangulées. On désigne par Fex(C,C') la catégorie des foncteurs exacts de C dans C' , les morphismes entre deux foncteurs étant les morphismes de foncteurs gradués.

Soient A et B deux catégories abéliennes et $\overline{\Phi} : K^*(A) \longrightarrow K^{*'}(B)$ un foncteur exact (* et *' désignent l'un des signes +, -, b, ou v "vide") . Le foncteur canonique :

$Q : K^*(A) \longrightarrow D^*(A)$ nous donne, par composition, un foncteur :

$$Fex(D^*(A), D^{*'}(B)) \longrightarrow Fex(K^*(A), D^{*'}(B))$$

d'où (en désignant aussi par Q' le foncteur canonique $K^{*'}(B) \longrightarrow D^{*'}(B)$) un foncteur : $\%$ (resp. $\%'$) : $Fex(D^*(A), D^{*'}(B)) \longrightarrow (Ab)$:

$$\Psi \rightsquigarrow Hom(Q_! \underline{\Phi}, \Psi \circ Q)$$

$$\text{(resp. } \Psi \rightsquigarrow Hom(\Psi \circ Q, Q_! \underline{\Phi}) \text{)}$$

1.2 Définition(*) : On dira que $\underline{\Phi}$ admet un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) si le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) est représentable. Un objet représentant le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) sera appelé foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) de $\underline{\Phi}$ et sera noté $\underline{R}\,\underline{\Phi}$ (resp. $\underline{L}\,\underline{\Phi}$) .

1.3 Notations : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \to B$ un foncteur additif. Le foncteur dérivé total à droite du foncteur $K^+(f) : K^+(A) \longrightarrow K^+(B)$ sera noté $\underline{R}^+ f$. On définit de même $\underline{R}^- f$, $\underline{R}f$, $\underline{L}^+ f$, $\underline{L}^- f$, $\underline{L}f$.

Soit de même $F : K^*(A) \to B$, un foncteur cohomologique . Le foncteur canonique de passage au quotient $Q : K^*(A) \longrightarrow D^*(A)$ définit par composition un foncteur :

$$Foco(D^*(A), B) \longrightarrow Foco(K^*(A), B)$$

(Foco(,) désigne la catégorie des foncteurs cohomologiques) d'où un

(*) Une définition plus maniable (et en pratique équivalente) est donnée dans SGA 4 XVII 1.2 .

foncteur $\%$ (resp. $\%'$) $Foco(D^*(A),B) \longrightarrow (Ab)$: $G \rightsquigarrow Hom(F, G_\circ Q)$ (resp. $G \rightsquigarrow Hom(G_\circ Q, F)$) .

1.4 Définition : On dira que le foncteur F admet un foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) si le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) est représentable . Un objet représentant le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) sera appelé foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) et sera noté RF (resp. LF) .

1.5 Notations : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \longrightarrow B$ un foncteur additif . Le foncteur dérivé cohomologique à droite du foncteur :

$$H^\circ K^+ f : K^+(A) \longrightarrow B$$

sera noté R^+f . Lorsqu'aucune confusion n'en résultera le foncteur $R^+f_\circ T^i$ (T est le foncteur de translation) sera noté : R^if . Le foncteur dérivé cohomologique à droite du foncteur $H_\circ Kf$ sera noté Rf . Lorsqu'aucune confusion n'en résultera le foncteur $Rf_\circ T^i$ sera noté R^if .

On définit de même les foncteurs L^-f, Lf, L^if ;

1.6 Remarques : Ces définitions contiennent, ainsi que nous le verrons dans le numéro suivant, la définition classique des foncteurs dérivés lorsque les catégories ont suffisamment d'injectifs ou de projectifs et que les complexes sont convenablement limités. Elles sont cependant plus

générales . Mais sans autres hypothèses elles sont peu maniables. Par exemple, soit $f : A \longrightarrow B$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. Supposons que les foncteurs $\underline{R}^+f$ et $\underline{R}f$ existent . Je ne sais pas démontrer que $\underline{R}f$ induit sur $D^+(A)$ le foncteur $\underline{R}^+f$. Supposons de plus que le foncteur R^+f (dérivé cohomologique) existe . Je ne sais pas démontrer que le foncteur $H^\circ\underline{R}^+f$ est isomorphe au foncteur R^+f . Cependant dans la pratique ces propriétés seront vérifiées .

n° 2 : Existence des foncteurs dérivés

2.1 Proposition : Les hypothèses sont celles de la définition 1.4 . Supposons en outre que A soit une U-catégorie, où U est un univers tel que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnel soit un élément de U , telle que l'ensemble des objets de A soit un élément de U . Supposons de plus que la catégorie B soit la catégorie des U-groupes abéliens ou plus généralement la catégorie des faisceaux de U-groupes abéliens sur un U-site quelconque . (Un U-site est une U-catégorie, dont l'ensemble des objets est un élément de U , munie d'une topologie) .
Le foncteur F admet un foncteur dérivé cohomologique à droite. Ce foncteur se calcule de la manière suivante :

Soient X un objet de $D^*(A)$, $\underline{X}$ l'objet de $K^*(A)$ au-dessus de X . On a alors un isomorphisme fonctoriel :

$$RF(X) = \varinjlim_{\underline{X}/Qis} F(\ .\ ) .$$

En particulier soit $f : A \to B$ un foncteur additif . Les foncteurs Rf et R^+f existent et se calculent de la manière indiquée ci-dessus. Le foncteur Rf induit sur $D^+(A)$ le foncteur R^+f . Comme aucune confusion ne peut alors en résulter, nous emploierons la notation R^if .

2.2. Remarques : On peut exprimer la proposition 2.1 sous une forme plus générale dans le cadre des catégories triangulées . Les hypothèses à faire sur la catégorie B , pour assurer la validité de la proposition 2.1 sont des hypothèses d'existence et d'exactitude des limites inductives suivant les U-catégories pseudo-filtrantes, dont les ensembles d'objet sont éléments de $\mathcal{U}$. La proposition 2.1 introduit une dissymétrie entre les foncteurs dérivés droits et les foncteurs dérivés gauches tout au moins dans la pratique .

2.2. Théorème : Les données sont celles de la définition 1.2. On se donne de plus une sous-catégorie triangulée pleine de $K^*(A)$: C , et on désigne par N la sous-catégorie triangulée pleine des objets de C qui sont acycliques . Supposons que

1) Tout objet de N soit transformé par $\underline{\Phi}$ en objet acyclique de $K^{*'}(B)$.

2) Tout objet X de $K^*(A)$ soit source (resp. but) d'un quasi-isomorphisme dont le but (resp. la source) soit un objet de C .

a) Alors $\underline{\Phi}$ admet un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) .

b) Le foncteur $\underline{\underline{R}}\,\underline{\Phi}$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\underline{\Phi}$) s'obtient de la manière suivante :

La restriction du foncteur $Q_!\,\underline{\Phi} : K^*(A) \longrightarrow D^{*'}(B)$ à la catégorie C s'annule sur les objets de N, donc se factorise par C/N. On obtient ainsi un foncteur $\underline{\Phi}' : C/N \longrightarrow D^{*'}(B)$. Mais le foncteur naturel : $C/N \longrightarrow D^*(A)$ est une équivalence de catégories (chap. I § 2 n° 4 th. 2). D'où en composant avec le foncteur quasi-inverse le foncteur $\underline{\underline{R}}\,\underline{\Phi}$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\underline{\Phi}$).

c) Soit X un objet de $K^*(A)$. Soient Y un objet de C et $X \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow X$) un quasi-isomorphisme. L'objet $\underline{\underline{R}}\,\underline{\Phi}\circ Q(X)$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\underline{\Phi}\circ Q(X)$) est isomorphe à $Q\circ\underline{\Phi}(Y)$.

d) Le foncteur $X \rightsquigarrow \underline{\underline{R}}\,\underline{\Phi}\circ Q(X)$ (resp. $X \rightsquigarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{\Phi}\circ Q(X)$) est isomorphe au foncteur : $X \rightsquigarrow \varinjlim_{X/Q^*s} Q\circ\underline{\Phi}(\,.\,)$ (resp. $X \rightsquigarrow \varinjlim_{Q^*s/X} Q\circ\underline{\Phi}(\,.\,)$).

e) Le foncteur $H^\circ\,\underline{\Phi} : K^*(A) \longrightarrow B$, admet un foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) qui n'est autre que le foncteur $H^\circ\underline{\underline{R}}\,\underline{\Phi}$ (resp. $H^\circ\underline{\underline{L}}\,\underline{\Phi}$).

Corollaire 1 : Supposons que $* = +$ (resp. $* = -$) dans les hypothèses du théorème précédent, et que A possède suffisamment d'injectifs (resp. de projectifs). Alors le théorème 2.2 s'applique en prenant pour C la catégorie des complexes injectifs (resp. projectifs). Supposons de plus que A soit de dimension cohomologique finie, alors le théorème 2.2 s'applique, sans restriction sur $*$, en prenant pour C la catégorie des complexes injectifs (resp. projectifs).

2.3 Définition : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \longrightarrow B$ un foncteur additif .

On dira que f est de dimension cohomologique finie à droite (resp. à gauche) si R^+f (resp. L^-f) existe et s'il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que pour tout entier $n > m$, R^nf (resp. $L^{-n}f$) soit nul sur les objets provenant de A par le foncteur D . La dimension cohomologique à droite (resp. à gauche) de f est alors le plus petit des entiers m possédant la propriété ci-dessus. Si R^+f (resp. L^-f) existe et si f n'est pas de dimension cohomologique finie, on dira que f est de dimension cohomologique infinie .

Un objet X de A sera dit f-acyclique à droite (resp. à gauche) si pour tout entier $n > 0$, $R^nf(D(X)) = 0$ (resp. $L^{-n}f(D(X)) = 0$).

Corollaire 2 : Les données sont celles de la définition 2.3. Supposons qu'il existe un ensemble σ d'objets de A stable par somme directe possédant les propriétés suivantes :

1) Tout complexe acyclique $\in Ob\, K^+(A)$ (resp. $\in Ob\, K^-(A)$) d'objets de σ, est transformé par f en complexe acyclique.

2) Tout objet X de A s'injecte dans (resp. est quotient de) un objet de σ . Les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées en prenant $* = +$ (resp. $* = -$) et en prenant pour catégorie C , la catégorie des complexes dont les objets en tout degré sont des éléments de σ .
Les éléments de σ sont des objets f-acycliques à droite (resp. à gauche).

Si de plus f est de dimension cohomologique finie à droite (resp. à gauche), l'ensemble des objets f-acycliques à droite (resp. à gauche) possède en plus des propriétés (1) et (2) ci-dessus, la propriété (2) de chap. 2, § 1, n° 1, prop. 9. Le Théorème 2.2 s'applique alors au foncteur Kf en prenant pour catégorie C la catégorie des complexes dont les objets sont f-acycliques à droite (resp. à gauche) en tout degré . Le foncteur $\underline{R}f$ (resp. $\underline{L}f$) existe et induit sur $D^+(A)$ le foncteur $\underline{R}^+f$ (resp. $\underline{L}^+f$) et sur $D^-(A)$ le foncteur $\underline{R}^-f$ (resp. $\underline{L}^-f$) .

n° 3 : Produit. Composition.

Soient A une catégorie abélienne, $F : D(A) \longrightarrow Ab$ un foncteur cohomologique . Soient $X^\cdot$ et $Y^\cdot$ deux objets de $C(A)$. Le foncteur F définit une application :

$$\mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(F(D(X^\cdot)), F(D(Y^\cdot)))$$

d'où un accouplement : $F(D(X^\cdot)) \times \mathrm{Ext}^0(X^\cdot, Y^\cdot) \longrightarrow F(D(Y^\cdot))$

Cet accouplement donne, en appliquant des translations, des accouplements :

$$F^i(D(X^\cdot)) \times \mathrm{Ext}^j(X^\cdot, Y^\cdot) \longrightarrow F^{i+j}(D(Y^\cdot))$$

Ces accouplements, appliqués aux foncteurs dérivés cohomologiques, ne sont autres, par définition, que les produits de Yoneda . Les propriétés

de ces produits se déduisent immédiatement de cette définition. Nous ne les développerons pas ici .

Soient A , A', A" trois catégories abéliennes et $f: A \to A'$, $g : A' \to A''$ deux foncteurs additifs . Supposons que les foncteurs $\underline{R}^+f$ et $\underline{R}^+g$ existent . Je ne sais pas en déduire que le foncteur $\underline{R}^+g_\circ f$ existe et même si ce dernier foncteur existe, il n'est probablement pas vrai en général que l'on ait la formule :

$$\underline{R}^+g_\circ f \xrightarrow{\sim} \underline{R}^+g_\circ \underline{R}^+f$$

On a cependant la proposition suivante :

3.1 Proposition : Supposons que la catégorie A' possède suffisamment d'objets g-acycliques à droite et que la catégorie A possède suffisamment d'objets f-acycliques à droite transformés par f en objets g-acycliques à droite . Alors le foncteur $\underline{R}^+g_\circ f$ existe et on a un isomorphisme :

$$\underline{R}^+g_\circ f \xrightarrow{\sim} \underline{R}^+g_\circ \underline{R}^+f$$

Enoncé analogue pour les foncteurs dérivés gauches .

§ 3 : Exemples

n° 1 : Le foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\cdot}$:

Soit A une catégorie abélienne, possédant suffisamment d'injectifs.

Le foncteur : $Y^{\cdot} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$ (chap. 1, § 1, n° 3)

où $X^{\cdot}$ est un objet de $K(A)$ et $Y^{\cdot}$ un objet de $K^{+}(A)$, admet un foncteur dérivé total à droite (§ 2, n° 2, Th. 2, cor. 1) qui sera noté $\underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(X^{\cdot}, \,.\,)$. Soit Y un objet de $D^{+}(A)$ le foncteur

$$K(A) \longrightarrow D(Ab)$$

$$X^{\cdot} \rightsquigarrow \underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(X^{\cdot}, Y)$$

est exact et s'annule sur les complexes acycliques, d'où un bi-foncteur exact

$$D(A)^{\circ} \times D^{+}(A) \longrightarrow D(Ab)$$

que nous désignerons par $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\cdot}$.

Lorsque A est de dimension cohomologique finie, le foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\cdot}$ se prolonge à $D(A)^{\circ} \times D(A)$ (loc. cit.).

Si en outre A possède suffisamment de projectifs on peut

dériver le foncteur $\mathrm{Hom}^{\cdot}$ par rapport au premier argument. Les deux définitions coïncident dans leur domaine commun de validité .

n° 2 : $\mathcal{T}$or de faisceaux :

Soient E un site annelé (en particulier un espace topologique annelé) $\mathscr{A}$ le faisceau d'anneaux et $\underline{E}$ la catégorie des $\mathscr{A}$-modules . Un objet X de $\underline{E}$ est dit $\mathscr{A}$-plat si pour toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \qquad 0$$

la suite : $$0 \longrightarrow Y' \underset{\mathscr{A}}{\otimes} X \longrightarrow Y \underset{\mathscr{A}}{\otimes} X \longrightarrow Y'' \underset{\mathscr{A}}{\otimes} X \longrightarrow 0$$

est exacte . Il existe suffisamment d'objets $\mathscr{A}$-plats : les sommes directes d'objets $\mathscr{A}_{U'}$ où U est un objet de E et $\mathscr{A}_U$ le faisceau $\mathscr{A}''$prolongé par zéro en dehors de U". Le théorème 2 du § 2, n° 2 s'applique donc et on peut définir le foncteur

$$D^-(\underline{E}) \times D^-(\underline{E}) \longrightarrow D^-(\underline{E})$$

$$(X , Y) \rightsquigarrow X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Y$$

produit tensoriel total, dérivé gauche du foncteur produit tensoriel . On définit ainsi en passant à la cohomologie les $\mathcal{T}\underline{\mathrm{or}}^{\mathscr{A}}_i (X, Y)$: hyper- tor locaux .

La catégorie E ayant suffisamment d'injectifs, on peut dériver le foncteur : Hom' (X, Y) : complexe des homomorphismes locaux, d'où $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}(X,Y)$ $(X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{D}^+)$.

Soient X et Y deux objets de $D^-(\underline{E})$, Z un objet de $D^+(\underline{E})$. Il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{D(\underline{E})} (X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(\underline{E})} (X, \underline{\underline{\mathrm{Hom}}}(Y, Z))$$

n° 3 : Foncteur dérivé gauche de l'image réciproque :

Soit f : E $\longrightarrow$ E' une application d'espaces topologiques annelés . Le foncteur image réciproque :

$$f^* : \quad \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$$

n'est pas nécessairement exact . Mais on sait définir des objets f^*-plats et il existe suffisamment de tels objets . On sait donc définir le foncteur $\underline{\underline{L}}^- f^*$. On a de même une formule de dualité :

Soient X un objet de $D^-(\underline{E})$ et Y un objet de $D^+(\underline{E}')$; il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{D(\underline{E}')}(\underline{\underline{L}}^- f^*(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(\underline{E})}(X, \underline{\underline{R}}^+ f_* (Y))$$

-:-:-:-:-

Erratum pour SGA 4, (tome 3, Lecture Notes 305).

XIV p. 18 l.14 (XIX 6) au lieu de (XX 6).

XVI 2.2 Il faut supposer F localement constant!

XVI 5.2 La démonstration donnée est incomplète. Arpès l'énoncé de l'hypothèse de récurrence, il faut d'abord se ramener au cas où F est constant (F devient constant sur un revêtement galoisien étale $\pi : X' \longrightarrow X$ de X , de groupe de Galois G , et on invoque la suite spectrale de Hochschild-Serre $E_2^{pq} = H^p(G,H^q(X',\pi^*F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F))$. Les arguments qui suivent sont alors corrects.

XVII 1.1.8 Le signe (1.1.8.1) est erroné lorsque F est contravariant en certaines variables. Il faut lire :

(1.1.8.1) $\rho^{\underline{k}} = (-1)^{A(\underline{k})}$: automorphisme de $F \circ (G_j)$ $(K_i^{k_i\ \varepsilon(i)\ \varepsilon(\Psi(i))})$

avec

$$A(\underline{k}) = \sum_{\varepsilon(i)=\varepsilon(\Psi(i))=-} k_i + \sum_{\varepsilon(j)=-} \sum_{\substack{\Psi(a)=\Psi(b)=j \\ a<b}} k_a\, k_b$$

XVII 2.1.3 La démonstration contient des erreurs flagrantes. Il faut supprimer la 3ème ligne (p. 34 l.9) et remplacer les 6ème et 7ème (p. 34 l.12, 13) par :

Les flèches du diagramme (2.1.3.2) induisent des applications

$$\mathrm{Hom}_y(F,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F, f_*F) = \mathrm{Hom}_{x'}(f'^*g'^*F, g^*f_*F) \quad ,$$

XVIII 2.14.4 Lire XVII 6.2.7.2 au lieu de XVII 6.2.4.

XVIII p. 99 l-1 Lire u au lieu de U et 3.1.16.1 au lieu de 3.1.11.1 .